Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

c) Beleuchtung der Kugelflächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78623

und b′ der Vertikalprojektion desselben auf dem zur V.E. parallelen größten Kugelkreis (vom Radius v″ d″) und die Berührungspunkte d und e der Horizontalprojektion desselben auf dem zur H.E. parallelen größten Kugelkreis (vom Radius v″ d″) liegen. Ziehen wir daher v″ w″ senkrecht und durch w″ eine Parallele e d zu P Q, so schneidet letztere die Grundrißprojektion a e b d in d und e, welche Punkte, in die V.E. projiziert, die Projektionen d′ und e′ liefern, die zur Probe aber auch in der durch v′ zur Projektionsachse gezogenen Parallelen liegen müssen.

Projizieren wir den Schnittpunkt c von a b und d e nach c′ in die V.E. und ziehen durch c′ eine Parallele zu P R′, so schneidet dieselbe die Aufrißprojektion a′ e′ b′ d′ des Grundkreises in a′ und b′, welche Punkte, horizontal projiziert, nach a und b zu liegen kommen, zur Probe aber auch in der durch v zur Projektionsachse gezogenen Parallelen liegen müssen.

Die Gerade (a b, a′ b′) ist nichts anderes als die Schnittlinie des zur V.E. parallelen größten Kugelkreises mit der schiefen Ebene P Q R′, und die Gerade (d e, d′ e′) ist ebenso nichts anderes als die Schnittlinie des zur H.E. parallelen größten Kugelkreises mit derselben Ebene P Q R′. Die erstere ist daher selbst mit der V.E. und die letztere mit der H.E. parallel und vertreten beide die Stelle von sogen. Hauptlinien, wie wir sie schon oft mit Nutzen verwendet haben.

Sind jedoch die Projektionen a e b d, a′ e′ b′ d′ des Grundkreises nicht gegeben, so beschreiben wir um v und v′ mit dem Radius v″ d″ je einen Kreis als Grundriß-, resp. Aufrißprojektion der gedachten Hilfskugel. Ersterer schneidet die Gerade d e in den Punkten d und e, den verlangten Berührungspunkten in der H.E., und letzterer die Gerade a′ b′ in den Punkten a′ und b′, den verlangten Berührungspunkten in der V.E.

Verbindet man endlich d und e mit s und a′ und b′ mit s′, so erhält man die Projektionen der geradlinigen Umrißlinien der Kegelfläche*).

c) Beleuchtung der Kugelflächen.

(Fig. 33—34, Blatt 6.)

87. Bei der Kugelfläche sind nach § 30 und 31 die Isophoten Kreislinien, deren Ebenen auf der durch den Mittelpunkt gehenden Lichtrichtung senkrecht stehen. Behält man daher die gewöhnliche Annahme bei, wonach beide Projektionen l und l′ der Lichtrichtung (l, l′), Fig. 33, mit der Projektionsachse X′ X′ Winkel von 45⁰ bilden und die Lichtrichtung (l, l′) selbst mit ihren Horizontal- und Vertikalprojektionen l und l′ Winkel von $\alpha = 35^0\ 16'$ macht, so projizieren sich die die Isophoten darstellenden Kreise, weil sie sowohl

*) Diese hübsche Konstruktion wurde unseres Wissens zuerst von Niemtschik, weiland Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnikum in Wien, angegeben. Siehe dessen Abhandlung „Direkte Konstruktion der Konturen von Rotationsflächen“ in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften von 1866.

zur H.E. als zur V.E. schief sind, als Ellipsen, deren große Achse gleich ist dem Durchmesser des zugehörigen Isophotenkreises, und deren kleine Achse gleich ist der Projektion des in der Lichtebene liegenden und auf dem Lichtstrahl des Mittelpunktes senkrecht stehenden Durchmessers desselben.

Bezeichnet man den Durchmesser des Isophotenkreises mit 2ρ und den Neigungswinkel desselben mit den Projektionsebenen mit α (35^0 $16'$), so ist die große Achse der zugehörigen elliptischen Isophotenprojektion $= 2\rho$ und die kleine Achse $= 2\rho \sin \alpha$ (siehe § 90). Jene ist zur entsprechenden Projektion der Lichtrichtung senkrecht; diese fällt dagegen stets mit der entsprechenden Projektion der Lichtrichtung zusammen.

