Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

III. Von der zusammengesetzten geometrischen oder scheinbaren Beleuchtung dem Punkt Q (+ 4) entsprechenden Punkt q (+ 4) im polarperspektivischen Bilde zu finden, ziehe $Q q_1 \perp G G$, verbinde q_1 mit A, teile $q_1 A$ in 4 gleiche Teile, verbinde den dritten Teilpunkt ε mit $\frac{E}{4}$ und ziehe damit durch Q eine Parallele. Diese wird dann $q_1 A$ im verlängerten Punkt q schneiden.

III.

Von der zusammengesetzten geometrischen oder scheinbaren Beleuchtung.

(Fig. 47—79, Blatt 9—10.)

107. Als Grundlage der zusammengesetzten geometrischen, relativen oder scheinbaren Beleuchtung nehmen wir an, die Beleuchtung der Körper werde wieder durch Sonnenlicht, also durch parallele Lichtstrahlen erzeugt und von einem Standpunkt aus betrachtet, der im Unendlichen in der Projektionsrichtung vom beleuchteten Körper entfernt liegt, aber so, daß die Seherichtung nicht mehr mit der Lichtrichtung zusammenfällt, wie dies bei der wahren Beleuchtung angenommen worden ist.

108. Gehen wir daher wieder von einer Ebene aus, so wird deren scheinbare Beleuchtungsintensität offenbar ihrer wahren oder absoluten Beleuchtungsintensität proportional sein, zugleich aber auch sich nach dem Winkel richten, welchen die Normale zur Ebene mit der Seherichtung bildet. Da dieselbe, wie leicht zu begreifen, abnimmt, wie dieser Winkel zunimmt und umgekehrt, so kann man den daher rührenden Einfluß durch den Kosinus dieses Winkels ausdrücken. Bezeichnet man demnach die scheinbare Beleuchtungsintensität oder Helleintensität derselben Ebene mit H, die wahre Beleuchtungsintensität wie im ersten Teile mit J und den Winkel, welchen die Normale derselben mit der Seherichtung einschließt, mit σ, so ist, wenn C eine Konstante bezeichnet:

$$H = C J \cos \sigma \qquad (I'),$$

oder, wenn für J der Wert aus Gleichung (I), § 46, substituiert wird,

$$H = C J' \cos \alpha \cos \sigma \qquad (II').$$

Hierin bedeutet $C J'$ die scheinbare Beleuchtungsintensität einer Ebene oder eines Flächenelementes, auf der oder auf dem Licht- und Seherichtung senkrecht stehen. Diese Beleuchtung nehmen wir als Einheit an. Setzen wir also $C J' = 1$, so folgt:

$$H = \cos \alpha \cos \sigma \qquad (III'),$$

d. h. die scheinbare Beleuchtungsintensität einer ebenen Fläche oder eines Flächenelementes ist proportional dem Produkt aus den Kosinussen der Winkel α und σ, welche die Normale derselben oder desselben mit der Lichtrichtung und Seherichtung macht.

Wird in der obigen Gleichung (III') der Winkel α größer als 90^0, so wird $\cos \alpha$ negativ und damit auch die scheinbare Beleuchtungsintensität H negativ. Eine solche negative Beleuchtungsintensität gewinnt auch hier eine wirkliche Bedeutung, wenn wir annehmen, die Fläche werde nicht nur von einem direkten, sondern auch von einem indirekten, reflektierten Lichtbündel beleuchtet, der dem erstern gerade entgegengesetzt ist, im Vergleich mit diesem aber eine merklich schwächere Intensität besitzt.

Diese Annahme ist in der That gestattet, weil die Reflexbeleuchtung, welche das Sonnenlicht im Selbstschatten einer beleuchteten Fläche hervorbringt, vorzugsweise durch parallele Lichtstrahlen erzeugt wird, die den direkten Sonnenstrahlen gerade entgegengesetzt, der Intensität nach aber schwächer als diese sind.

109. Um nun auch hier ein regelmäßiges Isophengensystem einer beleuchteten krummen Fläche zu erhalten, nach welchem die Abstufung der Tusch- oder Farbentöne leicht ausgeführt werden kann, bestimmen wir eine entsprechende Anzahl Isophengen oder Hellekurven derart, daß der Beleuchtungsunterschied je zweier aufeinanderfolgender Isophengen wiederum derselbe ist. Die Intensitätenreihe ist hier jedoch nach beiden Seiten in engere Grenzen eingeschlossen als bei der wahren Beleuchtung. Denkt man sich den Winkel $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die Lichtrichtung mit der Seherichtung in der Ebene XZ macht, halbiert, so giebt die Halbierungslinie dieses Winkels dort, wo sie die krumme Fläche durchschneidet, die hellsten Punkte (die positiven Hellepole) im direkten Licht der beleuchteten Fläche an. Denkt man sich ebenso den zu $\alpha = (90^0 - 2\,\omega)$ gehörenden Nebenwinkel halbiert, so giebt die Halbierungslinie dieses Winkels dort, wo sie die krumme Fläche durchschneidet, die hellsten Punkte (die negativen Hellepole) im indirekten oder reflektierten Lichte der beleuchteten Fläche an. Von diesen Hellepolen ist je einer im Grund- und Aufriß unsichtbar, je der andere aber sichtbar.

