Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

IV. Übungsbeispiele:

urn:nbn:de:hbz:466:1-78623

letztern gleichgemacht werden. Bei dieser Übertragung hat man nur darauf zu sehen, daß die relative Lage der Aufrißisophengen in Bezug auf die vertikale Projektion c′ l′ der Lichtrichtung dieselbe bleibe wie die der Grundrißisophengen in Bezug auf die horizontale Projektion c l der Lichtrichtung*).

IV.

Übungsbeispiele.

(Fig. 50—60, Blatt 11—16.)

126. Die in den beiden vorigen Abschnitten (II und III) behandelten Beleuchtungskonstruktionen bilden die Grundlage sowohl der einfachen (wahren) als der zusammengesetzten (scheinbaren) Beleuchtungs- und Schattenlehre. Damit ist man nun auch im stande, die Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen Flächen zu bestimmen. Zur Übung sollen nun noch eine Anzahl verschiedener Beispiele sowohl ebener als krummer Flächen nach der einfach geometrischen oder wahren Beleuchtung besonders behandelt werden.

a) Beleuchtung ebener Flächen.

(Fig. 50—52, Blatt 11.)

127. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines regulären senkrechten fünfseitigen Prismas, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen, Fig. 50.

Auflösung.

Sind ABCDE, $a'_1\, b'_1\, c'_1\, d'_1\, e'_1\, a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2$ die Projektionen des gegebenen regulären fünfseitigen, auf der H.E. senkrechten Prismas und 0 l, 0′ l′ die

*) Es mag hier noch besonders bemerkt werden, daß die auf die angegebene Weise bestimmten Isophengen der Kugel ebenso wie die Isophoten derselben bei der wahren Beleuchtung benützt werden können, um mit Hilfe derselben bei beliebigen andern Körpern die Isophengen oder Lichtlinien der scheinbaren Beleuchtung zu bestimmen. Um z. B. bei der senkrechten Kreiscylinderfläche auf diese Weise die Isophengen zu erhalten, denke man sich der Cylinderfläche eine Kugelfläche von gleichem Radius und gleichem Mittelpunkt des Grundkreises eingeschrieben. Die Punkte, in welchen der Grundkreis der Cylinderfläche die Isophengen der Kugelfläche schneidet, sind alsdann die Isophengenpunkte der Cylinderfläche, und die Geraden, die man durch dieselben parallel zur Seite oder senkrecht zur Basis zieht, sind die verlangten Isophengen der Cylinderfläche. Auf ähnliche Weise erhält man mittels der Hilfskugel auch die Isophengen der Kegelfläche und anderer Umdrehungsflächen.

Projektionen der gegebenen Lichtrichtung, so nehme man (0,0′), einen Punkt der geometrischen Achse, als Mittelpunkt und $0' e'_1 = 0f = 0g = 0h$, ... als Radius einer Hilfskugel, die dem Prisma eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten (f, f′), (g, g′), (h, h′), ... zugleich auch die Beleuchtungsintensität der ebenen Seitenflächen (AB, $a'_1\, a'_2\, b'_2\, b'_1$), ($BC$, $b'_1\, b'_2\, c'_2\, c'_1$), ($CD$, $c'_1\, c'_2\, d'_2\, d'_1$), ... und in dem obersten Punkt (0, i′) die Beleuchtungsintensität der obern Grundfläche ($ABCDE$, $a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2$) angiebt.

Man bestimme daher auf bekannte Weise den Neigungswinkel α ($= 35^0\, 16'$), den die Lichtrichtung (01, 0′1′) mit der Achse XX bildet, indem man $1 L_1 \perp 01$ und $= 1'1''$ macht und L_1 mit 0 verbindet; mache ferner $0 + 10 = 0 - 10 = 0 L_1$ und teile diese Strecken je in 10 gleiche Teile, so ist damit die Beleuchtungsskale für den horizontalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die fünf senkrechten Seitenflächen des Prismas gefunden. Fällt man daher von f, g, h, ... auf XX die Senkrechten ff_1, gg_1, hh_1, ..., so geben die Punkte f_1, g_1, h_1, ... auf der Beleuchtungsskale unmittelbar die Beleuchtungsintensität der verlangten Seitenfläche des Prismas an.

Man findet auf diese Weise die Beleuchtungsintensität der Fläche (AB, $a'_1\, b'_1\, b'_2\, a'_2$) $= +0{,}72\,748$, diejenige von (BC, $b'_1\, c'_1\, c'_2\, b'_2$) $= +0{,}57\,733$ und diejenige von (CD, $c'_1\, d'_1\, d'_2\, c'_2$) $= -0{,}37\,067$, wofür man beziehungsweise die Werte $+0{,}73$, $+0{,}58$, $-0{,}37$ setzen kann.

Bestimmt man ebenso die Strecken $0' + 10' = 0' - 10' = 0' L'_1$ und teilt jede derselben in zehn gleiche Teile, so erhält man damit die Beleuchtungsskale für den vertikalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die obere horizontale Grundfläche des Prismas. Denkt man sich nämlich im Punkt (0, i′) eine parallele Ebene mit der Grundfläche ($ABCDE$, $a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2$) gezogen, so haben beide Flächen die gleiche Beleuchtung, und fällt man von i′ auf 0′1′ eine Senkrechte $l' i'_1$, so giebt der Punkt i'_1 auf der Skale $0' + 10'$ die verlangte Beleuchtungsintensität $+0{,}58$ an. Da dieselbe mit der Intensität der vordern senkrechten Seitenfläche oder des Punktes g übereinstimmt, so kann die letztere Konstruktion der Beleuchtungsskale in der V.E. füglich weggelassen werden.

128. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer regulären senkrechten sechsseitigen Pyramide, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen Fig. 51.

Auflösung. Sind $ABDEFGC$, $a'b'd'e'f'g's'$ die Projektionen der gegebenen regulären sechsseitigen, auf der H.E. senkrechten Pyramide und cl, c′l′ die Projektionen der Lichtrichtung, so nehme man wieder (C, c′) als Mittelpunkt und den senkrechten Abstand (Cn, c′n′) desselben von einer Seitenfläche (BCD, $b's'd'$) als Radius ($c'n'_1$) einer Hilfskugel, die der Pyramide eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten, wie (n, n'), zugleich auch die Beleuchtungsintensität der berührenden Seitenflächen, wie (BCD, b's'd') angiebt.

Um den senkrechten Abstand (Cn, c'n') des Mittelpunktes (C, c') von der Seitenfläche (BCD, b's'd') zu finden, denke man letztere in eine zur V.E. senkrechte Lage (CK_1, $s'k'_1$) gedreht. In dieser Lage projiziert sich dann die verlangte Normale vertikal als die Senkrechte $c'n'_1$ zu $s'k'_1$ und horizontal als die Parallele Cn_1 zur Achse. Denkt man sich nun die Seitenfläche wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, so kommt der Berührungspunkt (n_1, n'_1) der Seitenfläche mit der Hilfskugel nach (n, n') zu liegen, und fällt man von n auf cl eine Senkrechte nn_2, so giebt der Punkt n_2 auf der Beleuchtungsskale 0 — 10 die verlangte Beleuchtungsintensität, nämlich — 0,09 an. Die Beleuchtungsskale findet man aber, wie früher beim senkrechten Kreiskegel Fig. 30 gezeigt worden ist, indem man den in die H.E. umgelegten horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (cl, c'l') bestimmt, die Normale $c'n'_1$ des Berührungskreises (nopq ..., $n'_1 t'$) nach Ch und die Subnormale $c'\gamma'$ desselben nach Ci trägt, die Senkrechten hH_1 und iJ_1 zu Cl errichtet und iJ_1 nach C0 und CH_1 nach 0 + 10 und 0 — 10 auf XX abträgt. Die Punkte 0, + 10 und — 10 sind dann die Fundamentalpunkte der verlangten Beleuchtungsskale.

Beschreibt man nun mit Cn einen Kreis, so schneidet er die Horizontalprojektionen der Normalen auf den übrigen Seitenflächen in o, p, q, r, m, und indem man von diesen Punkten auf die mit XX zusammenfallende Beleuchtungsskale Senkrechte fällt, so erhält man in den Fußpunkten o_1, p_1, q_1, r_1, m_1 unmittelbar die verlangten Beleuchtungsintensitäten der Seitenflächen (CDE, s'd'e'), (CEF, s'e'f'), (CFG, s'f'g'), (CGA, s'g'a') und (CAB, s'a'b'), nämlich — 0,52, — 0,23, + 0,52, + 0,96 und + 0,66, wie in der Figur eingeschrieben ist. Macht man $l'_1 c' L'_1 = \alpha$ und errichtet in c' und + 10' die Senkrechten c'u' und + 10 v', letztere bis l'_1 (in der Projektionsachse) verlängert, so bestimmt nach früherem (§ 79 und 80) $\gamma'u' = C0$ den Nullpunkt (0) und $u't' = c'l'_1$ die Länge der beiden Strecken 0 + 10 = 0 — 10 der Beleuchtungsskale und damit auch die Maximalpunkte + 10 und — 10 der letztern, womit die Konstruktion etwas vereinfacht ist.

129. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. mit zwei Flächen parallel gestellten regulären Dodekaeders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden Seitenflächen bestimmen (Fig. 52).

Auflösung. Erwägt man, daß in der gegebenen Lage des Dodekaeders sowohl die fünf obern als die fünf untern Seitenflächen gleiche Neigung zur H.E. haben, so erhält man die Beleuchtungsintensität dieser beiden Flächengruppen, wenn man das in der vorigen Aufgabe für die reguläre, zur H.E. senkrechte Pyramide angegebene Verfahren wiederholt.

