UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

Theoretischer Teil.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78623

Visual Library

Theoretischer Teil.

I.

Grundbegriffe und Grundsätze der Beleuchtung und Schattierung.

(Fig. 1—23, Blatt 1—2.)

3. Bei der Beleuchtung und Schattierung der Körper hat man im allgemeinen auf dreierlei Dinge Rücksicht zu nehmen:

a) auf die Lichtquelle oder den leuchtenden Körper;
b) auf die Form, Lage und Beschaffenheit des beleuchteten Körpers; und
c) auf den Standpunkt des Beobachters.

a. Von der Lichtquelle oder dem leuchtenden Körper und der Fortpflanzung des Lichtes.

4. Als Lichtquelle dient entweder ein irdisches Licht oder das Sonnenlicht. Beim technischen Zeichnen wird jedoch fast ausschließlich das Sonnenlicht zu Grunde gelegt. Es ist hier nicht der Ort, in eine theoretische Auseinandersetzung des Lichts näher einzutreten. Für unsern Zweck genügt es, zu wissen, daß sich das Licht von der Lichtquelle aus wie die Radien einer Kugel nach allen Richtungen ausbreitet und daß diese Ausbreitung oder Fortpflanzung — unter der Voraussetzung, daß sie in einem homogenen oder gleichartigen Mittel stattfindet — nach geraden Linien angenommen werden kann.

5. Jede gerade Linie, nach welcher sich das Licht von der Lichtquelle aus fortpflanzt, nennt man einen Lichtstrahl. Eine größere Anzahl von Lichtstrahlen, die von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, wird hingegen ein Strahlenbündel oder Strahlenbüschel genannt. Zur Beleuchtung eines Körpers ist natürlich immer ein ganzer Strahlenbündel nötig.

Wie man in der Mechanik mittelst des Kräfteparallelogramms zwei oder mehrere Seitenkräfte in eine Mittelkraft zusammensetzen, oder eine solche in zwei oder mehrere Seitenkräfte zerlegen kann, ebenso kann man auch hier mittelst des Strahlenparallelogramms einen mittlern Lichtstrahl oder Lichtbündel aus zwei oder mehrern Lichtstrahlen oder Lichtbündeln zusammensetzen oder in zwei oder mehrere Seitenlichtstrahlen zerlegen und damit die Richtung und Intensität der Beleuchtung bestimmen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

6. Wird die Lichtquelle als ein Lichtpunkt angenommen, so bilden die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen, welche den beleuchteten Körper ringsherum berühren, eine umhüllende Strahlenpyramide oder einen umhüllenden Strahlenkegel (siehe Fig. 1 und 2, Blatt 1), je nachdem derselbe eine eckige oder runde Form hat.

Der dem leuchtenden Punkt zugewendete Teil des beleuchteten Körpers ist dann im Licht und der dem Licht abgewendete Teil desselben im Schatten. Die Linie, welche den beleuchteten Teil vom unbeleuchteten Teil des Körpers trennt, nennt man die Trennungslinie von Schatten und Licht. Dieselbe ist stets eine geschlossene Linie, und zwar im ersten Fall, wenn der beleuchtete Körper von eckigen Flächen eingeschlossen, eine zusammenhängende geradlinig gebrochene Linie, im andern Fall, wenn derselbe, wie z. B. die Kugel, von einer krummen Fläche begrenzt ist, eine geschlossene krumme Linie.

7. Wird die umhüllende Strahlenfläche auch hinter dem beleuchteten Körper noch weiter fortgesetzt, so befindet sich auch der ganze von ihr eingeschlossene Raum im Schatten, und die Figur, in welcher dieser Schattenraum von den Projektionsebenen oder andern hinterliegenden Flächen geschnitten wird, nennt man den Schlagschatten. So ist in Fig. 1 und 2, Blatt 1, der Schlagschatten auf der hinterliegenden Ebene MN durch die Figur ABCHEF, resp. ABCD angegeben.

8. Sowohl die Trennungslinien von Licht und Schatten als die Schlagschattenumrisse erscheinen unter dieser Voraussetzung als polare oder zentrale Projektionen, die, wie im dritten Abschnitt des vierten Heftes unserer „Anleitung" gezeigt worden ist, bestimmt werden.

9. Wenn dagegen der leuchtende Körper eine größere Ausdehnung hat, so wird der Schatten, der sich hinter dem leuchtenden Körper einstellt, in den Kern- oder Ganzschatten und in den Halbschatten unterschieden.

Ist z. B. in Fig. 3 S (die Sonne) der leuchtende und E (die Erde) der beleuchtete Körper, beide als runde Körper vorausgesetzt, und zieht man die gemeinschaftlichen äußern und innern Tangenten an dieselben, so wird der kegelförmige Raum aeba gar kein Licht empfangen, der ihn umgebende Raum gdaebcf, welcher die Form eines kegelförmig eingeschnittenen Kegels hat, wird dagegen nur von mehr oder weniger Lichtstrahlen getroffen, während die andern Lichtstrahlen vom Körper E gehindert werden, in diesen Raum einzudringen. Dieser letztere Raum ist daher jedenfalls weniger hell als der ganz beleuchtete Raum, hingegen heller als der Raum aeba. Man nennt deshalb, wie gesagt, den Raum gdaebcf den Halbschatten und den Raum aeba den Ganz- oder Kernschatten.

10. Wird der Schattenraum durch eine Ebene MN (Fig. 3) geschnitten, so bildet der Schnitt des Kernschattens einen kleinen, dunkeln Kreis, der Halbschatten-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schnitt dagegen einen größern, blassern Kreisring (siehe Fig. 4). Dieser letztere ist am äußern Umfang nicht scharf begrenzt, sondern etwas geschwächt, und sieht daselbst wie verwaschen oder verwischt aus. Dies ist um so mehr der Fall, je weiter der Schnitt MN von dem Körper E entfernt ist. Die Schlagschatten (im Halbschatten) werden deshalb um so schwächer und unbestimmter, je weiter sie vom beleuchteten Körper abstehen.

11. Die in den beiden letzten Nummern gegebenen Erklärungen treffen wirklich zu, wenn wir die Sonne als Lichtquelle annehmen. Denn bezeichnen wir die Radien der Sonne und Erde mit R und r, und die Entfernung der Sonne von der Erde mit e, so ist annähernd: $R = 110{,}2 \cdot r$ und $e = 23\,344 \cdot r$, oder, da der mittlere Erdradius $r = 6367$ km beträgt,

$R = 701\,643$ km $= 94\,561$ geogr. Meilen und
$e = 148\,631\,250$ km $= 20\,029\,980$ geogr. Meilen.

12. Da die Sonne 20 Millionen geogr. Meilen von der Erde entfernt ist, so kann man die Lichtstrahlen, welche von ihr gleichzeitig auf die Erde gelangen, in Bezug auf die kurze Strecke derselben, wie sie bei technischen Zeichnungen (irdischer Gegenstände) überhaupt nur in Betracht kommt, als parallele Geraden ansehen und ihre Intensität auf diese verhältnismäßig kleine Ausdehnung als gleich stark betrachten. Aus demselben Grund kann auch die Größe der Sonnenscheibe, deren Gesichtswinkel nach obigen Daten nicht mehr denn etwa 32 Minuten*) beträgt, unberücksichtigt bleiben, d. h. die Sonnenstrahlen können so angesehen werden, wie wenn sie von einem Punkt ausgingen. Endlich wird aus demselben Grunde der Centriwinkel boc (Fig. 5), welcher dem Bogen bc des Halbschattens auf der Erdkugel oder auf irgend einem andern sphärischen Körper auf derselben entspricht, und welcher dem Gesichtswinkel BεC, unter welchem die leuchtende Sonnenkugel einem auf der Erdoberfläche in ε befindlichen Beobachter erscheint, gleich ist, ebenfalls nicht mehr denn 32 Minuten betragen, und damit findet man:

$$\text{arc } bc = \frac{1}{108} \cdot r^{**}),$$

d. h. auf der Erdoberfläche oder auf einem andern sphärischen Körper, der auf letzterer sich befindet und von der Sonne beleuchtet wird, beträgt die Breite der vom Halbschatten eingenommenen Zone nicht mehr als den 108ten Teil des Halbmessers des sphärischen

---

*) Bezeichnet man den Winkel $B\varepsilon C = e\varepsilon f = boc = \alpha$, so ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{e} = \frac{94\,561}{20\,029\,980}, \text{ woraus: } \frac{\alpha}{2} = 16'\,10'', \text{ also } \alpha = 32'\,20''.$$

**) Es verhält sich nämlich $\text{arc } bc : 32' = 2r\pi : 360 \cdot 60$,

$$\text{woraus: arc } bc = \frac{2r\pi \cdot 32}{360 \cdot 60} = \frac{1}{108} \cdot r.$$

Körpers. Dasselbe Resultat kann auch auf jeden andern Körper ausgedehnt werden. Bei der Kleinheit dieses Resultates ist es daher gestattet, den vom Sonnenlicht erzeugten Halbschatten ganz zu vernachlässigen, und damit vereinfacht sich alsdann die Aufgabe der Beleuchtung und Schattierung wesentlich.

13. Unter dieser Voraussetzung, die wir auch wirklich unsern Beleuchtungs- und Schattenkonstruktionen zu Grunde legen werden, bilden alsdann die den beleuchteten Körper umhüllenden Sonnenstrahlen, je nachdem dieser ein eckiger oder runder Körper ist, ein Strahlenprisma oder einen Strahlencylinder, dessen Erzeugende der gegebenen Richtung der Lichtstrahlen parallel sind, und die Trennungslinien von Licht und Schatten erscheinen wieder als Berührungslinien der erwähnten Strahlenfläche mit dem beleuchteten Körper und die Begrenzungslinien des Schlagschattens als Durchschnittsfigur derselben mit den Projektionsebenen oder mit den sonstigen hinterliegenden Flächen.

14. Die Trennungslinien des eigenen Schattens wie die Begrenzungslinien des Schlagschattens können demnach als orthogonale Parallelprojektionen aufgefaßt und gefunden werden, wie dies in den vier ersten Abschnitten des dritten Heftes ausführlich gezeigt worden ist. Die Umrisse der Schlagschatten können übrigens auch, wenn man will, als schiefe Parallelprojektionen der entsprechenden Trennungslinien von Schatten und Licht betrachtet und demzufolge wie in dem zweiten Abschnitt des vierten Heftes unserer „Anleitung" bestimmt werden.

15. Ist der beleuchtete Körper z. B. eine Kugel, so ist die umhüllende Strahlenfläche eine schiefe Kreiscylinderfläche, die Trennungslinie von Schatten und Licht eine Kreislinie, und zwar ein größter Kreis der Kugel, und die Begrenzungslinie des Schlagschattens auf der Projektionsebene ist eine Ellipse (siehe Fig. 6).

16. Ist der Körper dagegen ein senkrechter Kreiscylinder, der auf der Grundebene aufsteht, so ist die umhüllende Strahlenfläche zusammengesetzt aus einem schiefen cylindrischen Flächenstück und zwei zur Grundebene senkrechten ebenen Flächen; die Trennungslinie von Schatten und Licht besteht aus zwei geraden Erzeugungslinien und einem sie verbindenden Halbkreisbogen und die Begrenzungslinie des Schlagschattens aus ihren schiefen Projektionen auf die Grundebene, also aus zwei schiefen Geraden und einer halben Ellipse (siehe Fig. 7).

17. Ist ebenso der beleuchtete Körper ein senkrechtes, z. B. fünfseitiges Prisma, so ist die umhüllende Strahlenfläche aus zwei senkrechten und zwei (unter Umständen drei) schiefen ebenen Flächen zusammengesetzt, die Trennungslinie zwischen Schatten und Licht entsprechend aus zwei senkrechten Kanten und zwei (oder drei) sie verbindenden liegenden Kanten der obern Basis und die Begrenzung des Schlagschattens aus ihren schiefen Projektionen, also aus ebenso vielen Geraden wie die Trennungslinie des eigenen Schattens (siehe Fig. 8).

18. Ist der beleuchtete Körper ein senkrechter Kreiskegel oder eine senkrechte Pyramide, so besteht die umhüllende Strahlenfläche aus zwei Ebenen, die sich in dem durch den Scheitel gehenden Lichtstrahl durchschneiden, und die Trennungslinie von Schatten und Licht aus zwei Erzeugenden resp. Kanten, und die Schlagschattenbegrenzung aus zwei Geraden, den Rissen beider Berührungsebenen, die sich in einem Punkt, dem Durchschnittspunkt des durch den Scheitel gehenden Lichtstrahles mit der Grundebene, durchschneiden (siehe Fig. 9 und 10).

19. Zur Ausführung dieser verschiedenen Schattenkonstruktionen muß man, da die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes nach der verschiedenen Jahres- und Tageszeit sich ändert, eine *bestimmte Richtung* der einfallenden Sonnenstrahlen als unveränderlich annehmen. Gewöhnlich werden dieselben so angenommen, daß sie von links nach rechts, von vorn nach hinten und von oben nach unten einfallen, und zugleich mit der Diagonale AE eines Würfels, der so gestellt ist, daß je zwei Flächen mit der H.E. wie mit der V.E. parallel sind, gleiche Richtung haben (siehe Fig. 12a und 12b, Blatt 2).

Unter *dieser* Annahme machen alsdann beide Projektionen des Lichtstrahles mit der Projektionsachse XX Winkel von 45°, und der Lichtstrahl selbst mit der H.E. und V.E. macht einen Neigungswinkel α von $35^0\,16'$ (siehe Fig. 12a)*).

Dieser *Neigungswinkel* kann übrigens auch aus den rechtwinkligen Projektionen des Würfels und des Lichtstrahles durch eine einfache Umdrehung der letztern in eine zur V.E. parallele Lage unmittelbar in wahrer Größe gefunden werden, wie in Fig. 12b zu ersehen ist.

b. Von der Lage und Beschaffenheit des beleuchteten Körpers, von der Beleuchtungsintensität desselben und vom Reflexlicht

20. Bekanntlich sind die Körper, die nicht selbst leuchtend sind, für uns nur sichtbar dadurch, daß sie das Licht, welches von einem leuchtenden Körper auf sie einfällt, mehr oder weniger vollkommen *reflektieren* oder *zurückwerfen*, und zwar geschieht diese Zurückwerfung nach dem physikalischen Satze, *daß der Ausfallswinkel gleich ist dem Einfallswinkel*, d. h. *daß der Winkel ECN, welchen der zurück-*

---

*) Bezeichnet man die Würfelseite $AB = BC = 1$, so ist die Flächendiagonale $AC = \sqrt{2}$ und die Körperdiagonale $AE = \sqrt{3}$, also $\sin CAE = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, woraus $\alpha = 35^0\,15'\,52''$, wofür man näherungsweise $35^0\,16'$ setzen kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

geworfene Strahl CE mit dem zugehörigen Perpendikel CN bildet, gleich ist dem Winkel DCN, welchen dieses mit dem Einfallsstrahl CD macht (siehe Fig. 13).

21. Fallen die Lichtstrahlen senkrecht auf eine Fläche ein, so wird diese am hellsten beleuchtet. Die Beleuchtung derselben nimmt dagegen um so mehr ab, je schiefer die Lichtstrahlen gegen sie einfallen. Denn wird z. B. die ebene Fläche (AB, a′b′b′a′, Fig. 14), auf welche die Lichtstrahlen nach der Richtung von $L \perp AB$ einfallen, um den Winkel $\alpha = \measuredangle BAC$ gedreht, so daß der Winkel, den die eingefallenen Lichtstrahlen mit der gedrehten ebenen Fläche (AC, a′c′c′a′) bilden, $\beta = \measuredangle AFd = \measuredangle ACc = (90^0 - \alpha)$ ist, so fallen von den Lichtstrahlen, die auf AB fallen, nur noch diejenigen auf die gleich große ebene Fläche AC auf, welche zwischen A und c zu liegen kommen. Die Beleuchtung der Fläche in der geneigten Lage (AC, a′c′c′a′) wird daher im Verhältnis von $\overline{Ac} : \overline{AB}$ schwächer sein als in der Lage (AB, a′b′b′a′), in welcher die Lichtstrahlen senkrecht zu ihr sind.

22. Bezeichnen wir die Helligkeit oder Beleuchtungsintensität des Rechtecks in der Lage (AB, a′b′b′a′), in welcher die Lichtstrahlen senkrecht auf dasselbe einfallen, mit H und in der Lage (AC, a′c′c′a′), in welcher sie den Winkel $\beta = (90^0 - \alpha)$ mit ihm bilden, mit H′, so verhält sich nach dem Vorhergehenden:

$$H : H' = \overline{AB} : \overline{Ac} = \overline{AB} : \overline{AC} \cos\alpha = AB : AB \cos\alpha$$
$$= 1 : \cos\alpha = 1 : \sin\beta,$$

woraus: 1) $H' = H \cos\alpha = H \sin\beta$.

Ebenso folgt, wenn der Winkel $BAD = \alpha'$ und der Winkel $ADd = \beta'$ gesetzt wird, die Helligkeit H″ des Rechtecks in dieser neuen Lage:

$$2)\ H'' = H \cos\alpha' = H \sin\beta'.$$

Und aus 1) und 2) ergiebt sich nun weiter:

$$H' : H'' = H \cos\alpha : H \cos\alpha' = H \sin\beta : H \sin\beta'$$

oder: $H' : H'' = \cos\alpha : \cos\alpha' = \sin\beta : \sin\beta'$,

d. h. die Helligkeiten oder Beleuchtungsintensitäten zweier Rechtecke oder zweier gleich großen ebenen Flächen überhaupt, welche gegen die Lichtstrahlen verschiedene Lage haben, verhalten sich wie die Kosinusse ihrer Neigungswinkel oder Einfallswinkel, oder wie die Sinusse der Winkel, welche der einfallende Lichtstrahl mit den geneigten Ebenen selbst bildet.

23. Mittelst dieses Satzes sind wir nun auch im stande, die Lagen von Ebenen zu bestimmen, deren Helligkeiten oder Beleuchtungsintensitäten stetig abnehmen, deren Helledifferenzen also gleich sind.

Ist AB (Fig. 15) diejenige Lage einer Ebene, in welcher sie von den Lichtstrahlen senkrecht getroffen wird, und AM diejenige, in welcher die Lichtstrahlen mit ihr parallel sind, und sollen wir alle Zwischenlagen der Ebenen bestimmen, so daß der Unterschied ihrer Helligkeit durchgehends $\frac{1}{10}$ beträgt, so beschreiben wir mit AB aus A den Kreisbogen BM, teilen AB in zehn gleiche Teile, ziehen durch die Teilpunkte c, d, e, ... Parallelen zur Lichtrichtung L der Lichtstrahlen und verbinden die Durchschnittspunkte C, D, E, ... mit A, so sind AC, AD, AE, ... die verlangten Zwischenlagen der Ebene, deren Helligkeiten je um $\frac{1}{10}$ differieren. Denn es verhalten sich die Helligkeiten derselben in diesen verschiedenen Lagen wie die Breiten $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Ad}$, $\overline{Ae}$, ... und, da diese nach der Konstruktion sich wie 10 : 9 : 8 : 7 : ... verhalten, so verhalten sich auch die Helligkeiten selbst wie 10 : 9 : 8 : 7 : ... und ihr Helleunterschied ist daher wirklich je $\frac{1}{10}$.

24. Dem Winkel $\alpha = 0^0$ oder $\beta = 90^0$ entspricht daher das Maximum der Beleuchtung und dem Winkel $\alpha = 90^0$ oder $\beta = 0^0$ das Minimum der Beleuchtung. Bezeichnen wir ersteres mit 1 und letzteres mit 0 und die Zwischenstufen der Beleuchtung mit 0,9 bis 0,1, so können wir auch umgekehrt die Neigungswinkel bestimmen, welche diesen Beleuchtungsintensitäten entsprechen. Da nach der obigen Gleichung 1) allgemein

$$H' = H \cos \alpha = H \sin \beta,$$

so ist auch: $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{H'}{H}$, und damit findet man, wenn man $H = 1$ und H' nacheinander 1, 0,9, 0,8, 0,7, 0,6, 0,5, 0,4, 0,3, 0,2, 0,1, 0 setzt,

für die Helligkeit	1	den Winkel	$\alpha_1 = 0^0\ —'$	oder den Winkel			$\beta_1 = 90^0\ —'$
	0,9	„ „	$\alpha_2 = 25^0\ 50'$	„	„	„	$\beta_2 = 64^0\ 10'$
	0,8	„ „	$\alpha_3 = 36^0\ 52'$	„	„	„	$\beta_3 = 53^0\ 8'$
	0,7	„ „	$\alpha_4 = 45^0\ 25'$	„	„	„	$\beta_4 = 44^0\ 35'$
	0,6	„ „	$\alpha_5 = 53^0\ 52'$	„	„	„	$\beta_5 = 36^0\ 8'$
	0,5	„ „	$\alpha_6 = 60^0\ —'$	„	„	„	$\beta_6 = 30^0\ —'$
	0,4	„ „	$\alpha_7 = 66^0\ 35'$	„	„	„	$\beta_7 = 23^0\ 25'$
	0,3	„ „	$\alpha_8 = 72^0\ 28'$	„	„	„	$\beta_8 = 17^0\ 32'$
	0,2	„ „	$\alpha_9 = 78^0\ 45'$	„	„	„	$\beta_9 = 11^0\ 15'$
	0,1	„ „	$\alpha_{10} = 84^0\ 45'$	„	„	„	$\beta_{10} = 5^0\ 15'$
	0	„ „	$\alpha_{11} = 90^0\ —'$	„	„	„	$\beta_{11} = 0^0\ —'$.

25. Diese aus elf Stufen bestehende Beleuchtungsskale kann nun als Norm für die Beleuchtung ebener Flächen benützt werden. Um hiernach die angegebenen Helligkeitsgrade oder Lichtintensitäten auf ebenen

Flächen von der entsprechenden Stellung wirklich zu erhalten, kann man dieselben nacheinander mit einem dem Maximum der Beleuchtung entsprechenden Tuschton nur einmal, oder mit einem entsprechend schwächern Tuschton zweimal, dreimal ꝛc. bis elfmal anlegen, je nachdem dieselben die Helligkeitsgrade 1, 0,9 0,8, ... 0,1, 0 haben sollen. Oder man kann auch die einzelnen aufeinander folgenden Tuschtöne, womit man die Flächen anlegt, so verstärken, daß man die verlangten Helligkeitsgrade sofort nach dem ersten Anlegen oder doch schon nach einigen wenigen Wiederholungen erhält. Wir werden später im praktischen Teile auf die angedeutete Beleuchtungsskale und ihre praktische Anwendung nochmals zurückkommen.

26. Die vorigen Erklärungen sind vorzugsweise für ebene Flächen aufgestellt worden. Sie können aber auch auf krumme Flächen übertragen werden. Denn ist z. B. PZ (Fig. 16) irgend eine krumme Fläche und will man die Beleuchtungsintensität oder den Hellegrad in den Punkten A, B, C, ... derselben kennen, so denke man sich in diesen Punkten die Normalen N_1, N_2, N_3, ... zur Fläche gezogen und die Winkel α_1, α_2, α_3, ..., welche sie mit dem einfallenden Lichtstrahl AL_1, BL_2, CL_3, ... bilden, bestimmt. Die Beleuchtungsintensität der krummen Fläche in den Punkten A, B, C, ... ist alsdann proportional dem Kosinus der Winkel α_1, α_2, α_3, ... Statt der Normalen könnte man auch an die krumme Fläche, in den Punkten A, B, C, ... Tangierungsebenen T_1, T_2, T_3, ... legen, und die Winkel, welche dieselben mit dem einfallenden Lichtstrahl bilden, bestimmen. Denn dann ist die Beleuchtungsintensität der krummen Fläche in den betreffenden Punkten A, B, C, ... proportional dem Sinus der Winkel β_1, β_2, β_3, ... Auf diese Weise ist man im stande, die Beleuchtungsintensität oder den Hellegrad eines jeden beliebigen Punktes irgend einer gegebenen krummen Fläche zu bestimmen.

27. Ist die krumme Fläche z. B. eine senkrechte Kreiscylinderfläche und der Bogen PZ (Fig. 16) ein Teil des Grundkreises oder der Normaldirektrix derselben, so wird die Erzeugende des Punktes A_0, für welchen $\alpha = 0^0$ und $\beta = 90^0$, am hellsten beleuchtet, und die Beleuchtungsintensität längs der Erzeugenden in den Punkten A, B, C, ... ist wieder dem Kosinus der Einfallswinkel α_1, α_2, α_3, ... oder dem Sinus der Tangentenwinkel β_1, β_2, β_3, ... proportional. Bezeichnen wir daher die Intensität in A_0 mit H und in den Punkten A, B, C, ... bezw. mit H_1, H_2, H_3, ..., so verhält sich:

$$H_1 : H_2 : H_3 \ldots = H \cos \alpha_1 : H \cos \alpha_2 : H \cos \alpha_3 : \ldots$$
$$= \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3 : \ldots$$

oder wenn man mit dem Radius r = AO = BO = CO ... multipliziert, so erhält man:

$$H_1 : H_2 : H_3 : \ldots = \overline{AO} \cos \alpha_1 : \overline{BO} \cos \alpha_2 : \overline{CO} \cos \alpha_3 : \ldots$$
$$= \overline{Oa} : \overline{Ob} : \overline{Oc} : \ldots,$$

d. h. die Helligkeiten in den beliebigen Punkten A, B, C, . . . des Grundkreises der Cylinderfläche verhalten sich wie die Projektionen $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$, . . . der zugehörigen Radien $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, . . . auf die angenommene Lichtrichtung $\overline{OL}$.

Sollen also die Beleuchtungsintensitäten stetig abnehmen, ihre Helledifferenzen also gleich sein, so müssen auch die Punkte a, b, c, . . . den Radius $\overline{OA_0}$ so teilen, daß die Abstände der Teilpunkte einander gleich sind. Teilt man daher den Radius CA des Grundkreises oder der Normaldirektrix der senkrechten Kreiscylinderfläche (Fig. 24, Blatt 3) in zehn gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu CA, so schneiden diese den Umfang des Kreises offenbar in Punkten, deren Beleuchtungsintensitäten je um $\frac{1}{10}$ voneinander verschieden sind. Denkt man sich in den Teilpunkten des Radius $\overline{CA}$ zugleich senkrechte Ebenen errichtet, so schneiden diese die Cylinderfläche in Erzeugungslinien, deren Beleuchtungsintensitäten ebenfalls je um $\frac{1}{10}$ voneinander verschieden sind. Diese Erzeugungslinien sind im Aufriß der Fig. 24, Blatt 3, für die zur Achse (C, c′z′) senkrechte Lichtrichtung (l l′) dargestellt.

28. Zur gehörigen Abstufung sowohl der beleuchteten als der schattierten Partien einer stetig gekrümmten Fläche dienen ganz vorzüglich die Linien gleicher Helligkeit oder gleicher Lichtintensität, die nach dem Griechischen Isophengen oder Isophoten*) genannt werden. Es sind jene geraden oder krummen Linien, längs deren die Winkel des Lichtstrahles mit den Normalen oder Tangierungsebenen in allen Punkten derselben gleich sind, und in welchen folglich auch die Helligkeit oder Beleuchtungsintensität überall die gleiche ist. Konstruiert man auf solchen krummen Flächen, wie dies oben für die Kreiscylinderfläche (Fig. 24) angedeutet worden ist, eine Anzahl von Linien gleicher Helligkeit oder gleicher Lichtintensität dergestalt, daß die Helle oder Lichtintensität von der einen zur andern dieser Linien immer um gleichviel zu- oder abnimmt, so können solche krumme Flächen in ähnlicher Art getuscht und schattiert werden, wie dies oben für ebene Flächen erläutert worden ist. Je mehr man solche Lichtabstufungen benützt, desto vollkommener wird auch die Beleuchtung resp. Schattierung der krummen Fläche ausfallen.

29. Obschon die Ausführung des angedeuteten Verfahrens bei der Beleuchtung und Schattierung krummer Flächen für diejenigen, die mit den verschiedenen Methoden der darstellenden Geometrie vertraut sind, keine besondern Schwierigkeiten hat, so machte man von derselben bisher doch nur selten Gebrauch, weil sie meistens, wenn nicht gerade zu schwierigen, so doch zu ziemlich langwierigen Konstruktionen führt. Man be-

*) Isophengen aus ἴσος gleich und φέγγος Helle und Isophoten aus ἴσος gleich und φῶς Licht zusammengesetzt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

diente sich daher, um beim Aufsuchen der Linien gleicher Lichtintensität für krumme Flächen diese langwierigen und zeitraubenden Beleuchtungs- und Schattierungskonstruktionen möglichst zu vermeiden, häufig einer Normalkugel, auf welcher eine entsprechende Anzahl von Linien gleicher Helligkeit und Dunkelheit für gleiche Licht- und Schattendifferenzen konstruiert worden ist*). Denn da auf einer Kugeloberfläche alle nur möglichen Helligkeitsgrade oder Beleuchtungsintensitäten vorkommen, so kann man mit einer solchen Kugel, für welche die Helligkeit eines jeden beliebigen Punktes auf ihr mittelst einer hinreichenden Anzahl von Isophoten oder Helligkeitskurven bekannt ist, oder doch leicht gefunden werden kann, zugleich auch die Helligkeitsgrade jeder andern krummen Fläche bestimmen. Wir werden weiter unten — bei den Übungsbeispielen — zeigen, wie eine solche Normalkugel zur Bestimmung der Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen krummen Flächen wirklich angewendet werden kann. Hier soll vorläufig nur noch gezeigt werden, wie die Helligkeitsgrade und die entsprechenden Helligkeitskurven auf der Kugelfläche selbst bestimmt werden.

*) Der Gebrauch der Hilfskugel zum Schattieren krummer Flächen wurde unseres Wissens zuerst von Professor J. Egle, dem gewesenen Direktor der Kunstgewerbeschule in Stuttgart, gelehrt. Siehe dessen Abhandlung „Über das Schattieren der Oberflächen regelmäßiger Körper“ in der „Einladungsschrift der Polytechnischen Schule in Stuttgart zu der Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs Wilhelm von Württemberg, am 27. September 1855“. Weiter ausgeführt ist derselbe in der „Schattierungskunde von Professor C. Rieß in Stuttgart von 1871“.

30. Zu diesem Behufe sei in Fig. 17 AB der Durchmesser und C der Mittelpunkt einer Kugel und CL, senkrecht zu AB, die Richtung des einfallenden Lichtstrahles. Dann ist offenbar K, der Durchschnittspunkt dieses Strahles mit der Kugeloberfläche, der hellste Punkt der letztern. Zieht man ferner an die Kugeloberfläche die berührenden Strahlen, wie LA, so bilden sie eine umhüllende Cylinderfläche, welche die Kugelfläche rings herum in einem Kreise AB berührt, welcher die dunkelste Lichtkurve oder die Trennungslinie von Licht und Schatten angiebt. Will man nun ebenso für irgend zwei andere Punkte D und G der Kugeloberfläche den Helligkeitsgrad bestimmen, so ziehe man zu denselben die Normalen CN und CN_1 und die Tangenten DM und GP, sowie die Lichtstrahlen $DL \parallel GL \parallel CL$; denn alsdann verhält sich nach früherem (siehe §§ 22 und 27) die Helligkeit H' des Punktes D zur Helligkeit H'' des Punktes G wie die Kosinusse der Einfallswinkel LDN und LGN, oder, da $\measuredangle LDN = \measuredangle FCD = \alpha$ und $\measuredangle LGN_1 = JCG = \alpha_1$, wie die Kosinusse der Centriwinkel FCD und JCG, so daß man hat:

$$H' : H'' = \cos FCD : \cos JCF = \cos \alpha : \cos \alpha_1,$$

oder, wenn man die letzten Glieder mit $r = \overline{CD} = \overline{CG}$ multipliziert, so folgt:

$$H' : H'' = \overline{CD} \cdot \cos FCD : \overline{CG} \cdot \cos JCG = CF : CJ.$$

Dieselbe Helligkeit wie der Punkt D hat aber auch der ganze zur Achse KS senkrechte Parallelkreis DE und die zugehörige Kegelfläche MDE, und dieselbe Helligkeit wie der Punkt G hat auch der zu KS senkrechte Parallelkreis GH und die zugehörige Kegelfläche PGH, weil die Einfallswinkel α und α_1 für alle Punkte dieser Kreise ringsherum dieselben sind. Es sind somit die Parallelkreise DE und GH Kurven gleicher Helligkeit, und ihre Helligkeiten verhalten sich daher ebenfalls wie CF : CJ, d. h. wie die Abstände ihrer Ebenen vom Kugelcentrum.