Für den sichtbaren positiven Hellepol findet man aus Gleichung (III'), weil für diesen Punkt sowohl die Lichtrichtung als die Seherichtung mit der Normale den gleichen Winkel $\omega = \frac{1}{2}(90^0 - \alpha)$ bildet, die größte positive scheinbare Beleuchtungsintensität:

$$H_{max.} = \cos^2\omega = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\omega] = \frac{1}{2}[1 + \sin\alpha] \qquad (IV')$$

und für den sichtbaren negativen Hellepol die größte negative scheinbare Beleuchtungsintensität:

$$H_{min.} = -\sin^2\omega = -\frac{1}{2}[1 - \cos 2\omega] = -\frac{1}{2}[1 - \sin\alpha] \qquad (V').$$

Nehmen wir nun den Winkel α, den die Lichtrichtung mit ihren Projektionen auf der Grundriß- und Aufrißebene macht, wie gewöhnlich $= 35^0\,16'$ an, so erhält man:

$$H_{max.} = \cos^2\left(\frac{90^0 - \alpha}{2}\right) = \cos^2 27^0\,22' = 0{,}78\,869 \text{ oder rund } 0{,}79$$

$$\text{und } H_{min.} = -\sin^2\left(\frac{90^0 - \alpha}{2}\right) = -\sin^2 27^0\,22' = -0{,}21\,130 \text{ oder rund } = -0{,}21.$$

Die Intensitätenreihe für die scheinbare Beleuchtung ist also einerseits mit der Intensität $+\,0{,}79$ und andererseits mit der Intensität $-\,0{,}21$ begrenzt, und es ist demnach für diese Beleuchtungsart allgemein:

$$H = H_{max.}, +\ldots, +\frac{3}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{1}{n}, +0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{3}{n}, -\ldots, -H_{min.} \qquad (VI')$$

oder, wenn man wieder n gleich 10 setzt:

$$H = 0{,}79, +0{,}7, +0{,}6, +0{,}5, +0{,}4, +0{,}3, +0{,}2, +0{,}1, +0, -0{,}1, -0{,}2, -0{,}21. \quad (VII').$$

110. Von allen Isophengen oder Hellekurven dieses Systems zeichnet sich auch hier die der Intensität 0 (Null) entsprechende Isophenge durch besondere Einfachheit aus. Dieselbe besteht nämlich aus zwei Teilen, von denen der eine diejenige Kurve ist, in welcher die beleuchtete Fläche berührt wird von der zur Lichtrichtung parallelen umhüllenden Cylinderfläche, und der andere diejenige, in welcher die beleuchtete Fläche von der zur Seherichtung parallelen umhüllenden Cylinderfläche berührt wird. Die erste Berührungskurve bildet die Grenze zwischen Licht und Schatten, die andere die Grenze zwischen dem sichtbaren und unsichtbaren Flächenteile und erscheint demnach als Umriß der Parallelprojektion.

111. Bei der orthogonalen Projektion ist für die Grundrißprojektion die Seherichtung auf der Grundrißebene senkrecht und für die Aufrißprojektion ist sie auf der Aufrißebene senkrecht. Wir erhalten daher für jede dieser Projektionen ein besonderes Isophengensystem des Grundrisses — Grundrißisophengen — und ein Isophengensystem des Aufrisses — Aufrißisophengen.

Einzig bei der Kugelfläche sind unter der Voraussetzung, daß die Lichtrichtung mit der Grundrißebene und der Aufrißebene denselben Winkel ($\alpha = 35^0\ 16'$) bildet, die Grundrißisophengen und Aufrißisophengen einander gleich. Man braucht daher in diesem Fall nur die einen, z. B. die Grundrißisophengen, direkt zu bestimmen und dieselben alsdann in die andere Projektionsebene zu übertragen.

Bei der zur Grundrißebene senkrechten Kreiskegelfläche sind dagegen — selbst unter der vorhin angegebenen beschränkenden Voraussetzung — die Grundrißisophengen von den Aufrißisophengen ganz verschieden. Sowohl diese wie jene sind Mantellinien; allein dieselben fallen keineswegs zusammen, sondern sind vielmehr ihrer Anzahl und Lage nach verschieden.

Bei der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche giebt es — unter der gleichen Voraussetzung — nur Aufrißisophengen, indem die Grundrißisophengen in Isophengenpunkte übergehen. Die Aufrißisophengen sind ebenfalls Mantellinien, die somit durch je einen Punkt bestimmt sind.