Nachdem man die Projektionen aus der gegebenen Seite (a b) des Dodekaeders verzeichnet hat*), nehme man den Punkt (c, c') oder auch irgend einen andern Punkt der Achse $(c, c' c'')$ als Mittelpunkt und einen beliebigen Abstand, z. B. c b, als Radius einer Hilfskugel an, bestimme an dieselbe eine Berührungsebene parallel mit einer der obern schiefen Seitenflächen und ebenso eine Berührungsebene parallel mit einer der untern schiefen Seitenflächen und zugleich die entsprechende Beleuchtungsintensität dieser beiden Berührungsebenen, so ist damit auch die Beleuchtungsintensität der ihnen parallelen Seitenflächen und damit auch die der übrigen gleichgeneigten Seitenflächen bestimmt.

Zur Ausführung dieser Konstruktion suche man vor allem den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (l, l') in der horizontalen Umlegung mittels des rechtwinkligen Dreiecks $l c L_1$, worin $l L_1 \perp c l$ und $= l' l''$ und $\measuredangle\, l c L_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ ist, sowie den horizontalen Neigungswinkel β, welchen sowohl die obern als die untern schiefen Seitenflächen mit der H.E. bilden, mittels des rechtwinkligen Dreiecks $h k h_1$, worin $h h_1 \perp h k$ und $k h_1 = k q$ und $\measuredangle\, h k h_1 = \beta$, der verlangte Neigungswinkel, ist.

Wäre nun eine der Seitenflächen senkrecht zur V.E., so müßte sie sich vertikal als Gerade parallel zu $y' z'$, respektive parallel zu $y'' z''$ projizieren, wenn man den horizontalen Neigungswinkel dieser Geraden gleich β macht, und ihre Beleuchtungsintensität wäre bestimmt durch den Punkt (u, u'), resp. (u, u''), worin die damit parallelen und zur V.E. senkrechten Ebenen $v' w'$, resp. $v'' w''$ die Hilfskugel berühren. Da nun aber die genannten Seitenflächen mit diesen Berührungsebenen gleiche Neigung haben, so werden sie auch die Hilfskugel in Punkten desselben, durch (u, u'), resp. (u, u'') gehenden Parallelkreises berühren. Beschreibt man daher mit c u einen Hilfskreis, so wird derselbe die Horizontalprojektion der zugehörigen Normalen in $u_1, u_2, \ldots$ resp. in $u_3, u_4, \ldots$, durchschneiden, welches die Horizontalprojektionen der erwähnten Berührungspunkte sind, und, in die V.E. gebracht, nach $u_1, u_2, \ldots$, resp. nach $u'_3\ u'_4 \ldots$, zu liegen kommen.

Macht man nun noch $\measuredangle\, l'_1 c' L'_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ gleich dem parallel zur V.E. gedrehten horizontalen Neigungswinkel der Lichtrichtung, zieht $\delta' \varepsilon'$ und $c' r'$ in δ' und c' senkrecht zu $c' \delta'$ und trägt $\gamma' r'$ nach c o, resp. $c_1 o_1$ und $r' \rho' = c' \rho''$ nach $0 + 10$ und $0 - 10$, resp. nach $0_1 + 10_1$ und $0_1 - 10_1$, so sind $0, + 10$ und $- 10$, resp. $0_1, + 10_1$ und $- 10_1$ die Fundamentalpunkte der Beleuchtungsskalen für die obern, resp. untern Seitenflächen. Fällt man dann noch von den Punkten $u_1, u_2, \ldots$, resp. $u_3, u_4, \ldots$ Senkrechten auf die zugehörigen Beleuchtungsskalen, so geben deren Fußpunkte $u_I, u_{II}, \ldots$, unmittelbar die Beleuchtungsintensitäten $- 0{,}2$, $+ 0{,}66$, ..., resp. $- 0{,}27$, $+ 0{,}45$, ... der entsprechenden Seitenflächen (p o s t, p' o' s' t'),

*) Siehe 2. Heft unserer „Anleitung", § 154, Fig. 68.

(onmhs, o'n'm'h's'),..., resp. (abtsh, a'b't's'h'), (afgmh, a'f'g'm'h'), . . . an.

Um endlich auch noch die Beleuchtungsintensität der obern Seitenfläche des Dodekaeders zu finden, verfahre man wie im Aufriß der Fig. 50 angegeben ist, d. h. man bestimme die Beleuchtungsskale c' + 10, c' — 10 und ziehe von i' darauf eine Senkrechte $i'i'_1$, so giebt der Fußpunkt i'_1 derselben die verlangte Beleuchtungsintensität + 0,58.

b) Beleuchtung verschiedener krummer Flächen.

(Fig. 53—60, Blatt 12—16.)

130. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. senkrecht stehenden hohlen Kreiscylinders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder Lichtintensitätslinien der innern Mantelfläche des hintern hohlen Halbcylinders bestimmen (Fig. 53).

Auflösung. Denkt man sich die innere Mantelfläche (fkg, $f'_1 f'_2 g'_2 g'_1$) zur vollen Kreiscylinderfläche mit der Normaldirektrix afkga ergänzt und letztere wie in Fig. 25 (§ 60) eingeteilt, die Maximalpunkte + 10 und — 10 jetzt aber miteinander verwechselt, so entsprechen die Teilpunkte der hintern Strecke 0 + 10 der Beleuchtungsskale den Isophoten der direkten Beleuchtung und die der vordern 0 — 10 den Isophoten der indirekten oder Reflexbeleuchtung.

Man zeichne also vor allem den horizontalen Neigungwinkel α der Lichtrichtung in der horizontalen Umlegung und mache 0 — 10 = 0 + 10 = 0 A_1, teile diese Strecken in je zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten derselben zur Richtungslinie XX der Beleuchtungsskale Senkrechte, welche den Umfang des Grundkreises oder der Normaldirektrix in den entsprechenden Isophotenpunkten schneiden, womit die verlangten Isophoten selbst bestimmt sind, indem man dieselben vertikal zur Achse projiziert. Die Grenzisophoten entsprechen, wie man leicht findet, der Beleuchtungsintensität +0,58 und —0,58. Die gleiche Beleuchtungsintensität haben auch die Schnittflächen fkginh, $h'_1 h'_2 f'_2 f'_1$ und $g'_1 g'_2 i'_2 i'_1$.

In unserer Figur haben wir noch den Schlagschatten $k'_1 k' q' r'$, welchen die Kante (f, $f'_1 f'_2$) und der obere Kreisbogen (fpr, f'p'r') auf die innere Mantelfläche des hohlen Halbcylinders werfen, konstruiert. Dazu denke man sich durch die Punkte wie (f, f'_2), (p, p'_2), . . . Lichtstrahlen, parallel (l, l'), gezogen und ihre Durchschnittspunkte (k, k'), (q, q'), . . . bestimmt und miteinander stetig verbunden.

131. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines Drehungsparaboloids, dessen Drehachse zur H.E. senkrecht steht, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität bestimmen (Fig. 54).

Auflösung. Es sei $f'_1 s' \varphi'$ der vertikale Umriß und AFBφA der Grundriß des Paraboloids, o' sei der Brennpunkt der gegebenen Hauptparabel $f'_1 s' \varphi'$ und

$o's' = s'm = \frac{1}{2}\, o'v' = \frac{1}{4}\, p = \frac{1}{4}$ des Parameters $v'w'$.

Um nun die Projektionen der Isophoten zu finden, nehme man eine Reihe von Parallelkreisen, wie (K_1, k'_1), (k_2, k'_2), (k_3, k'_3), ... an, bestimme auf denselben die entsprechenden Isophotenpunkte und verbinde die gleichnamigen derselben durch stetige Kurven. Die Isophotenpunkte der Parallelkreise des Paraboloids erhält man aber auf gleiche Weise, wie dies oben bei der Kreiskegelfläche (§ 76, Fig. 30) oder bei der Kugelfläche (§ 94, Fig. 33) gezeigt worden ist. Denkt man sich nämlich in den Punkten, wie z. B. in f'_3, an die Parabel eine Tangente $f'_3 z'$ gelegt, so bestimmt dieselbe eine umhüllende Kegelfläche, welche mit dem zugehörigen Parallelkreis des Paraboloids dieselbe Beleuchtung hat. Man bestimme deshalb auf bekannte Weise den zur V.E. parallel gedrehten horizontalen Neigungswinkel $f'_1 c'_1 L'_1 = \alpha$ (= 35° 16′), ziehe in den Punkten $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots$ auf die entsprechenden Tangenten Senkrechte, oder, da bei der Parabel die Subnormale bekanntlich gleich dem halben Parameter, mache $c'_1 g'_1 = c'_2 g'_2 = c'_3 g'_3 = \ldots = o'v' = \frac{1}{2}\, p$, ziehe die Normalen $g'_1 f'_1$, $g'_2 f'_2$, $g'_3 f'_3$, ... und trage hierauf $o'v' = \frac{1}{2}\, p$ nach $c'_1 i'_1$ und $f'_1 g'_1$ nach $c'_1 h'_1$, $f'_2 g'_2$ nach $c'_1 h'_2$, $f'_3 g'_3$ nach $c'_1 h'_3$, ..., errichte in i'_1, h'_1, h'_2, h'_3, ... Senkrechte und mache $cp = i'_1 J'_1$, so ist p der gemeinschaftliche Nullpunkt der Beleuchtungsskalen für die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte aller Parallelkreise, und $c'_1 H'_1$, $c'_1 H'_2$, $c'_1 H'_3$, ... bestimmen alsdann die Maximalpunkte der betreffenden Beleuchtungsskalen. Für den Grundkreis oder den untern Parallelkreis (K_1, k'_1) ist die Einteilung der Beleuchtungsskale auf der mit der horizontalen Projektion cl der Lichtrichtung zusammenfallenden Achse XX selbst angegeben und für den Parallelkreis (k_3, k'_3) ist dieselbe auf einer damit Parallelen (rechts zur Seite des Grundkreises) ausgeführt.