Da bei der angenommenen Lichtrichtung der Neigungswinkel der Isophotenkreise zu beiden Projektionsebenen derselbe ist (nämlich $\alpha = 35^0$ $16'$), so werden sich diese Kreise auch in beiden Ebenen als dieselben Ellipsen projizieren. Sind daher diese in einer Projektionsebene gefunden, so braucht man dieselben nur als kongruente Figuren in die andere Ebene zu übertragen.

88. Um nun die sich als Ellipsen projizierenden Isophotenkreise der durch ihre Projektionen gegebenen Kugelfläche Fig. 33 zu erhalten, denke man sich diese vor allem auf eine zweite V.E. projiziert, die zur Lichtrichtung parallel ist. Dazu ziehe man als neue Projektionsachse $X''X'' \parallel XX$, errichte darauf von c aus eine Senkrechte, mache $c_2 c'' = c_1 c'$ und beschreibe mit dem Radius der Kugelfläche $r = ac = a'c'$ aus c'' einen Kreis $a''d''b''e''$, so stellt dieser die Projektion der Kugelfläche auf der zweiten Vertikalebene dar. Zieht man hierauf durch c'' eine Parallele $c''l''$ mit der in die II. V.E. umgelegten Lichtrichtung PL'_1, so wird dieselbe die Kugelfläche in zwei Punkten durchschneiden, von denen der eine, $+10$, der hellste Punkt im direkten Licht und der andere, -10, der hellste Punkt im Selbstschatten ist, und damit sind die Richtung und die Fundamentalpunkte der Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion der Kugelfläche gefunden. Teilt man nun die beiden Radien $c'' + 10$ und $c'' - 10$ je in 10 gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten darauf Senkrechte, so stellen diese die Isophotenkreise in der zweiten Vertikalprojektion dar. Projiziert man dieselben in die H.E., so erhält man die mit $0, +2, +4, + \ldots, -2, -4, \ldots$ bezeichneten Ellipsen als Horizontalprojektionen der Isophotenkreise, und trägt man dieselben über in die erste Vertikalebene, so erhält man die mit gleichen Ziffern bezeichneten Ellipsen als Vertikalprojektionen der Isophotenkreise, die relativ zur Projektion $c'l'$ der Lichtrichtung dieselbe Lage haben wie die horizontalen zur Projektion cl der Lichtrichtung.

Um die Figur nicht zu sehr zu überladen, haben wir von den Isophotenkreisen und ihren respektiven Ellipsenprojektionen nur die mit den geraden Zahlzeichen $+2$, $+4$, $+6$, $+8$ und -2, -4, -6, -8 versehenen beibehalten und die mit den ungeraden Ziffern $+1, +3, \ldots, -1, -3, \ldots$ bezeichneten unterdrückt. Dafür aber haben wir noch den der Beleuchtungsintensität 0,95 entsprechenden Isophotenkreis 9,5 hinzugenommen, weil dadurch die Beleuchtung der Kugelfläche vom Isophotenkreis $+8$ bis zum hellsten Punkt $+10$ besser vermittelt wird.

89. Die Projektionen der Isophotenkreise der Kugelfläche oder also die mit 0, ± 2, ± 4, ... bezeichneten Ellipsen können nun aber auf verschiedene Weise, nämlich rein projektiv oder konstruktiv, erhalten werden.

I. Methode. Man denke sich die Kugelfläche, samt den Isophotenkreisen, durch eine Anzahl horizontaler Parallelkreise, wie ($r''t''$, ru_1 tu_2), geschnitten und die Punkte, worin sie die Isophotenkreise schneiden, aus der II. V.E. in die H.E. projiziert, wie dies bei u_1 und u_2 als Horizontalprojektionen der Durchschnittspunkte u'' des als Gerade sich projizierenden Parallelkreises $r''t''$ und des ebenfalls als Gerade sich projizierenden Isophotenkreises $+4$ $+4$ angedeutet ist. Indem man dann sämtliche Punkte eines und desselben Isophotenkreises, wie u_1, u_2, durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand verbindet, erhält man die als Ellipsen sich darstellenden Horizontalprojektionen.

