Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

c) Scheinbare Beleuchtung der Kugelfläche

urn:nbn:de:hbz:466:1-78623

nahme von C_1 bestimmte Projektion c_1 von dem Mittelpunkt (C, c') des Grundkreises K, sowie die Projektionen $a_1 b_1$ und $d_1 e_1$ des auf der Aufrißebene senkrecht stehenden und des zu ihr parallelen Durchmessers des Kreises K bestimmt und hierauf (C, c') parallel g'l'', also schief auf die Ebene der erwähnten konzentrischen Kreise, nach c'' und ebenso die genannten Durchmesser nach a''b'' und d''e'' projiziert haben.

Dann ist c'' der Mittelpunkt der schiefen Projektion k'' von K und a''b'' und d''e'' sind zwei conjugierte Durchmesser derselben, welche beziehungsweise zu g'l'' und c'f' parallel sind, womit die Ellipse k'' bestimmt ist und leicht konstruiert werden kann*). Ist diese erhalten, dann ziehen wir die oben erwähnten konzentrischen Kreise und von den Schnittpunkten derselben mit der Ellipse Parallelen mit g'l''. Diese treffen alsdann die (mit der Projektionsachse zusammenfallende) Aufrißprojektion k' des Grundkreises in den Isophengenpunkten, welche, mit s' verbunden, die verlangten Aufrißisophengen der gegebenen Kegelfläche liefern.

118. Grenzisophengen. Die Grenzisophengen, welche der Beleuchtungsintensität H = 0 in der Aufrißprojektion der Kegelfläche entsprechen, erhält man mittelst des Kreises $o' o''_1 o''_2$, dessen Radius durch die Strecke P'o' bestimmt ist und der die Ellipse in den beiden Punkten o''_1 und o''_2 schneidet. Dieser Kreis muß die Ellipse k'' auch in den Punkten d'' und e'' schneiden, weil die Umrißmantellinien ebenfalls die scheinbare Beleuchtungsintensität 0 besitzen. Von diesen der Intensität 0 entsprechenden vier Isophengen ist die dem Punkt o''_2 zugehörige im Aufriß unsichtbar, die drei andern sind dagegen sichtbar.

Die Isophengen der größten scheinbaren Beleuchtung im direkt beleuchteten Flächenteil und im Selbstschatten erhält man, indem man die Berührungspunkte t''_1 und t''_2 der aus P' beschriebenen und die Ellipse berührenden Kreise bestimmt und dieselben ebenfalls nach t'_1 und t'_2 auf k' projiziert und mit s' verbindet.

Dieselbe Bemerkung, die wir oben (§ 114) über die scheinbare Beleuchtung der Kreiscylinderfläche im Vergleiche zur wahren Beleuchtung der gleichen Fläche gemacht haben, gilt auch hier für die scheinbare Beleuchtung der Kreiskegelfläche im Vergleich mit der wahren Beleuchtung derselben Fläche, wie sie in Fig. 30 dargestellt worden ist. Das Licht tritt ebenfalls bei der scheinbaren Beleuchtung mehr vor und der Schatten mehr zurück, wodurch in der That die Beleuchtung der natürlichen, wirklich beobachteten mehr angenähert wird.

c) Scheinbare Beleuchtung der Kugelfläche.

(Fig. 49, Blatt 10.)

119. Die Isophengen der Kugelfläche, welche im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung sind, haben wir bereits oben (§ 112) einläßlich betrachtet, und es

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", § 194, S. 119—120.

erübrigt hier nur noch, zu zeigen, wie dieselben konstruiert oder sonst graphisch erhalten werden können.