132. Um den Parallelkreis zu bestimmen, auf dem der Lichtpol, d. i. der absolut hellste Punkt $+10$ des Paraboloids liegt, ziehe man durch o' mit $c'_1 A'_1$ die Parallele $o'n'$, welche die Direktrix, d. h. die in m' auf $c'_1 m'$ senkrecht errichtete Gerade, in n' schneidet, und durch n' mit der Drehachse $c'_1 s'$ die Parallele $n'f'_4$, welche die Umrißparabel $f'_1 s' \varphi'$ in f'_4 schneidet, so geht der Parallelkreis, auf dem der verlangte Lichtpol $+10$ liegt, durch den Punkt f'_4. Der hellste Punkt $+10$ liegt aber auch auf dem durch die Drehachse $(c, c'_1 s')$ und die Achse XX gehenden Symmetralmeridian, dessen sichtbare Hälfte links in unserer Figur durch die einpunktgestrichelte Linie $a'q't'_1 s'$ angegeben ist. Der Durchschnittspunkt (q, q') beider Linien ist alsdann der verlangte Lichtpol $+10$.

133. Um endlich auch die übrigen auf dem Symmetralmeridian liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, mache man $cd = o'v' = \frac{1}{2}\, p$, $\sphericalangle\, cde = \alpha$ und

$dr \perp de$, konstruiere für das Centrum d und die Richtung dr den Normalenbüschel, dessen Mittelpunkt zugleich der Nullpunkt 0 und dessen Maximalpunkt $+10$ auf dr beliebig weit von d entfernt angenommen werden kann, und ziehe die Strahlen $d + 9{,}5$, $d + 8$, ..., welche die Achse XX in u_1 und t_1, t_2, ..., den verlangten Isophotenpunkten, im Grundriß durchschneiden. Projiziert man diese nach u'_1 und t'_1, t'_2, ... auf die Vertikalprojektion $a'q's'$ des Symmetralmeridians, so erhält man die verlangten Isophotenpunkte auch im Aufriß. Genauer erhält man letztere Punkte durch Umdrehung des Symmetralmeridians in eine zur V.E. parallele Lage, in welcher derselbe mit dem Hauptmeridian $f'_1 s' \varphi'$ zusammenfällt und die betreffenden Isophotenpunkte nach (u_I, u'_I), (t_I, t'_I), ... zu liegen kommen. Zieht man dann durch u'_I, t'_I, ... Parallelen mit der Projektionsachse, so schneiden sie auf der Vertikalprojektion $a'q's'$ des Symmetralmeridians die verlangten Isophotenpunkte u'_1, t'_1, ... ab.

134. Aufgabe. Es sind die Umrißprojektionen eines zur H.E. senkrecht stehenden einmanteligen Umdrehungshyperboloids, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität sowohl der innern als der äußern Mantelfläche desselben bestimmen (Fig. 55).

Auflösung. Es sei $f'_1 a'_1 f''_1 \varphi'' b'_1 \varphi'$ der vertikale Umriß oder der zur V.E. parallele Hauptmeridian, (k, k') der Kehlkreis mit dem Durchmesser $a'_1 b'_1$ und dem Mittelpunkt c', und d', e' seien die Brennpunkte der vertikalen Umrißhyperbel, ebenso sei K_1 der Grundriß des untersten und obersten Grundkreises (k'_1 und k''_1), und endlich sei (l, l') die gegebene Lichtrichtung.

Um nun die Isophoten des Hyperboloids zu erhalten, bestimmt man, wie in der vorigen Aufgabe, zuerst die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte einer Reihe von Parallelkreisen (K_1, k'_1 und k''_1), (k_2, k'_2 und k''_2), (k, k'), ... Dazu bestimme man die zugehörigen Normalen $f'_1 g'_1$, $f'_2 g'_2$, ..., trage dieselben in den nach $f'_1 c'_1 L'_1$ parallel zur V.E. umgedrehten horizontalen Neigungswinkel α ($= 35^0 16'$) nach $c'_1 h'_1$, $c'_1 h'_2$, ..., und die zugehörigen Subnormalen $c'_1 g'_1$, $c'_2 g'_2$, ... nach $c'_1 i'_1$, $c'_1 i'_2$, ..., errichte in h'_1, h'_2, i'_1, i'_2, ... Senkrechte zur Projektionsachse und trage $i'_1 J'_1$ von c nach s_1 und s_2 und $c'_1 H'_1$ von s_1 nach t_1 und von s_2 nach t_2, ..., so sind s_1 und s_2 die Nullpunkte und t_1 und t_2 die Maximalpunkte ($+10$) der Beleuchtungsskalen für den untersten und obersten Parallelkreis rc., womit die Einteilung der Beleuchtungsskale und damit auch die Konstruktion der Isophotenpunkte der entsprechenden Parallelkreise bestimmt ist. Die Einteilung der Beleuchtungsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des untersten Parallelkreises (K_1, k'_1) ist in unserer Figur auf der Richtungslinie XX selbst und für den Kehlkreis oder den kleinsten und mittlern Parallelkreis (k, k') zur Seite (rechts) auf einer zur Achse XX parallelen Hilfsgeraden angedeutet.

135. Zur völligen Bestimmung der Isophotenprojektionen des Hyperboloids bestimmen wir auch noch die Isophotenpunkte auf der Umrißhyperbel, die wir als den zur V.E. parallel gedrehten Symmetralmeridian betrachten. Dazu nehmen wir auf der verlängerten Hauptachse $a'_1 b'_1$ der Umrißhyperbel einen beliebigen Punkt m' an, ziehen $m'l'_1$ parallel $c'_1 L'_1$, so daß $\measuredangle\, l'_1 m' c' = \alpha$ ($= 35^0\, 16'$), dem horizontalen Neigungswinkel der Lichtrichtung, gleich ist. Für m' als Mittelpunkt und $m'l'_1$ als Richtung konstruieren wir den Normalenbüschel, dessen Maximalpunkt 10 beliebig angenommen werden kann. Von m' fällen wir auf die Assymptote $c'p'$ der Umrißhyperbel eine Senkrechte $m'p'$ und durch den Punkt p' zu $m'c'$ eine andere Senkrechte, welche die zweite Assymptote $c'q'$ der Hyperbel in q' und die verlängerte $m'l'_1$ in n'_1 und die verlängerte $m'o'_1$ in n'_0 schneidet. Von den Punkten wie r, in welchen die nach m' gezogenen Strahlen des Normalenbüschels die Gerade $p'q'$ schneiden, zieht man Strahlen nach c', dem Mittelpunkt der Hyperbel. Die Durchschnittspunkte derselben mit dem Hyperbelumriß sind alsdann die gesuchten Isophotenpunkte für den umgedrehten Symmetralmeridian. Für die Punkte $+10$, -10, $+6$, -6, ... ist die Konstruktion durch Hilfslinien angedeutet. Es verdient indessen bemerkt zu werden, daß auf dem Symmetralmeridian nur diejenigen Isophotenpunkte vorhanden sind, welche den Strahlen entsprechen, die innerhalb des Winkels $n'_1 m' q'$ liegen. Um die Figur nicht zu stark zu überladen, sind im Aufriß nur die Isophoten ($+9{,}5$, $+8$, $+6$, $+4$, $+3$, $+2$, 0, -2, -4, -6) der vordern sichtbaren Flächenhälfte dargestellt; im Grundriß haben wir dagegen der Symmetrie wegen die Isophoten sowohl der obern sichtbaren Hälfte als auch die der untern unsichtbaren Flächenhälfte ($+9{,}5$, $+8$, $+6$, $+4$, $+2$, 0, -2, -3, -4, -6, -8) angegeben, und zwar erstere durch volle ausgezogene Linien und letztere durch punktierte Linien.

136. Endlich haben wir auch noch den Schlagschatten (uvw, $u'v'w'$) konstruiert, welchen der obere Kreis (K_1, k''_1) in das Innere der Mantelfläche des Hyperboloids wirft. Derselbe stellt sich als ein Teil einer Ellipse dar und kann leicht wie folgt gefunden werden. Man ziehe durch den Mittelpunkt (c, c''_1) des schattenwerfenden Kreises (K_1, k''_1) einen Lichtstrahl, bestimme dessen Durchschnittspunkte (z_1, z'_1), (z_2, z'_2), (z_3, z'_3), ... mit einer Reihe von Parallelkreisebenen und beschreibe dann mit dem Radius $c''_1 f''_1$ des Kreises k''_1 aus ihren Horizontalprojektionen z_1, z_2, z_3, ... Hilfskreise, welche die entsprechenden Parallelkreise in I, II, III, ..., den verlangten Punkten der Schattenkurve uvw in der H.E., schneiden. Projiziert man diese Punkte vertikal nach I′, II′, III′, ..., so erhält man auch die Aufrißprojektionen u', v', w', ... derselben.

Den Punkt (v, v') erhält man direkt, indem man den Symmetralmeridian in eine zur V.E. parallele Lage dreht, durch den gedrehten Punkt $F_1 f''_1$ einen Strahl parallel $L'_1 c'_1$ zieht, welcher den Umriß des Hyperboloids in (v_1, v'_1) schneidet, und den Punkt (v_1, v'_1) durch Drehung in die ursprüngliche Lage (v, v') zurückbringt*).

137. Aufgabe. Es sind die Umrisse eines Kugelrings (cyklischen Annuloids), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität der Oberfläche desselben, samt Schlagschatten, den derselbe auf die Projektionsebenen wirft, bestimmen (Fig. 56, Blatt 13).