Die Isophoten oder Lichtkurven der Kugel oder vielmehr ihre Ebenen sind, wie man sieht, zugleich senkrecht zu demjenigen Lichtstrahl, der durch den Mittelpunkt der Kugel geht und die Kugeloberfläche in dem hellsten Punkte K durchschneidet. Für diesen Punkt ist der Einfallswinkel $\alpha = 0^0$, also $\cos 0^0 = 1$ und ebendeshalb die Helligkeit desselben am größten. Für den Punkt A und alle übrigen Punkte des Kreises AB oder der Grenzisophoten hingegen ist der Einfallswinkel LAQ $= 90^0$, also $\cos 90^0 = 0$, und ebendeshalb auch die Helligkeit derselben gleich Null.

31. Da nach dem Vorhergehenden die Beleuchtungsintensitäten der Lichtkurven auf der Kugel sich verhalten wie die Abstände ihrer Ebenen vom Kugelcentrum, so müssen notwendig auch für gleiche Hellediffernzen derselben ihre gegenseitigen Abstände einander gleich sein. Teilt man darum den mit dem Lichtstrahl L parallelen Radius CD (Fig. 18) in eine beliebige Anzahl, z. B. in sieben gleiche Teile, und legt durch diese Teilpunkte 1, 2, 3, . . . Ebenen, senkrecht zu CD, so schneiden diese die Kugeloberfläche in den Kreisen EF, GH, JK, . . . von gleicher Helligkeit, deren Helligkeitsgrade sich verhalten wie die Abstände C1 : C2 : C3 : . . . oder wie $\frac{1}{7} : \frac{2}{7} : \frac{3}{7} : \ldots$ Die Helledifferenz beträgt daher in diesem Fall $\frac{1}{7}$. Hätte man den Radius CD in zehn gleiche Teile geteilt, so würden sich die entsprechenden Helligkeitsgrade der Isophotenkreise wie $\frac{1}{10} : \frac{2}{10} : \frac{3}{10} : \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$ verhalten und die Helledifferenz würde $\frac{1}{10}$ betragen.

32. Wollte man hiernach die Beleuchtung und Schattierung der Kugel wirklich ausführen, so hätte man zuerst einen Tuschton so zu wählen, wie er für die Dunkelheit der Grenzisophote geeignet erscheint, und denselben hierauf so zu verdünnen, daß er nach einmaligem Auftragen die Helligkeit 1, nach zweimaligem Auftragen die Helligkeit 0,9, nach dreimaligem Auftragen die Helligkeit 0,8 2c. und nach elfmaligem Auftragen wieder die ursprüngliche Dunkelheit 0 der Grenzisophote geben würde. Mit diesem verdünnten Tuschton hätte man alsdann die ganze halbe beleuchtete Kugeloberfläche ADBA vom Kreise AB bis zum Punke D einmal, bis zum Kreise

QR zweimal, bis zum Kreise OP dreimal ꝛc. und bis zum Kreise EF zehnmal und die ganze Schattenhälfte vom Kreise AB bis S elfmal, oder mit dem ursprünglichen Tuschton einmal anzulegen.

Das letztere trifft nun freilich in der Wirklichkeit nicht zu. Denn es ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt, daß die Körper in der Natur auf der dem Licht abgewandten, also auf der Schattenseite, nicht überall gleich dunkel sind, sondern von der Schattengrenze AB an gegen das hintere Ende S wieder heller werden. Es ist dies eine Folge des indirekten oder Reflexlichtes, dessen Einfluß im folgenden nun noch etwas näher untersucht werden soll.

33. Alle Körper, die tropfbar-flüssigen und gasförmigen wie die festen, haben die Eigenschaft, daß sie das von irgend einer Lichtquelle, z. B. von der Sonne, erhaltene Licht mehr oder weniger reflektieren oder zurückwerfen. Auf dieser Zurückwerfung des Lichtes beruht, wie schon oben (§ 20) bemerkt worden ist, überhaupt die Möglichkeit, daß wir die Körper sehen. Denn ohne dieselbe müßten notwendig alle diejenigen Oberflächenteile eines Körpers, welche von den direkt von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen nicht getroffen werden, absolut dunkel, für unser Auge also unsichtbar sein. Dies ist nun aber, wie gesagt, in der Wirklichkeit nicht der Fall, indem durch die reflektierten Lichtstrahlen auch die im Schatten befindlichen Flächenteile noch hinlänglich beleuchtet werden, so daß sie in angemessener Entfernung von unserem Auge wahrgenommen werden können.

34. Soll daher bei der Schattierung der Körper auf das Reflexlicht Rücksicht genommen werden, so wird zur Vereinfachung gewöhnlich angenommen, daß die von hinterliegenden Flächen und Körpern (wie namentlich auch von Luft, Wolken und Wasser) reflektierten Lichtstrahlen den direkt einfallenden parallel und gerade entgegengesetzt gerichtet seien. Dieselbe Beleuchtungsskale, wie wir sie im Vorausgehenden (§§ 24—25 und 31 bis 32) für das direkt einfallende Licht aufgestellt haben, kann daher auch — jedoch im entgegengesetzten Sinne — für reflektiertes Licht in Anwendung gebracht werden. Nur muß hierbei beachtet werden, daß die entsprechenden Helligkeitsgrade oder Beleuchtungsintensitäten immer merklich schwächer gehalten werden als beim direkten Licht.

35. Am dunkelsten unter allen Flächenteilen eines Körpers, mögen sie durch direktes oder indirektes oder reflektiertes Licht beleuchtet sein, sind immer diejenigen, welche in der Richtung der berührenden Lichtstrahlen selbst liegen, weil dieselben weder durch direktes noch durch reflektiertes Licht beleuchtet werden. In diesem Fall befindet sich z. B. die Fläche (BC, b′c′c′b′), Fig. 19, da sie weder direktes noch indirektes Licht erhält.

Werden die Flächen (AB, a′b′b′a′, und CD, c′d′d′c′) unter gleichen Winkeln α von den Lichtstrahlen getroffen, erstere durch direktes Licht L, letztere durch reflektiertes R, so muß erstere dennoch, da das direkte

Licht immer stärker als das reflektierte ist, heller als letztere gehalten werden.

36. Die Stärke der Reflexion wie der hierbei ebenfalls in Betracht kommenden Absorption oder Einsaugung des Lichtes hängt von verschiedenen Einflüssen ab. Außer der Form und Lage ist es namentlich die Beschaffenheit der Oberflächen des beleuchteten Körpers, welche hierauf von Einfluß ist. In dieser Beziehung kommt es nämlich wesentlich darauf an, ob die beleuchteten Flächen eine rauhere oder glattere Beschaffenheit besitzen oder nicht. Vollkommen glatte oder polierte Flächen werden das auf sie einfallende Licht vollständig reflektieren oder zurückwerfen. Bei rauhen oder matten Flächen dagegen, die einen Teil des auf sie einfallenden Lichtes immer absorbieren, einsaugen oder verschlucken, ist diese Zurückwerfung nur unvollständig und zudem sehr unregelmäßig.

Im ersten Fall, also bei vollkommen glatten oder polierten Oberflächen, würde man daher nur diejenigen Stellen sehen, deren reflektiertes Licht in unser Auge zurückgeworfen wird. Es sind dies die sogen. Glanzstellen. Alle übrigen Stellen der Oberfläche, von denen kein Licht in unser Auge gelangt, würden uns dagegen unsichtbar oder doch dunkel erscheinen. Ebenso würden bei einer vollkommen glatten Cylinder- oder Kegelfläche nur eine Gerade als Glanzlinie gesehen werden, während die übrigen Flächenteile uns mehr oder weniger dunkel erscheinen würden.

Von einer allmählichen Abstufung sowohl des Lichtes als des Schattens könnte somit bei solchen Flächen keine Rede sein.

Indessen giebt es, außer etwa den Metallspiegeln und gewissen andern glatt geschliffenen Metalllegierungen, keine solch absolut glatte, spiegelnde Flächen, welche alle Strahlen, die auf sie einfallen, nach dem oben (§ 20) erwähnten Reflexionsgesetze reflektieren oder zurückwerfen würden. Die meisten Flächen der wirklichen, physischen Gegenstände enthalten vielmehr eine zahllose Menge Unebenheiten und Rauhigkeiten, welche bewirken, daß das Licht unvollständig und unregelmäßig, d. h. nach allen möglichen Richtungen reflektiert wird, so daß die betreffenden Flächen von jedem Standpunkt aus in ihrer ganzen Ausdehnung — freilich ohne Glanz oder Spiegel — gesehen werden können.

37. Man begreift, daß es beim technischen Zeichnen nicht möglich ist, auf diese ins Unendliche variierende Beschaffenheit der Oberflächen in jedem einzelnen Falle Rücksicht zu nehmen. Hier, wo es sich mehr um die mathematisch-technische Lösung der Beleuchtungsaufgabe handelt, sind wir zur Vereinfachung der Sache genötigt, die Oberflächen der Körper von einer gewissen idealen, gleichmäßigen Reflexionsbeschaffenheit anzunehmen.

c. Vom Standpunkt und der Entfernung des Beobachters in Bezug auf den beleuchteten Körper und vom Kontraste.

38. Außer den im vorigen berührten Einflüssen bleibt nun auch noch der Standpunkt des Beobachters und die Entfernung desselben vom beleuchteten Körper bezüglich der Beleuchtung und Schattierung der Oberflächen zu betrachten übrig.

Was zunächst den Standpunkt des Beobachters oder die Lage des Auges desselben anbelangt, so ist dies bei jeder Projektionsart als das entsprechende projizierende Auge anzunehmen. Bei den polarperspektivischen Projektionen fällt das Auge mit dem Pol, für welchen die Darstellung ausgeführt ist, zusammen. Bei den Parallelprojektionen ist es dagegen in der Richtung der projizierenden Geraden vom Körper entfernt im Unendlichen zu denken. Und ebendeshalb ist bei solchen Darstellungen auf die Lage des Auges streng genommen keine Rücksicht zu nehmen, weil derjenige, welcher die Zeichnung ansieht, jenen Standpunkt in Wirklichkeit doch nicht einnehmen könnte.

39. Was im weitern die Entfernung der beleuchteten Oberfläche vom Auge des Beobachters betrifft, so hat dieselbe allerdings auf die Beleuchtungsintensität insofern einen Einfluß, als uns infolge der eigentümlichen Beschaffenheit unseres Sehorgans die nähern Flächen heller und die entferntern dunkler erscheinen. Sieht man aber von dieser subjektiven Erscheinung ab und faßt man nur die objektive Intensität des direkt einwirkenden Sonnenlichtes ins Auge, so hat die Entfernung des beleuchteten Körpers von der Lichtquelle auf die Intensität der direkten Beleuchtung desselben keinen merklichen Einfluß, weil es bei der großen Entfernung der Sonne von der Erde offenbar gleichgiltig ist, ob derselbe etwas mehr oder weniger von der Sonne entfernt ist.

Anders ist es freilich, wenn wir irgend ein irdisches Licht der Beleuchtung zu Grunde legen. Denn dann ist die Intensität der beleuchteten Fläche um so schwächer, je weiter diese von demselben entfernt ist, und zwar nimmt dieselbe nach einem bekannten physikalischen Gesetz mit dem Quadrat der Entfernung der beleuchteten Fläche von der (irdischen) Lichtquelle ab.

40. Beim Sonnenlicht, welches wir unserer Betrachtung ausschließlich zu Grunde legen, hat die Entfernung des Körpers von der Lichtquelle auf die Intensität der direkten Beleuchtung, wie gesagt, keinen merklichen Einfluß. Wohl aber findet ein solcher Einfluß beim indirekten, reflektierten Sonnenlicht statt, wie leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß sich dieses in Beziehung auf die Fortpflanzung wie ein direktes irdisches Licht verhält und folglich seiner Intensität nach ebenfalls mit dem Quadrat der Entfernung von der reflektierenden Fläche abnimmt. Deshalb erscheinen denn auch die nach hinten zurückliegenden ebenen Flächen 2, 3, 4 (Fig. 20, Blatt 2) um so dunkler, je weiter sie gegen die vordere Fläche 1 zurückliegen. Im übrigen sind aber die einzelnen zur V.E. parallelen Flächenstücke (AB, a′b′b′a′), (CD, c′d′d′c′), ... ihrer ganzen Ausdehnung nach gleich stark anzulegen. Gehen die einzelnen zurückstehenden

Flächen 1, 2, 3, ... in eine zum Aufriß und zur Gesichtsfläche schräg gestellte Ebene (AB, a′b′b′a′), Fig. 21, über, so erscheint dieselbe aus gleichem Grunde nach hinten gegen (A, a′a′) am dunkelsten und nach vorne gegen (B, b′b′) am hellsten und ist daher von hinten gegen vorne zu verwaschen, d. h. von hinten gegen vorne stetig heller zu halten.

41. Hat eine ebene Fläche im weitern eine solche Lage, daß sie im Aufriß nach oben gegen unten zurücksteht und im Grundriß nach vorne gegen hinten tiefer liegt, so ist sie im Aufriß oben und im Grundriß vorne am dunkelsten zu halten und im weitern zu verwaschen, wie dies in den Fig. 22 a) und 22 b) angedeutet ist.

Nimmt man hierbei zugleich auf das Medium, d. h. auf die atmosphärische Luft, Rücksicht, durch welche die Lichtstrahlen vom beleuchteten Körper zum Auge des Beobachters gelangen, so findet man, daß mit der Entfernung des Auges vom Gegenstande die direkt beleuchteten Flächen desselben minder hell und die indirekt beleuchteten oder die Schattenflächen minder dunkel erscheinen, als es ohne dieses Zwischenmittel, das für sich wieder als eine reflektierende Materie auftritt, der Fall sein würde.

42. Alles dies gilt auch für krumme Flächen. Bei den Cylinder- und Kegelflächen hat man zu diesem Behufe nur eine Reihe von Erzeugungslinien anzunehmen und die zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Erzeugenden gelegenen ebenen Flächenelemente auf gleiche Weise zu behandeln, wie vorhin für ebene Flächen angegeben worden ist. Bei der Kugelfläche und andern Umdrehungsflächen nimmt man ebenso eine Reihe von Parallelkreisen an, welche die Oberfläche in ebensoviele Zonen abteilen, und behandelt diese alsdann wie Cylinder- oder abgekürzte Kegelflächen. Wir werden auch auf diesen Punkt später im praktischen Teile nochmals zurückkommen. Hier haben wir schließlich noch auf einen andern Punkt, nämlich auf die Kontrasterscheinungen, aufmerksam zu machen.

43. Es ist eine bekannte Erscheinung, daß uns z. B. ein grauer Fleck auf einer weißen Fläche dunkler, auf einer schwarzen dagegen heller und zugleich größer erscheint, als wenn die ganze Fläche mit demselben grauen Tone angelegt wäre. Ebenso erscheint uns auch, wenn eine Lichtfläche und eine Schattenfläche in einer Linie zusammenstoßen, die erstere in der Nähe der Trennungslinie heller und die andere dunkler, als sie wirklich ist.

Desgleichen erscheint auch der Schlagschatten eines Körpers auf einer hellen Fläche dunkler, auf einer dunkeln dagegen heller als er an und für sich ist.

Noch augenfälliger ist die Erscheinung, die wahrgenommen wird, wenn man einen grauen Streifen Papier auf eine farbige Fläche, z. B. auf eine rote Fläche legt, indem alsdann der graue Streifen einen grünlichen Ton, auf eine grüne Fläche gelegt dagegen einen rötlichen Ton zeigt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Erscheinungen, die aus dem Kontraste oder Gegensatze von Licht und Schatten und der verschiedenen komplementären Farben hervorgerufen werden, sind nicht objektiv vorhanden, sondern rein nur in unserer subjektiven Anschauung begründet, also gleichsam nur als Sinnestäuschungen zu betrachten. Da sie aber, wie gesagt, in der erwähnten Art wahrgenommen werden, so müssen sie eben doch in allen Fällen, in welchen ein naturgetreues, künstlerisches Bild verlangt wird, berücksichtigt werden.

44. Gewöhnlich wird jedoch bei der Licht- und Schattenverteilung der vom Sonnenlicht beleuchteten Körper nur auf die Form und Lage der beleuchteten Flächen derselben gegen die Licht- und Seherichtung Rücksicht genommen und von ihrer natürlichen Beschaffenheit hinsichtlich ihrer Rauhigkeit, Glätte, Farbe ꝛc., sowie auch von den subjektiven Kontrasterscheinungen ganz abgesehen. Dann hat man es freilich nicht mehr mit der *wirklichen* oder *natürlichen*, sondern mit einer *hypothetisch idealen* oder *abstrakt geometrischen Beleuchtung* zu thun. Diese zerfällt dann weiter, je nachdem man nur auf die Lage der beleuchteten Flächen gegen die Lichtrichtung oder gleichzeitig auf die Lage derselben gegen die Lichtrichtung und die Seherichtung Rücksicht nimmt, in die *einfache* und die *zusammengesetzte geometrische Beleuchtung*, von denen erstere wohl auch die *absolute* oder *wahre* und die letztere die *relative* oder *scheinbare* Beleuchtung genannt wird*).

Wir werden nun im folgenden zunächst die wahre oder einfache geometrische Beleuchtung und dann auch das Wichtigste der scheinbaren oder zusammengesetzten geometrischen Beleuchtung in möglichst elementarer, leichtverständlicher Form behandeln.

---

*) Diese beiden Beleuchtungsarten sind von *Burmester* in seinem 1871 erschienenen Werke „Theorie und Darstellung der Beleuchtung“ auf meisterhafte Weise mit Hilfe der höhern Analysis und der neuern Geometrie behandelt worden. Die wahre Beleuchtung dagegen ist schon früher von *Tilscher* in seinem 1862 erschienenen Werke „Die Lehre der geometrischen Beleuchtungskonstruktionen“ rein geometrisch nach der Methode der gewöhnlichen darstellenden Geometrie bearbeitet worden. Das erstere Werk setzt die Kenntnis der höhern Mathematik voraus und ist deshalb für die untern und mittlern Schulen unzugänglich, und das andere ist seiner Methode und Behandlung nach etwas schwerfällig und nicht leicht verständlich, daher für die Schüler dieser Anstalten ebenfalls nicht gut zu gebrauchen. Für diese ist nun das vorliegende Werkchen bestimmt, in welchem vorzugsweise ebenfalls nur die einfache geometrische Beleuchtung in möglichst elementarer, gemeinverständlicher Form behandelt ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

II.

Von der einfachen geometrischen oder wahren Beleuchtung.

(Fig. 24—46, Blatt 3—8.)

45. Als Grundlage der *einfachen geometrischen, absoluten oder wahren Beleuchtung* nehmen wir an, die Beleuchtung der Körper werde durch Sonnenlicht, also durch parallele Lichtstrahlen erzeugt und von einem Standpunkt aus wahrgenommen, von welchem die Seherichtung mit der Lichtrichtung zusammenfällt, der also in der Richtung der letztern im Unendlichen liegt (siehe § 38).

Gehen wir nun von der Beleuchtung einer Ebene aus, so wird diese bei einem gegebenen Lichtbündel am hellsten beleuchtet, wenn dieselbe zur Lichtrichtung senkrecht steht. Die Beleuchtungsintensität oder der Hellegrad einer solchen Ebene wird dann die absolute oder wahre Intensität des Lichtbündels genannt. Ist dagegen die Ebene zur Lichtrichtung desselben Lichtbündels schief, so nimmt nach früherem (§ 22) die Intensität oder Helle derselben mit dem Kosinus des Einfallswinkels oder mit dem Sinus des Neigungswinkels, den sie mit der Lichtrichtung bildet, ab, wie nun für die verschiedenen Flächen noch näher nachgewiesen werden soll.

46. Bezeichnet zu diesem Behufe ABCD (Fig. 23, Blatt 2) ein Lichtbündel, dessen wahre Intensität auf eine zur Lichtrichtung L senkrechte Ebene BC gleich J' und auf eine andere zu derselben schiefen Ebene BC' gleich J sein mag, so erhält jede der beiden Schnittflächen, deren Inhalte mit F und F' bezeichnet werden mögen, dieselbe Lichtmenge, und ihre Intensitäten werden sich daher umgekehrt wie ihre Inhalte verhalten, so daß man hat:

$$1)\quad J' : J = F' : F.$$

Bezeichnet man überdies den Einfallswinkel LEN mit α, also den Neigungswinkel LEC' mit $\beta = (90^0 - \alpha)$, so ist auch $\measuredangle\, ABC' = \alpha$ und $\measuredangle\, BC'C = \beta = (90^0 - \alpha)$ und daher:

2) $F = F' \cos\alpha = F' \sin(90^0 - \alpha)$, folglich:
$J' : J = F' : F' \cos\alpha = F' : F' \sin(90^0 - \alpha)$, oder $J' : J = 1 : \cos\alpha = 1 : \sin(90^0 - \alpha)$, woraus:

$$J = J' \cos\alpha = J' \sin(90^0 - \alpha) \qquad \text{(I)},$$

d. h. *die Beleuchtungsintensität einer ebenen Fläche ist proportional dem Kosinus des Einfallswinkels* α, *den die Lichtrichtung mit der Normale zu derselben bildet, oder proportional dem Sinus des Neigungswinkels* $\beta = (90^0 - \alpha)$, *den die Lichtrichtung mit der Ebene selbst macht.*

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

47. Denken wir uns die Ebene BC' so gedreht, daß der Winkel $CBC' = \alpha$ größer als 90^0 wird, so wird nach obiger Formel (I) die Beleuchtungsintensität J negativ, d. h. es kommt dann die hintere Seite der Ebene zur Beleuchtung. Eine solche negative Beleuchtungsintensität gewinnt eine wirkliche Bedeutung, wenn wir wie oben (§ 34) annehmen, die Ebene BC' werde nicht nur von einem direkten, sondern auch von einem reflektierten, indirekten Lichtbündel beleuchtet, der dem direkten gerade entgegengesetzt ist, im Vergleich mit diesem aber eine bedeutend schwächere Intensität besitzt. Diese Annahme wird dadurch gerechtfertigt, daß die Reflexbeleuchtung, welche das Sonnenlicht im Selbstschatten einer beleuchteten Fläche hervorbringt, vorzugsweise durch parallele Lichtstrahlen erzeugt wird, die den direkten Sonnenstrahlen entgegengesetzt, der Intensität nach aber merklich schwächer als diese sind.

48. Die obige Gleichung (I) drückt zugleich auch das Beleuchtungsgesetz für die krummen Flächen aus, indem man alsdann die Ebenen BC und $B'C'$ einfach als Tangierungsebenen an die betreffenden Flächenelemente der krummen Fläche zu betrachten hat, deren Beleuchtungsintensitäten J' und J sind. J' ist dann nämlich die Beleuchtungsintensität desjenigen Flächenelementes, worauf die Lichtrichtung senkrecht ist, und J die Intensität desjenigen Flächenelementes, dessen Normale mit der Lichtrichtung den Winkel α bildet, oder dessen Tangierungsebene mit der Lichtrichtung den Winkel $\beta = (90^0 - \alpha)$ macht.

49. Handelt es sich nun um die Beleuchtung und Schattierung irgend einer gesetzmäßigen krummen Fläche, so hat man für J eine Reihe von stetig aufeinanderfolgenden Beleuchtungsintensitäten anzunehmen und die entsprechenden Isophoten oder Lichtkurven auf derselben zu bestimmen. Für unsern Zweck genügt die proportionale Bestimmung der Beleuchtungsintensität. Deshalb können wir die absolute oder wahre Intensität J' des Lichtbündels als Einheit annehmen und dann ist:

$$J = \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \qquad \text{(II)},$$

d. h. die Beleuchtungsintensität irgend eines Flächenelementes der krummen Fläche ist alsdann bestimmt durch den Kosinus des Winkels α, der die Normale desselben mit der Lichtrichtung bildet, oder durch den Sinus des Winkels $\beta = (90^0 - \alpha)$, den die Tangierungsebene an dasselbe mit der Lichtrichtung macht.

50. Um nun ein vollständiges Isophotensystem einer beleuchteten krummen Fläche zu erhalten, nach welchem die Abstufung der Tusch- oder Farbentöne leicht ausgeführt werden kann, bestimmen wir eine beliebige, aber ausreichende Anzahl Isophoten oder Lichtkurven derart, daß der Beleuchtungsunterschied je zweier aufeinanderfolgender Isophoten derselbe ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir geben daher dem J der Reihe nach die Werte:

$$J = 0, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \pm \frac{3}{n}, \ldots \pm \frac{n-1}{n}, \pm 1 \quad \text{(III)}.$$

Diese Intensitätenreihe, in der n eine ganze positive Zahl ist, liefert ein vollständiges, regelmäßiges, aus $(n+1)$ Isophoten bestehendes Isophotensystem.

51. In der Praxis genügt im allgemeinen $n = 5$ bis 10 für die Auftragung der Tusche und Farbentöne. Wir werden im folgenden gewöhnlich $n = 10$ annehmen. Und dann hat man:

$$J = 0, \pm 0{,}1, \pm 0{,}2, \pm 0{,}3, \pm 0{,}4 \ldots, \pm 0{,}9, \pm 1 \quad \text{(IV)},$$

d. h. ein aus elf Isophoten bestehendes Isophotensystem, wobei das obere Zeichen (+) sich auf die Isophoten des direkt beleuchteten und das untere Zeichen (—) sich auf jene des indirekt durch Reflexlicht beleuchteten Teiles der krummen Fläche bezieht.

Die Isophoten oder Lichtlinien selbst sollen in gleicher Ordnung wie die Beleuchtungsintensitäten mit 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ... ± 9, ± 10 bezeichnet werden, so daß stets die dunkelste mit 0 und die hellste Isophote im direkt beleuchteten Flächenteil mit $+10$ und im indirekt beleuchteten Flächenteil mit -10 bezeichnet wird.

52. Von allen Isophoten dieses Systems zeichnet sich diejenige, welche der Beleuchtungsintensität $J = 0$ entspricht und selbst mit 0 bezeichnet wird, besonders aus. Dieselbe giebt die Grenzlinie zwischen Schatten und Licht und fällt deshalb mit der früher (§ 6 und 13) definierten Trennungslinie zwischen Licht und Schatten zusammen. Sie wird daher auch nur die Grenzisophote genannt.

53. Die übrigen Isophoten ± 1 bis ± 10 des Systems bestehen im allgemeinen aus zwei durch die Grenzisophote getrennten Raumkurven, von denen die eine, wie bereits erwähnt, im direkt beleuchteten Flächenteil, die andere im Schattenteil oder in dem durch Reflexlicht erhellten Flächenteil auftritt. Die erstere entspricht jeweilen der positiven, die andere der negativen Beleuchtungsintensität.

54. Die Beleuchtungsintensität $J = \pm 1$ ist nur möglich, wenn gewisse Bedingungen in Bezug auf Lage und Gestalt der beleuchteten krummen Fläche erfüllt sind. Sie entspricht den Punkten oder Linien, wo die Lichtrichtung sowohl des direkten als des reflektierten Lichtes die Fläche senkrecht trifft. Wir wollen sie die absoluten positiven und negativen Lichtpole resp. Lichtlinien nennen. Sie werden sonst auch nur die hellsten Punkte resp. die hellsten Linien geheißen. Bei der Kugel sind es diejenigen Punkte, in welchen der durch den Mittelpunkt gehende Lichtstrahl die Kugeloberfläche durchschneidet. Bei den Cylinder- und Kegelflächen sind die hellsten Linien gerade Linien, und zwar Erzeugungs- oder Mantellinien, in welchen diejenige Ebene, die zur Lichtrichtung parallel ist und zugleich durch die Achse geht oder senkrecht zur zugehörigen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tangierungsebene steht, die Flächen schneidet. Bei den kreisförmigen Cylinder- und Kegelflächen und überhaupt bei allen Umdrehungsflächen liegen die hellsten Punkte und Linien immer in derjenigen Ebene, die zur Lichtrichtung parallel ist und zugleich durch die Drehachse geht; sie sind ebenfalls die Durchschnittslinien dieser Ebene mit der betreffenden krummen Fläche. Diese hellsten Punkte und Linien haben aber nur dann die Beleuchtungsintensität $J = \pm 1$, wenn, wie gesagt, die Lichtstrahlen der betreffenden Punkte und Linien zur krummen Fläche senkrecht sind, also mit den zugehörigen Normalen zusammenfallen. Im andern Falle, wenn die Lichtrichtung mit der Normale einen schiefen Winkel bildet, ist die Beleuchtungsintensität der hellsten Punkte und Linien kleiner als die Maximalintensität $J = \pm 1$, und um so kleiner, je größer jener Winkel ist, je schiefer also die Lichtstrahlen in den betreffenden Punkten zur Normale derselben auffallen. In diesem letztern Falle muß man dann vor allem die Maximalpunkte wie den Anfangspunkt oder Nullpunkt der Intensitätsskale des angenommenen Isophotensystems bestimmen.

55. Dazu denken wir die beleuchtete krumme Fläche auf drei zu einander rechtwinklige Koordinatenachsen Z, X, Y bezogen, von denen die Ebene ZX mit der Lichtrichtung zusammenfällt und die Ebene XY als Grundrißebene angenommen wird. Der Winkel, den die Lichtrichtung mit der Achse X bildet, ist dann zugleich der horizontale Neigungswinkel α des einfallenden Lichtstrahles, und mittelst dieses Winkels sind alsdann vor allem der Nullpunkt und die Maximalpunkte der Intensitätsskale zu bestimmen. Die Strecke der Achse X, welche durch den Anfangspunkt oder Nullpunkt und die Maximalpunkte begrenzt ist, werden wir dann stets als Maßstab (Skala) für die Intensitätenreihe des angenommenen Isophotensystems annehmen. Im folgenden sollen nun zunächst die Isophoten für die Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen nach der gewöhnlichen orthogonalen Darstellung bestimmt werden.

a) Beleuchtung der Cylinderflächen.

(Fig. 24—29, Blatt 3—4.)

56. Bei einer Cylinderfläche sind die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität, wie leicht einzusehen, Erzeugungslinien oder Mantellinien. Denn denkt man sich, wie schon oben (§ 27, Fig. 16) angedeutet worden ist, längs einer solchen an die Cylinderfläche eine Tangierungsebene oder durch dieselbe eine zu dieser senkrechte Normalebene gelegt, so bilden diese Ebenen mit dem einfallenden Lichtstrahl in allen Punkten ihrer Durchschnittslinie oder der gedachten Erzeugungslinie denselben Winkel und ist deshalb diese in ihrer ganzen Ausdehnung von gleicher Lichtintensität. Dasselbe gilt auch aus gleichem Grunde für die Kegelflächen. Um daher die Isophoten einer Cylinder- oder Kegelfläche zu bestimmen, suchen wir zuerst die Durch-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schnittspunkte derselben mit der Leitlinie oder der Normaldirektrix; denn damit sind dann auch die Isophoten ihrer Lage nach selbst bestimmt.

57. Ist nun die Cylinderfläche eine zur Horizontal- oder XY-Ebene senkrechte Kreiscylinderfläche, bei welcher das Licht senkrecht zur Erzeugungslinie einfällt, wie in Fig. 24, Blatt 3, so erhält man die Isophoten nach § 27 wie folgt.

Man teile den Radius $AC = BC$ in zehn gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Senkrechte zur Achse XX, die mit der Horizontalprojektion l der Lichtrichtung zusammenfällt. Diese Senkrechten werden dann den Kreisumfang in Punkten durchschneiden, welche die Isophotenpunkte oder die Durchschnittspunkte der Isophoten mit der Grundriß- oder XY-Ebene sind. Und projiziert man diese Punkte wie 0, $+2$, -2, $+5$, -5, ... in die Projektionsachse und errichtet die zugehörigen Senkrechten 00, $+2\,+2$, $-2\,-2$, $+5\,+5$, $-5\,-5$, ..., so sind dies die verlangten Aufrißprojektionen der Isophoten. Hierbei stellt 00 die sichtbare Grenzisophote oder die dunkelste Schattenlinie und $+10\,+10$ die der Maximalintensität ensprechende Isophote oder die absolut hellste Lichtlinie der Cylinderfläche dar.

58. Denkt man sich die Isophotenpunkte $+8$ und -8 mit dem Centrum C durch Radien wie $+8\,C$ und $-8\,C$ verbunden, so bilden diese einen Normalenbüschel, dessen Strahlen mit der Achse X dieselben Winkel bilden, welche dieselben mit den zugehörigen Lichtstrahlen machen. Diese Winkel haben wir bereits oben (§ 24) für den Ebenenbüschel (siehe Fig. 15) unter α für dieselbe Intensitätenreihe angegeben.