Da sie für den Aufriß und Grundriß — unter der Voraussetzung, daß die Lichtrichtung (l, l′) mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel ($\alpha = 35^0\,16'$) bilden — gleich sind, so werden wir die Konstruktion zunächst nur für die Grundrißisophengen zeigen. Diese zu erhalten, konstruieren wir im Grundriß die Isophengenpunkte zuerst für den größten Kugelkreis K, dessen Ebene auf der Grundrißebene in der Grundrißprojektion c l der Lichtrichtung senkrecht steht. Diesen Kreis denken wir uns um seinen horizontalen Durchmesser als Achse in eine zur Grundrißebene parallele Lage gedreht, so daß er mit der horizontalen Projektion k des horizontalen Umrißkreises zusammenfällt. Um alsdann den in diese horizontale Ebene des Kugelmittelpunktes umgelegten centralen Normalenbüschel, der auf dem Kreis k, der Umlegung des Kreises K, die Isophengenpunkte dieses Kreises bestimmt, zu konstruieren, ziehen wir in beliebigem Abstand zur Grundrißprojektion c l der Lichtrichtung eine Parallele $c_2 C_1$, welche die in der Grundrißprojektion c des Kugelmittelpunktes auf c l errichtete Senkrechte in c_2 schneidet. Ferner legen wir an $c c_2$ den Winkel α, so daß $\measuredangle\, c_2 c C_1 = \alpha$ ist, beschreiben aus C_1 den durch c gehenden Teilkreis K_1, der $C_1 c_2$ in P_1 und Q_1 schneidet, und machen dann auf $P_1 Q_1$ die Strecke $C_1 N_1 = C_1 c_2$ und $N_1 M_1 = P_1 Q_1$. Der durch den Teilkreis K_1 und die Intensitätsskale $N_1 M_1$ gegebene centrale Normalenbüschel c schneidet den Halbkreis a d b in den umgelegten Isophengenpunkten, welche senkrecht auf c l projiziert, die sichtbaren Isophengenpunkte des Kreises K im Grundkreis liefern. Für die Hellepole = 7,9 und — 2,1 ist diese Konstruktion angedeutet. Durch den Punkt β ist der sichtbare elliptische Teil $d\beta e$ der Grenzisophenge 0 bestimmt und kann daher sofort gezeichnet werden. Der andere Teil derselben, der im Grundriß den Umriß bildet, fällt mit der Grundrißprojektion zusammen.

120. Um weitere Isophengenpunkte der Grundrißisophengen zu erhalten, kann man auf gleiche Weise verfahren, wie dies bei der Auffindung der Grundrißisophengen der Kreiskegelfläche (§ 116) gezeigt worden ist. Dazu nimmt man Parallelkreise $k_1, k_2, \ldots$ parallel zur Grundrißebene an, betrachtet sie als Grundkreise der hinzugedachten Umhüllungskegel, wie sie in der zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene angedeutet sind. Für den Parallelkreis (k_1, k''_1) ist die Konstruktion in der Figur durch Hilfslinien angegeben.

Macht man $c\,i = c''\gamma''_1$ und $c\,h = \frac{1}{2}\, c'' s''_1$, errichtet in i und h die Senkrechten $i J_1$ und $h H_1$ und trägt $i J_1$ nach c n und $c H_1$ nach n m, so ist n der Nullpunkt und m die Mitte der Intensitätsskale. Teilt man hierauf die Strecken n m in fünf gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu c l, so schneiden diese den Kreis k_1 in den verlangten Isophengenpunkten.

121. Gehen die Parallelkreise gerade durch Isophengenpunkte des Kreises K, so vereinfacht sich die Konstruktion noch mehr. Der Parallelkreis (k_1, k''_1) z. B. geht zufällig durch den Isophengenpunkt (V, f''_1), dem die Intensität 0,5 und auf k der Punkt $+V_1$ entspricht. Durch $+V_1$ ziehen wir parallel mit cl die Gerade $+V_1 0_1$, welche cC_1 in 0_1 trifft. Sodann ziehen wir durch 0_1 auf cl eine Senkrechte, welche k_1 in 0_I und 0_{II} schneidet. Dies sind die beiden Isophengenpunkte auf k_1, denen die Intensität 0 entspricht. Die durch 0_1 auf cl gezogene Senkrechte schneidet letztere zugleich in n, dem Nullpunkt der Skale, von der m der mittlere, fünfte Teilpunkt (V) bereits bekannt ist. Indem man daher die Strecke nm in fünf gleiche Teile teilt und fortfährt, wie in § 120 erklärt worden ist, erhält man wiederum die Isophengenpunkte des Parallelkreises k_1. Die Einteilung der Skale ist, um die Figur im Innern nicht zu sehr zu überladen, zur Seite auf der zu cl parallelen Geraden $0'V'$ ausgeführt worden.