112. Die Konstruktionen, auf welchen die graphische Darstellung der Isophengen beruht, lassen sich am einfachsten aus der Betrachtung der scheinbaren Beleuchtung der Kugelfläche ableiten, weil, wie schon früher bemerkt worden ist, die Kugelfläche die einfachste Fläche ist, deren Flächenelemente alle möglichen Stellungen einnehmen und daher auch alle möglichen Beleuchtungsintensitäten zeigen.

Die Isophengen der Kugelfläche sind nun aber im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung. Dieselben erscheinen als Schnittkurven der Isophengoiden der Kugelfläche mit dieser letztern. Die Isophengoiden der Kugelfläche sind im allgemeinen Kegelflächen zweiter Ordnung, welche den Kugelmittelpunkt als gemeinschaftliche Spitze haben. Für die Beleuchtungsintensität $H = 0$ gehen diese Kegelflächen in zwei Ebenen über, von denen die eine zur Sehrichtung und die andere zur Lichtrichtung senkrecht ist. Erstere ist darum zur Grundrißebene resp. Aufrißebene parallel, und die andere ist zur Grundrißebene unter dem Winkel $(90^0 - \alpha)$ geneigt und schneidet dieselbe in einer Geraden, die im Abstande $\delta \operatorname{tg} \alpha$ zur Y-Achse parallel ist, sofern δ der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Grundrißebene bedeutet. Diese beiden Ebenen schneiden die Kugelfläche in Kreisen, von denen der zur Projektionsebene parallele Schnittkreis sich als Kreis in wahrer Größe und der zu derselben unter dem Winkel $(90^0 - \alpha)$ geneigte Kreis sich als Ellipse projiziert, deren große Achse gleich dem Durchmesser $(2\,\rho)$ der Kugel und deren kleine Achse gleich $2\,\rho \sin \alpha$ ist und daher leicht gezeichnet werden kann.

Den scheinbaren Intensitäten der Hellepole der Kugelfläche entsprechen die schon oben (§ 109) berechneten Grenzwerte $H_{max.} = +0{,}79$ und $H_{min.} = -0{,}21$. Den dem erstern Grenzwert $(+0{,}79)$ entsprechenden sichtbaren positiven Hellepol der direkt beleuchteten Kugelfläche erhält man, wie ebenfalls schon oben (§ 109) angegeben worden ist, durch die Halbierungslinie des Winkels $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die Lichtrichtung mit der Sehrichtung bildet, und den dem andern Grenzwert $(-0{,}21)$ entsprechenden sichtbaren negativen Hellepol erhält man ebenso durch die Halbierungslinie des Winkels $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die beiden Kugeldurchmesser, die zur Lichtrichtung und zur Sehrichtung senkrecht aufeinanderstehen, miteinander bilden. Die Isophengen der übrigen scheinbaren Beleuchtungsintensitäten der Kugelfläche sind, wie schon angegeben, Raumkurven vierter Ordnung und können daher nur punktweise konstruiert werden. Nimmt man jedoch zur Darstellung derselben eine zweite Aufrißebene parallel zur Lichtrichtung und senkrecht zur Grundrißebene an, so stellen sich dieselben in dieser Projektionsebene als Hyperbeln dar, und die der Intensität 0 entsprechenden Grenzisophengen projizieren sich in dieser Ebene als gerade Linien, die zugleich als gemeinschaftliche Assymptoten der erwähnten Hyperbeln erscheinen.

Mittelst dieser projektiven Eigenschaften der Kugelisophengen ist man nun auch im stande, die Grundriß- und Aufrißisophengen ziemlich leicht und rein projektiv zu erhalten. Wie dies geschehen kann, werden wir weiter unten, wo es sich um die wirkliche graphische Ausführung der Kugelisophengen handelt, näher zeigen.

Vorerst sollen jedoch noch die Isophengen der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinder- und Kreiskegelfläche graphisch bestimmt werden.

a) Scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiscylinderfläche.

(Fig. 47, Blatt 9.)