Auflösung. Das cyklische Annuloid, der Kugelring oder Kreisring, entsteht, wenn sich ein Kreis um eine außerhalb desselben liegende Achse so dreht, daß jeder Punkt wieder einen Kreis beschreibt.

Es sei nun $(a_1 b_1, a'_1 d'_1 b'_1 e'_1)$ der gegebene Erzeugungskreis $\mathfrak{K}$, (c_1, c'_1) dessen Mittelpunkt und $(O, z' z')$ die mit der Z-Achse zusammenfallende und auf der H.E. senkrecht stehende Drehachse. Denkt man sich nun den Kreis $\mathfrak{K}$ um die Achse $(O, z' z')$ herum gedreht, so beschreibt der Punkt (a_1, a'_1) den äußern Umrißkreis (K, K') und der Punkt (b_1, b'_1) den innern Umrißkreis (k, k'), womit der horizontale Umriß des Kreisrings gegeben ist. Zeichnet man den Erzeugungskreis $\mathfrak{K}$ im Aufriß in den beiden zur Aufrißebene parallelen Stellungen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_5$ und zieht daran noch die horizontalen Tangenten $d'_1 d'_5$ und $e'_1 e'_5$, so ist damit die Aufrißprojektion des Kugelrings gegeben.

*) Den in der Figur fehlenden Punkt v_1, sowie z_1, beliebe der Schüler in der vergrößerten Figur selbst beizusetzen.

138. Um nun die Isophoten des Kreisrings zu erhalten, bestimme man wieder zuerst die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte einer Reihe von Parallelkreisen (K_1, K'_1), (K_2, K'_2), (k_1, k'_1), (k_2, k'_2), ... Dazu zeichne man zu den entsprechenden Berührungspunkten F'_1, F'_2, f'_1, f'_2, ... die Tangenten und Normalen, und mittels der letztern und der zugehörigen Subnormalen bestimme man in Verbindung mit dem horizontalen Neigungswinkel α $(= 35^0 16')$ der Lichtrichtung die Fundamentalpunkte (den Nullpunkt und den Maximalpunkt) der Intensitätsskalen für die Isophotenpunkte der entsprechenden Parallelkreise.

Zieht man daher die Normalen $F'_1 G'_1$, $f'_1 g'_1$, ..., macht Winkel $J'_1 r' J''_1 = \alpha$, trägt $F'_1 G'_1$ nach $r' H'_1$ und $f'_1 g'_1$ nach $r' h'_1$, sowie $O'_1 G_1'$ nach $r' J_1'$ und $O'_1 g'_1$ nach $r' i'_1$, errichtet in H'_1, h'_1, J'_1, i'_1, ... die Senkrechten $H'_1 H''_1$, $h'_1 h''_1$, $J'_1 J''_1$, $i'_1 i''_1$, ..., welche den zweiten Schenkel des in die V.E. umgelegten Winkels α in H''_1, h''_1, J''_1, i''_1, ... schneiden, und trägt $J'_1 J''_1$ nach $O N_1$, $r' H''_1$ nach $N_1 M_1$, $i'_1 i''_1$ nach $O n_1$ und $r' h''_1$ nach $n_1 m_1$, ... auf die mit der Horizontalprojektion $O l$ der Lichtrichtung zusammenfallende Achse XX, so sind N_1 und M_1 die Fundamentalpunkte, und zwar N_1 der Nullpunkt und M_1 der Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Isophotenpunkte des großen äußern Parallelkreises (K_1, K'_1) und

n_1 und m_1 die Fundamentalpunkte, der Nullpunkt und der Maximalpunkt, der Intensitätsskale für die Isophotenpunkte des kleinen innern Parallelkreises (k_1, k'_1). Ganz ebenso findet man die Fundamentalpunkte der übrigen Parallelkreise (K_2, K'_2), (k_2, k'_2), . . . Was dagegen den größten äußern Kreis (K, K') und den kleinsten innern Kreis (k, k') betrifft, so reduziert sich deren Isophotenkonstruktion auf die beim senkrechten Kreiscylinder (siehe § 60, Fig. 25) angegebene Konstruktion. Zieht man nämlich $O'A'_1$ parallel $r'J''_1$, oder macht man, mit andern Worten, $\sphericalangle a'_1 O' A'_1 = \alpha$, errichtet in a'_1 und b'_1 die Senkrechten $a'_1 A'_1$ und $b'_1 B'_1$, welche $O'A'_1$ in A'_1 und B'_1 schneiden, und trägt man $O'A'_1$ nach OM und $O'B'_1$ nach Om (auf XX), so ist M der Maximalpunkt ($+10$) der Intensitätsskale für die Isophotenkonstruktion des äußern Kreises K und m der Maximalpunkt ($+10$) der Intensitätsskale für die Isophotenkonstruktion des innern Kreises k. — Was endlich den höchsten und tiefsten Kreis (k_3, k'_3 und k''_3) betrifft, so ist die Beleuchtungsintensität überall dieselbe, und zwar ist die des erstern Kreises (k_3, k'_3) gleich der Beleuchtungsintensität des Punktes d'_1, also nach früherem gleich $+0{,}58$, und die des andern (k_3, k''_3) gleich der Beleuchtungsintensität des Punktes e'_1, also gleich $-0{,}58$.

Hat man auf diese Weise eine hinreichende Anzahl von Isophotenpunkten auf den Grundrißprojektionen K, K_1, K_2, k, k_1, k_2, . . . gefunden, so erhält man durch Verbindung der gleichnamigen Isophotenpunkte die verlangten Grundrißisophoten. Projiziert man die erhaltenen Isophotenpunkte aus dem Grundriß in den Aufriß auf die zugehörigen Aufrißprojektionen K', K'_1, K'_2, k', k'_1, k'_2, . . . der entsprechenden Parallelkreise, so erhält man durch Verbindung der gleichnamigen Isophotenpunkte die Aufrißprojektionen der verlangten Isophoten.

Wir haben jedoch, um die Figur nicht gar zu sehr zu überladen, sowohl im Grundriß wie im Aufriß nur die sichtbaren Teile der Isophoten dargestellt. Einzig die Grenzisophote 00, d. h. die Trennungslinie von Schatten und Licht, haben wir, um den Schlagschatten konstruieren zu können, vollständig, also auch deren unsichtbare Teile, gezeichnet.

139. Die Aufzeichnung der Isophoten oder der Kurven gleicher Lichtintensität wird auch hier wie in allen ähnlichen Beispielen wesentlich erleichtert, wenn man noch überdies die Isophotenpunkte des Hauptmeridians, sowie des Symmetralmeridians bestimmt.

Den erstern betrachten wir als Normaldirektrix einer auf der V.E. senkrecht stehenden Cylinderfläche, und indem wir $c'_1 p'_2 = c'_1 p''_2 = c'_1 p'_1 = \rho \sec \alpha$ machen, sofern ρ der Radius des Erzeugungskreises ist, sodann jede der Strecken $c'_1 p'_2$ und $c'_1 p''_2$ in zehn gleiche Teile teilen und durch die Teilpunkte Senkrechte zu $c'_1 p'$ errichten, so schneiden diese auf $\mathfrak{K}_1$ die verlangten Isophotenpunkte ab. Ebenso erhalten wir die Isophotenpunkte auf dem Meridiankreis $\mathfrak{K}_5$.

Projiziert man die erhaltenen Aufrißprojektionen der Isophotenpunkte des Hauptmeridians in den Grundriß, so erhält man die Punkte, in welchen die zur Projektionsachse parallelen Geraden $a_1 b_1$ und $a_5 b_5$ von den gleichnamigen Isophoten geschnitten werden.

Um nun auch noch die Isophotenpunkte des Symmetralmeridians zu bestimmen, betrachte man diesen als Normaldirektrix einer Cylinderfläche, deren Erzeugende horizontal und zur Y-Achse parallel sind, und denke denselben zunächst in eine zur V.E. parallele Lage gedreht. In dieser Lage fallen die umgedrehten Meridiankreise ebenfalls mit K_1 und K_5 zusammen, und der durch deren Mittelpunkt gehende umgedrehte Lichtstrahl kömmt nach $c'_1 p'_1$, resp. $c'_5 p'_5$ zu liegen. Teilt man nun den Kreishalbmesser $c'_1 q'_1 = c'_1 q''_1$, resp. $c'_5 q'_5 = c'_5 q''_5$ in zehn gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu $q'_1 q''_1$, resp. $q'_5 q''_5$, so schneiden diese die Kreise K_1, K_5 in den Isophotenpunkten des umgedrehten Symmetralmeridians. Projiziert man diese Punkte aus dem Aufriß in den Grundriß auf die Geraden $a_1 b_1$, resp. $a_5 b_5$, und dreht dieselben auf die Geraden $a_2 b_2$, resp. $a_6 b_6$ in die ursprüngliche Lage zurück, so erhält man auf letztern Geraden die Punkte, in welchen sie von den gleichnamigen Isophoten selbst geschnitten werden.

140. Erwägt man, daß die Grundrißprojektionen in Bezug auf die Achse XX symmetrisch gelegen sind, so ist klar, daß die Isophotenpunkte von $a_1 b_1$ in gleicher Weise auch nach $a_3 b_3$ und die von $a_5 b_5$ nach $a_7 b_7$ übertragen werden können, was am schnellsten mit einem geradlinigen Papierstreifen geschehen kann.

Auch mag noch bemerkt werden, daß, wenn man die Isophotenpunkte auf einem äußern Parallelkreis K_1, K_2, ... bereits konstruiert hat, dann die Isophotenpunkte der zugehörigen innern Kreise k_1, k_2, ..., welche mit erstern in derselben horizontalen Ebene liegen, erhalten werden, wenn man die Radien der Isophotenpunkte auf K_1, K_2, ... in entgegengesetzter Richtung verlängert. Denn dann sind die Punkte, wo diese die Kreise k_1, k_2, ... schneiden, die Isophotenpunkte auf letztern Kreisen. So liefert z. B. T auf K_1 den Punkt t auf k_1 2c.