II. Methode. Die die Isophoten darstellenden Ellipsen lassen sich aber auch direkt aus den Achsen konstruieren. Um die großen Achsen derselben zu erhalten, projiziere man die Teilpunkte 0, $+2$, $+4$, ... der Intensitätsskale $c''f''$ nach den entsprechenden Punkten 0, $+2$, $+4$, ... der Horizontalprojektion cf und schlage von letztern den Radius des zugehörigen Isophotenkreises auf die zugehörigen projizierenden Linien zu beiden Seiten der Projektion cf ab, so sind damit die großen Achsen bestimmt. So z. B. erhält man, wenn man $+8\,m = +8\,o = m''n''$ macht, in mo die große Achse der Ellipse $+8$ $+8$ ꝛc.

Die kleine Achse erhält man direkt, wenn man die Punkte, wie n'', horizontal nach n projiziert. Denn dann ist $+8\,n$ auf cf die halbe kleine Achse der Ellipse $+8$ $+8$ ꝛc.

Sind aber auf diese Weise die Achsen gefunden, so lassen sich damit die Ellipsen auf bekannte Weise konstruieren.

90. Die Achsen können auch unabhängig von der zweiten Vertikalprojektion gefunden werden. Denn da z. B. für die Grenzisophote 0 0 die halbe große Achse $cd = ce = r$ und die halbe kleine Achse $cg = c''g''_1 = f''f''_1 = c''f'' \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin\alpha$, so ist auch, wenn man $\measuredangle\, aca_1 = \alpha$ macht und $f_1 f$ senkrecht auf ac errichtet, $ff_1 = cf_1 \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin\alpha$ und daher $cg = ff_1$, gleich der halben kleinen Achse der Grenzisophote. Ebenso folgt für einen andern Isophotenkreis vom Radius ρ die halbe kleine Achse $= \rho \sin\alpha$.

Denkt man sich nun weiter den mit der Lichtrichtung (cl, $c''l''$) und der Achse (de, c'') zusammenfallenden Kreis $+10c'' - 10$ horizontal projiziert, so erhält man eine Ellipse, deren große Halbachse $cd = r$ und deren kleine Halbachse $c''f''_1 = cf = cf_1 \cdot \cos\alpha$, und welche auf die Richtungslinien der großen Achsen die Länge der letztern, wie z. B. mo, abschneidet. Wir haben, um die Figur nicht zu sehr anzufüllen, von dieser Ellipse nur einen Viertelbogen, nämlich dof, im Grundriß dargestellt. Zieht man dann noch eg und damit durch die Endpunkte der übrigen großen Achsen Parallelen, wie z. B. $mn \parallel eg$, so schneiden diese auf ab die Endpunkte der kleinen Achsen, wie n, ab.

91. Beschreibt man mit cf einen Hilfskreis, so liegen auf diesem die Brennpunkte der Ellipsen, welche die Projektionen der Isophotenkreise darstellen. Und damit lassen sich die Achsen ebenfalls finden.

Man ziehe z. B. durch den Teilpunkt $+8$ auf ac (in der H.E.) eine Senkrechte, welche den Hilfskreis in i schneidet, durch i den Radius ck, welcher den Kreis aebd in k trifft, und durch k eine Parallele km zu ac, welche die verlängerte $+8i$ in m schneidet, so ist m wieder ein Endpunkt der großen Achse und i ein Brennpunkt der Ellipse $+8$. Die kleine Halbachse $+8n$ bestimmt sich dann wieder wie vorhin, indem man $mn \parallel eg$ zieht.

92. Will man die Isophotenpunkte des Kugelumfangs aebd und $a'e'b'd'$, d. h. die Punkte bestimmen, in welchen die Ellipsen oder Isophotenprojektionen den äußern Kreisumfang der Kugel berühren, so denken wir uns wieder den horizontalen Neigungswinkel α nach aca_1 in eine zur H.E. parallele Lage umgedreht und $ca_1 = r \sec\alpha$ nach $ca_2 = ca_3$ abgeschlagen, oder den gleichen vertikalen Neigungswinkel α nach $a'c'a'_1$ in eine zur V.E. parallele Lage umgedreht und $c'a'_1 = r \sec\alpha$ nach $c'a'_2 = c'a'_3$ abgetragen, sodann jede dieser Strecken in zehn gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Senkrechte zu ac resp. $a'c'$ gezogen, welche den Kreisumfang aebd resp. $a'e'b'd'$ in den verlangten Punkten schneiden.