113. Wie schon oben (§ 111) angedeutet worden ist, giebt es auf der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche nur Aufrißisophengen. Dieselben sind Mantellinien oder Erzeugungslinien, die als solche durch die entsprechenden Isophengenpunkte des Grundkreises, d. h. durch die Punkte, worin sie den Umfang des Grundkreises schneiden, bestimmt sind. Es handelt sich also vor allem um die erwähnten Isophengenpunkte der Aufrißisophengen. Dieselben zu erhalten, konstruieren wir in Fig. 47, Blatt 9, in welcher Grundriß und Aufriß einer zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche vom Radius CA und der Höhe $c'\gamma'$ sowie die Projektionen Cl, $c'l'$ der Lichtrichtung gegeben sind, für den Aufriß den centralen Normalenbüschel des in die Aufrißebene umgelegten Grundkreises K mit dem Mittelpunkt C als Centralpunkt. Dazu ziehen wir in C auf Cl eine Senkrechte CC', beschreiben aus C', wo sie die Projektionsachse schneidet, einen durch C gehenden Kreis K', der die verlängerte CC' in N_1 und die Aufrißprojektion $c'l'$ der Lichtrichtung in p' und q' schneidet, fällen von N_1 auf die Projektionsachse eine Senkrechte N_1N', so ist der Durchschnittspunkt N' der Nullpunkt der auf der Achse $c'C'$ liegenden Intensitätsskale des in die Aufrißebene umgelegten centralen Normalenbüschels. Wir erhalten aber auch den Nullpunkt N' dieser Skale einfach, indem wir $C'N' = C'c'$ machen. Den Maximalpunkt M' dieser Intensitätsskale zu finden, fällen wir von N' auf $c'l'$ eine Senkrechte, welche $c'l'$ in π' schneidet, machen die Strecke $\pi'm' = p'q'$ und errichten in m' auf $c'l'$ eine Senkrechte, welche die Projektionsachse in M' schneidet. Der Durchschnittspunkt M' ist alsdann der verlangte Maximalpunkt der Intensitätsskale. Teilen wir nun die Strecke $N'M'$ in zehn gleiche Teile und ziehen wir durch die Teilpunkte Senkrechte zu $N'M'$, so gehen die Strahlen des umgelegten centralen Normalenbüschels C durch die Schnittpunkte, welche diese Senkrechten mit dem Kreis K' bilden, und diese Strahlen schneiden dann den umgelegten Kreisumfang K in den verlangten Isophotenpunkten. Werden diese endlich auf die Vertikalprojektion k' des Grundkreises projiziert und durch dieselben Mantellinien gezogen, so sind dies die verlangten Aufrißisophengen der dargestellten Kreiscylinderfläche.

114. Die beiden Strahlen CN_1 und CN_2, von denen der letztere zur Projektionsachse parallel, der andere aber zu Cl senkrecht ist, entsprechen der scheinbaren Beleuchtungsintensität $H = 0$ und bestimmen die aus vier Erzeugenden bestehende Grenzisophenge der Kreiscylinderfläche. Der Ordnungsstrahl CP' bestimmt die hellste Isophenge (6,9) im direkt beleuchteten Flächenteil, der Ordnungsstrahl CQ' ebenso die hellste Isophenge (— 1,2) im Selbstschatten oder im indirekt (durch Reflexlicht) beleuchteten Flächenteil. Wie man aus der Figur sieht, sind im Aufriß diese beiden hellsten Isophengen (+ 6,9 und — 1,2) sichtbar.

Ebenso sind auch drei von den vier Erzeugenden, welche der Grenzisophenge von der Intensität 0 entsprechen, sichtbar, und bilden zwei davon die äußersten Umrißlinien. Und gerade darin unterscheidet sich die scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiscylinderfläche von der wahren Beleuchtung der gleichen Fläche (siehe Fig. 25, Blatt 3) sehr wesentlich. Das Licht tritt bei der scheinbaren Beleuchtung mehr vor und der Schatten mehr zurück, wie dies auch in Wirklichkeit, wenigstens annähernd, beobachtet wird.

b) Scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiskegelfläche.

(Fig. 48, Blatt 10.)

115. In § 111 wurde bereits angedeutet, daß die Isophengen der zur Grundrißebene senkrechten Kreiskegelfläche für den Grundriß und Aufriß verschieden sind und daher für jede Projektionsebene besonders konstruiert werden müssen. Dieselben sind ebenfalls Mantellinien und sind als solche durch die Isophengenpunkte des Grundkreises, d. h. durch die Punkte, in welchen sie den Umfang des Grundkreises schneiden, bestimmt. Es handelt sich daher wiederum vor allem um die erwähnten Isophengenpunkte des Grundkreises, und zwar zunächst für die Grundrißprojektion und alsdann für die Aufrißprojektion.

116. Grundrißisophengen. Die Grundrißisophengen der senkrechten Kreiskegelfläche, deren Projektionen in Fig. 48 gegeben sind, zu erhalten, bestimmen wir auf ähnliche Weise wie bei der wahren Beleuchtung (siehe § 76, Fig. 30) die Isophengenpunkte des Grundkreises K. Indem wir $f'g' \perp f's'$ ziehen und den Winkel $1CL_1 = \alpha$ dem Winkel gleich machen, den die Lichtrichtung (l, l') mit ihrer Grundrißprojektion l bildet, sodann auf Cl die Strecke $Ci = c'g' \doteq S$

(der Subnormale) abtragen, in i auf Ci eine Senkrechte errichten, welche CL_1 in J_1 schneidet, und hierauf iJ_1 nach CN übertragen, erhalten wir in N den Nullpunkt der Intensitätsskale. Der andere Fundamentalpunkt M fällt in unserer Figur außerhalb der Zeichnungsfläche. Wir bestimmen daher einen andern zugänglichen Punkt der Skale, z. B. den mittlern, fünften Teilpunkt derselben, indem wir $Ch = \frac{1}{2} g's'$ nehmen, in h eine Senkrechte errichten, welche CL_1 in H_1 schneidet, und dann $NM_2 = CH_1$ machen und diese Strecke in fünf gleiche Teile teilen und solche über N hinaus noch so viele rückwärts abtragen, als innerhalb des Kreises K fallen. Die durch die Teilpunkte auf Cl gezogenen Senkrechten schneiden den Umfang des Grundkreises K in den verlangten Isophengenpunkten, welche, mit C(s) verbunden, die verlangten Grundrißisophengen liefern.