Hieraus folgt zugleich, daß, wenn ein Radius eine Isophote in einem Punkt berührt, dieselbe auch noch vom verlängerten Radius in einem entsprechenden Punkte berührt wird. So wird z. B. die Isophote $+6$ von der radialen Geraden OU einerseits in U und andererseits in u berührt. Damit ist, wie man sieht, ein leichtes und sehr wertvolles Mittel an die Hand gegeben, die Isophotenkonstruktion zu kontrollieren.

141. Die Isophoten des Kreisrings können übrigens auch leicht und schnell mittels einer Hilfskugel erhalten werden. Denkt man sich nämlich im Mittelpunkt (O, O′) des Kreisrings eine Hilfskugel mit ihren gleichnamigen Isophoten aufgestellt, deren Durchmesser $\alpha_1 \beta_1$ gleich ist dem Durchmesser $a_1 b_1$ des Erzeugungskreises, und denkt man sich mit dem Erzeugungskreis zugleich auch eine der Hilfskugel gleiche Kugel umgedreht, so daß ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Erzeugungskreises stets zusammenfällt, so ist klar, daß die Beleuchtung des Kreis- oder Kugelrings in jeder beliebigen Stellung des Erzeugungskreises oder der Erzeugungskugel gleich ist der Beleuchtung des entsprechenden Meridiankreises der Hilfskugel. Man hat daher nur die auf den Durchmessern $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, ... liegenden Isophotenpunkte der Hilfskugel auf die entsprechenden Durchmesser $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... abzutragen. So sind z. B. die Punkte γ, δ, ... auf $\alpha\beta$ nach v, w, ... auf ab abgetragen worden, so daß $av = \alpha\gamma$ und $bw = \beta\delta$ 2c. So könnte man auch den Aufriß der Hilfskugel benützen, um die Aufrißisophoten des Kreisrings zu erhalten. Dann hätte man zu den Tangenten $F'_1 S'_1$, $F'_2 S'_2$, ... des Kreisrings an die Hilfskugel parallele Tangenten $\varphi'_1 \sigma'_1$, $\varphi'_2 \sigma'_2$, ..., sowie die zugehörigen Parallelkreise zu ziehen und die Isophotenpunkte, worin diese von den Isophoten der Hilfskugel durchschnitten werden, proportional (am besten mittels eines Proportionalmaßstabes) auf die entsprechenden Parallelkreise des Kreisrings abzutragen. Dieses, auch für jede andere Umdrehungsfläche anwendbare Verfahren wird dem Schüler zur eigenen Ausführung empfohlen.

Dagegen wollen wir hier noch ein anderes Verfahren zeigen, wie die Aufrißisophotenpunkte leicht aus den Grundrißisophotenpunkten erhalten werden können. Denkt man sich nämlich den Erzeugungskreis K in verschiedenen Stellungen des Grundkreises in eine zur H.E. parallele Lage umgedreht, wie dies z. B. bei $a v_1 w_1 b$ angedeutet ist, so bestimmen die umgedrehten Ordinaten $v v_1$, $w w_1$, ... zugleich die Höhen der betreffenden Isophotenpunkte unter und über der mittlern Parallelkreisebene $a'_1 a'_5$ (K′) im Aufriß. Projiziert man daher v, w, ... nach v'_1, w'_1, ... und macht $v'_1 v' = v v_1$ und $w'_1 w' = w w_1$ 2c., so sind v′, w′ 2c. die entsprechenden Isophotenpunkte im Aufriß.

142. Endlich haben wir auch noch den Schlagschatten, den die äußere und innere Grenzisophote oder die Trennungslinien von Schatten und Licht auf die Projektionsebenen werfen, zu bestimmen. Man erhält denselben auch hier, wenn man durch eine hinreichende Anzahl von Punkten der Grenzisophote Strahlen parallel der Lichtrichtung (O l, O′l′) legt und ihre Spuren oder Durchschnittspunkte mit den Projektionsebenen sucht und miteinander verbindet. So liefern z. B. die Punkte (v, v′) und (w, w′), von denen ersterer der äußern und der andere der innern Trennungslinie von Schatten und Licht angehört, indem man durch v und w Parallelen mit O l und durch v′ und w′ Parallelen mit O′l′ zieht und von v'_2 und w'_2 Senkrechten zur Achse $e'_1 e'_5$ errichtet, die Schlagschattenpunkte V und W, welche beide in der Horizontalebene liegen, und von denen V der Kurve FAVB und W der Kurve aWbcdefa angehört*).

*) Wir machen noch besonders auf die Überschneidungen bei bc und ef dieser innern Schlagschattenkurve aufmerksam.

Ein Teil des Schlagschattenumrisses fällt übrigens, wie man aus der Figur ersieht, teilweise auch auf die Vertikalebene. Derselbe wird auf gleiche Weise erhalten, wenn man die Vertikalspuren der durch einzelne Punkte der Grenzisophote 0 gezogenen Lichtstrahlen sucht und gehörig verbindet. So ist $\mathfrak{V}'$ die Vertikalspur des durch $(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')$ gelegten Strahles und daher ein Punkt der Schlagschattenkurve $\mathfrak{D}'\mathfrak{V}'\mathfrak{E}'$ in der Aufrißebene.

143. Aufgabe. Es sind die Umrisse einer elliptischen Einziehung (eines elliptischen Annuloids), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten, samt Schlagschatten, den der obere Teil der Fläche auf sich selbst wirft, bestimmen (Fig. 57, Blatt 14).

Auflösung. Wäre die Erzeugungslinie der Einziehung ein Kreisbogen, so würden die Isophoten ganz auf gleiche Weise erhalten werden, wie beim Kreisring ausführlich gezeigt worden ist. Ist die Erzeugungslinie aber, wie in unserem Beispiel, eine Ellipse, so bleibt sich zwar die Konstruktion der Isophotenpunkte auf den Parallelkreisen gleich, die Konstruktion derselben auf dem Hauptmeridian wie auf dem Symmetralmeridian ändert sich dagegen mit der Form der Erzeugungslinie. Wir haben nun diese absichtlich als Ellipse angenommen, um bei dieser Gelegenheit zu zeigen, wie man die Isophotenpunkte derselben, als Meridiankurve aufgefaßt, erhält.

Um zuerst die Isophotenpunkte auf dem elliptischen Hauptmeridian $(A_1 b_1 d_1, a'_1 b'_1 d'_1)$, resp. $(A_5 b_5 d_5, a'_5 b'_5 d'_5)$ zu erhalten, ziehen wir auf die große Achse $\alpha'_1 \beta'_1$ in irgend einem Punkt, z. B. in α'_1, eine Senkrechte $\mathfrak{S}_1$ und vom darauf liegenden Eckpunkt α_1 des der Ellipse $\mathfrak{E}'_1$ umschriebenen (halben) Rechtecks $\alpha'_1 \alpha_1 \beta_1 \beta'_1 \ldots$ eine Senkrechte auf dessen gegenüberliegende Diagonale $\beta_1 c'_1$, welche $\alpha'_1 \beta'_1$ in π'_1 schneidet. Durch π'_1 führen wir $\pi'_1 p'_1$ parallel der Vertikalprojektion $O'_1 l'$ der Lichtrichtung und konstruieren für $\pi'_1 p'_1$ als Richtung und für π'_1 als Mittelpunkt und für $\measuredangle p'_1 \pi'_1 P'_1 = \alpha$ $(= 35^0 16')$ als vertikalen Neigungswinkel der Lichtrichtung den Normalenbüschel. Die Strahlen dieses Büschels schneiden dann die Gerade $\mathfrak{S}_1$ in Punkten, die, mit c'_1, dem Mittelpunkt der Ellipse $\mathfrak{E}'_1$, verbunden, die Ellipsendurchmesser liefern, auf denen die Isophotenpunkte des verlangten Meridians $a'_1 b'_1 d'_1$ liegen. Auf gleiche Weise verfährt man auch, um die Isophotenpunkte auf dem Meridian $a'_5 b'_5 d'_5$ zu erhalten. Bei beiden Konstruktionen haben wir einige Isophotenpunkte durch Hilfslinien angegeben. So z. B. auf $\mathfrak{E}'_1$ die Isophotenpunkte $+4, +6, +7, \ldots$ und auf $\mathfrak{E}'_5$ die Isophotenpunkte $+3, -6, \ldots$ Durch Herabprojizieren dieser Punkte auf die durch O zur Projektionsachse geführte Parallele $A_1 A_5$ erhält man alsdann die Punkte, in welchen diese Gerade von den Grundrißprojektionen der Isophoten geschnitten wird.