In Fig. 11, Blatt 1, haben wir den Normalenbüschel für die Richtung XX, das Centrum c und den Neigungswinkel α noch besonders konstruiert. Man ziehe in der Ebene XY parallel der Achse X eine beliebige Gerade cl, lege an dieselbe den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung mit ihrer horizontalen Projektion, so daß $\measuredangle\, a c a_1 = \alpha$, beschreibe mit beliebigem Radius ca einen Kreis, errichte in a auf ca eine Senkrechte, welche ca_1 in a_1 schneidet, schlage ca_1 nach ca_2, teile diese Strecke in zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten Senkrechte, welche den Kreisumfang in Punkten schneiden, wodurch die Strahlen des Normalenbüschels bestimmt sind.

Ist der Neigungswinkel $\alpha = 0^0$, so teilt man den Radius ca unmittelbar, wie in Fig. 24, in zehn gleiche Teile und fährt fort, wie vorhin. Je größer dagegen der Neigungswinkel α, desto mehr Punkte der Skale ca_2 fallen außerhalb des Kreisumfanges aebd.

Denken wir uns ebenso an die Isophotenpunkte des Kreisumfanges Tangenten wie $+8\,T$ und $-8\,T$ (Fig. 24) gezogen, so bilden diese, parallel mit sich selbst an einen Punkt der Achse X übertragen, einen Tangentenbüschel, dessen Strahlen mit dieser Achse dieselben Winkel bilden, welche sie mit den zugehörigen Lichtstrahlen machen, und welche wir oben beim Ebenenbüschel

(§ 24, Fig. 15) mit β oder ($90^0 - \alpha$) bezeichnet und für die Zehnteilung unserer Intensitätenreihe speciell angegeben haben. Denkt man sich den Tangentenbüschel um einen rechten Winkel gedreht, so sind dessen Strahlen mit den Strahlen des Normalenbüschels parallel und fallen dieselben für den gleichen Anfangspunkt mit diesem zusammen.

Aus dem Vorhergehenden hat sich nun ergeben, daß die Bestimmung der Isophotenpunkte und der Isophoten selbst an die Cylinderfläche auf die Konstruktion des Normalen- oder Tangentenbüschels zurückgeführt ist.

59. Soll umgekehrt die Beleuchtungsintensität einer gegebenen Erzeugenden oder eines Punktes der Leitenden bestimmt werden, so projizieren wir letztern senkrecht auf die Beleuchtungsskale. Der auf dieser erhaltene Durchschnittspunkt giebt dann unmittelbar die Beleuchtungsintensität des gegebenen Punktes oder der gegebenen Erzeugenden auf der Cylinderfläche an.

60. Bildet die Lichtrichtung mit der Erzeugenden der zur XY-Ebene senkrechten kreisförmigen Cylinderfläche einen beliebigen spitzen Winkel α, so ist die Beleuchtung natürlich schwächer, als wenn sie zu derselben senkrecht wäre. In diesem Fall erhält man die Isophoten der Cylinderfläche, indem man für das Centrum c, die Richtung cl und den Neigungswinkel α, den Normalenbüschel wie oben (§ 58, Fig. 11, Blatt 1) konstruiert und dann wie in § 57 fortfährt.

Sind nämlich (l, l′), Fig. 25, Blatt 3, die Projektionen der mit der Ebene XZ zusammenfallenden Lichtrichtung, so suche man vor allem nach einer der bekannten Methoden, z. B. durch Umlegung in die XY-Ebene oder Grundrißebene, den horizontalen Neigungswinkel $acA_1 = \alpha$ (wobei $aA_1 \perp ac$ und $= a_1a'$), schlage cA_1 nach $c + 10$ und $c - 10$ und teile jede der beiden Strecken $c + 10$ und $c - 10$ in zehn gleiche Teile, durch die Teilpunkte der auf diese Weise erhaltenen Intensitätsskale $+10$ -10, ziehe hierauf Senkrechte zur letztern, so werden diese den Kreisumfang oder die Normaldirektrix der Cylinderfläche in den verlangten Isophotenpunkten wie $+5$ und -5, ... schneiden, und durch Projektion dieser letztern in die Vertikalebene erhält man in $+5$ $+5$, -5 -5, ... die Aufrißprojektionen der Isophoten selbst.

61. Man sieht, daß auch hier die Bestimmung der Isophotenpunkte auf die Konstruktion des dem Neigungswinkel α und der Richtung cl entsprechenden Normalenbüschels zurückgeführt ist, und daß sich diese Konstruktion von der erstern (Fig. 24) nur dadurch unterscheidet, daß die Intensitätsskale eine andere und zwar eine im Verhältnis $cA_1 : ca$ oder von $\sec \alpha : 1$ größere ist, daß daher auch die einzelnen Teile derselben größer werden, so daß immer eine gewisse Anzahl derselben außerhalb a resp. b zu liegen kommen, welche Punkte der Beleuchtungsintensität $+\cos \alpha$ resp. $-\cos \alpha$, der relativ größten Beleuchtungsintensität der Cylinderfläche entsprechen. Dem Punkt c, dem Nullpunkt der Skale, entsprechen auch hier die mit der Ebene YZ zusammenfallenden Grenzisophoten, von denen jedoch nur die vordere 00 sichtbar ist. Jedem Teilpunkt der Intensitätsskale, welcher nicht außerhalb des Kreisumfanges liegt, d. h. jeder Beleuchtungsintensität, welche die Größe $+\cos\alpha$ resp. $-\cos\alpha$ nicht übertrifft, entspricht ein zur Intensitätsskale symmetrisch liegendes Strahlenpaar des zugehörigen Normalenbüschels und folglich auch zwei zur selben Skale symmetrisch gelegene Isophotenpunkte. Die hellste Isophote $+8{,}2$ entspricht dem Durchschnittspunkt a und hat die Intensität 0,82 und ist also merklich schwächer beleuchtet als die hellste Isophote $+10$ mit der Intensität 1 der Cylinderfläche in Fig. 24.

62. Die vorige Konstruktion der Isophotenpunkte kann aber auch auf andere Weise durch Zerlegung des schiefen Lichtstrahles (l, l') in zwei zu einander senkrechte Seitenstrahlen, von denen der eine zur Achse X und der andere zur Achse Z parallel ist, erklärt werden.

Wie man nämlich zwei oder mehrere Lichtbündel oder Lichtintensitäten durch das Parallelogramm der Lichtstrahlen in einen mittlern Lichtbündel zusammensetzen kann, so läßt sich auch ein Lichtbündel oder ein Lichtstrahl wie eine Kraft durch das Strahlenparallelogramm in zwei oder mehrere Lichtstrahlen zerlegen (§ 5). So kann man im vorliegenden Fall (Fig. 25) den schiefen Lichtstrahl (l, l'), der in die Grundrißebene nach L umgelegt worden ist, in zwei rechtwinklige Seitenstrahlen lx, lz nach der Richtung der Achsen X und Z zerlegt denken, so daß ersterer zu den Erzeugenden der Cylinderfläche senkrecht und der andere parallel zu ihnen ist. Nehmen wir die Intensität des schiefen Lichtstrahles oder die Diagonale cA_1 des in die Grundrißebene XY umgelegten Strahlenparallelogramms caA_1C_1 als Einheit an, so ist die Intensität des auf den Erzeugenden der Cylinderfläche senkrecht stehenden und mit der X-Achse zusammenfallenden Seitenstrahles $lx = ca = cA_1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$ und die Intensität des mit den Erzeugenden der Cylinderfläche parallelen und auf der X-Achse senkrecht stehenden oder mit der Z-Achse parallelen Seitenstrahles $lz = cC_1 = aA_1 = cA_1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$. Da nun aber der letztere Seitenstrahl auf die Beleuchtung der Cylinderfläche keinen Einfluß hat, weil er mit den Erzeugenden parallel ist, so richtet sich die Beleuchtung der Cylinderfläche einzig nach der Intensität $ca = \cos\alpha$ des erstern Seitenstrahles und wird dieser auf derselben die ganz gleiche Beleuchtung hervorbringen, wie der schiefe Strahl mit der Intensität $aA_1 = 1$.

63. Denkt man sich die Cylinderfläche oben durch eine Kreisfläche geschlossen, so ist diese als ebene Fläche überall gleich stark beleuchtet, und diese Beleuchtung richtet sich einzig und allein nach der Intensität $cC_1 = \sin\alpha$ des Seitenstrahles lz. Denn darauf kann der andere Seitenstrahl $lx = ca = \cos\alpha$ keinen Einfluß haben, weil er zu derselben parallel ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

64. Ist die kreisförmige Cylinderfläche, wie in Fig. 26, Blatt 4, auf der Vertikalebene senkrecht und sind 1, 1′, die Projektionen der Lichtrichtung, beliebig gegeben, so erhält man die Projektionen der Isophoten auf ganz gleiche Weise, wie dies im vorigen Fall (§ 60, Fig. 25) gezeigt worden ist. Der Unterschied gegen diesen Fall besteht nur darin, daß die Projektionen l und l′ der Lichtrichtung mit der Projektionsachse beliebige Winkel bilden, während sie in Fig. 25 mit ihr Winkel von 45° machen. Man bestimmt daher wiederum zuerst den in die Vertikalebene oder in die Ebene der Normaldirektrix umgelegten vertikalen Neigungswinkel $a' C' A'_1 = \alpha$, macht $C' + 10 = C' - 10 = C' A'_1$, teilt jede dieser Strecken in zehn gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte darauf. Die Punkte, wo diese den Kreisumfang durchschneiden, sind alsdann die Isophotenpunkte. Projiziert man dieselben horizontal in die Achse und zieht die zugehörigen Senkrechten, so erhält man die Grundrißprojektionen der Isophoten.

65. Ist die kreisförmige Cylinderfläche so gelegen, daß die Erzeugenden parallel und die Ebenen der Normaldirektrix senkrecht zu beiden Projektionsebenen sind (Fig. 27), so muß man, um die Projektionen der Isophoten zu erhalten, die Basis oder Normaldirektrix, sowie den Neigungswinkel α des Lichtstrahles (l, l′) mit derselben in eine der beiden Projektionsebenen, z. B. in die Vertikalebene, umlegen, alsdann die Intensitätsskale $C' + 10 = C' - 10 = C' A'_1$ bestimmen und einteilen 2c. wie im vorigen Fall. Indem man die Normaldirektrix samt den Isophotenpunkten hierauf wieder in die ursprüngliche Lage zurückbringt, so erhält man damit auch die verlangten Projektionen der Isophoten der Cylinderfläche selbst.

Wie man sieht, ist aus Platzmangel die vertikale Umlegung des Grundkreises mit der Vertikalprojektion des Grundkreises der Cylinderfläche in Fig. 26 zusammenfallend angenommen.

66. Es sei ferner (siehe Fig. 28) die Kreiscylinderfläche auf einer Ebene PQR' senkrechtstehend, die ihrerseits beliebig schief zur Horizontalebene, aber senkrecht zur Vertikalebene ist; ebenso sei auch die Lichtrichtung (l, l′) beliebig schief zu den beiden Projektionsebenen gerichtet; man soll wiederum die Projektionen der Isophoten der Cylinderfläche bestimmen.

Dazu denke man sich wieder die Cylinderfläche auf drei zu einander senkrechte Koordinatenachsen Z, X, Y bezogen, von denen die Ebene XZ mit der Lichtrichtung (l, l′) und die Ebene XY mit der Ebene PQR', in welcher die Basis oder Normaldirektrix der Cylinderfläche gelegen ist, zusammenfällt.

Um in diesem Fall die Projektionen der Isophoten zu erhalten, denke man sich wieder durch die Lichtrichtung (l, l′) und die Achse (cf, c′f′) der Cylinderfläche (als Z-Achse) eine Ebene gelegt, die Durchschnittslinie derselben mit dem in der Ebene PQR' gelegenen

Grundkreis, sowie den Neigungswinkel α, welchen die Lichtrichtung mit letzterer bildet, bestimmt. Damit läßt sich alsdann die Konstruktion der Isophotenpunkte, womit die verlangten Projektionen der Isophoten selbst bestimmt sind, auf gleiche Weise wie in den vorigen Fällen weiter bestimmen.

67. Bei der wirklichen Ausführung ist es am besten, den in der Ebene PQR' gelegenen Grundkreis (als Normaldirektrix der Cylinderfläche) in eine der beiden Projektionsebenen umzulegen und zur Isophotenkonstruktion zu benützen.

Denken wir uns denselben in die Horizontalebene umgelegt, so kommt der Mittelpunkt (c, c') nach C_1, der Durchmesser $(ab, a'b')$ nach $A_1 B_1$ und der Durchmesser $(de, d'e')$ nach $D_1 E_1$ zu liegen. Um nun weiter die Richtung, Größe und Gestalt des Normalenbüschels dieses umgelegten Kreises, wodurch die Isophotenpunkte der Cylinderfläche bestimmt sind, zu erhalten, suche man die Spuren (G, g') und (h, H') der gegebenen Lichtrichtung, sowie die Horizontalspur (J, i') der zur Vertikalebene parallelen Achse $(cf, c'f')$. Die Verbindungslinie KO der beiden Horizontalspuren G und J ist dann der Horizontalriß, und die Verbindungslinie $M'O$ des Punktes O und der Vertikalspur H' ist der Vertikalriß der durch jene beiden Linien gelegten Hilfsebene. Ziehen wir hierauf Kc und $Tc \perp KO$, gehörig verlängert, so sind dies die Projektionen cx und cy der zu einander senkrechten Achsen CX und CY auf der Ebene PQR', in welcher die Normaldirektrix der Cylinderfläche gelegen ist. Zieht man daher KC_1 und TC_1, so sind dies die in die Horizontalebene umgelegten Achsen $C_1 X_1$ und $C_1 Y_1$, durch welch erstere nun die Richtung des Normalenbüschels bestimmt ist, die den umgelegten Grundkreis in N_1 durchschneidet. Bringen wir diesen Punkt nach (n, n') in die ursprüngliche Lage der Normaldirektrix zurück, und bestimmen wir die wahre Größe $n'n'_1$ des Linienstückes nn_1, indem wir den Punkt n_1 vertikal nach n_1' projizieren und mit n' verbinden, und machen $N_1 N_2 \perp C_1 N_1$ und $= n'n'_1$, so ist $\sphericalangle N_1 C_1 N_2$ der in die Horizontalebene umgelegte Neigungswinkel α, welchen die Lichtrichtung (l, l') mit der Achse $(cx, c'R')$, die in der Ebene PQR' der Normaldirektrix liegt, bildet. Macht man nun $C_1 + 10 = C_1 - 10 = C_1 N_2$, teilt jede dieser Strecken in 10 gleiche Teile, errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu $C_1 X_1$, so schneiden diese den umgelegten Kreisumfang in den verlangten Isophotenpunkten. Bringt man endlich diese in die ursprüngliche Lage des Grundkreises $(aebd, a'e'b'd')$ zurück, und zieht durch dieselben Parallelen mit der Achse $(cf, c'f')$, so sind damit auch die Projektionen der Isophoten erhalten.

68. Denkt man sich aber den Grundkreis oder die Normaldirektrix der Cylinderfläche in die Vertikalebene umgelegt, so kommt der Mittelpunkt (c, c') nach C'_1 (wobei $c'C'_1 = cc_1$), der Durchmesser $(ab, a'b')$ nach $A'_1 B'_1$ und der Durchmesser $(de, d'e')$ nach $D'_1 E'_1$

zu liegen. Und zieht man $M'C'_1$ und dazu $U'C'_1$ senkrecht, so sind dies die auf die Vertikalebene umgelegten Achsen $C'_1Y'_1$ und $C'_1X'_1$, von denen die erstere die Richtung der Intensitätsskale mit dem relativ hellsten Punkt N'_1 bestimmt. Bringt man letztern Punkt in die ursprüngliche Lage nach (n', n) zurück, und macht man wiederum $N'_1N'_2 = n'n'_1$, so ist $\sphericalangle N'_1C'_1N'_2$ die wahre Größe des Neigungswinkels α, welchen die Lichtrichtung (l, l') mit der in der Ebene PQR' gelegenen Achse CX bildet, wodurch nun auch die Größe der Intensitätsskale $C'_1N'_2 = C'_1 + 10 = C'_1 - 10$ und damit alles, was zur weitern Konstruktion der Isophotenpunkte und der Projektionen der Isophoten selbst nötig ist, bekannt ist.

69. Die Umlegungen des Grundkreises oder der Normaldirektrix der Cylinderfläche sind indessen zur Konstruktion der Isophoten derselben nicht gerade nötig, indem diese auch direkt mittels der Grundrißprojektion $aebd$ der in der Ebene PQR' gelegenen Normaldirektrix gefunden werden können, wenn nur die Richtung und Größe der umgelegten Intensitätsskale bestimmt ist. Denn ist der umgelegte Mittelpunkt C_1, die Richtung CK_1 und darauf die Größe der Intensitätsskale $C_1 + 10 = C_1 - 10 = C_1N_2$, wie vorhin gefunden, so bringe man die Punkte $+10$ und -10 auf KX_1 durch Parallelen mit cC_1 nach den gleichnamigen Punkten auf Kx, teile die Strecken $c + 10$ und $c - 10$ je in 10 unter sich gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallelen mit der Achse cy (die auf OK senkrecht steht), so schneiden diese den Umfang der elliptischen Grundprojektion $aebd$ des in der schiefen Ebene PQR' gelegenen Grundkreises unmittelbar in den verlangten Isophotenpunkten, die sofort auch in die Vertikalebene projiziert werden können. Mit den Projektionen der Isophotenpunkte sind dann aber auch die Projektionen der Isophoten selbst bestimmt, indem man nur durch dieselben mit den gleichnamigen Projektionen der Achse $(cf, c'f')$ Parallelen zu ziehen hat.

70. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß der umgelegte Grundkreis $A_1E_1B_1D_1$ und die elliptische Grundrißprojektion $aebd$ desselben affine Figuren sind, deren Affinitätsachse der Horizontalriß PQ ist. Infolgedessen schneiden sich die gleichnamigen Achsen C_1X_1, cx und C_1Y_1, cy, gehörig verlängert, je in einem und demselben Punkte K, resp. T der Affinitätsachse, was zugleich zur Probe für die Richtigkeit der Konstruktion dienen kann.

71. Die senkrechte Kreiscylinderfläche, deren Isophoten gesucht werden sollen, sei endlich, wie in Fig. 29, Blatt 3, auf einer Ebene PQR' stehend, die schief zu beiden Projektionsebenen ist. In diesem Fall ist der Gang der Auflösung derselbe wie im vorigen Fall. Man lege durch die gegebene Lichtrichtung (l, l'), deren Projektionen l und l' mit der Projektionsachse gleiche Winkel von 45^0 bilden, und die Achse $(cs, c's')$ als Z-Achse eine Hilfsebene, welche die Cylinderfläche in zwei Er-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zeugenden schneidet, die mit den hellsten Linien des direkten und reflektierten Lichtes zusammenfallen. Indem man die Spuren F und J′ der Achse (cs, c′s′) und die Spuren G und H′ des gegebenen Lichtstrahles (l, l′) sucht und die gleichnamigen miteinander verbindet, so erhält man in FGO den Horizontalriß und in J′H′O den Vertikalriß der durch diese beiden Geraden gelegten Hilfsebene.

Denkt man sich nun noch die Cylinderfläche durch eine Hilfsebene geschnitten, die durch die Achse (cs, c′s′) geht und zum Riß PQ wie zur Horizontalebene senkrecht ist, und die Schnittfigur in die Horizontalebene umgelegt, so ist, wenn $cc'' \perp cs$ und $= c_1c'$, c″ mit p verbunden und $c''d'' = c''e''$ dem Radius $ac = r$ des Grundkreises, sowie c″s″ der Höhe h der Cylinderfläche gleich gemacht wird*), e″d″ die Projektion des Grundkreises und c″s″ die Projektion der Achse der Cylinderfläche auf die in pc zur Horizontalebene senkrecht gedachte Hilfsebene. Damit und mittels der sogen. Hauptlinien lassen sich nun die Projektionen der Cylinderfläche leicht vervollständigen.

Denkt man sich den Grundkreis in die Horizontalebene umgelegt, so kömmt der Mittelpunkt (c, c′, c″) nach C_1, der Durchmesser ab nach A_1B_1 und der Durchmesser de nach D_1E_1 (wobei $pC_1 = pc''$ und $C_1D_1 = C_1E_1 = c''d'' = c''e'' = ac$) zu liegen. Verbindet man alsdann C_1 mit K, so giebt die Verbindungslinie die Richtung der umgelegten Koordinatenachse C_1X_1 und damit zugleich die Richtung der Intensitätsskale an, welche den Umfang des umgelegten Grundkreises in N_1 durchschneidet. Zieht man durch diesen Punkt eine Parallele mit C_1c, welche cx und cl in n_1 und n_2 durchschneidet, sucht durch Umlegung in die Horizontalebene die wahre Größe $n''_1n''_2$ des Linienstückes $(n_1n_2, n'_1n'_2)$, macht $N_1N_2 = n''_1n''_2$, schlägt C_1N_2 nach $C_1 + 10$ und $C_1 - 10$, teilt jede dieser Strecken in 10 gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu C_1X_1, so schneiden diese den Umfang des in die H.E. umgelegten Grundkreises in den verlangten Isophotenpunkten, die nun noch, um die Projektionen der Isophoten selbst zu erhalten, in die ursprüngliche Lage des in der Ebene PQR′ gelegenen Grundkreises, in welcher er sich als die Ellipse aebd und a′e′b′d′ darstellt, zurückgebracht werden müssen.

72. Will man auch hier die Projektionen der Isophoten direkt mittels der Grundrißprojektion aebd erhalten, so bringe man, nachdem man wie vorhin die Richtung C_1X_1 und die Größe $C_1 + 10$ und $C_1 - 10$ der in die H.E. umgelegten Intensitätsskale gefunden hat, die Maximalpunkte $+10$ und -10 auf KX_1

*) Die Höhe $c''s'' = h$ konnte jedoch aus Platzmangel nicht ganz aufgetragen werden. Man muß deshalb den Punkt s″ auf c″s″ so weit auswärts gelegen denken, daß er, parallel zu PQ projiziert, auf cz die richtige Horizontalprojektion s angiebt, und, in die V.E. übertragen, die zugehörige Projektion s′ liefert.

nach $+10$ und -10 auf Kx, teile $c + 10$ und $c - 10$ je in 10 unter sich gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte mit cy ($\perp$ zu KF) Parallelen, so wird die Ellipse a e b d in den verlangten Horizontalprojektionen der Isophotenpunkte geschnitten. Indem man diese dann noch in die Vertikalebene auf den Umfang der Ellipse a′ e′ b′ d′ projiziert und durch diese Punkte horizontal und vertikal Parallelen mit der Achse (cs, c′s′) zieht, so sind auch die Projektionen der Isophoten selbst gefunden.

73. Ganz auf dieselbe Weise könnte man auch zuerst die Umlegung des Grundkreises in die V.E. und dessen Isophotenpunkte bestimmen, wie durch Hilfslinien angedeutet ist, hier aber nicht mehr weiter erklärt werden soll, da die Erklärung für jeden, der die vorige Konstruktion verstanden, wohl überflüssig ist.

74. Hierbei sind die Figuren $A_1 E_1 B_1 D_1$ und a e b d, sowie $A'_1 E'_1 B'_1 D'_1$ und a′ e′ b′ d′ wiederum affin und in affiner Lage, und für erstere ist PQ und für letztere ist PR′ die Affinitätsachse. Infolgedessen treffen sich die verwandten Linien beider affinen Figuren, gehörig verlängert, je in einem und demselben Punkte der Affinitätsachse, so z. B. $C_1 X_1$ und cx in K, $C_1 Y_1$ und cy in T, $C'_1 X'_1$ und c′x′ in M′ ꝛc. Und diese Eigenschaft läßt sich dann auch bei der Konstruktion, sei es als Probe ihrer Richtigkeit, sei es zur Vereinfachung derselben, nützlich verwenden.

b) Beleuchtung der Kegelflächen.

(Fig. 30—32, Blatt 5.)

75. Wie schon oben (§ 56) bei der Beleuchtung der Cylinderflächen angegeben worden ist, sind auch bei jeder Kegelfläche die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität Erzeugungslinien oder Mantellinien. Denn die durch eine jede solche Gerade gelegte Tangierungsebene oder Normalebene bildet in jedem Punkt derselben mit dem einfallenden Lichtstrahl denselben Winkel und ist demnach auch jede Erzeugende ihrer ganzen Länge nach von gleicher Lichtintensität und daher eine Isophote. Um die Isophoten einer Kegelfläche zu erhalten, hat man also nur die Isophotenpunkte des Grundkreises zu suchen und dieselben mit der Spitze der Kegelfläche zu verbinden.

76. Ist nun in Fig. 30 eine zur H.E. senkrechte kreisförmige Kegelfläche gegeben, deren Seite oder Erzeugende zur gegebenen Lichtrichtung (l, l′) beliebig schief ist, so erhalten wir die Isophotenpunkte des Grundkreises und damit die Isophoten der Kegelfläche selbst wie folgt.

Wir bestimmen vor allem den Neigungswinkel α, den die Lichtrichtung (l, l′) mit ihrer Horizontalprojektion l (als X-Achse) bildet. Macht man also $\overline{AA_1} \perp \overline{CA}$ und $= a'a'_1$, so ist $\sphericalangle ACA_1$ der in die Horizontalebene umgelegte Neigungswinkel α, und, da die beiden Projektionen l und l′ der Lichtrichtung mit der Projektionsachse Winkel von 45^0 machen, so beträgt nach früherem der Neigungswinkel $\alpha = 35^0 16'$.

Im weitern ziehen wir $\overline{f'g'} \perp \overline{f's'}$, machen $\overline{Ck} = \overline{f'g'}$ und $\overline{Ci} = \overline{c'g'}$, errichten in k und i Senkrechte, welche den umgelegten Lichtstrahl $\overline{CL_1}$ in K_1 und J_1 durchschneiden, und tragen $\overline{iJ_1}$ von C nach CN und cK_1 von N nach + 10 und — 10, so ist in N der Nullpunkt und in + 10 der absolute Maximalpunkt des direkten Lichtes und in — 10 der absolute Maximalpunkt des reflektierten Lichtes der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des Grundkreises der Kegelfläche gefunden. Teilt man endlich jede der beiden Strecken N + 10 und N — 10 in 10 gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu CA, so werden diese den Umfang des Grundkreises in den verlangten Isophotenpunkten schneiden. Und verbindet man noch dieselben mit dem Centrum C (als Grundrißprojektion der Kegelspitze), so erhält man die Grundrißprojektionen und durch Projektion derselben in die V.E. auch die Aufrißprojektionen der Isophoten der Drehungskegelfläche.

77. Das im vorigen angegebene Verfahren bei der Isophotenkonstruktion der Drehungskegelfläche (deren Grundkreis mit der H.E. zusammenfällt oder doch mit ihr parallel ist) findet seine Erklärung durch folgende Betrachtung.

Denkt man sich die Drehungskegelfläche durch eine zur Lichtrichtung (l, l′) parallele und durch die Drehachse (C, c′s′) gehende Ebene geschnitten, so geben die beiden Erzeugenden (AC, a′s′) und (BC, b′s′), in welchen die Kegelfläche von dieser Symmetrialebene geschnitten wird, die hellsten Isophoten sowohl im direkten als im indirekten oder reflektierten Lichte an. Ihre Grundrißprojektionen AC und BC, die beide sichtbar sind, fallen mit der Achse X oder der Beleuchtungsskale der Richtung nach zusammen, und von ihren Aufrißprojektionen ist nur die eine, a′s′, sichtbar, die andere, b′s′, dagegen unsichtbar.

Denkt man sich ebenso an die Kegelfläche beiderseits eine Ebene gelegt, welche durch die Lichtrichtung (l, l′) geht und dieselbe längs einer Erzeugenden berührt, so geben diese beiden Erzeugenden die dunkelsten Isophoten, die Grenzisophoten oder die Trennungslinien zwischen dem direkten und reflektierten Lichte an. Diese dunkelsten Isophoten direkt zu bestimmen, suche man die horizontale Spur E des durch die Spitze (C, s′) der Kegelfläche gelegten Lichtstrahles (CE, s′e′) und ziehe von diesem Punkte E an den Grundkreis der Kegelfläche die beiden möglichen Tangenten ED_1 und ED_2. Die Berührungspunkte D_1 und D_2 sind alsdann die Isophotenpunkte der beiden zugehörigen Grenzisophoten (D_1C, $d_1's'$) und (D_2C, d'_2s'), von denen beide im Grundriß sichtbar, im Aufriß jedoch nur die erstere (d'_1s') sichtbar, die letztere (d'_2s') aber unsichtbar ist. Verbindet man hierauf die Isophotenpunkte D_1 und D_2, so ist der Punkt N, in welchem die Verbindungslinie D_1D_2 die Richtungslinie AB der Beleuchtungsskale schneidet, der Nullpunkt der letztern.

78. Um auch noch den absoluten Maximalpunkt M der Beleuchtungsskale für die Konstruktion der übrigen Isophotenpunkte des Grundkreises der Kegelfläche zu erhalten, müssen wir vor allem, da sich dieselben nach der Beleuchtungsintensität der in der Symmetrie-Ebene gelegenen Kegelseite (A C, a′ s′) richten, die Beleuchtungsintensität für die angenommene Lichtrichtung (l, l′) bestimmen. Dazu suchen wir zuerst den horizontalen Neigungswinkel α, welcher die Lichtrichtung mit ihrer Grundrißprojektion l bildet, indem wir denselben — samt der zu den Isophoten symmetrisch gelegenen Lichtebene — in eine zur V.E. parallele Lage nach $f' c' A_1'$ umdrehen, also $c' f' = CF = CA$ und $f' A'_1 \perp c' f'$ und $= a' a'_1$ machen und c′ mit A'_1 verbinden. Nehmen wir nun wie früher bei der Drehungscylinderfläche (siehe § 62 und 63) die Linie $c' A'_1$ als Einheit der absoluten Beleuchtungsintensität des unter dem Winkel α zur H.E. geneigten Lichtstrahles $c' L'_1$ an, und denken wir uns diesen mittels des Strahlenparallelogramms $A_1' t' c' f'$ in einen horizontalen und in einen vertikalen Seitenstrahl zerlegt, so ist die Intensität des erstern durch $f' c' = A'_1 t'$ und die des andern durch $t' c' = f' A'_1$ ausgedrückt. Von diesen beiden Seitenstrahlen hat nun aber der vertikale oder der mit der Erzeugenden parallele Seitenstrahl einer vom Radius $c' f'$ hinzugedachten Kreiscylinderfläche auf die Beleuchtung dieser letztern keinen Einfluß, während der horizontale oder der zu den Erzeugenden der gedachten Cylinderfläche normale Seitenstrahl mit der Intensität $f' c'$ dieselbe ebenso beleuchtet, wie sie vom schiefen Seitenstrahl mit der Intensität $c' A_1'$ beleuchtet wird.

Machen wir nun weiter den Winkel $f' g' h' = f' c' A'_1 = \alpha$ und ziehen die Gerade $g' h'$, so ist klar, daß die nach (F C, f′ s′) umgedrehte schiefe Kegelseite (A C, a′ s′) und also auch die mit ihr zusammenfallende Erzeugende der schiefen Kreiscylinderfläche vom Radius $f' g'$ vom Lichtstrahl mit der Richtung und Intensität $g' h'$ ebenso beleuchtet wird, wie vom normalen Seitenstrahl mit der Intensität $f' g'$. Denkt man sich nun diese letztere Cylinderfläche in die vertikale Lage aufgerichtet, so daß der Mittelpunkt (C, g′) mit dem Centrum (C, c′) zusammenfällt, so kömmt das Strahlendreieck $f' g' h'$ nach $k'_1 c' K'_1$ zu liegen, und es ist dann notwendig $c' k'_1 = g' f'$ und $c' K'_1 = g' h'$, sowie auch $k'_1 K'_1 = f' h'$. Mit der Beleuchtungsintensität $g' h' = c' K'_1$ ist nun die Größe und Länge der Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion des Grundkreises der gegebenen Kegelfläche bestimmt, und indem man sie von dem bereits bestimmten Nullpunkt N aus auf der Richtungslinie der Beleuchtungsskale nach $+ 10$ und $- 10$ abträgt, sind auch $+ 10$ und $- 10$ die verlangten Maximalpunkte der Beleuchtungsskale des Kegelgrundkreises gefunden.