117. Aufrißisophengen. Die Aufrißisophengen der senkrechten Kreiskegelfläche, deren Projektionen in Fig. 48 gegeben, zu erhalten, nehmen wir die durch den Radius $g'f'$ und den Mittelpunkt (C, g') bestimmte Kugelfläche zu Hilfe, welche die Kegelfläche in dem Grundkreis K berührt und in diesem Kreise mit ihr die gleiche scheinbare Beleuchtung besitzt. Für den Mittelpunkt (C, g') als Centralpunkt konstruieren wir nun den centralen Normalenbüschel einer Ebene, welche auf der Aufrißebene senkrecht steht und diese in $g'l''$ parallel zur Vertikalprojektion $c'l'$ der Lichtrichtung schneidet und zugleich als dritte Projektionsebene angenommen wird. Zu diesem Behufe errichten wir in g' auf $g'l''$ eine Senkrechte, nehmen auf dieser den Punkt C_1 beliebig an, den wir, vom Grundriß abgesehen, zugleich als Projektion des Centralpunktes auf die in die Aufrißebene umgelegte dritte Projektionsebene betrachten können, machen hierauf $\measuredangle\, g'C_1C' = \alpha$, d. h. gleich dem Winkel, den die Lichtrichtung mit ihrer Aufrißprojektion bildet, beschreiben aus C' mit $C'C_1$ als Radius den Teilkreis K', welchen $g'l''$ in P' und Q' schneidet, und bestimmen auf bekannte Weise die auf $g'l''$ liegende Intensitätsskale. Durch die Schnittpunkte, welche die in den Teilpunkten der Intensitätsskale errichteten Senkrechten mit dem Halbkreis $P'N_1Q'$ bilden, sind diejenigen Strahlen des Büschels C_1 gegeben, welche die sichtbaren Aufrißisophengen liefern, also für unsern Zweck ausreichen. Wir beschreiben nun mit dem Radius $g'f'$ aus C_1 einen Viertelskreis k_1, der durch die Ordnungsstrahlen C_1P' und C_1Q' begrenzt wird, bestimmen auf k_1 die Schnittpunkte der innerhalb des Winkels $P'C_1Q'$ liegenden Strahlen des Büschels C_1 und projizieren diese parallel C_1P' auf $g'l''$. Dann bilden die um P' beschriebenen Kreise wie $+5$ $+5$, $+7$ $+7$, ..., die durch die auf $g'l''$ liegenden Punkte $+5$, $+7$, ... bestimmt sind, ein System konzentrischer Kreise, die zur Auffindung der Aufrißisophengen der Kegelfläche, wie sogleich angegeben werden soll, benützt werden, nachdem wir vorher noch in der dritten Projektionsebene die durch die Annahme von C_1 bestimmte Projektion c_1 von dem Mittelpunkt (C, c') des Grundkreises K, sowie die Projektionen $a_1 b_1$ und $d_1 e_1$ des auf der Aufrißebene senkrecht stehenden und des zu ihr parallelen Durchmessers des Kreises K bestimmt und hierauf (C, c') parallel $g'l''$, also schief auf die Ebene der erwähnten konzentrischen Kreise, nach c'' und ebenso die genannten Durchmesser nach $a''b''$ und $d''e''$ projiziert haben.

Dann ist c'' der Mittelpunkt der schiefen Projektion k'' von K und $a''b''$ und $d''e''$ sind zwei conjugierte Durchmesser derselben, welche beziehungsweise zu $g'l''$ und $c'f'$ parallel sind, womit die Ellipse k'' bestimmt ist und leicht konstruiert werden kann*). Ist diese erhalten, dann ziehen wir die oben erwähnten konzentrischen Kreise und von den Schnittpunkten derselben mit der Ellipse Parallelen mit $g'l''$. Diese treffen alsdann die (mit der Projektionsachse zusammenfallende) Aufrißprojektion k' des Grundkreises in den Isophengenpunkten, welche, mit s' verbunden, die verlangten Aufrißisophengen der gegebenen Kegelfläche liefern.

118. Grenzisophengen. Die Grenzisophengen, welche der Beleuchtungsintensität $H = 0$ in der Aufrißprojektion der Kegelfläche entsprechen, erhält man mittelst des Kreises $o'o''_1 o''_2$, dessen Radius durch die Strecke $P'o'$ bestimmt ist und der die Ellipse in den beiden Punkten o''_1 und o''_2 schneidet. Dieser Kreis muß die Ellipse k'' auch in den Punkten d'' und e'' schneiden, weil die Umrißmantellinien ebenfalls die scheinbare Beleuchtungsintensität 0 besitzen. Von diesen der Intensität 0 entsprechenden vier Isophengen ist die dem Punkt o''_2 zugehörige im Aufriß unsichtbar, die drei andern sind dagegen sichtbar.