144. Behufs der Isophotenkonstruktion des Symmetralmeridians $(A_2 b_2 d_2, a'_2 b'_2 d'_2)$ drehen wir diesen zuerst in eine zur V.E. parallele Lage, in welcher er mit dem Hauptmeridian $(A_1 b_1 d_1, a'_1 b'_1 d'_1)$ zusammenfällt. Hierauf ziehen wir $\pi'_1 q'_1$ parallel der ebenfalls zur V.E. parallel gedrehten Lichtrichtung $O'_1 L'_1$, so daß $\sphericalangle \pi'_1 q'_1 a'_1 = \alpha$ (= 35° 16′), und konstruieren für π'_1 als Mittelpunkt, $\pi'_1 q'_1$ als Richtung und einen beliebig angenommenen Maximalpunkt + 10 den Normalenbüschel. Die Strahlen dieses Büschels schneiden alsdann die Gerade S_1 in Punkten, die, mit c'_1 verbunden, die Ellipsendurchmesser liefern, welche auf dem mit $a'_1 b'_1 d'_1$ zusammenfallenden, umgedrehten Symmetralmeridian die verlangten Isophotenpunkte liefern. Auf gleiche Weise verfährt man auch, um die Isophotenpunkte auf dem mit $a'_5 b'_5 d'_5$ zusammenfallenden, umgedrehten Symmetralmeridian zu erhalten. Auch bei diesen beiden Konstruktionen haben wir einige Isophotenpunkte durch Hilfslinien angedeutet. So z. B. auf $a'_1 b'_1 d'_1$ die Isophotenpunkte $+8_1$, $+5_1$, -3_1, ... und auf $a'_5 b'_5 d'_5$ die Isophotenpunkte $+4_1$, $+8_1$, ... Projiziert man diese Punkte auf die zur Projektionsachse Parallele $A_1 A_5$ und dreht dieselben von da in die ursprüngliche Lage nach $A_2 b_2 d_2$, resp. $A_6 b_6 d_6$ zurück, so erhält man die verlangten Grundrißprojektionen der Isophoten des Symmetralmeridians.

145. Um nun weiter die Isophotenpunkte auf einem beliebigen Parallelkreis (k_1, k'_1) zu bestimmen, ziehe man zum zugehörigen Punkt (f_1, f'_1) (rechter Hand) die Tangente $f'_1 s'_1$ und die Normale $f'_1 g'_1$, und damit bestimme man auf bekannte Weise mittelst des bei $h_1 r_1 H_1$ (beliebig nebenaus) umgelegten Neigungswinkels α den Nullpunkt N_1 und den Maximalpunkt M_1 der zugehörigen Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion des Parallelkreises (k_1, k'_1). Man mache also $r_1 i_1 = O'_1 g'_1$ und $r_1 h_1 = f'_1 g_1$, errichte in i_1 und h_1 Senkrechte, welche den umgelegten Winkelschenkel in J_1 und H_1 durchschneiden, und trage $i_1 J_1$ nach $O_1 N_1$ und $r_1 H_1$ nach $N_1 M_1$ auf die zu XX angenommene Parallele, so ist N_1 der Nullpunkt und M_1 der zugehörige Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des angenommenen Parallelkreises (k_1, k_1').

146. Für den kleinsten Parallelkreis (k, k′) geht die umhüllende Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und die Isophotenkonstruktion vereinfacht sich bekanntlich in der Art, daß der Nullpunkt mit dem Mittelpunkt O zusammenfällt und daß die Länge der Beleuchtungsskale $= \rho \sec \alpha$ ist, sofern ρ den Radius des Parallelkreises (k, k′) bedeutet. Denkt man sich also den Lichtstrahl nach $O L_1$ in die H.E. umgelegt und auf einer zur Achse XX parallel angenommenen Geraden $o m = O L_1$ gemacht, so ist o der Nullpunkt und m der Maximalpunkt der verlangten Beleuchtungsskale für die Grundrißprojektion k des Parallelkreises (k, k′).

147. Geht ein Parallelkreis zufällig durch zwei Isophotenpunkte des umgedrehten Symmetralmeridians, wie in unserer Figur z. B. der Parallelkreis (k_2, k'_2) durch die Isophotenpunkte $+10_1$ und -3_1, so vereinfacht sich die Isophotenkonstruktion wesentlich. Denn bringt man (im Grundriß) die Punkte $+10_1$ und -3_1

nach +10 und —3 in ihre ursprüngliche Lage zurück, so erhält man die Beleuchtungsskale für die Grundrißprojektion k_2 des betreffenden Parallelkreises (k_2, k'_2), wenn wir die Strecke +10 —3 in 13 gleiche Teile teilen. Diese Teilung haben wir auf der Achse XX selbst ausgeführt: M_2 ist dabei der Maximalpunkt +10 und N_2 der Nullpunkt 0.

Was die Beleuchtung des untersten Kreises (K_1, K'_1) und des obersten Kreises (K_2, K'_2) betrifft, so ist die Beleuchtungsintensität derselben, da sie die Meridianellipsen $\mathfrak{E}'_1$ und $\mathfrak{E}'_5$ horizontal berühren, nach früherm gleich 0,58.

148. Endlich haben wir in unserer Figur auch noch die Schlagschatten auf die Oberfläche der Einziehung selbst wie auf die Projektionsebenen angegeben. Im Aufriß erhält man den eigenen Schattenumriß $r't'u'$, den der obere Kreis (K_2, K'_2) auf die Oberfläche der Einziehung wirft, wie für den Punkt t' durch Hilfslinien angedeutet ist. Durch einen Punkt (v, v') des schattenwerfenden Kreises (K_2, K'_2) denkt man sich nämlich einen Lichtstrahl parallel $O\,l$, $O'_1\,l'$ gezogen, durch denselben eine Hilfsebene, und zwar eine horizontal projizierende Ebene, gelegt und mittels einiger Parallelkreise die Vertikalprojektion $v'\,t'\,w'$ der Durchschnittslinie bestimmt, in welcher dieselbe die Oberfläche der Einziehung schneidet. Der Punkt t', in welchem $v'\,t'\,w'$ von der Vertikalprojektion $v'\,t'$ des Lichtstrahles geschnitten wird, ist alsdann ein Punkt der Schlagschattenkurve $r'\,t'\,u'$ im Aufriß. Im Grundriß werden die Umrisse $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1$ noch vom obern Begrenzungskreis (K_2, K'_2) und die ebenfalls noch sichtbaren Umrisse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1$ von der Grenzisophote 0 auf den untern Teil der Einziehung geworfen und auf ähnliche Weise wie der Schlagschattenumriß im Aufriß gefunden. — Die Kurven $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1$ endlich geben den Schlagschatten des obern Begrenzungskreises (K_2, K'_2) auf die H.E., und die Kurve $\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{F}'\,\mathfrak{G}'$ denselben auf die V.E. an. Die beiden Stücke $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1$ sind Bogenstücke des Kreises $\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1$, den man aus O_2, der Horizontalspur des durch den Mittelpunkt (O, O'_2) gehenden Lichtstrahles ($O\,O_2$, $O'_2\,o'_2$), mit dem Radius $O'_2\,d'_1$ des schattenwerfenden Kreises K_2, K'_2 beschreibt. Der elliptische Schlagschatten $\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{F}'\,\mathfrak{G}'$ auf der Aufrißebene ergiebt sich dagegen auf bekannte Weise, wenn man die Vertikalspuren der durch einzelne Punkte des schattenwerfenden Kreises (K_2, K'_2) gezogenen Lichtstrahlen sucht und gehörig verbindet. So ist $\mathfrak{W}'$ die Vertikalspur des durch (v, v') gelegten Lichtstrahles ($v\,v_1$, $v'\,\mathfrak{W}'$) und somit $\mathfrak{W}'$ ein Punkt der Schlagschattenkurve auf der Aufrißebene.

149. Aufgabe. Es sind die Umrisse der geraden Schraubenfläche oder der sogenannten Wendelfläche (der Schraube mit flachem Gewinde), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten derselben bestimmen (Fig. 58, Blatt 15).

Auflösung. Die gerade oder flache Schraubenfläche, auch Wendelfläche genannt, entsteht, wenn sich eine Gerade, die zu ihrer Achse senkrecht ist, so bewegt, daß jeder Punkt derselben eine Schraubenlinie beschreibt. Als Erzeugende wurde die Gerade $A_0 B_0$ angenommen, die in der H.E. liegt und zugleich auf der Projektionsachse senkrecht ist und als Drehachse eine im Mittelpunkt O zur H.E. senkrecht stehende Gerade hat. Indem $A_0 B_0$ sich in der Richtung des zur Seite (im Grundriß) angegebenen Pfeiles der bezeichneten Bedingung entsprechend umdreht und nacheinander die Stellungen $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$, $(a_2 b_2, a'_2 b'_2)$, $(a_3 b_3, a'_3 b'_3)$, ... einnimmt, erzeugt sie die linksgängige Schraubenfläche*), von welcher wir Dreiviertel einer Windung dargestellt haben. Dabei beschreibt der Punkt (A_0, a'_0) die Schraubenlinie (S, S') und der Punkt (B_0, b'_0) die Schraubenlinie (S, S''), deren halbe Ganghöhe $= a'_0 a'_4 = b'_2 a'_6$ ist und welche zusammen den äußern Umriß der Schraubenfläche bilden. Ebenso beschreibt auch jeder andere Punkt der Erzeugenden eine Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe. So z. B. der Punkt (D_0, a'_0) die Schraubenlinie (S_3, S'_3) und der Punkt (E_0, b'_0) die Schraubenlinie (S_3, S''_3).

150. Um nun zunächst die Grundrißisophoten zu bestimmen, die in Bezug auf die Achse YY symmetrisch gelegen sind, konstruieren wir zuerst die Isophotenpunkte auf dieser Achse. Dazu berechnen wir vor allem den Hauptparameter der Schraubenfläche:

$$\gamma = \rho \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi},$$

worin h die Ganghöhe $= 2 \cdot a'_0 a'_4$, ρ den Radius und β den konstanten Neigungswinkel bedeutet, den die Tangente an die zugehörige Schraubenlinie bildet. In unserer Figur ist $\rho = 1$ cm und $\frac{h}{2} = 4{,}6$ cm angenommen worden. Man erhält: $\gamma = \operatorname{tg} \beta = \frac{4{,}60}{3{,}14} = 1{,}465$ cm, welchem Wert der Tangentenwinkel $\beta = 54^0 44'$ entspricht.