79. Der Nullpunkt N findet sich aber auch, indem man durch h′ mit $A'_1 c'$ eine Parallele oder von g′ auf $A'_1 c'$ eine Senkrechte zieht. Denn diese wie jene schneidet die Projektionsachse in n'_1, der vertikalen Um-

drehung des verlangten Nullpunktes. Macht man nun noch $c'i'_1 = c'g'$ und zieht $i'_1 J'_1$ senkrecht zu $c'f'$, so ist auch $i'_1 J'_1 = c'n'_1$. Denn da $\measuredangle\, c'g'n'_1 = \measuredangle\, c'n'_1 h' = \alpha$, so ist $c'n'_1 = c'g' \cdot \operatorname{tg} \alpha$, und da auch $i'_1 c' J'_1 = \alpha$, so ist ebenfalls $i'_1 J'_1 = c'i'_1 \cdot \operatorname{tag} \alpha$, und weil auch $c'i'_1 = c'g'$ gemacht worden ist, so ist folglich:

$$i'_1 J'_1 = c'n'_1 = c'g' \cdot \operatorname{tg} \alpha = S \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

worin S die Subnormale $c'g'$ bezeichnet.

Macht man endlich $c'k'_2 = c'k'_1 = f'g'$ und zieht $k'_2 K'_2 \perp c'A'_1$, $k'_2 o'_1 \parallel f'c'$ und $o'_1 m'_1 \parallel k'_2 K'_2$, so ist auch:

$$n'_1 m'_1 = c'K'_2 = c'K'_1 = g'h' = f'g' \cdot \sec \alpha = N \cdot \sec \alpha,$$

worin N die Normale $f'g'$ bezeichnet.

Und damit hat man nun in n'_1 und m'_1 die umgedrehten Vertikalprojektionen und in N_1 und M_1 die umgedrehten Horizontalprojektionen sowohl des Nullpunktes als des Maximalpunktes der Beleuchtungsskale, welche, in die ursprüngliche Lage zurückgebracht, horizontal nach N und M auf XX zu liegen kommen.

80. Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man die Beleuchtung des Kegels in Beziehung bringt zur Beleuchtung der Kugel, welche aus g' mit dem Radius $g'f'$ dem Kegel eingeschrieben wird und mit diesem den Grundkreis vom Radius $c'f'$ gemein hat. Zieht man durch das Centrum g' einen Lichtstrahl parallel $c'A'_1$, welcher die gedachte Kugelfläche in p'_1 schneidet, so ist für die angenommene Lichtrichtung nach früherem (siehe § 30 und 31) g' der Nullpunkt und p'_1 der Maximalpunkt, also $g'p'_1$ die Länge der Intensitätsskale für die Isophotenkonstruktion der nach dieser Richtung beleuchteten Kugelfläche. Errichtet man daher in g' und p'_1 auf $g'p'_1$ Senkrechte, so schneiden sie den Durchmesser des mit dem Kegelgrundkreis zusammenfallenden Parallelkreises $f'\varphi'$ der Kugelfläche in n'_1 und m'_1, womit der Nullpunkt, der Maximalpunkt und zugleich die Länge $n'_1 m'_1$ der Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion des Grundkreises der Kegelfläche, welcher mit jenem Parallelkreis der Kugelfläche dieselbe Beleuchtung hat, ebenfalls bestimmt ist. Zieht man noch $p'_1 q'_1 \parallel f'n'_1$, so schneidet die Parallele $p'_1 q'_1$ die Verlängerung von $g'n'_1$ in q'_1 und es ist,

$$\text{da } \measuredangle\, g'p'_1 q'_1 = \measuredangle\, c'g'n'_1 = \alpha,$$
$$n'_1 m'_1 = q'_1 p'_1 = g'p'_1 \cdot \sec \alpha = N \cdot \sec \alpha$$
$$\text{und } c'n'_1 = c'g' \cdot \operatorname{tg} \alpha = S \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

wie oben.

81. Es mag noch bemerkt werden, daß die Beleuchtungsintensitäten, welche den außerhalb des Grundkreises liegenden Teilpunkten der Intensitätsskale entsprechen, auf der Kegelfläche nicht mehr vorhanden sind. Die Grundrißprojektionen der hellsten Isophoten liegen, wie schon früher bemerkt worden ist, auf der Skale selbst und ist die Intensität der hellsten Lichtlinien in unserem Beispiele im direkt beleuchteten Flächenteil $+0{,}96$ und die der hellsten Isophote im Selbstschatten $-0{,}53$. Nimmt die Höhe der Kegelfläche ab, so kommt der Null-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

punkt immer weiter hinaus zu liegen, und wenn dieselbe kleiner als c′t′ ist, so fällt derselbe außerhalb des Grundkreises, und die Kegelfläche befindet sich dann ganz im direkten Licht und hat gar keinen Selbstschatten.

82. Will man umgekehrt die Beleuchtungsintensität einer gegebenen Erzeugenden der Kegelfläche bestimmen, so hat man nur von dem Punkt, wo sie den Grundkreis schneidet, eine Senkrechte auf die Skale zu ziehen. Der Durchschnittspunkt mit letzterer zeigt dann unmittelbar die Beleuchtungsintensität der gegebenen Erzeugungslinie an.

83. In Fig. 31 haben wir ferner eine Drehungskegelfläche dargestellt, deren Drehachse wieder auf der Grundrißebene senkrecht steht, deren Spitze (S, S′) aber nach unten gekehrt ist und in letzterer selbst liegt. Die Konstruktion für die Isophoten ist dieselbe wie in Fig. 30, nur mit dem Unterschied, daß jetzt der Nullpunkt N wie der Maximalpunkt —10 der Intensitätsskale des Grundkreises auf der positiven X-Achse, der Maximalpunkt +10 dagegen auf der negativen X-Achse liegt, und daß wir im Aufriß zwar noch die äußere, im Grundriß aber die innere Seite der Kegelfläche sehen, deswegen auch den Beleuchtungsintensitäten im Aufriß das entgegengesetzte Vorzeichen von den Beleuchtungsintensitäten im Grundriß zugehört.

84. Im vorigen Fall haben wir zugleich den Schlagschatten, den der obere Kreis in das Innere der Kegelfläche wirft, konstruiert. Dazu bestimmen wir zuerst den Punkt (h, h′), in welchem der durch die Kegelspitze (S, S′) gelegte Lichtstrahl (l, l′) die Ebene des obern Grundkreises durchschneidet. Dann ziehen wir durch h eine Gerade, welche die Horizontalprojektion des Grundkreises in m und q trifft. Denken wir uns hierauf durch q eine Erzeugende qS und durch m eine Parallele mp mit hS gezogen, so wird letztere die erstere in einem Punkt p durchschneiden, welches die Grundrißprojektion des Schattens von dem Punkt m des obern Grundkreises in das Innere der Kegelfläche ist. Ebenso findet man beliebig viele andere Punkte der Schlagschattenkurve opro*). Einzig den Punkt r muß man auf andere Weise bestimmen. Dies geschieht, indem man den Strahl (l, l′) samt der Symmetralebene in eine zur V.E. parallele Lage (Sh_1, $S'h'_1$) umdreht, durch den ebenfalls umgedrehten Punkt (f, f′) damit eine Parallele (fS_1, $f'S'_1$) zieht, welche die Seite (Si, S′i′) in dem Punkte (r_1, r'_1) durchschneidet, und endlich den Punkt r_1 nach r zurückbringt.

85. In Fig. 32 haben wir endlich die Drehungskegelfläche samt Isophoten in einer zu beiden Projektionsebenen schiefen Lage dargestellt, wobei der Grundkreis in der beliebig schiefen Ebene PQR′ gelegen ist.

*) Es ist dies eine Raumkurve vierter Ordnung, die sich im Grundriß als Ellipse projiziert.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zur Erleichterung der Darstellung denken wir uns die Kegelfläche, wie in Fig. 29 die Cylinderfläche, durch eine Hilfsebene geschnitten, welche durch die Drehachse (cs, $c's'$) geht und zugleich zur gegebenen schiefen Ebene, also auch zu ihrem Horizontalriß PQ senkrecht ist, und die Schnittfigur in die H.E. umgelegt. Denn dann ist, wenn $cc'' \perp cp$ und $= c_1c'$, $c''d'' = c''e''$ gleich dem Radius $ca = r$ des Grundkreises und $c''s'' \perp c''d''$ und gleich der Höhe h der Kegelfläche gemacht wird*), $d''e''s''$ als Schnittfigur oder zweite Vertikalprojektion der Kegelfläche zu betrachten, womit nun auch die Horizontalprojektion und erste Vertikalprojektion derselben bestimmt sind und leicht erhalten werden können. Hierbei wird man sich ebenfalls mit Vorteil der sogen. Hauptlinien bedienen.

Was nun die Konstruktion der Isophoten der Kegelfläche betrifft, so kann man auf gleiche Weise verfahren, wie früher bei der Cylinderfläche (§ 71—73) gezeigt worden ist, indem man den Grundkreis entweder in die H.E. oder in die V.E. umlegt, die Isophotenpunkte dieses Kreises wie in § 76 konstruiert und hierauf wieder in die ursprüngliche Lage zurückbringt und mit der Spitze (s, s') verbindet, oder auch indem man in der Umlegung bloß die Richtungslinie und darauf den Nullpunkt und den Maximalpunkt der Beleuchtungsskale sucht und dann diese auf die zugehörige Skale der elliptischen Grundriß- oder Aufrißprojektion des Kegelgrundkreises zurückbringt und mit der Spitze (s, s') verbindet, wie in unserer Fig. 32 durch Hilfslinien angedeutet ist.

Diese Konstruktionen bedürfen wohl keiner weitern Erklärung, und um so weniger, als die betreffenden Punkte und Linien mit denselben Buchstaben wie in Fig. 29 bei der Cylinderfläche bezeichnet sind. Hieraus sieht man auch, daß der Maximalpunkt $+10$ zufällig mit dem Durchschnittspunkt N_1 oder N'_1, resp. $\mathfrak{n}_1$ oder $\mathfrak{n}'_1$ der Beleuchtungsskale mit dem Grundkreis zusammenfällt, und daß daher die Mantellinie die volle Beleuchtungsintensität $+1$ zeigt.

86. Dagegen mag hier noch eine neue Konstruktion der geradlinigen Umrisse beider Projektionen der Kegelfläche erklärt werden.

Sind die Projektionen des Grundkreises, d. h. die Ellipsen $aebd$ und $a'e'b'd'$ bereits gefunden, so erhält man die Berührungspunkte der geradlinigen Umrisse mit denselben wie folgt.

Man ziehe $d''v'' \perp d''s''$ und bringe v'' in die H.E. nach v auf cs, parallel PQ, und in die V.E. nach v' auf $c's'$, wobei vv' senkrecht zur Projektionsachse ist. Denken wir uns nun in (v, v') mit dem Radius $v''d''$ eine Kugel beschrieben, so wird sie die Kreiskegelfläche in dem Kreise ($aebd$, $a'e'b'd'$) berühren, und zwar werden die Berührungspunkte a,

*) Auch hier hat die Höhe $c''s'' = h$ auf der Zeichnungsebene nicht ganz Platz gefunden und gilt daher für die Spitze s'' dasselbe, was oben bei der Darstellung der schiefen Cylinderfläche (siehe § 71, Fig. 29, Blatt 3) bemerkt worden ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und b′ der Vertikalprojektion desselben auf dem zur V.E. parallelen größten Kugelkreis (vom Radius v″ d″) und die Berührungspunkte d und e der Horizontalprojektion desselben auf dem zur H.E. parallelen größten Kugelkreis (vom Radius v″ d″) liegen. Ziehen wir daher v″ w″ senkrecht und durch w″ eine Parallele e d zu P Q, so schneidet letztere die Grundrißprojektion a e b d in d und e, welche Punkte, in die V.E. projiziert, die Projektionen d′ und e′ liefern, die zur Probe aber auch in der durch v′ zur Projektionsachse gezogenen Parallelen liegen müssen.

Projizieren wir den Schnittpunkt c von a b und d e nach c′ in die V.E. und ziehen durch c′ eine Parallele zu P R′, so schneidet dieselbe die Aufrißprojektion a′ e′ b′ d′ des Grundkreises in a′ und b′, welche Punkte, horizontal projiziert, nach a und b zu liegen kommen, zur Probe aber auch in der durch v zur Projektionsachse gezogenen Parallelen liegen müssen.

Die Gerade (a b, a′ b′) ist nichts anderes als die Schnittlinie des zur V.E. parallelen größten Kugelkreises mit der schiefen Ebene P Q R′, und die Gerade (d e, d′ e′) ist ebenso nichts anderes als die Schnittlinie des zur H.E. parallelen größten Kugelkreises mit derselben Ebene P Q R′. Die erstere ist daher selbst mit der V.E. und die letztere mit der H.E. parallel und vertreten beide die Stelle von sogen. Hauptlinien, wie wir sie schon oft mit Nutzen verwendet haben.

Sind jedoch die Projektionen a e b d, a′ e′ b′ d′ des Grundkreises nicht gegeben, so beschreiben wir um v und v′ mit dem Radius v″ d″ je einen Kreis als Grundriß-, resp. Aufrißprojektion der gedachten Hilfskugel. Ersterer schneidet die Gerade d e in den Punkten d und e, den verlangten Berührungspunkten in der H.E., und letzterer die Gerade a′ b′ in den Punkten a′ und b′, den verlangten Berührungspunkten in der V.E.

Verbindet man endlich d und e mit s und a′ und b′ mit s′, so erhält man die Projektionen der geradlinigen Umrißlinien der Kegelfläche*).

c) Beleuchtung der Kugelflächen.

(Fig. 33—34, Blatt 6.)

87. Bei der Kugelfläche sind nach § 30 und 31 die Isophoten Kreislinien, deren Ebenen auf der durch den Mittelpunkt gehenden Lichtrichtung senkrecht stehen. Behält man daher die gewöhnliche Annahme bei, wonach beide Projektionen l und l′ der Lichtrichtung (l, l′), Fig. 33, mit der Projektionsachse X′ X′ Winkel von 45° bilden und die Lichtrichtung (l, l′) selbst mit ihren Horizontal- und Vertikalprojektionen l und l′ Winkel von $\alpha = 35^0\ 16'$ macht, so projizieren sich die die Isophoten darstellenden Kreise, weil sie sowohl

*) Diese hübsche Konstruktion wurde unseres Wissens zuerst von Niemtschik, weiland Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnikum in Wien, angegeben. Siehe dessen Abhandlung „Direkte Konstruktion der Konturen von Rotationsflächen“ in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften von 1866.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zur H.E. als zur V.E. schief sind, als Ellipsen, deren große Achse gleich ist dem Durchmesser des zugehörigen Isophotenkreises, und deren kleine Achse gleich ist der Projektion des in der Lichtebene liegenden und auf dem Lichtstrahl des Mittelpunktes senkrecht stehenden Durchmessers desselben.

Bezeichnet man den Durchmesser des Isophotenkreises mit 2ρ und den Neigungswinkel desselben mit den Projektionsebenen mit α ($35^0\ 16'$), so ist die große Achse der zugehörigen elliptischen Isophotenprojektion $= 2\rho$ und die kleine Achse $= 2\rho \sin\alpha$ (siehe § 90). Jene ist zur entsprechenden Projektion der Lichtrichtung senkrecht; diese fällt dagegen stets mit der entsprechenden Projektion der Lichtrichtung zusammen.

Da bei der angenommenen Lichtrichtung der Neigungswinkel der Isophotenkreise zu beiden Projektionsebenen derselbe ist (nämlich $\alpha = 35^0\ 16'$), so werden sich diese Kreise auch in beiden Ebenen als dieselben Ellipsen projizieren. Sind daher diese in einer Projektionsebene gefunden, so braucht man dieselben nur als kongruente Figuren in die andere Ebene zu übertragen.

88. Um nun die sich als Ellipsen projizierenden Isophotenkreise der durch ihre Projektionen gegebenen Kugelfläche Fig. 33 zu erhalten, denke man sich diese vor allem auf eine zweite V.E. projiziert, die zur Lichtrichtung parallel ist. Dazu ziehe man als neue Projektionsachse $X''X'' \parallel XX$, errichte darauf von c aus eine Senkrechte, mache $c_2 c'' = c_1 c'$ und beschreibe mit dem Radius der Kugelfläche $r = ac = a'c'$ aus c'' einen Kreis $a''d''b''e''$, so stellt dieser die Projektion der Kugelfläche auf der zweiten Vertikalebene dar. Zieht man hierauf durch c'' eine Parallele $c''l''$ mit der in die II. V.E. umgelegten Lichtrichtung PL'_1, so wird dieselbe die Kugelfläche in zwei Punkten durchschneiden, von denen der eine, $+10$, der hellste Punkt im direkten Licht und der andere, -10, der hellste Punkt im Selbstschatten ist, und damit sind die Richtung und die Fundamentalpunkte der Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion der Kugelfläche gefunden. Teilt man nun die beiden Radien $c'' + 10$ und $c'' - 10$ je in 10 gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten darauf Senkrechte, so stellen diese die Isophotenkreise in der zweiten Vertikalprojektion dar. Projiziert man dieselben in die H.E., so erhält man die mit $0, +2, +4, + \ldots, -2, -4, \ldots$ bezeichneten Ellipsen als Horizontalprojektionen der Isophotenkreise, und trägt man dieselben über in die erste Vertikalebene, so erhält man die mit gleichen Ziffern bezeichneten Ellipsen als Vertikalprojektionen der Isophotenkreise, die relativ zur Projektion $c'l'$ der Lichtrichtung dieselbe Lage haben wie die horizontalen zur Projektion cl der Lichtrichtung.

Um die Figur nicht zu sehr zu überladen, haben wir von den Isophotenkreisen und ihren respektiven Ellipsenprojektionen nur die mit den geraden Zahlzeichen $+2$, $+4$, $+6$, $+8$ und -2, -4, -6, -8 versehenen beibehalten und die mit den ungeraden Ziffern $+1, +3, \ldots, -1, -3, \ldots$ be-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zeichneten unterdrückt. Dafür aber haben wir noch den der Beleuchtungsintensität 0,95 entsprechenden Isophotenkreis 9,5 hinzugenommen, weil dadurch die Beleuchtung der Kugelfläche vom Isophotenkreis $+8$ bis zum hellsten Punkt $+10$ besser vermittelt wird.

89. Die Projektionen der Isophotenkreise der Kugelfläche oder also die mit 0, ± 2, ± 4, ... bezeichneten Ellipsen können nun aber auf verschiedene Weise, nämlich rein projektiv oder konstruktiv, erhalten werden.

I. Methode. Man denke sich die Kugelfläche, samt den Isophotenkreisen, durch eine Anzahl horizontaler Parallelkreise, wie ($r''t''$, $r u_1$ $t u_2$), geschnitten und die Punkte, worin sie die Isophotenkreise schneiden, aus der II. V.E. in die H.E. projiziert, wie dies bei u_1 und u_2 als Horizontalprojektionen der Durchschnittspunkte u'' des als Gerade sich projizierenden Parallelkreises $r''t''$ und des ebenfalls als Gerade sich projizierenden Isophotenkreises $+4$ $+4$ angedeutet ist. Indem man dann sämtliche Punkte eines und desselben Isophotenkreises, wie u_1, u_2, durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand verbindet, erhält man die als Ellipsen sich darstellenden Horizontalprojektionen.

II. Methode. Die die Isophoten darstellenden Ellipsen lassen sich aber auch direkt aus den Achsen konstruieren. Um die großen Achsen derselben zu erhalten, projiziere man die Teilpunkte 0, $+2$, $+4$, ... der Intensitätsskale $c''f''$ nach den entsprechenden Punkten 0, $+2$, $+4$, ... der Horizontalprojektion cf und schlage von letztern den Radius des zugehörigen Isophotenkreises auf die zugehörigen projizierenden Linien zu beiden Seiten der Projektion cf ab, so sind damit die großen Achsen bestimmt. So z. B. erhält man, wenn man $+8\,m = +8\,o = m''n''$ macht, in $m\,o$ die große Achse der Ellipse $+8$ $+8$ rc.

Die kleine Achse erhält man direkt, wenn man die Punkte, wie n'', horizontal nach n projiziert. Denn dann ist $+8\,n$ auf cf die halbe kleine Achse der Ellipse $+8$ $+8$ rc.

Sind aber auf diese Weise die Achsen gefunden, so lassen sich damit die Ellipsen auf bekannte Weise konstruieren.

90. Die Achsen können auch unabhängig von der zweiten Vertikalprojektion gefunden werden. Denn da z. B. für die Grenzisophote 00 die halbe große Achse $cd = ce = r$ und die halbe kleine Achse $cg = c''g''_1 = f''f''_1 = c''f'' \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin\alpha$, so ist auch, wenn man $\measuredangle\, a c a_1 = \alpha$ macht und $f_1 f$ senkrecht auf ac errichtet, $ff_1 = cf_1 \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin\alpha$ und daher $cg = ff_1$, gleich der halben kleinen Achse der Grenzisophote. Ebenso folgt für einen andern Isophotenkreis vom Radius ρ die halbe kleine Achse $= \rho \sin\alpha$.

Denkt man sich nun weiter den mit der Lichtrichtung (cl, $c''l''$) und der Achse (de, c'') zusammenfallenden Kreis $+10c''$ — 10 horizontal projiziert, so erhält man eine Ellipse, deren große Halbachse $cd = r$ und deren kleine Halbachse $c''f''_1 = cf = cf_1 \cdot \cos\alpha$, und welche auf die Richtungslinien der großen Achsen die Länge der letztern, wie z. B. mo, abschneidet. Wir haben, um die Figur nicht zu sehr anzufüllen, von dieser Ellipse nur einen Viertelbogen, nämlich dof, im Grundriß dargestellt. Zieht man dann noch eg und damit durch die Endpunkte der übrigen großen Achsen Parallelen, wie z. B. mn || eg, so schneiden diese auf ab die Endpunkte der kleinen Achsen, wie n, ab.

91. Beschreibt man mit cf einen Hilfskreis, so liegen auf diesem die Brennpunkte der Ellipsen, welche die Projektionen der Isophotenkreise darstellen. Und damit lassen sich die Achsen ebenfalls finden.

Man ziehe z. B. durch den Teilpunkt $+8$ auf ac (in der H.E.) eine Senkrechte, welche den Hilfskreis in i schneidet, durch i den Radius ck, welcher den Kreis aebd in k trifft, und durch k eine Parallele km zu ac, welche die verlängerte $+8$i in m schneidet, so ist m wieder ein Endpunkt der großen Achse und i ein Brennpunkt der Ellipse $+8$. Die kleine Halbachse $+8$n bestimmt sich dann wieder wie vorhin, indem man mn || eg zieht.

92. Will man die Isophotenpunkte des Kugelumfangs aebd und $a'e'b'd'$, d. h. die Punkte bestimmen, in welchen die Ellipsen oder Isophotenprojektionen den äußern Kreisumfang der Kugel berühren, so denken wir uns wieder den horizontalen Neigungswinkel α nach aca_1 in eine zur H.E. parallele Lage umgedreht und $ca_1 = r \sec\alpha$ nach $ca_2 = ca_3$ abgeschlagen, oder den gleichen vertikalen Neigungswinkel α nach $a'c'a'_1$ in eine zur V.E. parallele Lage umgedreht und $c'a'_1 = r \sec\alpha$ nach $c'a'_2 = c'a'_3$ abgetragen, sodann jede dieser Strecken in zehn gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Senkrechte zu ac resp. $a'c'$ gezogen, welche den Kreisumfang aebd resp. $a'e'b'd'$ in den verlangten Punkten schneiden.

Um die Figur nicht übermäßig zu überladen, ist diese Konstruktion in der H.E. unterblieben und nur in der V.E. ausgeführt worden. Auf diese Weise sind z. B. die Punkte $v'v'$ erhalten worden, in welchen der Isophotenkreis $+2+2$ den äußern Kugelkreis $a'e'b'd'$ berührt.

93. Zieht man im hellsten Punkt f'' an den Kreisumfang $a''e''b''d''$ eine Tangente $a''_2 s''_1$, so schneidet diese auf dem verlängerten Halbmesser ($c''a''$, ca) den Maximalpunkt (a''_2, a_2) unmittelbar ab, und ebenso erhält man auch in den Schnittpunkten II, IV, VI, ... die Teilpunkte der Beleuchtungsskale, welche auf $ca_2 = ca_3$ in der H.E., oder nach $c'a'_2 = c'a'_3$ in die V.E. übertragen, die verlangten Isophotenpunkte der Umrißkreise aebd und $a'e'b'd'$ liefern.

Ganz ebenso erhält man auch die Isophotenpunkte irgend eines andern Parallelkreises der Kugel.

Um z. B. die Isophotenpunkte des Parallelkreises ($r''t''$, ru_1u_2t) zu erhalten, verlängere man $r''t''$ nach beiden Seiten, bis diese Gerade $f''s''_1$ in x_2 und $c''g''$, verlängert, in o_2 schneidet. Dann ist o_2 der Nullpunkt und x_2 der Maximalpunkt der zugehörigen Beleuchtungsskale und die Punkte II_2, IV_2, VI_2, ... sind zugleich die Teilpunkte derselben, welche die Isophotenpunkte auf bekannte Weise liefern.

Man wird bemerken, daß die durch die Tangenten $f''s''_1$, $r''s''_2$, ... bei der Umdrehung erzeugten Kegelflächen $f''s''_1\varphi''$, $r''s''_2t''$, ... mit den Parallelkreisen $f''\varphi''$, $r''t''$, ... dieselbe Beleuchtung haben und daß somit die vorigen Erklärungen über die Bestimmung der Isophotenpunkte beliebiger Parallelkreise der Kugel zugleich auch für die Kreiskegelfläche und aus gleichem Grunde auch für jede andere Umdrehungsfläche gelten. Für die Kegelfläche $f''s''_1\varphi''$ hat man z. B. zur Bestimmung des Nullpunktes o_1, da $\measuredangle\, o_1c''o''_1 = \alpha$ und $o''_1c'' = S_1$, die Subnormale des zugehörigen Punktes f'' ist, $o''_1o_1 = S_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, und zur Bestimmung des Maximalpunktes f'', da $\measuredangle\, a''c''f'' = \alpha$ und $c''f'' = r = N$, die Normale des Punktes f'' bedeutet, $o_1f'' = c''a''_2 = c''f'' \cdot \sec\alpha = r \cdot \sec\alpha = N \cdot \sec\alpha$, wie früher (siehe § 80).

94. III. Methode. Durch Zerlegung des nach der Lichtrichtung (l, l') einfallenden Lichtbündels in zwei rechtwinklige Seitenlichtbündel, den einen parallel zu $c\,l$ (oder der X-Achse) und den andern senkrecht zur H.E. (oder parallel zur Z-Achse), bezw. den einen parallel zur $c'l'$ und den andern senkrecht zur V.E., lassen sich die elliptischen Projektionen der Isophotenkreise ebenfalls finden. Wir haben diese Konstruktion ebenfalls nur im Aufriß wirklich ausgeführt und damit die elliptischen Aufrißprojektionen wie folgt erhalten. Die Isophoten des ersten Lichtbündels, parallel zu $c'l'$, sind Kreise, die sich als Gerade, senkrecht zu $c'a'$, projizieren, und erhalten werden, wie bereits in § 93 angegeben worden ist, indem man nämlich $\measuredangle\, a'c'a'_1 = \alpha$ macht, $c'a'_1$ nach $c' + 10$ und $c' - 10$ abschlägt, jede dieser Strecken als Intensitätsskale $= r \sec\alpha$ in zehn gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Senkrechte zu $c'a'$ zieht. Die letztern sind dann die sich als Gerade projizierenden Isophotenkreise des zu $c'a'$ parallelen Seitenlichtbündels. Die Isophoten des zur V.E. senkrechten Seitenlichtbündels sind dagegen Kreise, die sich im Aufriß als konzentrische Kreise und im Grundriß als Gerade, parallel zur Projektionsachse $X'X'$, darstellen. Radien dieser Kreise zu erhalten, mache man im Grundriß $c\,d_2 = c\,d_3 = c\,d_1 = r \operatorname{cosec}\alpha$, teile jede dieser Strecken als Intensitätsskale in zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten, wie $+2_1$, $+4_1$, ..., Senkrechte, wie $+2_1w$, $+4_1e$, ..., so sind dies die verlangten Radien, womit man nun im Aufriß die entsprechenden (punktgestrichelten) Kreise $+2_1$, $+4_1$, $+5_1$, ... aus dem Centrum c' beschreibt.

Die Punkte, in welchen sich die zugehörigen, d. h. diejenigen Isophoten beider Systeme schneiden, deren algebraische Summe ihrer Beleuchtungsintensitäten konstant und je gleich der Beleuchtungsintensität der betreffenden Isophote ist, liefern das Isophotensystem des ursprünglichen Lichtbündels, dessen Richtung (l, l') ist.

So geht z. B. die Ellipse $+4+4$ (im Aufriß), deren Beleuchtungsintensität 0,4 ist, durch die Schnittpunkte von $+5_1-1'$, $+4_1\ 0$, $+2_1+2'$, ..., deren Beleuchtungsintensitäten zusammen in der That konstant $=+0{,}4$ ist.

Auf diese Weise erhält man mit Ausnahme der Lichtpole das Isophotensystem der Kugelfläche auf einmal. Die Lichtpole f und f', welche diese Konstruktion nicht giebt, muß man, wie schon gezeigt, besonders bestimmen. Man erhält dieselben übrigens auch unabhängig von der zweiten Vertikalprojektion der Kugel, indem man den Neigungswinkel α in eine zur H.E. parallele Lage $a c a_1$, resp. in eine zur V.E. parallele Lage nach $a' c' a'_1$ umdreht und $f_1 f \perp a c$ resp. $f'' f' \perp a' c$ zieht. Die Punkte f, f' sind dann die verlangten Lichtpole oder die hellsten Punkte sowohl in der Grundriß- als in der Aufrißprojektion.

95. In Fig. 34 haben wir noch die Isophoten einer konkaven oder hohlen Halbkugel dargestellt. Dieselben sind, wie man sieht, den Isophoten der konvexen oder erhabenen Kugel der Lichtrichtung gerade entgegengesetzt, d. h. der Lichtpol $+10$ kömmt im Grundriß nach hinten auf 1 und im Aufriß nach unten auf 1', und vom Mittelpunkt c resp. c' ebenso weit entfernt zu liegen, als er bei der konkaven oder hohlen Kugel im Grundriß nach vorne und im Aufriß nach oben zu liegen kömmt. Ähnliche Lage erhalten die Isophoten auch bei allen hohlen Umdrehungsflächen, so z. B. bei der Hohlkehle, der Einziehung ꝛc.

96. Auf gleiche Weise ist man nun auch im stande, die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität irgend einer andern Umdrehungsfläche zu bestimmen. Denn man hat nur eine Reihe von Parallelkreisen auf der betreffenden Umdrehungsfläche anzunehmen und, wie in §§ 93 und 94 näher angegeben ist, die Isophotenpunkte derselben zu suchen. Indem man alsdann die gleichnamigen Isophotenpunkte der verschiedenen Parallelkreise miteinander verbindet, erhält man die verlangten Isophoten oder Linien gleicher Lichtintensität selbst. Wir werden später unter den Übungsbeispielen solche Aufgaben noch besonders zur Behandlung bringen. Vorerst sollen jedoch noch einige Beispiele über die Bestimmung der Isophoten der Cylinder- und Kegelflächen ꝛc. in parallel- und polarperspektivischer Darstellung behandelt werden.

d) Beleuchtung der Cylinder- und Kegelflächen ꝛc. in parallel- und polarperspektivischer Darstellung.

(Fig. 35—44, Blatt 7—9.)

97. Um die Isophoten der Cylinder- und Kegelflächen in parallel- und polarperspektivischer Darstellung zu erhalten, hat man den gleichen Gang einzuhalten wie bei der gewöhnlichen orthogonalen Darstellung. Demnach hat man dieselben Operationen und Konstruktionen, die zum Auffinden der Isophoten bei der einfach rechtwinkligen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Projektionsart nötig waren, hier in gleicher Weise zu wiederholen.

98. In Fig. 35 und 36, Blatt 7, haben wir zunächst die Isophoten der senkrechten kreisförmigen Cylinder- und Kegelfläche in orthographischer, parallelperspektivischer Darstellung ausgeführt. Dabei ist das monodimetrische Projektionssystem: $z:x:y = 1:1:\frac{1}{2}$ zu Grunde gelegt, wofür die Projektionen $z = x = 0{,}9428$ und $y = 0{,}4714$ (deren wahre Größe $s = 1$ angenommen) und die Achsenwinkel $\eta = 7^0\,11'$ und $\Theta = 41^0\,25'$ betragen*).