Die Isophengen der größten scheinbaren Beleuchtung im direkt beleuchteten Flächenteil und im Selbstschatten erhält man, indem man die Berührungspunkte t''_1 und t''_2 der aus P' beschriebenen und die Ellipse berührenden Kreise bestimmt und dieselben ebenfalls nach t'_1 und t'_2 auf k' projiziert und mit s' verbindet.

Dieselbe Bemerkung, die wir oben (§ 114) über die scheinbare Beleuchtung der Kreiscylinderfläche im Vergleiche zur wahren Beleuchtung der gleichen Fläche gemacht haben, gilt auch hier für die scheinbare Beleuchtung der Kreiskegelfläche im Vergleich mit der wahren Beleuchtung derselben Fläche, wie sie in Fig. 30 dargestellt worden ist. Das Licht tritt ebenfalls bei der scheinbaren Beleuchtung mehr vor und der Schatten mehr zurück, wodurch in der That die Beleuchtung der natürlichen, wirklich beobachteten mehr angenähert wird.

c) Scheinbare Beleuchtung der Kugelfläche.

(Fig. 49, Blatt 10.)

119. Die Isophengen der Kugelfläche, welche im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung sind, haben wir bereits oben (§ 112) einläßlich betrachtet, und es

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", § 194, S. 119—120.

erübrigt hier nur noch, zu zeigen, wie dieselben konstruiert oder sonst graphisch erhalten werden können.

Da sie für den Aufriß und Grundriß — unter der Voraussetzung, daß die Lichtrichtung (l, l') mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel ($\alpha = 35^0\,16'$) bilden — gleich sind, so werden wir die Konstruktion zunächst nur für die Grundrißisophengen zeigen. Diese zu erhalten, konstruieren wir im Grundriß die Isophengenpunkte zuerst für den größten Kugelkreis K, dessen Ebene auf der Grundrißebene in der Grundrißprojektion $c\,l$ der Lichtrichtung senkrecht steht. Diesen Kreis denken wir uns um seinen horizontalen Durchmesser als Achse in eine zur Grundrißebene parallele Lage gedreht, so daß er mit der horizontalen Projektion k des horizontalen Umrißkreises zusammenfällt. Um alsdann den in diese horizontale Ebene des Kugelmittelpunktes umgelegten centralen Normalenbüschel, der auf dem Kreis k, der Umlegung des Kreises K, die Isophengenpunkte dieses Kreises bestimmt, zu konstruieren, ziehen wir in beliebigem Abstand zur Grundrißprojektion $c\,l$ der Lichtrichtung eine Parallele $c_2\,C_1$, welche die in der Grundrißprojektion c des Kugelmittelpunktes auf $c\,l$ errichtete Senkrechte in c_2 schneidet. Ferner legen wir an $c\,c_2$ den Winkel α, so daß $\measuredangle\, c_2\,c\,C_1 = \alpha$ ist, beschreiben aus C_1 den durch c gehenden Teilkreis K_1, der $C_1\,c_2$ in P_1 und Q_1 schneidet, und machen dann auf $P_1\,Q_1$ die Strecke $C_1\,N_1 = C_1\,c_2$ und $N_1\,M_1 = P_1\,Q_1$. Der durch den Teilkreis K_1 und die Intensitätsskale $N_1\,M_1$ gegebene centrale Normalenbüschel c schneidet den Halbkreis $a\,d\,b$ in den umgelegten Isophengenpunkten, welche senkrecht auf $c\,l$ projiziert, die sichtbaren Isophengenpunkte des Kreises K im Grundkreis liefern. Für die Hellepole $= 7{,}9$ und $- 2{,}1$ ist diese Konstruktion angedeutet. Durch den Punkt β ist der sichtbare elliptische Teil $d\,\beta\,e$ der Grenzisophenge 0 bestimmt und kann daher sofort gezeichnet werden. Der andere Teil derselben, der im Grundriß den Umriß bildet, fällt mit der Grundrißprojektion zusammen.

120. Um weitere Isophengenpunkte der Grundrißisophengen zu erhalten, kann man auf gleiche Weise verfahren, wie dies bei der Auffindung der Grundrißisophengen der Kreiskegelfläche (§ 116) gezeigt worden ist. Dazu nimmt man Parallelkreise $k_1, k_2, \ldots$ parallel zur Grundrißebene an, betrachtet sie als Grundkreise der hinzugedachten Umhüllungskegel, wie sie in der zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene angedeutet sind. Für den Parallelkreis (k_1, k''_1) ist die Konstruktion in der Figur durch Hilfslinien angegeben.