Um die Figur nicht übermäßig zu überladen, ist diese Konstruktion in der H.E. unterblieben und nur in der V.E. ausgeführt worden. Auf diese Weise sind z. B. die Punkte $v'v'$ erhalten worden, in welchen der Isophotenkreis $+2+2$ den äußern Kugelkreis $a'e'b'd'$ berührt.

93. Zieht man im hellsten Punkt f'' an den Kreisumfang $a''e''b''d''$ eine Tangente $a''_2 s''_1$, so schneidet diese auf dem verlängerten Halbmesser $(c''a'', ca)$ den Maximalpunkt (a''_2, a_2) unmittelbar ab, und ebenso erhält man auch in den Schnittpunkten II, IV, VI, ... die Teilpunkte der Beleuchtungsskale, welche auf $ca_2 = ca_3$ in der H.E., oder nach $c'a'_2 = c'a'_3$ in die V.E. übertragen, die verlangten Isophotenpunkte der Umrißkreise aebd und $a'e'b'd'$ liefern.

Ganz ebenso erhält man auch die Isophotenpunkte irgend eines andern Parallelkreises der Kugel.

Um z. B. die Isophotenpunkte des Parallelkreises $(r''t'', ru_1u_2t)$ zu erhalten, verlängere man $r''t''$ nach beiden Seiten, bis diese Gerade $f''s''_1$ in x_2 und $c''g''$, verlängert, in o_2 schneidet. Dann ist o_2 der Nullpunkt und x_2 der Maximalpunkt der zugehörigen Beleuchtungsskale und die Punkte II_2, IV_2, VI_2, ... sind zugleich die Teilpunkte derselben, welche die Isophotenpunkte auf bekannte Weise liefern.

Man wird bemerken, daß die durch die Tangenten $f''s''_1$, $r''s''_2$, ... bei der Umdrehung erzeugten Kegelflächen $f''s''_1\varphi''$, $r''s''_2t''$, ... mit den Parallelkreisen $f''\varphi''$, $r''t''$, ... dieselbe Beleuchtung haben und daß somit die vorigen Erklärungen über die Bestimmung der Isophotenpunkte beliebiger Parallelkreise der Kugel zugleich auch für die Kreiskegelfläche und aus gleichem Grunde auch für jede andere Umdrehungsfläche gelten. Für die Kegelfläche $f''s''_1\varphi''$ hat man z. B. zur Bestimmung des Nullpunktes o_1, da $\sphericalangle\, o_1c''o''_1 = \alpha$ und $o''_1c'' = S_1$, die Subnormale des zugehörigen Punktes f'' ist, $o''_1o_1 = S_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, und zur Bestimmung des Maximalpunktes f'', da $\sphericalangle\, a''c''f'' = \alpha$ und $c''f'' = r = N$, die Normale des Punktes f'' bedeutet, $o_1f'' = c''a''_2 = c''f'' \cdot \sec\alpha = r \cdot \sec\alpha = N \cdot \sec\alpha$, wie früher (siehe § 80).

94. III. Methode. Durch Zerlegung des nach der Lichtrichtung (l, l') einfallenden Lichtbündels in zwei rechtwinklige Seitenlichtbündel, den einen parallel zu cl (oder der X-Achse) und den andern senkrecht zur H.E. (oder parallel zur Z-Achse), bezw. den einen parallel zur $c'l'$ und den andern senkrecht zur V.E., lassen sich die elliptischen Projektionen der Isophotenkreise ebenfalls finden. Wir haben diese Konstruktion ebenfalls nur im Aufriß wirklich ausgeführt und damit die elliptischen Aufrißprojektionen wie folgt erhalten. Die Isophoten des ersten Lichtbündels, parallel zu $c'l'$, sind Kreise, die sich als Gerade, senkrecht zu $c'a'$, projizieren, und erhalten werden, wie bereits in § 93 angegeben worden ist, indem man nämlich $\sphericalangle\, a'c'a'_1 = \alpha$ macht, $c'a'_1$ nach $c' + 10$ und $c' - 10$ abschlägt, jede dieser Strecken als Intensitätsskale $= r \sec\alpha$ in zehn gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Senkrechte zu $c'a'$ zieht. Die letztern sind dann die sich als Gerade projizierenden Isophotenkreise des zu $c'a'$ parallelen Seitenlichtbündels. Die Isophoten des zur V.E. senkrechten Seitenlichtbündels sind dagegen Kreise, die sich im Aufriß als konzentrische Kreise und im Grundriß als Gerade, parallel zur Projektionsachse $X'X'$, darstellen. Radien dieser Kreise zu erhalten, mache man im Grundriß $cd_2 = cd_3 = cd_1 = r \operatorname{cosec}\alpha$, teile jede dieser Strecken als Intensitätsskale in zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten, wie $+2_1$, $+4_1$, ..., Senkrechte, wie $+2_1w$, $+4_1e$, ..., so sind dies die verlangten Radien, womit man nun im Aufriß die entsprechenden (punktgestrichelten) Kreise $+2_1$, $+4_1$, $+5_1$, ... aus dem Centrum c' beschreibt.