Behufs der orthographisch-parallelperspektivischen Darstellung der senkrechten Kreiscylinder- und Kreiskegelfläche, deren Grundkreis K in der XY-Ebene liegend und deren Drehachse der Z-Achse parallel angenommen wird, konstruieren wir zuerst in Fig. 37 die zweimalige axonometrische Umlegung der durch OL, Ol gegebenen Lichtrichtung, indem wir $l l_0$ parallel OY, $l_0 l_1$ senkrecht OX und gleich $2\,l_0 l$ und $l_1 L_1$ senkrecht $O l_1$ und gleich $l L$ machen. $O l_1$ ist alsdann die axonometrisch umgelegte Grundrißprojektion der Lichtrichtung und $\measuredangle\, l_1 O L_1 = \alpha$ der Winkel, den die Lichtrichtung mit ihrer Grundrißprojektion einschließt.

99. Im weitern konstruieren wir nun (Fig. 35 und 36) den in die Papierebene axonometrisch umgelegten Grundkreis K_1, dessen Centrum C_1 und dessen Durchmesser die im Verhältnis von $1 : 0{,}9428$ verkürzte Projektion des wirklichen Durchmessers des Grundkreises K (Fig. 38) in wahrer Größe ist. Der Kreis K_1 und dessen parallelperspektivische Projektion k in der Ebene XY sind affin und in affiner Lage, und die Achse OX ist die Affinitätsachse. Die parallelperspektivische Projektion k des Grundkreises zu erhalten, bestimme man daher zuerst den Punkt c ihres Centrums, indem man $C_1 c_0$ senkrecht OX und $c_0 c$ parallel OY und gleich $\frac{1}{2}\, C_1 c_0$ zieht. Die Richtung der großen Achse der Ellipse k ist bekanntlich für die vorliegende Projektionsart senkrecht und die der kleinen Achse parallel zur Achse OZ**). Zieht man daher durch c eine Senkrechte und eine Parallele zu OZ und verbindet den Punkt γ, in welchem letztere die Achse OX schneidet, mit C_1 und zieht durch die Punkte D_1 und E_1, worin die verlängerte γC_1 den Kreis K_1 schneidet, Parallelen mit $C_1 c$, welche die verlängerte γc in d und e schneiden, so sind dies die Endpunkte der kleinen Achse der Ellipse k. Zieht man durch C_1 die Gerade $A_1 B_1$ senkrecht $D_1 E_1$ und durch A_1 und B_1 Parallelen mit $C_1 c$, so schneiden diese die durch c zu OZ gezogene Senkrechte in a und b, den Endpunkten der großen Achse.

Beachtet man aber, daß für das Achsenverhältnis $1:1:\frac{1}{2}$ die kleine Achse $de = \frac{1}{3}\,ab$, d. h. $\frac{1}{3}$ der

---

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung zum Linearzeichnen", S. 53.

**) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", S. 59.

großen Achse ist*), so kann man auch unmittelbar für ab die unverkürzte Größe des gegebenen Durchmessers des Grundkreises K und für de den dritten Teil davon nehmen. Mit den beiden Achsen ab und de ist alsdann die Ellipse selbst bestimmt. Die Konstruktion derselben ist übrigens in Fig. 38 nach der frühern Anleitung für die orthographisch-monodimetrischen Projektionen**) noch besonders angegeben. Man teile den aus C mit CA, dem Radius in wahrer Größe, beschriebenen Grundkreis K in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile, wie $AH = HF = FE$ ꝛc., ziehe die zu AB Senkrechten FG, HJ ꝛc., ziehe die Achsen CX und CY, so daß $\sphericalangle\ BCX = \eta = 7^0 11'$ und $\sphericalangle\ ACY = \Theta = 41^0 25'$ beträgt; verkürze die Abstände CI, CII, ... mittels des orthographisch-monodimetrischen Verkürzungsmaßstabes (Fig. 39)***) und trage die Verkürzungen $D'E'$, $D''E''$, ... nach C1, C2, ...; alsdann ziehe man durch 1, 2, ... Parallelen mit CY und mache $1f = 1g$, sowie $2h = 2i$ ꝛc. gleich den respektiven Verkürzungen $D''E''_1$, $D'E'_1$ von IF, IIH ꝛc., so erhält man durch Verbindung der erhaltenen Punkte g, i, A, a, h, f ... die verlangte Ellipse als orthographisch-monodimetrische Projektion des Grundkreises K der gegebenen Cylinder- und Kegelfläche in der XY-Ebene.

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung“, S. 60.

**) Siehe ebend. § 87 und 89, S. 55—57.

***) Siehe ebend. § 77, S. 47.

Für den vorliegenden Fall, wo die kleine Achse de gerade $\frac{1}{3}$ der großen Achse ab der Ellipse ist, kann man sich auch zur Konstruktion der letztern mit Vorteil des Winkelmaßstabes (Fig. 41) bedienen, bei dem $BC = \frac{1}{3} AB$ und mittels welchem die senkrechten Verkürzungen $If_1 = Ig_1 = \frac{1}{3} IF$, $IIh_1 = IIi_1 = \frac{1}{3} IIH$ ꝛc. unmittelbar erhalten werden können. In Fig. 40 haben wir endlich auch noch den orthographisch-monodimetrischen Vergrößerungsmaßstab aufgenommen, vermittelst welchem man die verkürzten Dimensionen in wahrer Größe bestimmen kann*).

100. Um nun die Isophotenpunkte des Grundkreises der Cylinderfläche (Fig. 35) zu erhalten, ziehe man $C_1 p$ (in Fig. 35) parallel OI_1 (in Fig. 37) und mache $C_1 M_1$ (in Fig. 35) gleich OL_1 (in Fig. 37), so ist C_1 der Nullpunkt und M_1 der Maximalpunkt der Intensitätsskale des Grundkreises K_1. Teilt man daher $C_1 M_1$ in zehn gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu $C_1 M_1$, so schneiden diese den Kreisumfang K_1 in den verlangten Isophotenpunkten, welche dann noch in die axonometrische Projektion k zu übertragen sind, indem man durch dieselben mit $C_1 c$ Parallelen zieht, wie bei + 6 und — 6 durch Hilfslinien

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung“, § 78, S. 48.

angedeutet ist. Die Isophotenpunkte der Ellipse k können aber auch hier direkt erhalten werden, indem man c mit p verbindet und rückwärts — als Richtung der Intensitätsskale — gehörig verlängert, $M_1 m \parallel C_1 c$ zieht und cm in zehn unter sich gleiche Teile teilt, den in C_1 auf $C_1 p$ senkrechten Durchmesser $o_1 o_1$ bis q auf OX verlängert, q mit c verbindet und mit der Verbindungslinie qc durch die Teilpunkte Parallelen zieht. Die Punkte (wie + 6 und — 6), worin diese den Umfang der Ellipse k schneiden, sind alsdann die verlangten Isophotenpunkte.

Zieht man endlich durch die erhaltenen Isophotenpunkte Parallelen zur Achse cs, so erhält man die verlangten Isophoten der Cylinderfläche in parallel-perspektivischer Darstellung selbst.

101. Bei tuv haben wir noch den Schlagschatten angegeben, den die Cylinderfläche im Innern auf sich selbst wirft. Dabei findet man die einzelnen Punkte der Schlagschattenkurve, indem man durch die einzelnen schattenwerfenden Punkte w des obern Kreisumfanges Strahlen parallel OL (in Fig. 37) und durch die entsprechenden Punkte w_1 Strahlen parallel Ol (in Fig. 37) zieht und in u_1, wo letztere den untern Kreisumfang durchschneiden, Senkrechte errichtet, welche die erstern in u, den verlangten Punkten, schneiden.

102. Um ebenso die Isophoten der Kegelfläche Fig. 36 zu erhalten, ziehe man wieder vor allem $C_1 p$ parallel Ol_1 (in Fig. 37) als Richtung der umgelegten Intensitätsskale, mache $cf = C_1 A_1$, gleich dem Radius des umgelegten Grundkreises K_1, verbinde f mit s und ziehe fg senkrecht fs, trage fg nach Oh_1 (in Fig. 37) und cg nach Oi_1 (in Fig. 37), errichte (in Fig. 37) die Senkrechten $h_1 H_1$ und $i_1 J_1$ und mache $C_1 N_1$ (Fig. 36) $= i_1 J_1$ und $C_1 M_1$ (Fig. 36) $= OH_1$, so sind N_1 und M_1 die Fundamentalpunkte der Intensitätsskale, womit die Isophotenpunkte des umgelegten Grundkreises K_1 gefunden werden können. Wir haben diese Konstruktion, da sie jenen in Fig. 35 ganz gleich ist, nicht mehr wirklich ausgeführt, dafür aber haben wir die Isophotenpunkte der Ellipse k direkt bestimmt. Dazu ziehen wir cp gehörig verlängert und tragen die Fundamentalpunkte M_1 und N_1 nach m und n auf pc über, ziehen also $M_1 m$ und $N_1 n$ parallel $C_1 c$ und teilen die Strecke nm in zehn gleiche Teile, errichten in N_1 auf $N_1 p$ eine Senkrechte, welche OX in q schneidet, verbinden q mit n und ziehen mit der Verbindungslinie qn durch die Teilpunkte (wie + 7) Parallelen, so schneiden diese den Ellipsenumfang k in den gesuchten Isophotenpunkten (+ 7, + 7), welche, mit der Kegelspitze s verbunden, die verlangten Isophoten der Kegelfläche selbst (wie + 7s, Os, ...) liefern.

103. In Fig. 44, Blatt 9, haben wir ebenso die Isophoten einer senkrechten Kreiscylinderfläche in klinographisch-monodimetrischer Darstellung nach dem Projektionssystem $1:1:\frac{1}{2}$ und $\Theta = 45^0$ ausgeführt*).

Zur Auffindung der schiefen Projektion k aus der gegebenen wahren Größe des Grundkreises K wird man sich mit Vorteil des Halbierungsmaßstabes (Fig. 46) bedienen, worin $BC = \frac{1}{2} AB$. Beschreibt man nämlich mit $AD = CD_1$ (in Fig. 44) einen Kreisbogen DE, so ist $DE = Cd = \frac{1}{2} CD_1$ (in Fig. 44) 2c.

Indem wir hinsichtlich der Bestimmung der Isophoten den gleichen Gang einhalten wie bei der orthographisch-monodimetrischen Darstellung in Fig. 35, konstruieren wir auch hier zuerst die zweimalige axonometrische Umlegung der in Fig. 45 durch OL, Ol gegebenen Projektionen der Lichtrichtung, indem wir $l l_0 \parallel OY$, $l_0 l_1 \perp OX$ und $= 2\, l l_0$, $l_1 L_1 \perp OY$ und $= lL$ machen. Der Winkel $l_1 O L_1 = \alpha$ ($= 35^0\ 16'$) ist alsdann der Neigungswinkel, den die Lichtrichtung sowohl mit ihrer Aufriß- als mit ihrer Grundrißprojektion bildet, und Ol_1 ist die in die Ebene YOX umgelegte Grundrißprojektion, die im vorliegenden Fall, wie man sieht, mit der Achse OY zusammenfällt.

Denken wir uns daher den Grundkreis K der Cylinderfläche, dessen Centrum in C und dessen Radius $C\alpha = r$ in wahrer Größe gegeben, in die Bildfläche XZ umgelegt, sodann $CA_1 \parallel OY$ (in Fig. 45) gezogen und $\sphericalangle A_1 C A_2 = \alpha = 35^0\ 16'$ gemacht, $A_1 A_2$ senkrecht zu CA_1 errichtet und CA_2 nach CM_1 geschlagen, die Strecke CM_1 in 10 gleiche Teile geteilt und auf die Teilpunkte (wie bei $+5$) Senkrechte errichtet, so werden diese den Umfang des umgelegten Grundkreises K_1 in den verlangten Isophotenpunkten (wie $+5$) durchschneiden, und es erübrigt dann nur noch, diese Punkte in die schiefe Projektion k des Grundkreises K zu übertragen und die zugehörigen Mantellinien zu ziehen, um die verlangten Isophoten der Cylinderfläche in schiefer Darstellung zu erhalten.

Da die Figuren k und K_1 ebenfalls affin und bezüglich der Achse CX in affiner Lage sind, so erhält man, nachdem man einen Punkt, z. B. a, direkt bestimmt, also $a_0 a \parallel CY$ gezogen und $= \frac{1}{2} a_0 A_1$ gemacht hat, die übrigen Punkte leicht durch Parallelen wie $0_1 0$, $+5_1 +5$, ... zu $A_1 a$ und $0_0 0$, $+5_0 +5$, ... zu $a_0 a$. Auf gleiche Weise kann die schiefe Projektion k aus K_1 selbst gefunden werden. Auch kann man, wenn man will, $M_1 M \perp CM_1$ und $Mm \parallel Co$ ziehen und CM oder Cm je in 10 unter sich gleiche Teile teilen und durch die Teilpunkte mit Mm oder Co Parallele ziehen, um auf k die verlangten Isophotenpunkte direkt zu erhalten.

104. In Fig. 42 und 43, Blatt 8, haben wir ebenso die Isophoten der senkrechten Kreiscylinder- und

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", §§ 116, 164, 174, 175 und 180, S. 70, 106, 112—114.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Kreiskegelfläche in centraler oder polarperspektivischer Darstellung ausgeführt.

Dabei handelt es sich wieder, nachdem die polarperspektivischen Projektionen dieser Flächen gefunden sind*), zuerst um die Bestimmung der Isophotenpunkte des Grundkreises K. Ist dieser, wie in unsern Beispielen, in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene gegeben, so konstruieren wir zunächst die orthogonale Projektion der Lichtrichtung in der Ebene des Grundkreises, sowie den Winkel α, welchen diese Projektion mit der Lichtrichtung bildet. Alsdann denken wir uns diese Ebene, wie in Fig. 42 bei der Cylinderfläche, um die Grundlinie oder Schnittlinie mit der Bildfläche samt dem Grundkreis und der orthogonalen Projektion der Lichtrichtung in die Bildebene umgelegt. Auf dem so umgelegten Grundkreis K_1 suchen wir nun die Isophotenpunkte und bringen sie hierauf wieder in die polarperspektivische Projektion k des Grundkreises zurück. Ist der Grundkreis K wie in Fig. 43 in der Grundrißebene selbst gegeben, so wird die Konstruktion der Isophoten desselben in dieser Ebene auf bekannte Weise ausgeführt und werden alsdann die Isophotenpunkte in die polarperspektivische Projektion k des Grundkreises übertragen.

105. Bezüglich der Ausführung der angedeuteten Konstruktionen ist noch zu bemerken, daß in beiden Figuren in GG die Grundlinien der Bildfläche, in DD_1 der Horizont, in A der Augpunkt, in D und D_1 die beiden Distanzpunkte, in P_1 der in die Bildfläche umgelegte Pol oder das Auge selbst, in F der Fluchtpunkt oder Verschwindungspunkt der Lichtrichtung und in c das Centrum des perspektivischen Grundkreises angenommen worden ist. Bezüglich der Fig. 42 ist noch weiter zu bemerken, daß cM_1 parallel P_1D_1 gezogen, $\measuredangle\, l_1cL_1 = \alpha$, dem Neigungswinkel, welchen die Lichtrichtung mit ihrer horizontalen Projektion bildet, gleichgemacht, $cL_1 = cl_1 . \sec\alpha$ nach cM_1 abgeschlagen und die Strecke cM_1 in 10 gleiche Teile geteilt wird ꝛc., und daß endlich die Teilpunkte auf cM_1 durch Senkrechte nach cM, und durch Strahlen, die durch D gehen, nach k gebracht werden. Für die Isophotenpunkte $+7$, $+7$, sowie für die Fundamentalpunkte c und m sind diese Konstruktionen durch Hilfslinien angedeutet.

Man sieht, daß auf diese Weise die Punkte der centralen Projektion k aus den entsprechenden der umgelegten orthogonalen Projektion K_1 des Grundkreises selbst erhalten werden können. Denn beide Figuren, k und K_1, sind kollinear — GG ist ihre Kollineationsachse und P_1 ihr Kollineationscentrum —, und als solche stehen diese Figuren in solcher Beziehung zu einander, daß bei den gegebenen Bestimmungsstücken die eine (k) leicht aus der andern (K_1) gefunden werden kann. Indem man durch die gefundenen Isophotenpunkte, wie $0, +7, \ldots$, Erzeugungslinien oder Mantellinien zieht,

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung“, §§ 260 und 261, Seite 153 und 154.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

erhält man endlich die verlangten Isophoten 00, + 7 + 7, ... der Cylinderfläche in polarperspektivischer Darstellung selbst.

106. Bei der Kegelfläche in Fig. 43 könnte man natürlich auf gleiche Weise verfahren. Wir haben aber, wie bereits bemerkt, hierbei ein etwas elementareres Verfahren eingehalten, d. h. wir haben zuerst die Isophotenpunkte des Grundkreises K in der Grundrißebene gesucht und alsdann dieselben auf gewöhnliche Weise in die polarperspektivische Projektion k übertragen. Hierbei ist wieder G G die Grundlinie der Bildfläche, DD_1 der Horizont, A der Augpunkt, D und D_1 die Distanzpunkte, P_1 der in die Bildfläche umgelegte Pol und F der Fluchtpunkt der Lichtrichtung, sowie K der Grundkreis, C dessen Mittelpunkt, $c'f' = Cf = r$ der Radius desselben und $c's' = h$ die Höhe der Kegelfläche.

Um alsdann die Isophotenpunkte des Grundkreises zu bestimmen, ziehen wir cD_1 bis l (in G G) verlängert, sowie Cl, errichten in l auf Cl die Senkrechte lL_1 und auf G G die Senkrechte ll' und machen $lL_1 = ll'$ und ziehen CL_1, so ist $\sphericalangle\, lCL_1 = \alpha$ der in die Grundrißebene umgelegte Neigungswinkel, den die Lichtrichtung mit ihrer Grundrißprojektion bildet. Zieht man alsdann $f'g' \perp f's'$, macht $Ci = c'g'$ und $Ch = g'f'$ und errichtet in i und h die Senkrechten iJ_1 und hH_1 und trägt iJ_1 nach CN und CH_1 nach NM, so sind N und M die Fundamentalpunkte der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des Grundkreises. Diese erhält man nun auf bekannte Weise, indem man die Strecke CM in 10 gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte zu CM Senkrechte errichtet, welche den Kreisumfang K in den verlangten Isophotenpunkten, wie bei + 6 angedeutet, durchschneiden. Diese Punkte übertragen wir nun von K auf k in gleicher Weise, wie die übrigen Punkte der polarperspektivischen Projektion aus dem gegebenen Grundkreis übertragen werden. Um z. B. den Punkt n (auf lD_1) zu erhalten, projiziere man N (auf lC) nach n_1 (auf G G) und ziehe n_1A, mache $n_1n_2 = n_1N$ und ziehe n_2D, welche Gerade n_1A in dem verlangten Punkt n schneidet. Ebenso ist der mit p bezeichnete Isophotenpunkt + 2 erhalten worden durch die beiden Strahlen p_1A und p_2D, wobei $Pp_1 \perp GG$ und $p_1p_2 = p_1P$ 2c.

Zugleich ist an einigen Punkten auch das Verfahren angedeutet, wie die polarperspektivische Projektion k samt den Isophotenpunkten als central-kollineare Figur des Kreises K in Beziehung auf die Grundlinie G G als Kollineationsachse und auf den Distanzpunkt E als Kollineationscentrum (wofür aus Platzmangel jedoch nur der Vierteldistanzpunkt $\frac{E}{4}$ *) angenommen werden konnte) gefunden werden kann. Um auf diese Weise z. B. den

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", §§ 231—237, S. 136—140.

dem Punkt Q (+ 4) entsprechenden Punkt q (+ 4) im polarperspektivischen Bilde zu finden, ziehe $Q q_1 \perp G G$, verbinde q_1 mit A, teile $q_1 A$ in 4 gleiche Teile, verbinde den dritten Teilpunkt ε mit $\frac{E}{4}$ und ziehe damit durch Q eine Parallele. Diese wird dann $q_1 A$ im verlängerten Punkt q schneiden.

III.

Von der zusammengesetzten geometrischen oder scheinbaren Beleuchtung.

(Fig. 47—79, Blatt 9—10.)

107. Als Grundlage der zusammengesetzten geometrischen, relativen oder scheinbaren Beleuchtung nehmen wir an, die Beleuchtung der Körper werde wieder durch Sonnenlicht, also durch parallele Lichtstrahlen erzeugt und von einem Standpunkt aus betrachtet, der im Unendlichen in der Projektionsrichtung vom beleuchteten Körper entfernt liegt, aber so, daß die Seherichtung nicht mehr mit der Lichtrichtung zusammenfällt, wie dies bei der wahren Beleuchtung angenommen worden ist.

108. Gehen wir daher wieder von einer Ebene aus, so wird deren scheinbare Beleuchtungsintensität offenbar ihrer wahren oder absoluten Beleuchtungsintensität proportional sein, zugleich aber auch sich nach dem Winkel richten, welchen die Normale zur Ebene mit der Seherichtung bildet. Da dieselbe, wie leicht zu begreifen, abnimmt, wie dieser Winkel zunimmt und umgekehrt, so kann man den daher rührenden Einfluß durch den Kosinus dieses Winkels ausdrücken. Bezeichnet man demnach die scheinbare Beleuchtungsintensität oder Helleintensität derselben Ebene mit H, die wahre Beleuchtungsintensität wie im ersten Teile mit J und den Winkel, welchen die Normale derselben mit der Seherichtung einschließt, mit σ, so ist, wenn C eine Konstante bezeichnet:

$$H = C J \cos \sigma \qquad (I'),$$

oder, wenn für J der Wert aus Gleichung (I), § 46, substituiert wird,

$$H = C J' \cos \alpha \cos \sigma \qquad (II').$$

Hierin bedeutet $C J'$ die scheinbare Beleuchtungsintensität einer Ebene oder eines Flächenelementes, auf der oder auf dem Licht- und Seherichtung senkrecht stehen. Diese Beleuchtung nehmen wir als Einheit an. Setzen wir also $C J' = 1$, so folgt:

$$H = \cos \alpha \cos \sigma \qquad (III'),$$

d. h. die scheinbare Beleuchtungsintensität einer ebenen Fläche oder eines Flächenelementes ist proportional dem Produkt aus

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

den Kosinussen der Winkel α und σ, welche die Normale derselben oder desselben mit der Lichtrichtung und Seherichtung macht.

Wird in der obigen Gleichung (III′) der Winkel α größer als 90^0, so wird $\cos \alpha$ negativ und damit auch die scheinbare Beleuchtungsintensität H negativ. Eine solche negative Beleuchtungsintensität gewinnt auch hier eine wirkliche Bedeutung, wenn wir annehmen, die Fläche werde nicht nur von einem direkten, sondern auch von einem indirekten, reflektierten Lichtbündel beleuchtet, der dem erstern gerade entgegengesetzt ist, im Vergleich mit diesem aber eine merklich schwächere Intensität besitzt.

Diese Annahme ist in der That gestattet, weil die Reflexbeleuchtung, welche das Sonnenlicht im Selbstschatten einer beleuchteten Fläche hervorbringt, vorzugsweise durch parallele Lichtstrahlen erzeugt wird, die den direkten Sonnenstrahlen gerade entgegengesetzt, der Intensität nach aber schwächer als diese sind.

109. Um nun auch hier ein regelmäßiges Isophengensystem einer beleuchteten krummen Fläche zu erhalten, nach welchem die Abstufung der Tusch- oder Farbentöne leicht ausgeführt werden kann, bestimmen wir eine entsprechende Anzahl Isophengen oder Hellekurven derart, daß der Beleuchtungsunterschied je zweier aufeinanderfolgender Isophengen wiederum derselbe ist. Die Intensitätenreihe ist hier jedoch nach beiden Seiten in engere Grenzen eingeschlossen als bei der wahren Beleuchtung. Denkt man sich den Winkel $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die Lichtrichtung mit der Seherichtung in der Ebene XZ macht, halbiert, so giebt die Halbierungslinie dieses Winkels dort, wo sie die krumme Fläche durchschneidet, die hellsten Punkte (die positiven Hellepole) im direkten Licht der beleuchteten Fläche an. Denkt man sich ebenso den zu $\alpha = (90^0 - 2\,\omega)$ gehörenden Nebenwinkel halbiert, so giebt die Halbierungslinie dieses Winkels dort, wo sie die krumme Fläche durchschneidet, die hellsten Punkte (die negativen Hellepole) im indirekten oder reflektierten Lichte der beleuchteten Fläche an. Von diesen Hellepolen ist je einer im Grund- und Aufriß unsichtbar, je der andere aber sichtbar.

Für den sichtbaren positiven Hellepol findet man aus Gleichung (III′), weil für diesen Punkt sowohl die Lichtrichtung als die Seherichtung mit der Normale den gleichen Winkel $\omega = \frac{1}{2}\,(90^0 - \alpha)$ bildet, die größte positive scheinbare Beleuchtungsintensität:

$$H_{max.} = \cos^2 \omega = \frac{1}{2}\,[1 + \cos 2\,\omega] = \frac{1}{2}\,[1 + \sin \alpha] \qquad (IV')$$

und für den sichtbaren negativen Hellepol die größte negative scheinbare Beleuchtungsintensität:

$$H_{min.} = -\sin^2\omega = -\frac{1}{2}[1 - \cos 2\omega] = -\frac{1}{2}[1 - \sin\alpha] \qquad (V').$$

Nehmen wir nun den Winkel α, den die Lichtrichtung mit ihren Projektionen auf der Grundriß- und Aufrißebene macht, wie gewöhnlich $= 35^0 16'$ an, so erhält man:

$$H_{max.} = \cos^2\left(\frac{90^0 - \alpha}{2}\right) = \cos^2 27^0 22' = 0{,}78\,869 \text{ oder rund } 0{,}79$$

$$\text{und } H_{min.} = -\sin^2\left(\frac{90^0 - \alpha}{2}\right) = -\sin^2 27^0 22' = -0{,}21\,130 \text{ oder rund } = -0{,}21.$$

Die Intensitätenreihe für die scheinbare Beleuchtung ist also einerseits mit der Intensität $+0{,}79$ und andererseits mit der Intensität $-0{,}21$ begrenzt, und es ist demnach für diese Beleuchtungsart allgemein:

$$H = H_{max.}, +\ldots, +\frac{3}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{1}{n}, +0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{3}{n}, -\ldots, -H_{min.} \qquad (VI')$$

oder, wenn man wieder n gleich 10 setzt:

$$H = 0{,}79, +0{,}7, +0{,}6, +0{,}5, +0{,}4, +0{,}3, +0{,}2, +0{,}1, +0, -0{,}1, -0{,}2, -0{,}21. \quad (VII').$$

110. Von allen Isophengen oder Hellekurven dieses Systems zeichnet sich auch hier die der Intensität 0 (Null) entsprechende Isophenge durch besondere Einfachheit aus. Dieselbe besteht nämlich aus zwei Teilen, von denen der eine diejenige Kurve ist, in welcher die beleuchtete Fläche berührt wird von der zur Lichtrichtung parallelen umhüllenden Cylinderfläche, und der andere diejenige, in welcher die beleuchtete Fläche von der zur Seherichtung parallelen umhüllenden Cylinderfläche berührt wird. Die erste Berührungskurve bildet die Grenze zwischen Licht und Schatten, die andere die Grenze zwischen dem sichtbaren und unsichtbaren Flächenteile und erscheint demnach als Umriß der Parallelprojektion.

111. Bei der orthogonalen Projektion ist für die Grundrißprojektion die Seherichtung auf der Grundrißebene senkrecht und für die Aufrißprojektion ist sie auf der Aufrißebene senkrecht. Wir erhalten daher für jede dieser Projektionen ein besonderes Isophengensystem des Grundrisses — Grundrißisophengen — und ein Isophengensystem des Aufrisses — Aufrißisophengen.

Einzig bei der Kugelfläche sind unter der Voraussetzung, daß die Lichtrichtung mit der Grundrißebene und der Aufrißebene denselben Winkel ($\alpha = 35^0\ 16'$) bildet, die Grundrißisophengen und Aufrißisophengen einander gleich. Man braucht daher in diesem Fall nur die einen, z. B. die Grundrißisophengen, direkt zu bestimmen und dieselben alsdann in die andere Projektionsebene zu übertragen.

Bei der zur Grundrißebene senkrechten Kreiskegelfläche sind dagegen — selbst unter der vorhin ange-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gebenen beschränkenden Voraussetzung — die Grundrißisophengen von den Aufrißisophengen ganz verschieden. Sowohl diese wie jene sind Mantellinien; allein dieselben fallen keineswegs zusammen, sondern sind vielmehr ihrer Anzahl und Lage nach verschieden.

Bei der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche giebt es — unter der gleichen Voraussetzung — nur Aufrißisophengen, indem die Grundrißisophengen in Isophengenpunkte übergehen. Die Aufrißisophengen sind ebenfalls Mantellinien, die somit durch je einen Punkt bestimmt sind.

112. Die Konstruktionen, auf welchen die graphische Darstellung der Isophengen beruht, lassen sich am einfachsten aus der Betrachtung der scheinbaren Beleuchtung der Kugelfläche ableiten, weil, wie schon früher bemerkt worden ist, die Kugelfläche die einfachste Fläche ist, deren Flächenelemente alle möglichen Stellungen einnehmen und daher auch alle möglichen Beleuchtungsintensitäten zeigen.

Die Isophengen der Kugelfläche sind nun aber im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung. Dieselben erscheinen als Schnittkurven der Isophengoiden der Kugelfläche mit dieser letztern. Die Isophengoiden der Kugelfläche sind im allgemeinen Kegelflächen zweiter Ordnung, welche den Kugelmittelpunkt als gemeinschaftliche Spitze haben. Für die Beleuchtungsintensität $H = 0$ gehen diese Kegelflächen in zwei Ebenen über, von denen die eine zur Seherichtung und die andere zur Lichtrichtung senkrecht ist. Erstere ist darum zur Grundrißebene resp. Aufrißebene parallel, und die andere ist zur Grundrißebene unter dem Winkel $(90^0 - \alpha)$ geneigt und schneidet dieselbe in einer Geraden, die im Abstande $\delta \operatorname{tg} \alpha$ zur Y-Achse parallel ist, sofern δ der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Grundrißebene bedeutet. Diese beiden Ebenen schneiden die Kugelfläche in Kreisen, von denen der zur Projektionsebene parallele Schnittkreis sich als Kreis in wahrer Größe und der zu derselben unter dem Winkel $(90^0 - \alpha)$ geneigte Kreis sich als Ellipse projiziert, deren große Achse gleich dem Durchmesser $(2\,\rho)$ der Kugel und deren kleine Achse gleich $2\,\rho \sin \alpha$ ist und daher leicht gezeichnet werden kann.

Den scheinbaren Intensitäten der Hellepole der Kugelfläche entsprechen die schon oben (§ 109) berechneten Grenzwerte $H_{max.} = +0{,}79$ und $H_{min.} = -0{,}21$. Den dem erstern Grenzwert $(+0{,}79)$ entsprechenden sichtbaren positiven Hellepol der direkt beleuchteten Kugelfläche erhält man, wie ebenfalls schon oben (§ 109) angegeben worden ist, durch die Halbierungslinie des Winkels $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die Lichtrichtung mit der Seherichtung bildet, und den dem andern Grenzwert $(-0{,}21)$ entsprechenden sichtbaren negativen Hellepol erhält man ebenso durch die Halbierungslinie des Winkels $2\,\omega = (90^0 - \alpha)$, den die beiden Kugeldurchmesser, die zur Lichtrichtung und zur Seherichtung senkrecht aufeinanderstehen, miteinander bilden. Die Isophengen der übrigen scheinbaren Beleuchtungsintensitäten der Kugelfläche sind, wie schon angegeben, Raumkurven

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

vierter Ordnung und können daher nur punktweise konstruiert werden. Nimmt man jedoch zur Darstellung derselben eine zweite Aufrißebene parallel zur Lichtrichtung und senkrecht zur Grundrißebene an, so stellen sich dieselben in dieser Projektionsebene als Hyperbeln dar, und die der Intensität 0 entsprechenden Grenzisophengen projizieren sich in dieser Ebene als gerade Linien, die zugleich als gemeinschaftliche Assymptoten der erwähnten Hyperbeln erscheinen.