Macht man $c\,i = c''\gamma''_1$ und $c\,h = \frac{1}{2}\,c''s''_1$, errichtet in i und h die Senkrechten $i\,J_1$ und $h\,H_1$ und trägt $i\,J_1$ nach $c\,n$ und $c\,H_1$ nach $n\,m$, so ist n der Nullpunkt und m die Mitte der Intensitätsskale. Teilt man hierauf die Strecken $n\,m$ in fünf gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu $c\,l$, so schneiden diese den Kreis k_1 in den verlangten Isophengenpunkten.

121. Gehen die Parallelkreise gerade durch Isophengenpunkte des Kreises K, so vereinfacht sich die Konstruktion noch mehr. Der Parallelkreis (k_1, k''_1) z. B. geht zufällig durch den Isophengenpunkt (V, f''_1), dem die Intensität 0,5 und auf k der Punkt $+V_1$ entspricht. Durch $+V_1$ ziehen wir parallel mit cl die Gerade $+V_1 0_1$, welche cC_1 in 0_1 trifft. Sodann ziehen wir durch 0_1 auf cl eine Senkrechte, welche k_1 in 0_I und 0_{II} schneidet. Dies sind die beiden Isophengenpunkte auf k_1, denen die Intensität 0 entspricht. Die durch 0_1 auf cl gezogene Senkrechte schneidet letztere zugleich in n, dem Nullpunkt der Skale, von der m der mittlere, fünfte Teilpunkt (V) bereits bekannt ist. Indem man daher die Strecke nm in fünf gleiche Teile teilt und fortfährt, wie in § 120 erklärt worden ist, erhält man wiederum die Isophengenpunkte des Parallelkreises k_1. Die Einteilung der Skale ist, um die Figur im Innern nicht zu sehr zu überladen, zur Seite auf der zu cl parallelen Geraden $0'V'$ ausgeführt worden.

122. Geht der Parallelkreis (wie k_2, k''_2) nicht gerade durch einen Isophengenpunkt, so modifiziert sich die letzte Konstruktion wie folgt:

Wir ziehen durch f_2, worin der Parallelkreis k_2 den Symmetriekreis K im Grundriß schneidet, auf cl eine Senkrechte, welche k in f_3 trifft. Durch f_3 ziehen wir zu cl eine Parallele, welche cC_1 in t schneidet, auf cf_3 eine Senkrechte, welche cd in u trifft, und durch u zu cl eine Parallele, welche cC_1 in v schneidet. Trägt man nun endlich cv nach tw, so ist t der Nullpunkt und w der Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophengenpunkte des Parallelkreises k_2, welche mit diesen Angaben ohne weiteres ausgeführt werden kann.

123. Hat man auf die eine oder andere Weise die Grundrißisophengenpunkte einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen bestimmt, so hat man schließlich nur noch die gleichnamigen, d. h. die gleichen Intensitäten entsprechenden Isophengenpunkte durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand zu verbinden, um die Grundrißisophengen der Kugelfläche selbst zu erhalten. Die Aufrißisophengen sind unter der gemachten Voraussetzung, daß die Lichtrichtung mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel bildet, den Grundrißisophengen kongruent und können daher unmittelbar übertragen werden.

124. Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene. Wie schon oben (§ 112) kurz angedeutet worden ist, projizieren sich die Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene als Hyperbeln und die Grenzisophengen der Intensität 0 als gemeinschaftliche Assymptoten dieser Hyperbeln.

In der dritten Seitenprojektion der Fig. 49 haben wir diese Isophengen dargestellt, wie nun noch erklärt werden soll. Nachdem $c_2 c'' = c_1 c'$ gemacht und mit dem Kugelradius $c'' a'' = c a = r$ aus c'' der Kreis K'' beschrieben worden ist, ziehen wir durch c'' den Durchmesser $a'' b'' \parallel c 1$, machen Winkel $a'' c'' 1'' = \alpha = 35^0 16'$ und errichten zu $c'' 1''$ den senkrechten Durchmesser $\alpha'' \beta''$, so stellen die beiden Durchmesser $a'' b''$ und $\alpha'' \beta''$ die in dieser Projektionsebene der Intensität 0 entsprechenden Grenzisophengen dar. Halbiert man hierauf die beiden Winkel $a'' c'' \beta''$ und $b'' c'' \beta''$, so stehen die beiden Halbierungslinien aufeinander senkrecht und geben in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis K'' die Hellepole des Kugelkreises an, und zwar giebt die erstere Halbierungslinie $c'' p''$ den Hellepol p'' von der Maximalintensität $+ 0,79$ im sichtbaren direkt beleuchteten Flächenteil und die andere $c'' q''$ den Hellepol q'' von der Maximalintensität $- 0,21$ im sichtbaren durch Reflexlicht indirekt beleuchteten Flächenteil.