Man mache nun $OC = \gamma = \operatorname{tg} \beta = 1{,}465$ cm und Winkel $OCP = \alpha$ $(= 35^0 16')$ oder Winkel $OPC = \beta$ $(= 54^0 44')$ und konstruiere für den Punkt C als Mittelpunkt und für CP als Richtung und beliebige Länge der Intensitätsskale den Normalenbüschel, so schneiden die Strahlen desselben die Achse YY in den verlangten Isophotenpunkten, wie für einige Punkte, so für $+8$, $+9$, -2, -6, ..., durch Hilfslinien angedeutet ist. Dem Punkt P entspricht zugleich der hellste Punkt $+10$ und dem Punkt Q der dunkelste Punkt 0.

151. Um im weitern die Grundrißisophoten einer beliebigen konaxialen Schraubenlinie (S_2, S'_2) vom Radius $r = Of_2$ zu finden, konstruieren wir aus O mit $r = Of_2$ einen Kreis S_2, welcher die Horizontalprojektion

*) Wir nennen, entgegen dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, eine Schraubenfläche eine linksgewundene oder linksgängige, wenn man, wie in unserem Beispiel, in derselben emporsteigend, die Schraubenachse stets zur Linken hat; im andern Fall dagegen eine rechtsgewundene oder rechtsgängige.

der Schraubenlinie S'_2 ist, verbinden f_2 mit C und ziehen $f_2 g_2 \perp f_2 C$. Mit den beiden Linien $O g_2$ und $f_2 g_2$, die der Subnormale und Normale des Grundkreises bei den senkrechten Kreiskegelflächen entsprechen, ergiebt sich alsdann auf bekannte Weise der Abstand des Nullpunktes von der X-Achse und die Länge der mit der Y-Achse zusammenfallenden Beleuchtungsskale für die Grundrißisophoten des Kreises S_2. Man mache nämlich $C i_2 = O g_2$ und $C h_2 = g_2 f_2$, errichte in i_2 und h_2 Senkrechte zu CO, welche die verlängerte CP in J_2 und H_2 schneiden, ziehe durch einen beliebigen Punkt o_2 der X-Achse*) mit der Y-Achse eine Parallele und trage $i_2 J_2$ nach $o_2 N_2$ und $C H_2$ nach $N_2 M_2$, so ist N_2 der Nullpunkt und M_2 der Maximalpunkt $(+10)$ der dem Kreis S_2 entsprechenden Intensitätsskale. Führen wir daher durch die Teilpunkte dieser Skale Senkrechte zur Y-Achse oder Parallele zur X-Achse, so schneiden diese S_2 in den verlangten Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte auf der Schraubenlinie (S_2, S'_2), wie durch Hilfslinien für einzelne Punkte ersichtlich gemacht ist. In unserer Figur sind weiter die Bestimmungsstücke $O g_3$, $f_3 g_3$, $O g_4$, $f_4 g_4$, ... für die Grundrißprojektionen S_3, S_4, ... der Schraubenlinien (S_3, S'_3), (S_4, S'_4), ... angedeutet, womit die Isophotenpunkte derselben gefunden werden können.

152. Für solche Kreise, die durch einen auf der Y-Achse liegenden Isophotenpunkt gehen und zugleich die Grundrißprojektionen der Grenzisophote, also den Kreis 00 schneiden, wie z. B. für den Kreis S_1, der durch den Punkt $+10$ (auf der Y-Achse) geht und den Kreis 00 in t und u schneidet, läßt sich die Isophotenkonstruktion auch hier wesentlich vereinfachen. Denn die Gerade tu, gehörig verlängert, bestimmt auf der zur Y-Achse parallel gezogenen Skale (ebenfalls links unten beliebig angenommen) im Schnittpunkt N_1 den Nullpunkt, und die durch $P\ (+10)$ zur X-Achse parallele Gerade schneidet auf derselben den Maximalpunkt $M_1\ (+10)$ ab.

153. Hat man auf diese Weise die Grundrißisophoten gefunden, so erhält man die Aufrißprojektionen derselben, indem man die Grundrißisophotenpunkte auf die entsprechenden Vertikalprojektionen der konaxialen Schraubenlinien $(S'_1, S'_3, S', \ldots)$, oder noch besser auf die Vertikalprojektionen der zugehörigen Erzeugenden $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$, $(a_2 b_2, a'_2 b'_2)$, ... projiziert. So ist z. B. der Lichtpol $+10$, der auf der konaxialen Schraubenlinie (S_1, S'_1) liegt, mittelst der Erzeugenden $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$ bestimmt worden.

154. Um endlich die Isophotenpunkte der Schraubenachse $(O, a'_0 a'_4 \ldots)$, d. h. die Punkte, in welchen dieselbe von den Aufrißisophoten geschnitten wird, zu erhalten, müssen wir ebenfalls die horizontalen Erzeugenden bestimmen, auf denen diese Punkte liegen. Zu diesem Behufe konstruieren wir für den Mittelpunkt und Nullpunkt O, die Richtung OX und den horizontalen

*) In unserer Figur links unten nebenaus angenommen.

Neigungswinkel α ($= 35^0 16'$) der Lichtrichtung (l, l') den Tangentenbüschel oder für die gleichen Stücke und die Richtung OY den Normalenbüschel. Dann sind die Strahlen dieses Büschels die Grundrißprojektionen der genannten Erzeugenden. Diese Konstruktion ist in unserer Figur für den Kreis S der äußern Schraubenlinie (S, S') ausgeführt. Der Nullpunkt der Skale fällt, wie gesagt, mit dem Centrum O zusammen, und der Maximalpunkt M (+ 10) (auf OY) ergiebt sich, wenn man den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (l, l') in eine zur V.E. parallele Lage $L'_1 a'_0$ dreht und die Hypotenuse $a'_0 L'_1$ des rechtwinkligen Dreiecks $l'_1 a'_0 L'_1$ nach OM auf der Y-Achse abträgt. Indem man hierauf die Strecken OM in zehn gleiche Teile teilt, in den Teilpunkten Senkrechte zur Y-Achse zieht, die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit dem Kreis S auf die Schraubenlinie S' projiziert und endlich durch die Punkte, wo die letztere von den projizierenden Linien geschnitten wird, Parallelen mit der Projektionsachse führt, erhält man in den Punkten, in welchen diese Parallelen die Achse $a'_0 a'_4 \ldots$ schneiden, die verlangten Isophotenpunkte auf letzterer. Die Konstruktion ist für die Punkte + 8, + 7, 0, — 1, — 3 noch besonders durch Hilfslinien angegeben.

155. Aufgabe. Es sind die Umrisse der schiefen Schraubenfläche (der Schraube mit scharfem Gewinde), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten derselben bestimmen (Fig. 59 u. 60, Blatt 16).

Auflösung. Die schiefe Schraubenfläche, welche unter anderm zur Oberflächenbegrenzung der Schraube mit scharfem Gewinde dient, entsteht, wenn sich eine Gerade, die beliebig schief zur Achse ist und diese, gehörig verlängert, schneidet, so bewegt, daß sie mit der Achse stets denselben Winkel bildet und daß jeder Punkt derselben eine Schraubenlinie beschreibt. Als Erzeugende wurde die zur V.E. parallele Gerade ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$) angenommen, die die Achse (o, o' o'') im Punkte (o, b'_0) schneidet und mit der H.E. den Neigungswinkel $b'_0 a'_0 o' = \beta$ bildet, welcher in unserer Figur dem horizontalen Neigungswinkel $L'_1 o' a'_0 = \alpha = 35^0 16'$ (der in eine zur V.E. parallele Lage gedreht) gleich angenommen worden ist. Indem sich die Erzeugende ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$) nach der Richtung des Pfeiles der angegebenen Bedingung gemäß umdreht und nacheinander die Stellungen ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$), ($a_1 o$, $a'_1 b'_1$), ($a_2 o$, $a'_2 b'_2$), . . . einnimmt, erzeugt sie die lingsgängige*) eine (untere) Hälfte der schiefen Schraubenfläche**), von welcher wir etwas über Fünfviertel Windungen dargestellt haben.

Die Aufrißprojektion des Umrisses dieser Schraubenfläche ist die Kurve, welche die Aufrißprojektionen sämtlicher Erzeugenden ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$), ($a_1 o$, $a'_1 b'_1$), ($a_2 o$,

*) Siehe die Anmerkung S. 73.

**) Die andere (obere) Hälfte wird von einer Geraden erzeugt, die über b'_0 hinaus verlängert und $a'_0 b'_0$ gleich lang angenommen wird. Die erstere Hälfte dieser vollständig schiefen Schraubenfläche dient dann zur obern und die andere Hälfte zur untern Oberflächenbegrenzung der Schraube mit scharfem Gewinde.

$a'_2 b'_2$), ..., die wir innerhalb einer Windung in 24 Stellungen zur Hilfe dargestellt haben, einhüllt. Dabei beschreibt der Punkt (A_0, a'_0) die Schraubenlinie ($A_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$, $a'_0 a'_1 a'_2 a'_3 \ldots$) oder (S, S'), deren Ganghöhe $= a'_0 a'_8$ und deren Horizontalprojektion der Kreis S ist, womit die Grundrißprojektion der Schraubenfläche vollständig eingeschlossen ist, und der Punkt (o, b'_0) bleibt stets in der Achse und nimmt nacheinander die höhern Stellungen b'_1, b'_2, b'_3, ... ein. Ebenso beschreibt auch jeder Zwischenpunkt der Erzeugenden eine Schraubenlinie. Wir haben für die Zwischenpunkte f'_1, f'_2, f'_3 die zugehörigen Schraubenlinien (S_1, S'_1), (S_2, S'_2), (S_3, S'_3) dargestellt.