122. Geht der Parallelkreis (wie k_2, k''_2) nicht gerade durch einen Isophengenpunkt, so modifiziert sich die letzte Konstruktion wie folgt:

Wir ziehen durch f_2, worin der Parallelkreis k_2 den Symmetriekreis K im Grundriß schneidet, auf cl eine Senkrechte, welche k in f_3 trifft. Durch f_3 ziehen wir zu cl eine Parallele, welche cC_1 in t schneidet, auf cf_3 eine Senkrechte, welche cd in u trifft, und durch u zu cl eine Parallele, welche cC_1 in v schneidet. Trägt man nun endlich cv nach tw, so ist t der Nullpunkt und w der Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophengenpunkte des Parallelkreises k_2, welche mit diesen Angaben ohne weiteres ausgeführt werden kann.

123. Hat man auf die eine oder andere Weise die Grundrißisophengenpunkte einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen bestimmt, so hat man schließlich nur noch die gleichnamigen, d. h. die gleichen Intensitäten entsprechenden Isophengenpunkte durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand zu verbinden, um die Grundrißisophengen der Kugelfläche selbst zu erhalten. Die Aufrißisophengen sind unter der gemachten Voraussetzung, daß die Lichtrichtung mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel bildet, den Grundrißisophengen kongruent und können daher unmittelbar übertragen werden.

124. Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene. Wie schon oben (§ 112) kurz angedeutet worden ist, projizieren sich die Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene als Hyperbeln und die Grenzisophengen der Intensität 0 als gemeinschaftliche Assymptoten dieser Hyperbeln.

In der dritten Seitenprojektion der Fig. 49 haben wir diese Isophengen dargestellt, wie nun noch erklärt werden soll. Nachdem $c_2 c'' = c_1 c'$ gemacht und mit dem Kugelradius $c'' a'' = ca = r$ aus c'' der Kreis K'' beschrieben worden ist, ziehen wir durch c'' den Durchmesser $a'' b'' \parallel c 1$, machen Winkel $a'' c'' 1'' = \alpha = 35^0 16'$ und errichten zu $c'' 1''$ den senkrechten Durchmesser $\alpha'' \beta''$, so stellen die beiden Durchmesser $a'' b''$ und $\alpha'' \beta''$ die in dieser Projektionsebene der Intensität 0 entsprechenden Grenzisophengen dar. Halbiert man hierauf die beiden Winkel $a'' c'' \beta''$ und $b'' c'' \beta''$, so stehen die beiden Halbierungslinien aufeinander senkrecht und geben in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis K'' die Hellepole des Kugelkreises an, und zwar giebt die erstere Halbierungslinie $c'' p''$ den Hellepol p'' von der Maximalintensität $+ 0{,}79$ im sichtbaren direkt beleuchteten Flächenteil und die andere $c'' q''$ den Hellepol q'' von der Maximalintensität $- 0{,}21$ im sichtbaren durch Reflexlicht indirekt beleuchteten Flächenteil.

Um die übrigen sich als Hyperbeln darstellenden Isophengen zu finden, denke man sich die bereits oben (§ 113) gefundenen Isophengenpunkte des Symmetriekreises K von p'' bis q'', also von $+ 7{,}9$ bis $- 2{,}1$ auf den Kreis K'' der Seitenprojektion dieses Kreises nach den Punkten $+ 7''$, $+ 6''$, $+ 5''$, $+ 4''$, $+ 3''$, $+ 2''$, $+ 1''$, β'' (0), $- 1''$, $- 2''$ des Quadranten $p'' q''$ projiziert. Damit ergeben sich dann die Scheitelpunkte $+ \mathrm{I}''$, $+ \mathrm{II}''$, ..., $- \mathrm{I}''$, $- \mathrm{II}''$ der entsprechenden Hyperbeln nach einem bekannten Lehrsatz, indem man z. B. für I'' die Gerade $+ 1'' a'' \parallel a'' b''$ zieht und zu $c'' a''$ und $a'' + 1''$ die mittlere Proportionale $a'' b''$ sucht, diese nach $c'' d''$ abträgt und durch d'' mit $a'' b''$ eine Parallele zieht, welche die Mittellinie $c'' p''$ in $+ \mathrm{I}''$, dem Scheitelpunkt der ersten Hyperbel, schneidet. Errichtet man noch in $+ \mathrm{I}''$ auf $c'' p''$ die Senkrechte $+ \mathrm{I}'' e''$ und macht $c'' + \mathrm{I}''' = c'' e''$, so ist $+ \mathrm{I}'''$ der Brennpunkt der ersten Hyperbel $+ 1'' + \mathrm{I}'' + 1''$, und diese kann nun auf bekannte Weise konstruiert werden.*) Ebenso findet man auch die Hyperbeln $+ 2 + \mathrm{II}'' + 2$, rc. Dasselbe gilt natürlich auch für die Hyperbeln $- 1'' - \mathrm{I}'' - 1'$ und $- 2'' - \mathrm{II}'' - 2$ im Selbstschatten.