Um die übrigen sich als Hyperbeln darstellenden Isophengen zu finden, denke man sich die bereits oben (§ 113) gefundenen Isophengenpunkte des Symmetriekreises K von p'' bis q'', also von $+ 7,9$ bis $- 2,1$ auf den Kreis K'' der Seitenprojektion dieses Kreises nach den Punkten $+ 7''$, $+ 6''$, $+ 5''$, $+ 4''$, $+ 3''$, $+ 2''$, $+ 1''$, β'' (0), $- 1''$, $- 2''$ des Quadranten $p'' q''$ projiziert. Damit ergeben sich dann die Scheitelpunkte $+ I''$, $+ II''$, ..., $- I''$, $- II''$ der entsprechenden Hyperbeln nach einem bekannten Lehrsatz, indem man z. B. für I'' die Gerade $+ 1'' a'' \parallel a'' b''$ zieht und zu $c'' a''$ und $a'' + 1''$ die mittlere Proportionale $a'' b''$ sucht, diese nach $c'' b''$ abträgt und durch b'' mit $a'' b''$ eine Parallele zieht, welche die Mittellinie $c'' p''$ in $+ I''$, dem Scheitelpunkt der ersten Hyperbel, schneidet. Errichtet man noch in $+ I''$ auf $c'' p''$ die Senkrechte $+ I'' e''$ und macht $c'' + I''' = c'' e''$, so ist $+ I'''$ der Brennpunkt der ersten Hyperbel $+ 1''$ $+ I''$ $+ 1''$, und diese kann nun auf bekannte Weise konstruiert werden.*) Ebenso findet man auch die Hyperbeln $+ 2$ $+ II''$ $+ 2$, 2c. Dasselbe gilt natürlich auch für die Hyperbeln $- 1''$ $- I''$ $- 1'$ und $- 2''$ $- II''$ $- 2$ im Selbstschatten.

125. Mittelst der Isophengen in der Seitenprojektion ist man nun auch im stande, die Grundrißisophengen auf rein projektivem Wege zu finden. Man nehme wieder eine Reihe von horizontalen Parallelkreisen (k_1, k''_1), (k_2, k''_2), ... an und projiziere die Punkte, worin k''_1, k''_2, ... die Isophengen im Seitenriß schneiden, auf die zugehörigen Grundrißprojektionen k_1, k_2, ... und verbinde alsdann die gleichnamigen, d. h. die von gleicher Beleuchtungsintensität im Grundriß durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand, so sind dies die entsprechenden Grundrißisophengen der Kugelfläche. Die Aufrißisophengen derselben sind in unserer Figur den Grundrißisophengen kongruent und können darum den

*) Siehe 1. Heft, 2. Aufl., unserer „Anleitung", § 158 und 159, S. 55.

letztern gleichgemacht werden. Bei dieser Übertragung hat man nur darauf zu sehen, daß die relative Lage der Aufrißisophengen in Bezug auf die vertikale Projektion $c'l'$ der Lichtrichtung dieselbe bleibe wie die der Grundrißisophengen in Bezug auf die horizontale Projektion $c\,l$ der Lichtrichtung*).

IV.

Übungsbeispiele.

(Fig. 50—60, Blatt 11—16.)

126. Die in den beiden vorigen Abschnitten (II und III) behandelten Beleuchtungskonstruktionen bilden die Grundlage sowohl der einfachen (wahren) als der zusammengesetzten (scheinbaren) Beleuchtungs- und Schattenlehre. Damit ist man nun auch im stande, die Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen Flächen zu bestimmen. Zur Übung sollen nun noch eine Anzahl verschiedener Beispiele sowohl ebener als krummer Flächen nach der einfach geometrischen oder wahren Beleuchtung besonders behandelt werden.

a) Beleuchtung ebener Flächen.

(Fig. 50—52, Blatt 11.)

127. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines regulären senkrechten fünfseitigen Prismas, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen, Fig. 50.

Auflösung.

Sind $ABCDE$, $a'_1\,b'_1\,c'_1\,d'_1\,e'_1\,a'_2\,b'_2\,c'_2\,d'_2\,e'_2$ die Projektionen des gegebenen regulären fünfseitigen, auf der H.E. senkrechten Prismas und $0\,l$, $0'l'$ die

---

*) Es mag hier noch besonders bemerkt werden, daß die auf die angegebene Weise bestimmten Isophengen der Kugel ebenso wie die Isophoten derselben bei der wahren Beleuchtung benützt werden können, um mit Hilfe derselben bei beliebigen andern Körpern die Isophengen oder Lichtlinien der scheinbaren Beleuchtung zu bestimmen. Um z. B. bei der senkrechten Kreiscylinderfläche auf diese Weise die Isophengen zu erhalten, denke man sich der Cylinderfläche eine Kugelfläche von gleichem Radius und gleichem Mittelpunkt des Grundkreises eingeschrieben. Die Punkte, in welchen der Grundkreis der Cylinderfläche die Isophengen der Kugelfläche schneidet, sind alsdann die Isophengenpunkte der Cylinderfläche, und die Geraden, die man durch dieselben parallel zur Seite oder senkrecht zur Basis zieht, sind die verlangten Isophengen der Cylinderfläche. Auf ähnliche Weise erhält man mittels der Hilfskugel auch die Isophengen der Kegelfläche und anderer Umdrehungsflächen.