Mittelst dieser projektiven Eigenschaften der Kugelisophengen ist man nun auch im stande, die Grundriß- und Aufrißisophengen ziemlich leicht und rein projektiv zu erhalten. Wie dies geschehen kann, werden wir weiter unten, wo es sich um die wirkliche graphische Ausführung der Kugelisophengen handelt, näher zeigen.

Vorerst sollen jedoch noch die Isophengen der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinder- und Kreiskegelfläche graphisch bestimmt werden.

a) Scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiscylinderfläche.

(Fig. 47, Blatt 9.)

113. Wie schon oben (§ 111) angedeutet worden ist, giebt es auf der zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche nur Aufrißisophengen. Dieselben sind Mantellinien oder Erzeugungslinien, die als solche durch die entsprechenden Isophengenpunkte des Grundkreises, d. h. durch die Punkte, worin sie den Umfang des Grundkreises schneiden, bestimmt sind. Es handelt sich also vor allem um die erwähnten Isophengenpunkte der Aufrißisophengen. Dieselben zu erhalten, konstruieren wir in Fig. 47, Blatt 9, in welcher Grundriß und Aufriß einer zur Grundrißebene senkrechten Kreiscylinderfläche vom Radius CA und der Höhe $c'\gamma'$ sowie die Projektionen Cl, $c'l'$ der Lichtrichtung gegeben sind, für den Aufriß den centralen Normalenbüschel des in die Aufrißebene umgelegten Grundkreises K mit dem Mittelpunkt C als Centralpunkt. Dazu ziehen wir in C auf Cl eine Senkrechte CC', beschreiben aus C', wo sie die Projektionsachse schneidet, einen durch C gehenden Kreis K', der die verlängerte CC' in N_1 und die Aufrißprojektion $c'l'$ der Lichtrichtung in p' und q' schneidet, fällen von N_1 auf die Projektionsachse eine Senkrechte N_1N', so ist der Durchschnittspunkt N' der Nullpunkt der auf der Achse $c'C'$ liegenden Intensitätsskale des in die Aufrißebene umgelegten centralen Normalenbüschels. Wir erhalten aber auch den Nullpunkt N' dieser Skale einfach, indem wir $C'N' = C'c'$ machen. Den Maximalpunkt M' dieser Intensitätsskale zu finden, fällen wir von N' auf $c'l'$ eine Senkrechte, welche $c'l'$ in π' schneidet, machen die Strecke $\pi'm' = p'q'$ und errichten in m' auf $c'l'$ eine Senkrechte, welche die Projektionsachse in M' schneidet. Der Durchschnittspunkt M' ist alsdann der verlangte Maximalpunkt der Intensitätsskale. Teilen wir nun die Strecke $N'M'$ in zehn gleiche Teile und ziehen wir durch die Teilpunkte Senkrechte zu $N'M'$, so gehen die Strahlen des um-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gelegten centralen Normalenbüschels C durch die Schnittpunkte, welche diese Senkrechten mit dem Kreis K′ bilden, und diese Strahlen schneiden dann den umgelegten Kreisumfang K in den verlangten Isophotenpunkten. Werden diese endlich auf die Vertikalprojektion k′ des Grundkreises projiziert und durch dieselben Mantellinien gezogen, so sind dies die verlangten Aufrißisophengen der dargestellten Kreiscylinderfläche.

114. Die beiden Strahlen CN_1 und CN_2, von denen der letztere zur Projektionsachse parallel, der andere aber zu Cl senkrecht ist, entsprechen der scheinbaren Beleuchtungsintensität $H = 0$ und bestimmen die aus vier Erzeugenden bestehende Grenzisophenge der Kreiscylinderfläche. Der Ordnungsstrahl CP′ bestimmt die hellste Isophenge (6,9) im direkt beleuchteten Flächenteil, der Ordnungsstrahl CQ′ ebenso die hellste Isophenge (— 1,2) im Selbstschatten oder im indirekt (durch Reflexlicht) beleuchteten Flächenteil. Wie man aus der Figur sieht, sind im Aufriß diese beiden hellsten Isophengen (+ 6,9 und — 1,2) sichtbar.

Ebenso sind auch drei von den vier Erzeugenden, welche der Grenzisophenge von der Intensität 0 entsprechen, sichtbar, und bilden zwei davon die äußersten Umrißlinien. Und gerade darin unterscheidet sich die scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiscylinderfläche von der wahren Beleuchtung der gleichen Fläche (siehe Fig. 25, Blatt 3) sehr wesentlich. Das Licht tritt bei der scheinbaren Beleuchtung mehr vor und der Schatten mehr zurück, wie dies auch in Wirklichkeit, wenigstens annähernd, beobachtet wird.

b) Scheinbare Beleuchtung der senkrechten Kreiskegelfläche.

(Fig. 48, Blatt 10.)

115. In § 111 wurde bereits angedeutet, daß die Isophengen der zur Grundrißebene senkrechten Kreiskegelfläche für den Grundriß und Aufriß verschieden sind und daher für jede Projektionsebene besonders konstruiert werden müssen. Dieselben sind ebenfalls Mantellinien und sind als solche durch die Isophengenpunkte des Grundkreises, d. h. durch die Punkte, in welchen sie den Umfang des Grundkreises schneiden, bestimmt. Es handelt sich daher wiederum vor allem um die erwähnten Isophengenpunkte des Grundkreises, und zwar zunächst für die Grundrißprojektion und alsdann für die Aufrißprojektion.

116. Grundrißisophengen. Die Grundrißisophengen der senkrechten Kreiskegelfläche, deren Projektionen in Fig. 48 gegeben sind, zu erhalten, bestimmen wir auf ähnliche Weise wie bei der wahren Beleuchtung (siehe § 76, Fig. 30) die Isophengenpunkte des Grundkreises K. Indem wir $f'g' \perp f's'$ ziehen und den Winkel $1CL_1 = \alpha$ dem Winkel gleich machen, den die Lichtrichtung (l, l′) mit ihrer Grundrißprojektion l bildet, sodann auf Cl die Strecke $Ci = c'g' = S$

(der Subnormale) abtragen, in i auf Ci eine Senkrechte errichten, welche CL_1 in J_1 schneidet, und hierauf iJ_1 nach CN übertragen, erhalten wir in N den Nullpunkt der Intensitätsskale. Der andere Fundamentalpunkt M fällt in unserer Figur außerhalb der Zeichnungsfläche. Wir bestimmen daher einen andern zugänglichen Punkt der Skale, z. B. den mittlern, fünften Teilpunkt derselben, indem wir $Ch = \frac{1}{2} g's'$ nehmen, in h eine Senkrechte errichten, welche CL_1 in H_1 schneidet, und dann $NM_2 = CH_1$ machen und diese Strecke in fünf gleiche Teile teilen und solche über N hinaus noch so viele rückwärts abtragen, als innerhalb des Kreises K fallen. Die durch die Teilpunkte auf Cl gezogenen Senkrechten schneiden den Umfang des Grundkreises K in den verlangten Isophengenpunkten, welche, mit C(s) verbunden, die verlangten Grundrißisophengen liefern.

117. Aufrißisophengen. Die Aufrißisophengen der senkrechten Kreiskegelfläche, deren Projektionen in Fig. 48 gegeben, zu erhalten, nehmen wir die durch den Radius $g'f'$ und den Mittelpunkt (C, g') bestimmte Kugelfläche zu Hilfe, welche die Kegelfläche in dem Grundkreis K berührt und in diesem Kreise mit ihr die gleiche scheinbare Beleuchtung besitzt. Für den Mittelpunkt (C, g') als Centralpunkt konstruieren wir nun den centralen Normalenbüschel einer Ebene, welche auf der Aufrißebene senkrecht steht und diese in $g'l''$ parallel zur Vertikalprojektion $c'l'$ der Lichtrichtung schneidet und zugleich als dritte Projektionsebene angenommen wird. Zu diesem Behufe errichten wir in g' auf $g'l''$ eine Senkrechte, nehmen auf dieser den Punkt C_1 beliebig an, den wir, vom Grundriß abgesehen, zugleich als Projektion des Centralpunktes auf die in die Aufrißebene umgelegte dritte Projektionsebene betrachten können, machen hierauf $\measuredangle\, g'C_1C' = \alpha$, d. h. gleich dem Winkel, den die Lichtrichtung mit ihrer Aufrißprojektion bildet, beschreiben aus C' mit $C'C_1$ als Radius den Teilkreis K', welchen $g'l''$ in P' und Q' schneidet, und bestimmen auf bekannte Weise die auf $g'l''$ liegende Intensitätsskale. Durch die Schnittpunkte, welche die in den Teilpunkten der Intensitätsskale errichteten Senkrechten mit dem Halbkreis $P'N_1Q'$ bilden, sind diejenigen Strahlen des Büschels C_1 gegeben, welche die sichtbaren Aufrißisophengen liefern, also für unsern Zweck ausreichen. Wir beschreiben nun mit dem Radius $g'f'$ aus C_1 einen Viertelskreis k_1, der durch die Ordnungsstrahlen C_1P' und C_1Q' begrenzt wird, bestimmen auf k_1 die Schnittpunkte der innerhalb des Winkels $P'C_1Q'$ liegenden Strahlen des Büschels C_1 und projizieren diese parallel C_1P' auf $g'l''$. Dann bilden die um P' beschriebenen Kreise wie $+5\ +5$, $+7\ +7$, ..., die durch die auf $g'l''$ liegenden Punkte $+5$, $+7$, ... bestimmt sind, ein System konzentrischer Kreise, die zur Auffindung der Aufrißisophengen der Kegelfläche, wie sogleich angegeben werden soll, benützt werden, nachdem wir vorher noch in der dritten Projektionsebene die durch die An-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nahme von C_1 bestimmte Projektion c_1 von dem Mittelpunkt (C, c') des Grundkreises K, sowie die Projektionen $a_1 b_1$ und $d_1 e_1$ des auf der Aufrißebene senkrecht stehenden und des zu ihr parallelen Durchmessers des Kreises K bestimmt und hierauf (C, c') parallel $g'l''$, also schief auf die Ebene der erwähnten konzentrischen Kreise, nach c'' und ebenso die genannten Durchmesser nach $a''b''$ und $d''e''$ projiziert haben.

Dann ist c'' der Mittelpunkt der schiefen Projektion k'' von K und $a''b''$ und $d''e''$ sind zwei conjugierte Durchmesser derselben, welche beziehungsweise zu $g'l''$ und $c'f'$ parallel sind, womit die Ellipse k'' bestimmt ist und leicht konstruiert werden kann*). Ist diese erhalten, dann ziehen wir die oben erwähnten konzentrischen Kreise und von den Schnittpunkten derselben mit der Ellipse Parallelen mit $g'l''$. Diese treffen alsdann die (mit der Projektionsachse zusammenfallende) Aufrißprojektion k' des Grundkreises in den Isophengenpunkten, welche, mit s' verbunden, die verlangten Aufrißisophengen der gegebenen Kegelfläche liefern.

118. Grenzisophengen. Die Grenzisophengen, welche der Beleuchtungsintensität $H = 0$ in der Aufrißprojektion der Kegelfläche entsprechen, erhält man mittelst des Kreises $o'o''_1 o''_2$, dessen Radius durch die Strecke $P'o'$ bestimmt ist und der die Ellipse in den beiden Punkten o''_1 und o''_2 schneidet. Dieser Kreis muß die Ellipse k'' auch in den Punkten d'' und e'' schneiden, weil die Umrißmantellinien ebenfalls die scheinbare Beleuchtungsintensität 0 besitzen. Von diesen der Intensität 0 entsprechenden vier Isophengen ist die dem Punkt o''_2 zugehörige im Aufriß unsichtbar, die drei andern sind dagegen sichtbar.

Die Isophengen der größten scheinbaren Beleuchtung im direkt beleuchteten Flächenteil und im Selbstschatten erhält man, indem man die Berührungspunkte t''_1 und t''_2 der aus P' beschriebenen und die Ellipse berührenden Kreise bestimmt und dieselben ebenfalls nach t'_1 und t'_2 auf k' projiziert und mit s' verbindet.

Dieselbe Bemerkung, die wir oben (§ 114) über die scheinbare Beleuchtung der Kreiscylinderfläche im Vergleiche zur wahren Beleuchtung der gleichen Fläche gemacht haben, gilt auch hier für die scheinbare Beleuchtung der Kreiskegelfläche im Vergleich mit der wahren Beleuchtung derselben Fläche, wie sie in Fig. 30 dargestellt worden ist. Das Licht tritt ebenfalls bei der scheinbaren Beleuchtung mehr vor und der Schatten mehr zurück, wodurch in der That die Beleuchtung der natürlichen, wirklich beobachteten mehr angenähert wird.

c) Scheinbare Beleuchtung der Kugelfläche.

(Fig. 49, Blatt 10.)

119. Die Isophengen der Kugelfläche, welche im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung sind, haben wir bereits oben (§ 112) einläßlich betrachtet, und es

*) Siehe 4. Heft unserer „Anleitung", § 194, S. 119—120.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

erübrigt hier nur noch, zu zeigen, wie dieselben konstruiert oder sonst graphisch erhalten werden können.

Da sie für den Aufriß und Grundriß — unter der Voraussetzung, daß die Lichtrichtung (l, l′) mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel ($\alpha = 35^0\,16'$) bilden — gleich sind, so werden wir die Konstruktion zunächst nur für die Grundrißisophengen zeigen. Diese zu erhalten, konstruieren wir im Grundriß die Isophengenpunkte zuerst für den größten Kugelkreis K, dessen Ebene auf der Grundrißebene in der Grundrißprojektion c l der Lichtrichtung senkrecht steht. Diesen Kreis denken wir uns um seinen horizontalen Durchmesser als Achse in eine zur Grundrißebene parallele Lage gedreht, so daß er mit der horizontalen Projektion k des horizontalen Umrißkreises zusammenfällt. Um alsdann den in diese horizontale Ebene des Kugelmittelpunktes umgelegten centralen Normalenbüschel, der auf dem Kreis k, der Umlegung des Kreises K, die Isophengenpunkte dieses Kreises bestimmt, zu konstruieren, ziehen wir in beliebigem Abstand zur Grundrißprojektion c l der Lichtrichtung eine Parallele $c_2 C_1$, welche die in der Grundrißprojektion c des Kugelmittelpunktes auf c l errichtete Senkrechte in c_2 schneidet. Ferner legen wir an $c\,c_2$ den Winkel α, so daß $\measuredangle\, c_2 c C_1 = \alpha$ ist, beschreiben aus C_1 den durch c gehenden Teilkreis K_1, der $C_1 c_2$ in P_1 und Q_1 schneidet, und machen dann auf $P_1 Q_1$ die Strecke $C_1 N_1 = C_1 c_2$ und $N_1 M_1 = P_1 Q_1$. Der durch den Teilkreis K_1 und die Intensitätsskale $N_1 M_1$ gegebene centrale Normalenbüschel c schneidet den Halbkreis a d b in den umgelegten Isophengenpunkten, welche senkrecht auf c l projiziert, die sichtbaren Isophengenpunkte des Kreises K im Grundkreis liefern. Für die Hellepole = 7,9 und — 2,1 ist diese Konstruktion angedeutet. Durch den Punkt β ist der sichtbare elliptische Teil $d\beta e$ der Grenzisophenge 0 bestimmt und kann daher sofort gezeichnet werden. Der andere Teil derselben, der im Grundriß den Umriß bildet, fällt mit der Grundrißprojektion zusammen.

120. Um weitere Isophengenpunkte der Grundrißisophengen zu erhalten, kann man auf gleiche Weise verfahren, wie dies bei der Auffindung der Grundrißisophengen der Kreiskegelfläche (§ 116) gezeigt worden ist. Dazu nimmt man Parallelkreise $k_1, k_2, \ldots$ parallel zur Grundrißebene an, betrachtet sie als Grundkreise der hinzugedachten Umhüllungskegel, wie sie in der zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene angedeutet sind. Für den Parallelkreis (k_1, k''_1) ist die Konstruktion in der Figur durch Hilfslinien angegeben.

Macht man $c\,i = c''\gamma''_1$ und $c\,h = \frac{1}{2}\, c''s''_1$, errichtet in i und h die Senkrechten $i\,J_1$ und $h\,H_1$ und trägt $i\,J_1$ nach c n und $c\,H_1$ nach n m, so ist n der Nullpunkt und m die Mitte der Intensitätsskale. Teilt man hierauf die Strecken n m in fünf gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu c l, so schneiden diese den Kreis k_1 in den verlangten Isophengenpunkten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

121. Gehen die Parallelkreise gerade durch Isophengenpunkte des Kreises K, so vereinfacht sich die Konstruktion noch mehr. Der Parallelkreis (k_1, k''_1) z. B. geht zufällig durch den Isophengenpunkt (V, f''_1), dem die Intensität 0,5 und auf k der Punkt $+V_1$ entspricht. Durch $+V_1$ ziehen wir parallel mit cl die Gerade $+V_1 0_1$, welche cC_1 in 0_1 trifft. Sodann ziehen wir durch 0_1 auf cl eine Senkrechte, welche k_1 in 0_I und 0_{II} schneidet. Dies sind die beiden Isophengenpunkte auf k_1, denen die Intensität 0 entspricht. Die durch 0_1 auf cl gezogene Senkrechte schneidet letztere zugleich in n, dem Nullpunkt der Skale, von der m der mittlere, fünfte Teilpunkt (V) bereits bekannt ist. Indem man daher die Strecke nm in fünf gleiche Teile teilt und fortfährt, wie in § 120 erklärt worden ist, erhält man wiederum die Isophengenpunkte des Parallelkreises k_1. Die Einteilung der Skale ist, um die Figur im Innern nicht zu sehr zu überladen, zur Seite auf der zu cl parallelen Geraden $0'V'$ ausgeführt worden.

122. Geht der Parallelkreis (wie k_2, k''_2) nicht gerade durch einen Isophengenpunkt, so modifiziert sich die letzte Konstruktion wie folgt:

Wir ziehen durch f_2, worin der Parallelkreis k_2 den Symmetriekreis K im Grundriß schneidet, auf cl eine Senkrechte, welche k in f_3 trifft. Durch f_3 ziehen wir zu cl eine Parallele, welche cC_1 in t schneidet, auf cf_3 eine Senkrechte, welche cd in u trifft, und durch u zu cl eine Parallele, welche cC_1 in v schneidet. Trägt man nun endlich cv nach tw, so ist t der Nullpunkt und w der Maximalpunkt der Intensitässkale für die Konstruktion der Isophengenpunkte des Parallelkreises k_2, welche mit diesen Angaben ohne weiteres ausgeführt werden kann.

123. Hat man auf die eine oder andere Weise die Grundrißisophengenpunkte einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen bestimmt, so hat man schließlich nur noch die gleichnamigen, d. h. die gleichen Intensitäten entsprechenden Isophengenpunkte durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand zu verbinden, um die Grundrißisophengen der Kugelfläche selbst zu erhalten. Die Aufrißisophengen sind unter der gemachten Voraussetzung, daß die Lichtrichtung mit beiden Projektionsebenen gleiche Winkel bildet, den Grundrißisophengen kongruent und können daher unmittelbar übertragen werden.

124. Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene. Wie schon oben (§ 112) kurz angedeutet worden ist, projizieren sich die Isophengen der Kugelfläche auf einer zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißebene senkrechten dritten Projektionsebene als Hyperbeln und die Grenzisophengen der Intensität 0 als gemeinschaftliche Assymptoten dieser Hyperbeln.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

In der dritten Seitenprojektion der Fig. 49 haben wir diese Isophengen dargestellt, wie nun noch erklärt werden soll. Nachdem $c_2 c'' = c_1 c'$ gemacht und mit dem Kugelradius $c'' a'' = c a = r$ aus c'' der Kreis K'' beschrieben worden ist, ziehen wir durch c'' den Durchmesser $a'' b'' \parallel c 1$, machen Winkel $a'' c'' 1'' = \alpha = 35^0 16'$ und errichten zu $c'' 1''$ den senkrechten Durchmesser $\alpha'' \beta''$, so stellen die beiden Durchmesser $a'' b''$ und $\alpha'' \beta''$ die in dieser Projektionsebene der Intensität 0 entsprechenden Grenzisophengen dar. Halbiert man hierauf die beiden Winkel $a'' c'' \beta''$ und $b'' c'' \beta''$, so stehen die beiden Halbierungslinien aufeinander senkrecht und geben in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis K'' die Hellepole des Kugelkreises an, und zwar giebt die erstere Halbierungslinie $c'' p''$ den Hellepol p'' von der Maximalintensität $+ 0{,}79$ im sichtbaren direkt beleuchteten Flächenteil und die andere $c'' q''$ den Hellepol q'' von der Maximalintensität $- 0{,}21$ im sichtbaren durch Reflexlicht indirekt beleuchteten Flächenteil.

Um die übrigen sich als Hyperbeln darstellenden Isophengen zu finden, denke man sich die bereits oben (§ 113) gefundenen Isophengenpunkte des Symmetriekreises K von p'' bis q'', also von $+ 7{,}9$ bis $- 2{,}1$ auf den Kreis K'' der Seitenprojektion dieses Kreises nach den Punkten $+ 7''$, $+ 6''$, $+ 5''$, $+ 4''$, $+ 3''$, $+ 2''$, $+ 1''$, β'' (0), $- 1''$, $- 2''$ des Quadranten $p'' q''$ projiziert. Damit ergeben sich dann die Scheitelpunkte $+ \mathrm{I}''$, $+ \mathrm{II}''$, ..., $- \mathrm{I}''$, $- \mathrm{II}''$ der entsprechenden Hyperbeln nach einem bekannten Lehrsatz, indem man z. B. für I'' die Gerade $+ 1'' a'' \parallel a'' b''$ zieht und zu $c'' a''$ und $a'' + 1''$ die mittlere Proportionale $a'' b''$ sucht, diese nach $c'' b''$ abträgt und durch b'' mit $a'' b''$ eine Parallele zieht, welche die Mittellinie $c'' p''$ in $+ \mathrm{I}''$, dem Scheitelpunkt der ersten Hyperbel, schneidet. Errichtet man noch in $+ \mathrm{I}''$ auf $c'' p''$ die Senkrechte $+ \mathrm{I}'' e''$ und macht $c'' + \mathrm{I}''' = c'' e''$, so ist $+ \mathrm{I}'''$ der Brennpunkt der ersten Hyperbel $+ 1'' + \mathrm{I}'' + 1''$, und diese kann nun auf bekannte Weise konstruiert werden.*) Ebenso findet man auch die Hyperbeln $+ 2 + \mathrm{II}'' + 2$, 2c. Dasselbe gilt natürlich auch für die Hyperbeln $- 1'' - \mathrm{I}'' - 1'$ und $- 2'' - \mathrm{II}'' - 2$ im Selbstschatten.

125. Mittelst der Isophengen in der Seitenprojektion ist man nun auch im stande, die Grundrißisophengen auf rein projektivem Wege zu finden. Man nehme wieder eine Reihe von horizontalen Parallelkreisen (k_1, k''_1), (k_2, k''_2), ... an und projiziere die Punkte, worin k''_1, k''_2, ... die Isophengen im Seitenriß schneiden, auf die zugehörigen Grundrißprojektionen k_1, k_2, ... und verbinde alsdann die gleichnamigen, d. h. die von gleicher Beleuchtungsintensität im Grundriß durch je eine stetige krumme Linie aus freier Hand, so sind dies die entsprechenden Grundrißisophengen der Kugelfläche. Die Aufrißisophengen derselben sind in unserer Figur den Grundrißisophengen kongruent und können darum den

*) Siehe 1. Heft, 2. Aufl., unserer „Anleitung“, § 158 und 159, S. 55.

letztern gleichgemacht werden. Bei dieser Übertragung hat man nur darauf zu sehen, daß die relative Lage der Aufrißisophengen in Bezug auf die vertikale Projektion $c'l'$ der Lichtrichtung dieselbe bleibe wie die der Grundrißisophengen in Bezug auf die horizontale Projektion $c\,l$ der Lichtrichtung*).

IV.

Übungsbeispiele.

(Fig. 50—60, Blatt 11—16.)

126. Die in den beiden vorigen Abschnitten (II und III) behandelten Beleuchtungskonstruktionen bilden die Grundlage sowohl der einfachen (wahren) als der zusammengesetzten (scheinbaren) Beleuchtungs- und Schattenlehre. Damit ist man nun auch im stande, die Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen Flächen zu bestimmen. Zur Übung sollen nun noch eine Anzahl verschiedener Beispiele sowohl ebener als krummer Flächen nach der einfach geometrischen oder wahren Beleuchtung besonders behandelt werden.

a) Beleuchtung ebener Flächen.

(Fig. 50—52, Blatt 11.)

127. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines regulären senkrechten fünfseitigen Prismas, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen, Fig. 50.

Auflösung.

Sind $ABCDE$, $a'_1\,b'_1\,c'_1\,d'_1\,e'_1\,a'_2\,b'_2\,c'_2\,d'_2\,e'_2$ die Projektionen des gegebenen regulären fünfseitigen, auf der H.E. senkrechten Prismas und $0\,1$, $0'\,1'$ die

*) Es mag hier noch besonders bemerkt werden, daß die auf die angegebene Weise bestimmten Isophengen der Kugel ebenso wie die Isophoten derselben bei der wahren Beleuchtung benützt werden können, um mit Hilfe derselben bei beliebigen andern Körpern die Isophengen oder Lichtlinien der scheinbaren Beleuchtung zu bestimmen. Um z. B. bei der senkrechten Kreiscylinderfläche auf diese Weise die Isophengen zu erhalten, denke man sich der Cylinderfläche eine Kugelfläche von gleichem Radius und gleichem Mittelpunkt des Grundkreises eingeschrieben. Die Punkte, in welchen der Grundkreis der Cylinderfläche die Isophengen der Kugelfläche schneidet, sind alsdann die Isophengenpunkte der Cylinderfläche, und die Geraden, die man durch dieselben parallel zur Seite oder senkrecht zur Basis zieht, sind die verlangten Isophengen der Cylinderfläche. Auf ähnliche Weise erhält man mittels der Hilfskugel auch die Isophengen der Kegelfläche und anderer Umdrehungsflächen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Projektionen der gegebenen Lichtrichtung, so nehme man (0, 0′), einen Punkt der geometrischen Achse, als Mittelpunkt und $0'e'_1 = 0f = 0g = 0h$, ... als Radius einer Hilfskugel, die dem Prisma eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten (f, f′), (g, g′), (h, h′), ... zugleich auch die Beleuchtungsintensität der ebenen Seitenflächen (AB, $a'_1 a'_2 b'_2 b'_1$), (BC, $b'_1 b'_2 c'_2 c'_1$), (CD, $c'_1 c'_2 d'_2 d'_1$), ... und in dem obersten Punkt (0, i′) die Beleuchtungsintensität der obern Grundfläche ($ABCDE$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2$) angiebt.

Man bestimme daher auf bekannte Weise den Neigungswinkel α ($= 35^0 16'$), den die Lichtrichtung (01, 0′1′) mit der Achse XX bildet, indem man $1L_1 \perp 01$ und $= 1'1''$ macht und L_1 mit 0 verbindet; mache ferner $0 + 10 = 0 - 10 = 0L_1$ und teile diese Strecken je in 10 gleiche Teile, so ist damit die Beleuchtungsskale für den horizontalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die fünf senkrechten Seitenflächen des Prismas gefunden. Fällt man daher von f, g, h, ... auf XX die Senkrechten ff_1, gg_1, hh_1, ..., so geben die Punkte f_1, g_1, h_1, ... auf der Beleuchtungsskale unmittelbar die Beleuchtungsintensität der verlangten Seitenfläche des Prismas an.

Man findet auf diese Weise die Beleuchtungsintensität der Fläche (AB, $a'_1 b'_1 b'_2 a'_2$) $= +0{,}72\,748$, diejenige von (BC, $b'_1 c'_1 c'_2 b'_2$) $= +0{,}57\,733$ und diejenige von (CD, $c'_1 d'_1 d'_2 c'_2$) $= -0{,}37\,067$, wofür man beziehungsweise die Werte $+0{,}73$, $+0{,}58$, $-0{,}37$ setzen kann.

Bestimmt man ebenso die Strecken $0' + 10' = 0' - 10' = 0'L'_1$ und teilt jede derselben in zehn gleiche Teile, so erhält man damit die Beleuchtungsskale für den vertikalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die obere horizontale Grundfläche des Prismas. Denkt man sich nämlich im Punkt (0, i′) eine parallele Ebene mit der Grundfläche ($ABCDE$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2$) gezogen, so haben beide Flächen die gleiche Beleuchtung, und fällt man von i′ auf 0′1′ eine Senkrechte $l'i'_1$, so giebt der Punkt i'_1 auf der Skale $0' + 10'$ die verlangte Beleuchtungsintensität $+0{,}58$ an. Da dieselbe mit der Intensität der vordern senkrechten Seitenfläche oder des Punktes g übereinstimmt, so kann die letztere Konstruktion der Beleuchtungsskale in der V.E. füglich weggelassen werden.

128. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer regulären senkrechten sechsseitigen Pyramide, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen Fig. 51.

Auflösung. Sind $ABDEFGC$, $a'b'd'e'f'g's'$ die Projektionen der gegebenen regulären sechsseitigen, auf der H.E. senkrechten Pyramide und cl, c′l′ die Projektionen der Lichtrichtung, so nehme man wieder (C, c′) als Mittelpunkt und den senkrechten Abstand (Cn, c′n′) desselben von einer Seitenfläche (BCD, $b's'd'$) als Radius ($c'n'_1$) einer Hilfskugel, die der Pyramide eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten, wie (n, n'), zugleich auch die Beleuchtungsintensität der berührenden Seitenflächen, wie (BCD, b's'd') angiebt.

Um den senkrechten Abstand (Cn, c'n') des Mittelpunktes (C, c') von der Seitenfläche (BCD, b's'd') zu finden, denke man letztere in eine zur V.E. senkrechte Lage (CK_1, $s'k'_1$) gedreht. In dieser Lage projiziert sich dann die verlangte Normale vertikal als die Senkrechte $c'n'_1$ zu $s'k'_1$ und horizontal als die Parallele Cn_1 zur Achse. Denkt man sich nun die Seitenfläche wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, so kommt der Berührungspunkt (n_1, n'_1) der Seitenfläche mit der Hilfskugel nach (n, n') zu liegen, und fällt man von n auf cl eine Senkrechte nn_2, so giebt der Punkt n_2 auf der Beleuchtungsskale 0 — 10 die verlangte Beleuchtungsintensität, nämlich — 0,09 an. Die Beleuchtungsskale findet man aber, wie früher beim senkrechten Kreiskegel Fig. 30 gezeigt worden ist, indem man den in die H.E. umgelegten horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (cl, c'l') bestimmt, die Normale $c'n'_1$ des Berührungskreises (nopq ..., n'_1t') nach Ch und die Subnormale $c'\ \gamma'$ desselben nach Ci trägt, die Senkrechten hH_1 und iJ_1 zu Cl errichtet und iJ_1 nach C0 und CH_1 nach 0 + 10 und 0 — 10 auf XX abträgt. Die Punkte 0, + 10 und — 10 sind dann die Fundamentalpunkte der verlangten Beleuchtungsskale.

Beschreibt man nun mit Cn einen Kreis, so schneidet er die Horizontalprojektionen der Normalen auf den übrigen Seitenflächen in o, p, q, r, m, und indem man von diesen Punkten auf die mit XX zusammenfallende Beleuchtungsskale Senkrechte fällt, so erhält man in den Fußpunkten o_1, p_1, q_1, r_1, m_1 unmittelbar die verlangten Beleuchtungsintensitäten der Seitenflächen (CDE, s'd'e'), (CEF, s'e'f'), (CFG, s'f'g'), (CGA, s'g'a') und (CAB, s'a'b'), nämlich — 0,52, — 0,23, + 0,52, + 0,96 und + 0,66, wie in der Figur eingeschrieben ist. Macht man $l'_1c'L'_1 = \alpha$ und errichtet in c' und + 10' die Senkrechten c'u' und + 10 v', letztere bis l'_1 (in der Projektionsachse) verlängert, so bestimmt nach früherem (§ 79 und 80) $\gamma'u' = C0$ den Nullpunkt (0) und $u't' = c'l'_1$ die Länge der beiden Strecken 0 + 10 = 0 — 10 der Beleuchtungsskale und damit auch die Maximalpunkte + 10 und — 10 der letztern, womit die Konstruktion etwas vereinfacht ist.

129. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. mit zwei Flächen parallel gestellten regulären Dodekaeders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden Seitenflächen bestimmen (Fig. 52).

Auflösung. Erwägt man, daß in der gegebenen Lage des Dodekaeders sowohl die fünf obern als die fünf untern Seitenflächen gleiche Neigung zur H.E. haben, so erhält man die Beleuchtungsintensität dieser beiden Flächengruppen, wenn man das in der vorigen Aufgabe für die reguläre, zur H.E. senkrechte Pyramide angegebene Verfahren wiederholt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nachdem man die Projektionen aus der gegebenen Seite (ab) des Dodekaeders verzeichnet hat*), nehme man den Punkt (c, c') oder auch irgend einen andern Punkt der Achse $(c, c'c'')$ als Mittelpunkt und einen beliebigen Abstand, z. B. cb, als Radius einer Hilfskugel an, bestimme an dieselbe eine Berührungsebene parallel mit einer der obern schiefen Seitenflächen und ebenso eine Berührungsebene parallel mit einer der untern schiefen Seitenflächen und zugleich die entsprechende Beleuchtungsintensität dieser beiden Berührungsebenen, so ist damit auch die Beleuchtungsintensität der ihnen parallelen Seitenflächen und damit auch die der übrigen gleichgeneigten Seitenflächen bestimmt.

Zur Ausführung dieser Konstruktion suche man vor allem den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (l, l') in der horizontalen Umlegung mittels des rechtwinkligen Dreiecks lcL_1, worin $lL_1 \perp cl$ und $= l'l''$ und $\measuredangle\, lcL_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ ist, sowie den horizontalen Neigungswinkel β, welchen sowohl die obern als die untern schiefen Seitenflächen mit der H.E. bilden, mittels des rechtwinkligen Dreiecks hkh_1, worin $hh_1 \perp hk$ und $kh_1 = kq$ und $\measuredangle\, hkh_1 = \beta$, der verlangte Neigungswinkel, ist.

Wäre nun eine der Seitenflächen senkrecht zur V.E., so müßte sie sich vertikal als Gerade parallel zu $y'z'$, respektive parallel zu $y''z''$ projizieren, wenn man den horizontalen Neigungswinkel dieser Geraden gleich β macht, und ihre Beleuchtungsintensität wäre bestimmt durch den Punkt (u, u'), resp. (u, u''), worin die damit parallelen und zur V.E. senkrechten Ebenen $v'w'$, resp. $v''w''$ die Hilfskugel berühren. Da nun aber die genannten Seitenflächen mit diesen Berührungsebenen gleiche Neigung haben, so werden sie auch die Hilfskugel in Punkten desselben, durch (u, u'), resp. (u, u'') gehenden Parallelkreises berühren. Beschreibt man daher mit cu einen Hilfskreis, so wird derselbe die Horizontalprojektion der zugehörigen Normalen in $u_1, u_2, \ldots$ resp. in $u_3, u_4, \ldots$, durchschneiden, welches die Horizontalprojektionen der erwähnten Berührungspunkte sind, und, in die V.E. gebracht, nach $u_1, u_2, \ldots$, resp. nach $u'_3\ u'_4 \ldots$, zu liegen kommen.

Macht man nun noch $\measuredangle\, l'_1 c' L'_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ gleich dem parallel zur V.E. gedrehten horizontalen Neigungswinkel der Lichtrichtung, zieht $\delta'\varepsilon'$ und $c'r'$ in δ' und c' senkrecht zu $c'\delta'$ und trägt $\gamma'r'$ nach co, resp. $c_1 o_1$ und $r'\rho' = c'\rho''$ nach $0 + 10$ und $0 - 10$, resp. nach $0_1 + 10_1$ und $0_1 - 10_1$, so sind $0, + 10$ und $- 10$, resp. $0_1, + 10_1$ und $- 10_1$ die Fundamentalpunkte der Beleuchtungsskalen für die obern, resp. untern Seitenflächen. Fällt man dann noch von den Punkten $u_1, u_2, \ldots$, resp. $u_3, u_4, \ldots$ Senkrechten auf die zugehörigen Beleuchtungsskalen, so geben deren Fußpunkte $u_{\mathrm{I}}, u_{\mathrm{II}}, \ldots$, unmittelbar die Beleuchtungsintensitäten $- 0{,}2$, $+ 0{,}66$, ..., resp. $- 0{,}27$, $+ 0{,}45$, ... der entsprechenden Seitenflächen $(post,\ p'o's't')$,

*) Siehe 2. Heft unserer „Anleitung“, § 154, Fig. 68.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(onmhs, o′n′m′h′s′),..., resp. (abtsh, a′b′t′s′h′), (afgmh, a′f′g′m′h′), . . . an.

Um endlich auch noch die Beleuchtungsintensität der obern Seitenfläche des Dodekaeders zu finden, verfahre man wie im Aufriß der Fig. 50 angegeben ist, d. h. man bestimme die Beleuchtungsskale c′ + 10, c′ — 10 und ziehe von i′ darauf eine Senkrechte i′i′₁, so giebt der Fußpunkt i′₁ derselben die verlangte Beleuchtungsintensität + 0,58.

b) Beleuchtung verschiedener krummer Flächen.

(Fig. 53—60, Blatt 12—16.)

130. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. senkrecht stehenden hohlen Kreiscylinders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder Lichtintensitätslinien der innern Mantelfläche des hintern hohlen Halbcylinders bestimmen (Fig. 53).

Auflösung. Denkt man sich die innere Mantelfläche (fkg, $f'_1 f'_2 g'_2 g'_1$) zur vollen Kreiscylinderfläche mit der Normaldirektrix afkga ergänzt und letztere wie in Fig. 25 (§ 60) eingeteilt, die Maximalpunkte + 10 und — 10 jetzt aber miteinander verwechselt, so entsprechen die Teilpunkte der hintern Strecke 0 + 10 der Beleuchtungsskale den Isophoten der direkten Beleuchtung und die der vordern 0 — 10 den Isophoten der indirekten oder Reflexbeleuchtung.

Man zeichne also vor allem den horizontalen Neigungwinkel α der Lichtrichtung in der horizontalen Umlegung und mache 0 — 10 = 0 + 10 = 0 A_1, teile diese Strecken in je zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten derselben zur Richtungslinie XX der Beleuchtungsskale Senkrechte, welche den Umfang des Grundkreises oder der Normaldirektrix in den entsprechenden Isophotenpunkten schneiden, womit die verlangten Isophoten selbst bestimmt sind, indem man dieselben vertikal zur Achse projiziert. Die Grenzisophoten entsprechen, wie man leicht findet, der Beleuchtungsintensität +0,58 und —0,58. Die gleiche Beleuchtungsintensität haben auch die Schnittflächen fkginh, $h'_1 h'_2 f'_2 f'_1$ und $g'_1 g'_2 i'_2 i'_1$.

In unserer Figur haben wir noch den Schlagschatten k'_1 k′ q′ r′, welchen die Kante (f, $f'_1 f'_2$) und der obere Kreisbogen (fpr, f′p′r′) auf die innere Mantelfläche des hohlen Halbcylinders werfen, konstruiert. Dazu denke man sich durch die Punkte wie (f, f'_2), (p, p'_2), . . . Lichtstrahlen, parallel (l, l′), gezogen und ihre Durchschnittspunkte (k, k′), (q, q′), . . . bestimmt und miteinander stetig verbunden.

131. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines Drehungsparaboloids, dessen Drehachse zur H.E. senkrecht steht, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität bestimmen (Fig. 54).

Auflösung. Es sei f'_1 s′ φ' der vertikale Umriß und AFBφA der Grundriß des Paraboloids, o′ sei der Brennpunkt der gegebenen Hauptparabel f'_1 s′ φ' und

$o's' = s'm = \frac{1}{2}\, o'v' = \frac{1}{4}\, p = \frac{1}{4}$ des Parameters $v'w'$.

Um nun die Projektionen der Isophoten zu finden, nehme man eine Reihe von Parallelkreisen, wie (K_1, k'_1), (k_2, k'_2), (k_3, k'_3), ... an, bestimme auf denselben die entsprechenden Isophotenpunkte und verbinde die gleichnamigen derselben durch stetige Kurven. Die Isophotenpunkte der Parallelkreise des Paraboloids erhält man aber auf gleiche Weise, wie dies oben bei der Kreiskegelfläche (§ 76, Fig. 30) oder bei der Kugelfläche (§ 94, Fig. 33) gezeigt worden ist. Denkt man sich nämlich in den Punkten, wie z. B. in f'_3, an die Parabel eine Tangente $f'_3 z'$ gelegt, so bestimmt dieselbe eine umhüllende Kegelfläche, welche mit dem zugehörigen Parallelkreis des Paraboloids dieselbe Beleuchtung hat. Man bestimme deshalb auf bekannte Weise den zur V.E. parallel gedrehten horizontalen Neigungswinkel $f'_1 c'_1 L'_1 = \alpha$ $(= 35^0\, 16')$, ziehe in den Punkten $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots$ auf die entsprechenden Tangenten Senkrechte, oder, da bei der Parabel die Subnormale bekanntlich gleich dem halben Parameter, mache $c'_1 g'_1 = c'_2 g'_2 = c'_3 g'_3 = \ldots = o'v' = \frac{1}{2}\, p$, ziehe die Normalen $g'_1 f'_1$, $g'_2 f'_2$, $g'_3 f'_3$, ... und trage hierauf $o'v' = \frac{1}{2}\, p$ nach $c'_1 i'_1$ und $f'_1 g'_1$ nach $c'_1 h'_1$, $f'_2 g'_2$ nach $c'_1 h'_2$, $f'_3 g'_3$ nach $c'_1 h'_3$, ..., errichte in i'_1, h'_1, h'_2, h'_3, ... Senkrechte und mache $cp = i'_1 J'_1$, so ist p der gemeinschaftliche Nullpunkt der Beleuchtungsskalen für die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte aller Parallelkreise, und $c'_1 H'_1$, $c'_1 H'_2$, $c'_1 H'_3$, ... bestimmen alsdann die Maximalpunkte der betreffenden Beleuchtungsskalen. Für den Grundkreis oder den untern Parallelkreis (K_1, k'_1) ist die Einteilung der Beleuchtungsskale auf der mit der horizontalen Projektion cl der Lichtrichtung zusammenfallenden Achse XX selbst angegeben und für den Parallelkreis (k_3, k'_3) ist dieselbe auf einer damit Parallelen (rechts zur Seite des Grundkreises) ausgeführt.

132. Um den Parallelkreis zu bestimmen, auf dem der Lichtpol, d. i. der absolut hellste Punkt $+10$ des Paraboloids liegt, ziehe man durch o' mit $c'_1 A'_1$ die Parallele $o'n'$, welche die Direktrix, d. h. die in m' auf $c'_1 m'$ senkrecht errichtete Gerade, in n' schneidet, und durch n' mit der Drehachse $c'_1 s'$ die Parallele $n'f'_4$, welche die Umrißparabel $f'_1 s' \varphi'$ in f'_4 schneidet, so geht der Parallelkreis, auf dem der verlangte Lichtpol $+10$ liegt, durch den Punkt f'_4. Der hellste Punkt $+10$ liegt aber auch auf dem durch die Drehachse $(c, c'_1 s')$ und die Achse XX gehenden Symmetralmeridian, dessen sichtbare Hälfte links in unserer Figur durch die einpunktgestrichelte Linie $a'q't'_1 s'$ angegeben ist. Der Durchschnittspunkt (q, q') beider Linien ist alsdann der verlangte Lichtpol $+10$.

133. Um endlich auch die übrigen auf dem Symmetralmeridian liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, mache man $cd = o'v' = \frac{1}{2}\, p$, $\measuredangle\, cde = \alpha$ und

$dr \perp de$, konstruiere für das Centrum d und die Richtung dr den Normalenbüschel, dessen Mittelpunkt zugleich der Nullpunkt 0 und dessen Maximalpunkt $+10$ auf dr beliebig weit von d entfernt angenommen werden kann, und ziehe die Strahlen $d+9{,}5$, $d+8$, ..., welche die Achse XX in u_1 und t_1, t_2, ..., den verlangten Isophotenpunkten, im Grundriß durchschneiden. Projiziert man diese nach u'_1 und t'_1, t'_2, ... auf die Vertikalprojektion $a'q's'$ des Symmetralmeridians, so erhält man die verlangten Isophotenpunkte auch im Aufriß. Genauer erhält man letztere Punkte durch Umdrehung des Symmetralmeridians in eine zur V.E. parallele Lage, in welcher derselbe mit dem Hauptmeridian $f'_1 s' \varphi'$ zusammenfällt und die betreffenden Isophotenpunkte nach (u_I, u'_I), (t_I, t'_I), ... zu liegen kommen. Zieht man dann durch u'_I, t'_I, ... Parallelen mit der Projektionsachse, so schneiden sie auf der Vertikalprojektion $a'q's'$ des Symmetralmeridians die verlangten Isophotenpunkte u'_1, t'_1, ... ab.

134. Aufgabe. Es sind die Umrißprojektionen eines zur H.E. senkrecht stehenden einmanteligen Umdrehungshyperboloids, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität sowohl der innern als der äußern Mantelfläche desselben bestimmen (Fig. 55).

Auflösung. Es sei $f'_1 a'_1 f''_1 \varphi'' b'_1 \varphi'$ der vertikale Umriß oder der zur V.E. parallele Hauptmeridian, (k, k') der Kehlkreis mit dem Durchmesser $a'_1 b'_1$ und dem Mittelpunkt c', und d', e' seien die Brennpunkte der vertikalen Umrißhyperbel, ebenso sei K_1 der Grundriß des untersten und obersten Grundkreises (k'_1 und k''_1), und endlich sei (l, l') die gegebene Lichtrichtung.

Um nun die Isophoten des Hyperboloids zu erhalten, bestimmt man, wie in der vorigen Aufgabe, zuerst die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte einer Reihe von Parallelkreisen (K_1, k'_1 und k''_1), (k_2, k'_2 und k''_2), (k, k'), ... Dazu bestimme man die zugehörigen Normalen $f'_1 g'_1$, $f'_2 g'_2$, ..., trage dieselben in den nach $f'_1 c'_1 L'_1$ parallel zur V.E. umgedrehten horizontalen Neigungswinkel α $(= 35^0 16')$ nach $c'_1 h'_1$, $c'_1 h'_2$, ..., und die zugehörigen Subnormalen $c'_1 g'_1$, $c'_2 g'_2$, ... nach $c'_1 i'_1$, $c'_1 i'_2$, ..., errichte in h'_1, h'_2, i'_1, i'_2, ... Senkrechte zur Projektionsachse und trage $i'_1 J'_1$ von c nach s_1 und s_2 und $c'_1 H'_1$ von s_1 nach t_1 und von s_2 nach t_2, ..., so sind s_1 und s_2 die Nullpunkte und t_1 und t_2 die Maximalpunkte $(+10)$ der Beleuchtungsskalen für den untersten und obersten Parallelkreis rc., womit die Einteilung der Beleuchtungsskale und damit auch die Konstruktion der Isophotenpunkte der entsprechenden Parallelkreise bestimmt ist. Die Einteilung der Beleuchtungsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des untersten Parallelkreises (K_1, k'_1) ist in unserer Figur auf der Richtungslinie XX selbst und für den Kehlkreis oder den kleinsten und mittlern Parallelkreis (k, k') zur Seite (rechts) auf einer zur Achse XX parallelen Hilfsgeraden angedeutet.

135. Zur völligen Bestimmung der Isophotenprojektionen des Hyperboloids bestimmen wir auch noch die Isophotenpunkte auf der Umrißhyperbel, die wir als den zur V.E. parallel gedrehten Symmetralmeridian betrachten. Dazu nehmen wir auf der verlängerten Hauptachse $a'_1 b'_1$ der Umrißhyperbel einen beliebigen Punkt m' an, ziehen $m' l'_1$ parallel $c'_1 L'_1$, so daß $\sphericalangle\, l'_1 m' c' = \alpha$ $(= 35^0\ 16')$, dem horizontalen Neigungswinkel der Lichtrichtung, gleich ist. Für m' als Mittelpunkt und $m' l'_1$ als Richtung konstruieren wir den Normalenbüschel, dessen Maximalpunkt 10 beliebig angenommen werden kann. Von m' fällen wir auf die Assymptote $c' p'$ der Umrißhyperbel eine Senkrechte $m' p'$ und durch den Punkt p' zu $m' c'$ eine andere Senkrechte, welche die zweite Assymptote $c' q'$ der Hyperbel in q' und die verlängerte $m' l'_1$ in n'_1 und die verlängerte $m' o'_1$ in n'_0 schneidet. Von den Punkten wie r, in welchen die nach m' gezogenen Strahlen des Normalenbüschels die Gerade $p' q'$ schneiden, zieht man Strahlen nach c', dem Mittelpunkt der Hyperbel. Die Durchschnittspunkte derselben mit dem Hyperbelumriß sind alsdann die gesuchten Isophotenpunkte für den umgedrehten Symmetralmeridian. Für die Punkte $+10$, -10, $+6$, -6, ... ist die Konstruktion durch Hilfslinien angedeutet. Es verdient indessen bemerkt zu werden, daß auf dem Symmetralmeridian nur diejenigen Isophotenpunkte vorhanden sind, welche den Strahlen entsprechen, die innerhalb des Winkels $n'_1 m' q'$ liegen. Um die Figur nicht zu stark zu überladen, sind im Aufriß nur die Isophoten ($+9{,}5$, $+8$, $+6$, $+4$, $+3$, $+2$, 0, -2, -4, -6) der vordern sichtbaren Flächenhälfte dargestellt; im Grundriß haben wir dagegen der Symmetrie wegen die Isophoten sowohl der obern sichtbaren Hälfte als auch die der untern unsichtbaren Flächenhälfte ($+9{,}5$, $+8$, $+6$, $+4$, $+2$, 0, -2, -3, -4, -6, -8) angegeben, und zwar erstere durch volle ausgezogene Linien und letztere durch punktierte Linien.

136. Endlich haben wir auch noch den Schlagschatten ($u v w$, $u' v' w'$) konstruiert, welchen der obere Kreis (K_1, k''_1) in das Innere der Mantelfläche des Hyperboloids wirft. Derselbe stellt sich als ein Teil einer Ellipse dar und kann leicht wie folgt gefunden werden. Man ziehe durch den Mittelpunkt (c, c''_1) des schattenwerfenden Kreises (K_1, k''_1) einen Lichtstrahl, bestimme dessen Durchschnittspunkte (z_1, z'_1), (z_2, z'_2), (z_3, z'_3), ... mit einer Reihe von Parallelkreisebenen und beschreibe dann mit dem Radius $c''_1 f''_1$ des Kreises k''_1 aus ihren Horizontalprojektionen z_1, z_2, z_3, ... Hilfskreise, welche die entsprechenden Parallelkreise in I, II, III, ..., den verlangten Punkten der Schattenkurve $u v w$ in der H.E., schneiden. Projiziert man diese Punkte vertikal nach I', II', III', ..., so erhält man auch die Aufrißprojektionen u', v', w', ... derselben.

Den Punkt (v, v') erhält man direkt, indem man den Symmetralmeridian in eine zur V.E. parallele Lage dreht, durch den gedrehten Punkt $F_1 f''_1$ einen Strahl

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

parallel $L'_1 c'_1$ zieht, welcher den Umriß des Hyperboloids in (v_1, v'_1) schneidet, und den Punkt (v_1, v'_1) durch Drehung in die ursprüngliche Lage (v, v') zurückbringt*).

137. Aufgabe. Es sind die Umrisse eines Kugelrings (cyklischen Annuloids), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität der Oberfläche desselben, samt Schlagschatten, den derselbe auf die Projektionsebenen wirft, bestimmen (Fig. 56, Blatt 13).

Auflösung. Das cyklische Annuloid, der Kugelring oder Kreisring, entsteht, wenn sich ein Kreis um eine außerhalb desselben liegende Achse so dreht, daß jeder Punkt wieder einen Kreis beschreibt.

Es sei nun $(a_1 b_1, a'_1 d'_1 b'_1 e'_1)$ der gegebene Erzeugungskreis $\mathfrak{K}$, (c_1, c'_1) dessen Mittelpunkt und $(O, z' z')$ die mit der Z-Achse zusammenfallende und auf der H.E. senkrecht stehende Drehachse. Denkt man sich nun den Kreis $\mathfrak{K}$ um die Achse $(O, z' z')$ herum gedreht, so beschreibt der Punkt (a_1, a'_1) den äußern Umrißkreis (K, K') und der Punkt (b_1, b'_1) den innern Umrißkreis (k, k'), womit der horizontale Umriß des Kreisrings gegeben ist. Zeichnet man den Erzeugungskreis $\mathfrak{K}$ im Aufriß in den beiden zur Aufrißebene parallelen Stellungen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_5$ und zieht daran noch die horizontalen Tangenten $d'_1 d'_5$ und $e'_1 e'_5$, so ist damit die Aufrißprojektion des Kugelrings gegeben.

138. Um nun die Isophoten des Kreisrings zu erhalten, bestimme man wieder zuerst die Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte einer Reihe von Parallelkreisen (K_1, K'_1), (K_2, K'_2), (k_1, k'_1), (k_2, k'_2), ... Dazu zeichne man zu den entsprechenden Berührungspunkten $F'_1, F'_2, f'_1, f'_2, \ldots$ die Tangenten und Normalen, und mittels der letztern und der zugehörigen Subnormalen bestimme man in Verbindung mit dem horizontalen Neigungswinkel α $(= 35^0 16')$ der Lichtrichtung die Fundamentalpunkte (den Nullpunkt und den Maximalpunkt) der Intensitätsskalen für die Isophotenpunkte der entsprechenden Parallelkreise.

Zieht man daher die Normalen $F'_1 G'_1$, $f'_1 g'_1, \ldots$, macht Winkel $J'_1 r' J''_1 = \alpha$, trägt $F'_1 G'_1$ nach $r' H'_1$ und $f'_1 g'_1$ nach $r' h'_1$, sowie $O'_1 G_1'$ nach $r' J_1'$ und $O'_1 g'_1$ nach $r' i'_1$, errichtet in $H'_1, h'_1, J'_1, i'_1, \ldots$ die Senkrechten $H'_1 H''_1$, $h'_1 h''_1$, $J'_1 J''_1$, $i'_1 i''_1, \ldots$, welche den zweiten Schenkel des in die V.E. umgelegten Winkels α in $H''_1, h''_1, J''_1, i''_1, \ldots$ schneiden, und trägt $J'_1 J''_1$ nach $O N_1$, $r' H''_1$ nach $N_1 M_1$, $i'_1 i''_1$ nach $O n_1$ und $r' h''_1$ nach $n_1 m_1, \ldots$ auf die mit der Horizontalprojektion $O 1$ der Lichtrichtung zusammenfallende Achse XX, so sind N_1 und M_1 die Fundamentalpunkte, und zwar N_1 der Nullpunkt und M_1 der Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Isophotenpunkte des großen äußern Parallelkreises (K_1, K'_1) und

*) Den in der Figur fehlenden Punkt v_1, sowie z_1, beliebe der Schüler in der vergrößerten Figur selbst beizusetzen.

n_1 und m_1 die Fundamentalpunkte, der Nullpunkt und der Maximalpunkt, der Intensitätsskale für die Isophotenpunkte des kleinen innern Parallelkreises (k_1, k'_1). Ganz ebenso findet man die Fundamentalpunkte der übrigen Parallelkreise (K_2, K'_2), (k_2, k'_2), ... Was dagegen den größten äußern Kreis (K, K') und den kleinsten innern Kreis (k, k') betrifft, so reduziert sich deren Isophotenkonstruktion auf die beim senkrechten Kreiscylinder (siehe § 60, Fig. 25) angegebene Konstruktion. Zieht man nämlich $O'A'_1$ parallel $r'J''_1$, oder macht man, mit andern Worten, $\sphericalangle a'_1 O' A'_1 = \alpha$, errichtet in a'_1 und b'_1 die Senkrechten $a'_1 A'_1$ und $b'_1 B'_1$, welche $O'A'_1$ in A'_1 und B'_1 schneiden, und trägt man $O'A'_1$ nach OM und $O'B'_1$ nach Om (auf XX), so ist M der Maximalpunkt (+10) der Intensitätsskale für die Isophotenkonstruktion des äußern Kreises K und m der Maximalpunkt (+10) der Intensitätsskale für die Isophotenkonstruktion des innern Kreises k. — Was endlich den höchsten und tiefsten Kreis (k_3, k'_3 und k''_3) betrifft, so ist die Beleuchtungsintensität überall dieselbe, und zwar ist die des erstern Kreises (k_3, k'_3) gleich der Beleuchtungsintensität des Punktes d'_1, also nach früherem gleich +0,58, und die des andern (k_3, k''_3) gleich der Beleuchtungsintensität des Punktes e'_1, also gleich — 0,58.

Hat man auf diese Weise eine hinreichende Anzahl von Isophotenpunkten auf den Grundrißprojektionen K, K_1, K_2, k, k_1, k_2, ... gefunden, so erhält man durch Verbindung der gleichnamigen Isophotenpunkte die verlangten Grundrißisophoten. Projiziert man die erhaltenen Isophotenpunkte aus dem Grundriß in den Aufriß auf die zugehörigen Aufrißprojektionen K', K'_1, K'_2, k', k'_1, k'_2, ... der entsprechenden Parallelkreise, so erhält man durch Verbindung der gleichnamigen Isophotenpunkte die Aufrißprojektionen der verlangten Isophoten.

Wir haben jedoch, um die Figur nicht gar zu sehr zu überladen, sowohl im Grundriß wie im Aufriß nur die sichtbaren Teile der Isophoten dargestellt. Einzig die Grenzisophote 00, d. h. die Trennungslinie von Schatten und Licht, haben wir, um den Schlagschatten konstruieren zu können, vollständig, also auch deren unsichtbare Teile, gezeichnet.

139. Die Aufzeichnung der Isophoten oder der Kurven gleicher Lichtintensität wird auch hier wie in allen ähnlichen Beispielen wesentlich erleichert, wenn man noch überdies die Isophotenpunkte des Hauptmeridians, sowie des Symmetralmeridians bestimmt.

Den erstern betrachten wir als Normaldirektrix einer auf der V.E. senkrecht stehenden Cylinderfläche, und indem wir $c'_1 p'_2 = c'_1 p''_2 = c'_1 p'_1 = \rho \sec \alpha$ machen, sofern ρ der Radius des Erzeugungskreises ist, sodann jede der Strecken $c'_1 p'_2$ und $c'_1 p''_2$ in zehn gleiche Teile teilen und durch die Teilpunkte Senkrechte zu $c'_1 p'$ errichten, so schneiden diese auf $\mathfrak{K}_1$ die verlangten Isophotenpunkte ab. Ebenso erhalten wir die Isophotenpunkte auf dem Meridiankreis $\mathfrak{K}_5$.

Projiziert man die erhaltenen Aufrißprojektionen der Isophotenpunkte des Hauptmeridians in den Grundriß, so erhält man die Punkte, in welchen die zur Projektionsachse parallelen Geraden $a_1 b_1$ und $a_5 b_5$ von den gleichnamigen Isophoten geschnitten werden.

Um nun auch noch die Isophotenpunkte des Symmetralmeridians zu bestimmen, betrachte man diesen als Normaldirektrix einer Cylinderfläche, deren Erzeugende horizontal und zur Y-Achse parallel sind, und denke denselben zunächst in eine zur V.E. parallele Lage gedreht. In dieser Lage fallen die umgedrehten Meridiankreise ebenfalls mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_5$ zusammen, und der durch deren Mittelpunkt gehende umgedrehte Lichtstrahl kömmt nach $c'_1 p'_1$, resp. $c'_5 p'_5$ zu liegen. Teilt man nun den Kreishalbmesser $c'_1 q'_1 = c'_1 q''_1$, resp. $c'_5 q'_5 = c'_5 q''_5$ in zehn gleiche Teile und errichtet in den Teilpunkten Senkrechte zu $q'_1 q''_1$, resp. $q'_5 q''_5$, so schneiden diese die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_5$ in den Isophotenpunkten des umgedrehten Symmetralmeridians. Projiziert man diese Punkte aus dem Aufriß in den Grundriß auf die Geraden $a_1 b_1$, resp. $a_5 b_5$, und dreht dieselben auf die Geraden $a_2 b_2$, resp. $a_6 b_6$ in die ursprüngliche Lage zurück, so erhält man auf letztern Geraden die Punkte, in welchen sie von den gleichnamigen Isophoten selbst geschnitten werden.

140. Erwägt man, daß die Grundrißprojektionen in Bezug auf die Achse XX symmetrisch gelegen sind, so ist klar, daß die Isophotenpunkte von $a_1 b_1$ in gleicher Weise auch nach $a_3 b_3$ und die von $a_5 b_5$ nach $a_7 b_7$ übertragen werden können, was am schnellsten mit einem geradlinigen Papierstreifen geschehen kann.

Auch mag noch bemerkt werden, daß, wenn man die Isophotenpunkte auf einem äußern Parallelkreis K_1, K_2, ... bereits konstruiert hat, dann die Isophotenpunkte der zugehörigen innern Kreise k_1, k_2, ..., welche mit erstern in derselben horizontalen Ebene liegen, erhalten werden, wenn man die Radien der Isophotenpunkte auf K_1, K_2, ... in entgegengesetzter Richtung verlängert. Denn dann sind die Punkte, wo diese die Kreise k_1, k_2, ... schneiden, die Isophotenpunkte auf letztern Kreisen. So liefert z. B. T auf K_1 den Punkt t auf k_1 2c.

Hieraus folgt zugleich, daß, wenn ein Radius eine Isophote in einem Punkt berührt, dieselbe auch noch vom verlängerten Radius in einem entsprechenden Punkte berührt wird. So wird z. B. die Isophote $+6$ von der radialen Geraden OU einerseits in U und andererseits in u berührt. Damit ist, wie man sieht, ein leichtes und sehr wertvolles Mittel an die Hand gegeben, die Isophotenkonstruktion zu kontrollieren.

141. Die Isophoten des Kreisrings können übrigens auch leicht und schnell mittels einer Hilfskugel erhalten werden. Denkt man sich nämlich im Mittelpunkt (O, O′) des Kreisrings eine Hilfskugel mit ihren gleichnamigen Isophoten aufgestellt, deren Durchmesser $\alpha_1 \beta_1$ gleich ist dem Durchmesser $a_1 b_1$ des Erzeugungskreises, und denkt

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

man sich mit dem Erzeugungskreis zugleich auch eine der Hilfskugel gleiche Kugel umgedreht, so daß ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Erzeugungskreises stets zusammenfällt, so ist klar, daß die Beleuchtung des Kreis- oder Kugelrings in jeder beliebigen Stellung des Erzeugungskreises oder der Erzeugungskugel gleich ist der Beleuchtung des entsprechenden Meridiankreises der Hilfskugel. Man hat daher nur die auf den Durchmessern $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, ... liegenden Isophotenpunkte der Hilfskugel auf die entsprechenden Durchmesser $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... abzutragen. So sind z. B. die Punkte γ, δ, ... auf $\alpha\beta$ nach v, w, ... auf ab abgetragen worden, so daß $av = \alpha\gamma$ und $bw = \beta\delta$ etc. So könnte man auch den Aufriß der Hilfskugel benützen, um die Aufrißisophoten des Kreisrings zu erhalten. Dann hätte man zu den Tangenten $F'_1 S'_1$, $F'_2 S'_2$, ... des Kreisrings an die Hilfskugel parallele Tangenten $\varphi'_1 \sigma'_1$, $\varphi'_2 \sigma'_2$, ..., sowie die zugehörigen Parallelkreise zu ziehen und die Isophotenpunkte, worin diese von den Isophoten der Hilfskugel durchschnitten werden, proportional (am besten mittels eines Proportionalmaßstabes) auf die entsprechenden Parallelkreise des Kreisrings abzutragen. Dieses, auch für jede andere Umdrehungsfläche anwendbare Verfahren wird dem Schüler zur eigenen Ausführung empfohlen.