125. Mittelst der Isophengen in der Seitenprojektion ist man nun auch im stande, die Grundrißisophengen auf rein projektivem Wege zu finden. Man nehme wieder eine Reihe von horizontalen Parallelkreisen (k_1, k''_1), (k_2, k''_2), . . . an und projiziere die Punkte, worin k''_1, k''_2, . . . die Isophengen im Seitenriß schneiden, auf die zugehörigen Grundrißprojektionen k_1, k_2, . . . und verbinde alsdann die gleichnamigen, d. h. die von gleicher Beleuchtungsintensität im Grundriß durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand, so sind dies die entsprechenden Grundrißisophengen der Kugelfläche. Die Aufrißisophengen derselben sind in unserer Figur den Grundrißisophengen kongruent und können darum den

*) Siehe 1. Heft, 2. Aufl., unserer „Anleitung", § 158 und 159, S. 55.

letztern gleichgemacht werden. Bei dieser Übertragung hat man nur darauf zu sehen, daß die relative Lage der Aufrißisophengen in Bezug auf die vertikale Projektion c′l′ der Lichtrichtung dieselbe bleibe wie die der Grundrißisophengen in Bezug auf die horizontale Projektion c l der Lichtrichtung*).

IV.

Übungsbeispiele.

(Fig. 50—60, Blatt 11—16.)

126. Die in den beiden vorigen Abschnitten (II und III) behandelten Beleuchtungskonstruktionen bilden die Grundlage sowohl der einfachen (wahren) als der zusammengesetzten (scheinbaren) Beleuchtungs- und Schattenlehre. Damit ist man nun auch im stande, die Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen Flächen zu bestimmen. Zur Übung sollen nun noch eine Anzahl verschiedener Beispiele sowohl ebener als krummer Flächen nach der einfach geometrischen oder wahren Beleuchtung besonders behandelt werden.

a) Beleuchtung ebener Flächen.

(Fig. 50—52, Blatt 11.)

127. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines regulären senkrechten fünfseitigen Prismas, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen, Fig. 50.

Auflösung.

Sind ABCDE, $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1 e'_1 a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2$ die Projektionen des gegebenen regulären fünfseitigen, auf der H.E. senkrechten Prismas und 01, 0′1′ die

---

*) Es mag hier noch besonders bemerkt werden, daß die auf die angegebene Weise bestimmten Isophengen der Kugel ebenso wie die Isophoten derselben bei der wahren Beleuchtung benützt werden können, um mit Hilfe derselben bei beliebigen andern Körpern die Isophengen oder Lichtlinien der scheinbaren Beleuchtung zu bestimmen. Um z. B. bei der senkrechten Kreiscylinderfläche auf diese Weise die Isophengen zu erhalten, denke man sich der Cylinderfläche eine Kugelfläche von gleichem Radius und gleichem Mittelpunkt des Grundkreises eingeschrieben. Die Punkte, in welchen der Grundkreis der Cylinderfläche die Isophengen der Kugelfläche schneidet, sind alsdann die Isophengenpunkte der Cylinderfläche, und die Geraden, die man durch dieselben parallel zur Seite oder senkrecht zur Basis zieht, sind die verlangten Isophengen der Cylinderfläche. Auf ähnliche Weise erhält man mittels der Hilfskugel auch die Isophengen der Kegelfläche und anderer Umdrehungsflächen.