156. Die Grundrißprojektion der den Aufriß einhüllenden Aufrißkurve findet man wie folgt. Man mache $oc = r = \gamma \cot g\, \beta = f'_2 o'_2$, führe durch c zu A_0o eine Parallele cd, ziehe einen beliebigen Radius od, welcher cd in d schneidet, und mache $oe = cd$, so ist e ein Punkt der verlangten Kurve, von der man auf gleiche Weise beliebig viele andere Punkte e_1, e_2, e_3, ... finden kann. Aus dieser Konstruktion folgt zugleich, daß die Gerade cd eine Asymptote zu dem Kurvenast oe ist und daß die Kurve aus zwei solchen zum Achsenkreuz A_0o und a_6o symmetrisch liegenden Ästen $o e_1 e_2 e_3 e_4$, $o \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$ besteht. Diese Kurve ist zugleich kongruent mit der Horizontalprojektion der Maximalkurve oder hellsten Lichtlinie $or\lambda$, $or_1\lambda_1$, die in Bezug auf die Richtung ol, resp. auf die damit parallelen Geraden pq, $p_1 q_1$ auf gleiche Weise gefunden wird. Wir haben diese beiden Kurven einpunktgestrichelt gezeichnet.

157. Behufs der Bestimmung der Isophotenpunkte auf der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ haben wir der Deutlichkeit wegen in einer besondern Hilfsfigur (Fig. 60) den Bestimmungsbüschel K' konstruiert, dessen Richtungslinie K't' mit der Vertikalen K'V' den Winkel α bildet. Auf K'V' trage man die Strecke

$$K's' = o'_2 b'_0 = \gamma = \rho \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi} = \frac{3{,}8}{3{,}14} = 1{,}21 \text{ cm}$$

ab und ziehe in s' zu K'V' die Senkrechte s'y', welche K't' in t' und K'u' in u' schneidet. Die Punkte, in welchen die Gerade s'y' von den Strahlen des Büschels K' geschnitten wird, tragen wir alsdann so auf die Y-Achse über, daß s' mit o und s'y' mit der positiven Y-Achse zusammenfällt, und von den auf der Y-Achse erhaltenen Punkten führen wir Parallelen mit der X-Achse, welche die Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ in den verlangten Isophotenpunkten schneidet. Trägt man z. B. s't' nach ot und führt durch t mit der X-Achse eine Parallele, so schneidet sie die Maximalkurve in dem mit μ bezeichneten Lichtpol $+10$. Ebenso werden die übrigen Punkte der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ durch Übertragung erhalten.

158. Um nun weiter die Isophotenpunkte auf der Grundrißprojektion einer Schraubenlinie, z. B. auf dem Grundkreise S_2 zu finden, dessen Radius $oc = o'_2 f'_2 = \rho$ ist, und der die Maximalkurve in c und c_1

schneidet, können wir wieder wie bei den senkrechten Kreiskegelflächen verfahren, weil die Erzeugende ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$) in ihren verschiedenen Lagen zur H.E. stets denselben Neigungswinkel β macht. Ziehen wir daher $f'_2 g'_2 \perp a'_0 b'_0$, so ist $o'_2 g'_2$ die Subnormale (S) und $f'_2 g'_2$ die Normale (N) des Punktes f'_2 der Erzeugenden ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$), welche hier die zur V.E. in parallele Lage umgedrehte Meridiankurve vertritt. Die nähere Untersuchung zeigt nun, daß der Abstand des Nullpunktes der mit der X-Achse zusammenfallenden Intensitätsskale durch $S \cdot \operatorname{tg} \alpha$ und die halbe Länge dieser Skale durch $\sqrt{N^2 + \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} \cdot \sec \alpha$ bestimmt ist. Machen wir also $\measuredangle\, u'K'i' = \measuredangle\, L'_1 o' a'_0 = \alpha$, tragen $o'_2 g'_2$ nach $K'i'_2$ und errichten in i'_2 eine Senkrechte $i'_2 J'_2$, welche $K'J'_2$ in J'_2 schneidet, so ist $i'_2 J'_2 = S \cdot \operatorname{tg} \alpha$ der auf der X-Achse liegende Abstand des Nullpunktes N_2 der dem Kreis S_2 angehörenden festen Intensitätsskale vom Koordinatenpunkt (o). Machen wir ebenso $K'v' = o'_2 f'_2 = \rho = \gamma \cdot \operatorname{cotg} \alpha$, ziehen $v'w'_2$ parallel $K'i'$, tragen $f'_2 g'_2$ nach $v'w'_2$, beschreiben mit $K'w'_2$ den Kreisbogen $w'_2 h'_2$ und errichten in h'_2 die Senkrechte $h'_2 H'_2$, so ist $K_1 H'_2$ die halbe Länge der mit der X-Achse zusammenfallenden Intensitätsskale, womit auch der Maximalpunkt M_2 (+10) dieser Skale bestimmt ist. Der Einfachheit wegen haben wir jedoch die Einteilung dieser Skale auf einer etwas nach außen verschobenen und zur X-Achse parallelen Geraden $n_2 m_2$ ausgeführt. Dazu ziehen wir durch o auf $c c_1$ eine Senkrechte und durch einen beliebigen Punkt o_2 derselben eine Parallele zur X-Achse, machen $o_2 n_2 = i'_2 J'_2 = S \operatorname{tg} \alpha$ und $n_2 m_2 = K'H'_2 = \sqrt{N^2 + \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} \cdot \sec \alpha$, teilen $n_2 m_2$ in zehn gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte, wie bei 5 angedeutet, Parallelen zu $o o_2$, so schneiden diese den Kreis S_2 in den Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte der Schraubenlinie (S_2, S'_2), deren Grundrißprojektion eben der Kreis S_2 ist.

Ebenso erhält man die Isophotenpunkte der Grundrißprojektionen der übrigen Schraubenlinien.

159. Geht ein Kreis durch einen bestimmten Isophotenpunkt der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$, wie z. B. der Kreis S_1, der durch den hellsten Punkt + 10 (μ) geht, so läßt sich die Isophotenkonstruktion auch hier vereinfachen. Denn im Punkt N_1, wo der Kreis S_1 den mit der X-Achse zusammenfallenden geradlinigen Teil $o a_5$ der Grenzisophote schneidet, hat man schon zum voraus, wie dies auch bei der vorigen Konstruktion der Fall ist, den Nullpunkt o, und zieht man durch μ auf $\mu\mu_1$ eine Senkrechte, welche die X-Achse in M_1 schneidet, so hat man in M_1 auch den verlangten Maximalpunkt +10 der Beleuchtungsskale für den Kreis S_1. Auch diese Skale haben wir zur Deutlichkeit zur Seite (links) auf einer Parallelen $n_1 m_1$ zur X-Achse ausgeführt.

Hat man eine hinreichende Anzahl von Punkten für das Grundrißisophotensystem auf die angegebene Weise gefunden, so hat man dieselben nur noch durch stetige krumme Linien zu verbinden, um die Grundrißisophoten 0, +1, +2, +3, ..., +8, +9, −1,

$-2, -3, \ldots$ selbst zu erhalten. Und indem man die betreffenden Isophotenpunkte auf die Vertikalprojektionen S'_1, S'_2, S'_3, S' der konaxialen Schraubenlinien oder noch besser auf die Vertikalprojektionen $a'_0 b'_0$, $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$, $a'_3 b'_3, \ldots$ der zugehörigen Erzeugenden projiziert und durch stetige krumme Linien miteinander verbindet, erhält man auch die zugehörigen Aufrißisophoten $0, +1, +2, +3, \ldots, +8, +9, -1, -2, -3, \ldots$

160. Will man im Aufriß auch noch die Isophotenpunkte auf der Schraubenachse bestimmen, so verfahre man auf die gleiche Weise, wie bei der geraden oder flachen Schraubenfläche gezeigt worden ist. Man konstruiere für den horizontalen Neigungswinkel α und für $o\,l$ als Richtung den Tangentenbüschel oder für $o\,Y$ als Richtung den Normalenbüschel, dessen Centrum und Nullpunkt mit o zusammenfällt und dessen Maximalpunkte nach $+M$ und $-M$ zu liegen kommen, und betrachte die Strahlen dieses Büschels als die Grundrißprojektionen der Erzeugenden. Die Aufrißprojektionen dieser Erzeugenden bestimmen dann auf der Schraubenachse $o'\,o''$ die verlangten Isophotenpunkte.

Die Strahlen des Tangentenbüschels berühren in o die Grundrißisophoten. Die Punkte, in welchen die Grundrißprojektion $e\,o\,\varepsilon$ der Aufrißkontur von den Isophoten im Grundriß geschnitten wird, liefern, in die V.E. projiziert, die Punkte, in welchen die Aufrißisophoten die Konturkurve $a'_0 e'_4 e'_3 e'_2 e'_1 b'_2$ und $a'_4 \varepsilon'_4 \varepsilon'_3 \varepsilon'_2 \varepsilon'_1 b'_6$ durchschneiden.

Die Grenzisophote 0 des Grundrisses zeichnet sich bei der schiefen Schraubenfläche besonders aus, weil sie, wie man in unserer Figur sieht, nebst einem krummlinigen Teil $o\,p_1\,z$, auch einen geradlinigen Teil besitzt, der mit der Erzeugenden $o\,a_5$ zusammenfällt.

Denkt man sich die Erzeugende $(A_0\,o,\ a'_0 b'_0)$ um ein gleiches Stück über den Punkt $(o,\ b'_0)$ hinaus verlängert, so erzeugt die Verlängerung derselben (wie bereits oben in einer Anmerkung zu § 155 bemerkt worden ist) die andere (obere) Hälfte der vollständigen schiefen Schraubenfläche. Die Beleuchtung dieser zweiten Flächenhälfte ist in Bezug auf die Y-Achse zu jener der ersten Hälfte symmetrisch, und die Isophoten derselben werden ähnlich wie die der letztern gefunden.