Die Punkte, in welchen sich die zugehörigen, d. h. diejenigen Isophoten beider Systeme schneiden, deren algebraische Summe ihrer Beleuchtungsintensitäten konstant und je gleich der Beleuchtungsintensität der betreffenden Isophote ist, liefern das Isophotensystem des ursprünglichen Lichtbündels, dessen Richtung (l, l') ist.

So geht z. B. die Ellipse $+4+4$ (im Aufriß), deren Beleuchtungsintensität 0,4 ist, durch die Schnittpunkte von $+5_1-1'$, $+4_1\ 0$, $+2_1+2'$, ..., deren Beleuchtungsintensitäten zusammen in der That konstant $=+0{,}4$ ist.

Auf diese Weise erhält man mit Ausnahme der Lichtpole das Isophotensystem der Kugelfläche auf einmal. Die Lichtpole f und f', welche diese Konstruktion nicht giebt, muß man, wie schon gezeigt, besonders bestimmen. Man erhält dieselben übrigens auch unabhängig von der zweiten Vertikalprojektion der Kugel, indem man den Neigungswinkel α in eine zur H.E. parallele Lage $a c a_1$, resp. in eine zur V.E. parallele Lage nach $a' c' a'_1$ umdreht und $f_1 f \perp a c$ resp. $f'' f' \perp a' c$ zieht. Die Punkte f, f' sind dann die verlangten Lichtpole oder die hellsten Punkte sowohl in der Grundriß- als in der Aufrißprojektion.

95. In Fig. 34 haben wir noch die Isophoten einer konkaven oder hohlen Halbkugel dargestellt. Dieselben sind, wie man sieht, den Isophoten der konvexen oder erhabenen Kugel der Lichtrichtung gerade entgegengesetzt, d. h. der Lichtpol $+10$ kömmt im Grundriß nach hinten auf l und im Aufriß nach unten auf l', und vom Mittelpunkt c resp. c' ebenso weit entfernt zu liegen, als er bei der konkaven oder hohlen Kugel im Grundriß nach vorne und im Aufriß nach oben zu liegen kömmt. Ähnliche Lage erhalten die Isophoten auch bei allen hohlen Umdrehungsflächen, so z. B. bei der Hohlkehle, der Einziehung 2c.

96. Auf gleiche Weise ist man nun auch im stande, die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität irgend einer andern Umdrehungsfläche zu bestimmen. Denn man hat nur eine Reihe von Parallelkreisen auf der betreffenden Umdrehungsfläche anzunehmen und, wie in §§ 93 und 94 näher angegeben ist, die Isophotenpunkte derselben zu suchen. Indem man alsdann die gleichnamigen Isophotenpunkte der verschiedenen Parallelkreise miteinander verbindet, erhält man die verlangten Isophoten oder Linien gleicher Lichtintensität selbst. Wir werden später unter den Übungsbeispielen solche Aufgaben noch besonders zur Behandlung bringen. Vorerst sollen jedoch noch einige Beispiele über die Bestimmung der Isophoten der Cylinder- und Kegelflächen 2c. in parallel- und polarperspektivischer Darstellung behandelt werden.

d) Beleuchtung der Cylinder- und Kegelflächen 2c. in parallel- und polarperspektivischer Darstellung.

(Fig. 35—44, Blatt 7—9.)

97. Um die Isophoten der Cylinder- und Kegelflächen in parallel- und polarperspektivischer Darstellung zu erhalten, hat man den gleichen Gang einzuhalten wie bei der gewöhnlichen orthogonalen Darstellung. Demnach hat man dieselben Operationen und Konstruktionen, die zum Auffinden der Isophoten bei der einfach rechtwinkligen