Dagegen wollen wir hier noch ein anderes Verfahren zeigen, wie die Aufrißisophotenpunkte leicht aus den Grundrißisophotenpunkten erhalten werden können. Denkt man sich nämlich den Erzeugungskreis $\mathfrak{K}$ in verschiedenen Stellungen des Grundkreises in eine zur H.E. parallele Lage umgedreht, wie dies z. B. bei $a v_1 w_1 b$ angedeutet ist, so bestimmen die umgedrehten Ordinaten $v v_1$, $w w_1$, ... zugleich die Höhen der betreffenden Isophotenpunkte unter und über der mittlern Parallelkreisebene $a'_1 a'_5$ (K′) im Aufriß. Projiziert man daher v, w, ... nach v'_1, w'_1, ... und macht $v'_1 v' = v v_1$ und $w'_1 w' = w w_1$ etc., so sind v′, w′ etc. die entsprechenden Isophotenpunkte im Aufriß.

142. Endlich haben wir auch noch den Schlagschatten, den die äußere und innere Grenzisophote oder die Trennungslinien von Schatten und Licht auf die Projektionsebenen werfen, zu bestimmen. Man erhält denselben auch hier, wenn man durch eine hinreichende Anzahl von Punkten der Grenzisophote Strahlen parallel der Lichtrichtung (O1, O′1′) legt und ihre Spuren oder Durchschnittspunkte mit den Projektionsebenen sucht und miteinander verbindet. So liefern z. B. die Punkte (v, v′) und (w, w′), von denen ersterer der äußern und der andere der innern Trennungslinie von Schatten und Licht angehört, indem man durch v und w Parallelen mit O1 und durch v′ und w′ Parallelen mit O′1′ zieht und von v'_2 und w'_2 Senkrechten zur Achse $e'_1 e'_5$ errichtet, die Schlagschattenpunkte V und W, welche beide in der Horizontalebene liegen, und von denen V der Kurve $\mathfrak{F}\mathfrak{A}V\mathfrak{B}$ und W der Kurve aWbcdefa angehört*).

*) Wir machen noch besonders auf die Überschneidungen bei bc und ef dieser innern Schlagschattenkurve aufmerksam.

Ein Teil des Schlagschattenumrisses fällt übrigens, wie man aus der Figur ersieht, teilweise auch auf die Vertikalebene. Derselbe wird auf gleiche Weise erhalten, wenn man die Vertikalspuren der durch einzelne Punkte der Grenzisophote 0 gezogenen Lichtstrahlen sucht und gehörig verbindet. So ist $\mathfrak{V}'$ die Vertikalspur des durch $(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')$ gelegten Strahles und daher ein Punkt der Schlagschattenkurve $\mathfrak{D}'\mathfrak{V}'\mathfrak{E}'$ in der Aufrißebene.

143. Aufgabe. Es sind die Umrisse einer elliptischen Einziehung (eines elliptischen Annuloids), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten, samt Schlagschatten, den der obere Teil der Fläche auf sich selbst wirft, bestimmen (Fig. 57, Blatt 14).

Auflösung. Wäre die Erzeugungslinie der Einziehung ein Kreisbogen, so würden die Isophoten ganz auf gleiche Weise erhalten werden, wie beim Kreisring ausführlich gezeigt worden ist. Ist die Erzeugungslinie aber, wie in unserem Beispiel, eine Ellipse, so bleibt sich zwar die Konstruktion der Isophotenpunkte auf den Parallelkreisen gleich, die Konstruktion derselben auf dem Hauptmeridian wie auf dem Symmetralmeridian ändert sich dagegen mit der Form der Erzeugungslinie. Wir haben nun diese absichtlich als Ellipse angenommen, um bei dieser Gelegenheit zu zeigen, wie man die Isophotenpunkte derselben, als Meridiankurve aufgefaßt, erhält.

Um zuerst die Isophotenpunkte auf dem elliptischen Hauptmeridian $(A_1 b_1 d_1, a'_1 b'_1 d'_1)$, resp. $(A_5 b_5 d_5, a'_5 b'_5 d'_5)$ zu erhalten, ziehen wir auf die große Achse $\alpha'_1 \beta'_1$ in irgend einem Punkt, z. B. in α'_1, eine Senkrechte $\mathfrak{S}_1$ und vom darauf liegenden Eckpunkt α_1 des der Ellipse $\mathfrak{E}'_1$ umschriebenen (halben) Rechtecks $\alpha'_1 \alpha_1 \beta_1 \beta'_1 \ldots$ eine Senkrechte auf dessen gegenüberliegende Diagonale $\beta_1 c'_1$, welche $\alpha'_1 \beta'_1$ in π'_1 schneidet. Durch π'_1 führen wir $\pi'_1 p'_1$ parallel der Vertikalprojektion $O'_1 l'$ der Lichtrichtung und konstruieren für $\pi'_1 p'_1$ als Richtung und für π'_1 als Mittelpunkt und für $\measuredangle p'_1 \pi'_1 P'_1 = \alpha$ $(= 35^0 16')$ als vertikalen Neigungswinkel der Lichtrichtung den Normalenbüschel. Die Strahlen dieses Büschels schneiden dann die Gerade $\mathfrak{S}_1$ in Punkten, die, mit c'_1, dem Mittelpunkt der Ellipse $\mathfrak{E}'_1$, verbunden, die Ellipsendurchmesser liefern, auf denen die Isophotenpunkte des verlangten Meridians $a'_1 b'_1 d'_1$ liegen. Auf gleiche Weise verfährt man auch, um die Isophotenpunkte auf dem Meridian $a'_5 b'_5 d'_5$ zu erhalten. Bei beiden Konstruktionen haben wir einige Isophotenpunkte durch Hilfslinien angegeben. So z. B. auf $\mathfrak{E}'_1$ die Isophotenpunkte $+4, +6, +7, \ldots$ und auf $\mathfrak{E}'_5$ die Isophotenpunkte $+3, -6, \ldots$ Durch Herabprojizieren dieser Punkte auf die durch O zur Projektionsachse geführte Parallele $A_1 A_5$ erhält man alsdann die Punkte, in welchen diese Gerade von den Grundrißprojektionen der Isophoten geschnitten wird.

144. Behufs der Isophotenkonstruktion des Symmetralmeridians $(A_2 b_2 d_2, a'_2 b'_2 d'_2)$ drehen wir diesen zuerst in eine zur V.E. parallele Lage, in welcher er mit dem Hauptmeridian $(A_1 b_1 d_1, a'_1 b'_1 d'_1)$ zusammenfällt. Hierauf ziehen wir $\pi'_1 q'_1$ parallel der ebenfalls zur V.E. parallel gedrehten Lichtrichtung $O'_1 L'_1$, so daß $\measuredangle \pi'_1 q'_1 a'_1 = \alpha$ $(= 35^0 16')$, und konstruieren für π'_1 als Mittelpunkt, $\pi'_1 q'_1$ als Richtung und einen beliebig angenommenen Maximalpunkt $+10$ den Normalenbüschel. Die Strahlen dieses Büschels schneiden alsdann die Gerade $\mathfrak{S}_1$ in Punkten, die, mit c'_1 verbunden, die Ellipsendurchmesser liefern, welche auf dem mit $a'_1 b'_1 d'_1$ zusammenfallenden, umgedrehten Symmetralmeridian die verlangten Isophotenpunkte liefern. Auf gleiche Weise verfährt man auch, um die Isophotenpunkte auf dem mit $a'_5 b'_5 d'_5$ zusammenfallenden, umgedrehten Symmetralmeridian zu erhalten. Auch bei diesen beiden Konstruktionen haben wir einige Isophotenpunkte durch Hilfslinien angedeutet. So z. B. auf $a'_1 b'_1 d'_1$ die Isophotenpunkte $+8_1, +5_1, -3_1, \ldots$ und auf $a'_5 b'_5 d'_5$ die Isophotenpunkte $+4_1, +8_1, \ldots$ Projiziert man diese Punkte auf die zur Projektionsachse Parallele $A_1 A_5$ und dreht dieselben von da in die ursprüngliche Lage nach $A_2 b_2 d_2$, resp. $A_6 b_6 d_6$ zurück, so erhält man die verlangten Grundrißprojektionen der Isophoten des Symmetralmeridians.

145. Um nun weiter die Isophotenpunkte auf einem beliebigen Parallelkreis (k_1, k'_1) zu bestimmen, ziehe man zum zugehörigen Punkt (f_1, f'_1) (rechter Hand) die Tangente $f'_1 s'_1$ und die Normale $f'_1 g'_1$, und damit bestimme man auf bekannte Weise mittelst des bei $h_1 r_1 H_1$ (beliebig nebenaus) umgelegten Neigungswinkels α den Nullpunkt N_1 und den Maximalpunkt M_1 der zugehörigen Beleuchtungsskale für die Isophotenkonstruktion des Parallelkreises (k_1, k'_1). Man mache also $r_1 i_1 = O'_1 g'_1$ und $r_1 h_1 = f'_1 g_1$, errichte in i_1 und h_1 Senkrechte, welche den umgelegten Winkelschenkel in J_1 und H_1 durchschneiden, und trage $i_1 J_1$ nach $O_1 N_1$ und $r_1 H_1$ nach $N_1 M_1$ auf die zu XX angenommene Parallele, so ist N_1 der Nullpunkt und M_1 der zugehörige Maximalpunkt der Intensitätsskale für die Konstruktion der Isophotenpunkte des angenommenen Parallelkreises (k_1, k_1').

146. Für den kleinsten Parallelkreis (k, k') geht die umhüllende Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und die Isophotenkonstruktion vereinfacht sich bekanntlich in der Art, daß der Nullpunkt mit dem Mittelpunkt O zusammenfällt und daß die Länge der Beleuchtungsskale $= \rho \sec \alpha$ ist, sofern ρ den Radius des Parallelkreises (k, k') bedeutet. Denkt man sich also den Lichtstrahl nach $O L_1$ in die H.E. umgelegt und auf einer zur Achse XX parallel angenommenen Geraden $o m = O L_1$ gemacht, so ist o der Nullpunkt und m der Maximalpunkt der verlangten Beleuchtungsskale für die Grundrißprojektion k des Parallelkreises (k, k').

147. Geht ein Parallelkreis zufällig durch zwei Isophotenpunkte des umgedrehten Symmetralmeridians, wie in unserer Figur z. B. der Parallelkreis (k_2, k'_2) durch die Isophotenpunkte $+10_1$ und -3_1, so vereinfacht sich die Isophotenkonstruktion wesentlich. Denn bringt man (im Grundriß) die Punkte $+10_1$ und -3_1

nach $+10$ und -3 in ihre ursprüngliche Lage zurück, so erhält man die Beleuchtungsskale für die Grundrißprojektion k_2 des betreffenden Parallelkreises (k_2, k'_2), wenn wir die Strecke $+10$ -3 in 13 gleiche Teile teilen. Diese Teilung haben wir auf der Achse XX selbst ausgeführt: M_2 ist dabei der Maximalpunkt $+10$ und N_2 der Nullpunkt 0.

Was die Beleuchtung des untersten Kreises (K_1, K'_1) und des obersten Kreises (K_2, K'_2) betrifft, so ist die Beleuchtungsintensität derselben, da sie die Meridianellipsen $\mathfrak{E}'_1$ und $\mathfrak{E}'_5$ horizontal berühren, nach früherm gleich 0,58.

148. Endlich haben wir in unserer Figur auch noch die Schlagschatten auf die Oberfläche der Einziehung selbst wie auf die Projektionsebenen angegeben. Im Aufriß erhält man den eigenen Schattenumriß $r't'u'$, den der obere Kreis (K_2, K'_2) auf die Oberfläche der Einziehung wirft, wie für den Punkt t' durch Hilfslinien angedeutet ist. Durch einen Punkt (v, v') des schattenwerfenden Kreises (K_2, K'_2) denkt man sich nämlich einen Lichtstrahl parallel $O\,l$, $O'_1\,l'$ gezogen, durch denselben eine Hilfsebene, und zwar eine horizontal projizierende Ebene, gelegt und mittels einiger Parallelkreise die Vertikalprojektion $v'\,t'\,w'$ der Durchschnittslinie bestimmt, in welcher dieselbe die Oberfläche der Einziehung schneidet. Der Punkt t', in welchem $v'\,t'\,w'$ von der Vertikalprojektion $v'\,t'$ des Lichtstrahles geschnitten wird, ist alsdann ein Punkt der Schlagschattenkurve $r'\,t'\,u'$ im Aufriß. Im Grundriß werden die Umrisse $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ noch vom obern Begrenzungskreis (K_2, K'_2) und die ebenfalls noch sichtbaren Umrisse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ von der Grenzisophote 0 auf den untern Teil der Einziehung geworfen und auf ähnliche Weise wie der Schlagschattenumriß im Aufriß gefunden. — Die Kurven $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ endlich geben den Schlagschatten des obern Begrenzungskreises (K_2, K'_2) auf die H.E., und die Kurve $\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}'\mathfrak{G}'$ denselben auf die V.E. an. Die beiden Stücke $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ sind Bogenstücke des Kreises $\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, den man aus O_2, der Horizontalspur des durch den Mittelpunkt (O, O'_2) gehenden Lichtstrahles ($O\,O_2$, $O'_2\,o'_2$), mit dem Radius $O'_2\,d'_1$ des schattenwerfenden Kreises K_2, K'_2 beschreibt. Der elliptische Schlagschatten $\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}'\mathfrak{G}'$ auf der Aufrißebene ergiebt sich dagegen auf bekannte Weise, wenn man die Vertikalspuren der durch einzelne Punkte des schattenwerfenden Kreises (K_2, K'_2) gezogenen Lichtstrahlen sucht und gehörig verbindet. So ist $\mathfrak{W}'$ die Vertikalspur des durch (v, v') gelegten Lichtstrahles ($v\,v_1$, $v'\,\mathfrak{W}'$) und somit $\mathfrak{W}'$ ein Punkt der Schlagschattenkurve auf der Aufrißebene.

149. Aufgabe. Es sind die Umrisse der geraden Schraubenfläche oder der sogenannten Wendelfläche (der Schraube mit flachem Gewinde), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten derselben bestimmen (Fig. 58, Blatt 15).

Auflösung. Die gerade oder flache Schraubenfläche, auch Wendelfläche genannt, entsteht, wenn sich

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

eine Gerade, die zu ihrer Achse senkrecht ist, so bewegt, daß jeder Punkt derselben eine Schraubenlinie beschreibt. Als Erzeugende wurde die Gerade $A_0 B_0$ angenommen, die in der H.E. liegt und zugleich auf der Projektionsachse senkrecht ist und als Drehachse eine im Mittelpunkt O zur H.E. senkrecht stehende Gerade hat. Indem $A_0 B_0$ sich in der Richtung des zur Seite (im Grundriß) angegebenen Pfeiles der bezeichneten Bedingung entsprechend umdreht und nacheinander die Stellungen $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$, $(a_2 b_2, a'_2 b'_2)$, $(a_3 b_3, a'_3 b'_3)$, . . . einnimmt, erzeugt sie die linksgängige Schraubenfläche*), von welcher wir Dreiviertel einer Windung dargestellt haben. Dabei beschreibt der Punkt (A_0, a'_0) die Schraubenlinie (S, S') und der Punkt (B_0, b'_0) die Schraubenlinie (S, S''), deren halbe Ganghöhe $= a'_0 a'_4 = b'_2 a'_6$ ist und welche zusammen den äußern Umriß der Schraubenfläche bilden. Ebenso beschreibt auch jeder andere Punkt der Erzeugenden eine Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe. So z. B. der Punkt (D_0, a'_0) die Schraubenlinie (S_3, S'_3) und der Punkt (E_0, b'_0) die Schraubenlinie (S_3, S''_3).

150. Um nun zunächst die Grundrißisophoten zu bestimmen, die in Bezug auf die Achse YY symmetrisch gelegen sind, konstruieren wir zuerst die Isophotenpunkte auf dieser Achse. Dazu berechnen wir vor allem den Hauptparameter der Schraubenfläche:

$$\gamma = \rho \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi},$$

worin h die Ganghöhe $= 2 \cdot a'_0 a'_4$, ρ den Radius und β den konstanten Neigungswinkel bedeutet, den die Tangente an die zugehörige Schraubenlinie bildet. In unserer Figur ist $\rho = 1$ cm und $\frac{h}{2} = 4{,}6$ cm angenommen worden. Man erhält: $\gamma = \operatorname{tg} \beta = \frac{4{,}60}{3{,}14} = 1{,}465$ cm, welchem Wert der Tangentenwinkel $\beta = 54^0\,44'$ entspricht.

Man mache nun $OC = \gamma = \operatorname{tg} \beta = 1{,}465$ cm und Winkel $OCP = \alpha$ $(= 35^0\,16')$ oder Winkel $OPC = \beta$ $(= 54^0\,44')$ und konstruiere für den Punkt C als Mittelpunkt und für CP als Richtung und beliebige Länge der Intensitätsskale den Normalenbüschel, so schneiden die Strahlen desselben die Achse YY in den verlangten Isophotenpunkten, wie für einige Punkte, so für $+8$, $+9$, -2, -6, . . ., durch Hilfslinien angedeutet ist. Dem Punkt P entspricht zugleich der hellste Punkt $+10$ und dem Punkt Q der dunkelste Punkt 0.

151. Um im weitern die Grundrißisophoten einer beliebigen konaxialen Schraubenlinie (S_2, S'_2) vom Radius $r = Of_2$ zu finden, konstruieren wir aus O mit $r = Of_2$ einen Kreis S_2, welcher die Horizontalprojektion

*) Wir nennen, entgegen dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, eine Schraubenfläche eine linksgewundene oder linksgängige, wenn man, wie in unserem Beispiel, in derselben emporsteigend, die Schraubenachse stets zur Linken hat; im andern Fall dagegen eine rechtsgewundene oder rechtsgängige.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der Schraubenlinie S'_2 ist, verbinden f_2 mit C und ziehen $f_2 g_2 \perp f_2 C$. Mit den beiden Linien $O g_2$ und $f_2 g_2$, die der Subnormale und Normale des Grundkreises bei den senkrechten Kreiskegelflächen entsprechen, ergiebt sich alsdann auf bekannte Weise der Abstand des Nullpunktes von der X=Achse und die Länge der mit der Y=Achse zusammenfallenden Beleuchtungsskale für die Grundrißisophoten des Kreises S_2. Man mache nämlich $C i_2 = O g_2$ und $C h_2 = g_2 f_2$, errichte in i_2 und h_2 Senkrechte zu CO, welche die verlängerte CP in J_2 und H_2 schneiden, ziehe durch einen beliebigen Punkt o_2 der X=Achse*) mit der Y=Achse eine Parallele und trage $i_2 J_2$ nach $o_2 N_2$ und $C H_2$ nach $N_2 M_2$, so ist N_2 der Nullpunkt und M_2 der Maximalpunkt $(+10)$ der dem Kreis S_2 entsprechenden Intensitätsskale. Führen wir daher durch die Teilpunkte dieser Skale Senkrechte zur Y=Achse oder Parallele zur X=Achse, so schneiden diese S_2 in den verlangten Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte auf der Schraubenlinie (S_2, S'_2), wie durch Hilfslinien für einzelne Punkte ersichtlich gemacht ist. In unserer Figur sind weiter die Bestimmungsstücke $O g_3$, $f_3 g_3$, $O g_4$, $f_4 g_4$, ... für die Grundrißprojektionen S_3, S_4, ... der Schraubenlinien (S_3, S'_3), (S_4, S'_4), ... angedeutet, womit die Isophotenpunkte derselben gefunden werden können.

152. Für solche Kreise, die durch einen auf der Y=Achse liegenden Isophotenpunkt gehen und zugleich die Grundrißprojektionen der Grenzisophote, also den Kreis 00 schneiden, wie z. B. für den Kreis S_1, der durch den Punkt $+10$ (auf der Y=Achse) geht und den Kreis 00 in t und u schneidet, läßt sich die Isophotenkonstruktion auch hier wesentlich vereinfachen. Denn die Gerade tu, gehörig verlängert, bestimmt auf der zur Y=Achse parallel gezogenen Skale (ebenfalls links unten beliebig angenommen) im Schnittpunkt N_1 den Nullpunkt, und die durch P $(+10)$ zur X=Achse parallele Gerade schneidet auf derselben den Maximalpunkt M_1 $(+10)$ ab.

153. Hat man auf diese Weise die Grundrißisophoten gefunden, so erhält man die Aufrißprojektionen derselben, indem man die Grundrißisophotenpunkte auf die entsprechenden Vertikalprojektionen der konaxialen Schraubenlinien $(S'_1, S'_3, S', \ldots)$, oder noch besser auf die Vertikalprojektionen der zugehörigen Erzeugenden $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$, $(a_2 b_2, a'_2 b'_2)$, ... projiziert. So ist z. B. der Lichtpol $+10$, der auf der konaxialen Schraubenlinie (S_1, S'_1) liegt, mittelst der Erzeugenden $(a_1 b_1, a'_1 b'_1)$ bestimmt worden.

154. Um endlich die Isophotenpunkte der Schraubenachse $(O, a'_0 a'_4 \ldots)$, d. h. die Punkte, in welchen dieselbe von den Aufrißisophoten geschnitten wird, zu erhalten, müssen wir ebenfalls die horizontalen Erzeugenden bestimmen, auf denen diese Punkte liegen. Zu diesem Behufe konstruieren wir für den Mittelpunkt und Nullpunkt O, die Richtung OX und den horizontalen

*) In unserer Figur links unten nebenaus angenommen.

Neigungswinkel α (= $35^0\,16'$) der Lichtrichtung (l, l') den Tangentenbüschel oder für die gleichen Stücke und die Richtung OY den Normalenbüschel. Dann sind die Strahlen dieses Büschels die Grundrißprojektionen der genannten Erzeugenden. Diese Konstruktion ist in unserer Figur für den Kreis S der äußern Schraubenlinie (S, S') ausgeführt. Der Nullpunkt der Skale fällt, wie gesagt, mit dem Centrum O zusammen, und der Maximalpunkt M (+ 10) (auf OY) ergiebt sich, wenn man den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (l, l') in eine zur V.E. parallele Lage $L'_1\,a'_0$ dreht und die Hypotenuse $a'_0\,L'_1$ des rechtwinkligen Dreiecks $l'_1\,a'_0\,L'_1$ nach OM auf der Y-Achse abträgt. Indem man hierauf die Strecken OM in zehn gleiche Teile teilt, in den Teilpunkten Senkrechte zur Y-Achse zieht, die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit dem Kreis S auf die Schraubenlinie S' projiziert und endlich durch die Punkte, wo die letztere von den projizierenden Linien geschnitten wird, Parallelen mit der Projektionsachse führt, erhält man in den Punkten, in welchen diese Parallelen die Achse $a'_0\,a'_4 \ldots$ schneiden, die verlangten Isophotenpunkte auf letzterer. Die Konstruktion ist für die Punkte + 8, + 7, 0, — 1, — 3 noch besonders durch Hilfslinien angegeben.

155. Aufgabe. Es sind die Umrisse der schiefen Schraubenfläche (der Schraube mit scharfem Gewinde), sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten derselben bestimmen (Fig. 59 u. 60, Blatt 16).

Auflösung. Die schiefe Schraubenfläche, welche unter anderm zur Oberflächenbegrenzung der Schraube mit scharfem Gewinde dient, entsteht, wenn sich eine Gerade, die beliebig schief zur Achse ist und diese, gehörig verlängert, schneidet, so bewegt, daß sie mit der Achse stets denselben Winkel bildet und daß jeder Punkt derselben eine Schraubenlinie beschreibt. Als Erzeugende wurde die zur V.E. parallele Gerade ($A_0\,o$, $a'_0\,b'_0$) angenommen, die die Achse (o, o' o'') im Punkte (o, b'_0) schneidet und mit der H.E. den Neigungswinkel $b'_0\,a'_0\,o'$ = β bildet, welcher in unserer Figur dem horizontalen Neigungswinkel $L'_1\,o'\,a'_0 = \alpha = 35^0\,16'$ (der in eine zur V.E. parallele Lage gedreht) gleich angenommen worden ist. Indem sich die Erzeugende ($A_0\,o$, $a'_0\,b'_0$) nach der Richtung des Pfeiles der angegebenen Bedingung gemäß umdreht und nacheinander die Stellungen ($A_0\,o$, $a'_0\,b'_0$), ($a_1\,o$, $a'_1\,b'_1$), ($a_2\,o$, $a'_2\,b'_2$), . . . einnimmt, erzeugt sie die lingsgängige*) eine (untere) Hälfte der schiefen Schraubenfläche**), von welcher wir etwas über Fünfviertel Windungen dargestellt haben.

Die Aufrißprojektion des Umrisses dieser Schraubenfläche ist die Kurve, welche die Aufrißprojektionen sämtlicher Erzeugenden ($A_0\,o$, $a'_0\,b'_0$), ($a_1\,o$, $a'_1\,b'_1$), ($a_2\,o$,

---

*) Siehe die Anmerkung S. 73.

**) Die andere (obere) Hälfte wird von einer Geraden erzeugt, die über b'_0 hinaus verlängert und $a'_0\,b'_0$ gleich lang angenommen wird. Die erstere Hälfte dieser vollständig schiefen Schraubenfläche dient dann zur obern und die andere Hälfte zur untern Oberflächenbegrenzung der Schraube mit scharfem Gewinde.

$a'_2 b'_2$), ..., die wir innerhalb einer Windung in 24 Stellungen zur Hilfe dargestellt haben, einhüllt. Dabei beschreibt der Punkt (A_0, a'_0) die Schraubenlinie ($A_0 a_1 a_2 a_3 \ldots, a'_0 a'_1 a'_2 a'_3 \ldots$) oder ($S$, S'), deren Ganghöhe $= a'_0 a'_8$ und deren Horizontalprojektion der Kreis S ist, womit die Grundrißprojektion der Schraubenfläche vollständig eingeschlossen ist, und der Punkt (o, b'_0) bleibt stets in der Achse und nimmt nacheinander die höhern Stellungen b'_1, b'_2, b'_3, ... ein. Ebenso beschreibt auch jeder Zwischenpunkt der Erzeugenden eine Schraubenlinie. Wir haben für die Zwischenpunkte f'_1, f'_2, f'_3 die zugehörigen Schraubenlinien (S_1, S'_1), (S_2, S'_2), (S_3, S'_3) dargestellt.

156. Die Grundrißprojektion der den Aufriß einhüllenden Aufrißkurve findet man wie folgt. Man mache $oc = r = \gamma \operatorname{cotg} \beta = f'_2 o'_2$, führe durch c zu $A_0 o$ eine Parallele cd, ziehe einen beliebigen Radius od, welcher cd in d schneidet, und mache $oe = cd$, so ist e ein Punkt der verlangten Kurve, von der man auf gleiche Weise beliebig viele andere Punkte e_1, e_2, e_3, ... finden kann. Aus dieser Konstruktion folgt zugleich, daß die Gerade cd eine Assymptote zu dem Kurvenast oe ist und daß die Kurve aus zwei solchen zum Achsenkreuz $A_0 o$ und $a_6 o$ symmetrisch liegenden Ästen $o e_1 e_2 e_3 e_4$, $o \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$ besteht. Diese Kurve ist zugleich kongruent mit der Horizontalprojektion der Maximalkurve oder hellsten Lichtlinie $or\lambda$, $or_1\lambda_1$, die in Bezug auf die Richtung ol, resp. auf die damit parallelen Geraden pq, $p_1 q_1$ auf gleiche Weise gefunden wird. Wir haben diese beiden Kurven einpunktgestrichelt gezeichnet.

157. Behufs der Bestimmung der Isophotenpunkte auf der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ haben wir der Deutlichkeit wegen in einer besondern Hilfsfigur (Fig. 60) den Bestimmungsbüschel K' konstruiert, dessen Richtungslinie $K't'$ mit der Vertikalen $K'V'$ den Winkel α bildet. Auf $K'V'$ trage man die Strecke

$$K's' = o'_2 b'_0 = \gamma = \rho \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi} = \frac{3,8}{3,14} = 1,21 \text{ cm}$$

ab und ziehe in s' zu $K'V'$ die Senkrechte $s'y'$, welche $K't'$ in t' und $K'u'$ in u' schneidet. Die Punkte, in welchen die Gerade $s'y'$ von den Strahlen des Büschels K' geschnitten wird, tragen wir alsdann so auf die Y-Achse über, daß s' mit o und $s'y'$ mit der positiven Y-Achse zusammenfällt, und von den auf der Y-Achse erhaltenen Punkten führen wir Parallelen mit der X-Achse, welche die Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ in den verlangten Isophotenpunkten schneidet. Trägt man z. B. $s't'$ nach ot und führt durch t mit der X-Achse eine Parallele, so schneidet sie die Maximalkurve in dem mit μ bezeichneten Lichtpol $+10$. Ebenso werden die übrigen Punkte der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$ durch Übertragung erhalten.

158. Um nun weiter die Isophotenpunkte auf der Grundrißprojektion einer Schraubenlinie, z. B. auf dem Grundkreise S_2 zu finden, dessen Radius $oc = o'_2 f'_2 = \rho$ ist, und der die Maximalkurve in c und c_1

schneidet, können wir wieder wie bei den senkrechten Kreiskegelflächen verfahren, weil die Erzeugende ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$) in ihren verschiedenen Lagen zur H.E. stets denselben Neigungswinkel β macht. Ziehen wir daher $f'_2 g'_2 \perp a'_0 b'_0$, so ist $o'_2 g'_2$ die Subnormale (S) und $f'_2 g'_2$ die Normale (N) des Punktes f'_2 der Erzeugenden ($A_0 o$, $a'_0 b'_0$), welche hier die zur V.E. in parallele Lage umgedrehte Meridiankurve vertritt. Die nähere Untersuchung zeigt nun, daß der Abstand des Nullpunktes der mit der X-Achse zusammenfallenden Intensitätsskale durch $S \cdot \operatorname{tg} \alpha$ und die halbe Länge dieser Skale durch $\sqrt{N^2 + \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} \cdot \sec \alpha$ bestimmt ist. Machen wir also $\measuredangle\, u' K' i' = \measuredangle\, L'_1 o' a'_0 = \alpha$, tragen $o'_2 g'_2$ nach $K' i'_2$ und errichten in i'_2 eine Senkrechte $i'_2 J'_2$, welche $K' J'_2$ in J'_2 schneidet, so ist $i'_2 J'_2 = S \cdot \operatorname{tg} \alpha$ der auf der X-Achse liegende Abstand des Nullpunktes N_2 der dem Kreis S_2 angehörenden festen Intensitätsskale vom Koordinatenpunkt (o). Machen wir ebenso $K' v' = o'_2 f'_2 = \rho = \gamma \cdot \operatorname{cotg} \alpha$, ziehen $v' w'_2$ parallel $K' i'$, tragen $f'_2 g'_2$ nach $v' w'_2$, beschreiben mit $K' w'_2$ den Kreisbogen $w'_2 h'_2$ und errichten in h'_2 die Senkrechte $h'_2 H'_2$, so ist $K_1 H'_2$ die halbe Länge der mit der X-Achse zusammenfallenden Intensitätsskale, womit auch der Maximalpunkt M_2 ($+10$) dieser Skale bestimmt ist. Der Einfachheit wegen haben wir jedoch die Einteilung dieser Skale auf einer etwas nach außen verschobenen und zur X-Achse parallelen Geraden $n_2 m_2$ ausgeführt. Dazu ziehen wir durch o auf $c c_1$ eine Senkrechte und durch einen beliebigen Punkt o_2 derselben eine Parallele zur X-Achse, machen $o_2 n_2 = i'_2 J'_2 = S \operatorname{tg} \alpha$ und $n_2 m_2 = K' H'_2 = \sqrt{N^2 + \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} \cdot \sec \alpha$, teilen $n_2 m_2$ in zehn gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte, wie bei 5 angedeutet, Parallelen zu $o o_2$, so schneiden diese den Kreis S_2 in den Grundrißprojektionen der Isophotenpunkte der Schraubenlinie (S_2, S'_2), deren Grundrißprojektion eben der Kreis S_2 ist.

Ebenso erhält man die Isophotenpunkte der Grundrißprojektionen der übrigen Schraubenlinien.

159. Geht ein Kreis durch einen bestimmten Isophotenpunkt der Maximalkurve $\lambda o \lambda_1$, wie z. B. der Kreis S_1, der durch den hellsten Punkt $+ 10$ (μ) geht, so läßt sich die Isophotenkonstruktion auch hier vereinfachen. Denn im Punkt N_1, wo der Kreis S_1 den mit der X-Achse zusammenfallenden geradlinigen Teil $o a_5$ der Grenzisophote schneidet, hat man schon zum voraus, wie dies auch bei der vorigen Konstruktion der Fall ist, den Nullpunkt o, und zieht man durch μ auf $\mu\mu_1$ eine Senkrechte, welche die X-Achse in M_1 schneidet, so hat man in M_1 auch den verlangten Maximalpunkt $+10$ der Beleuchtungsskale für den Kreis S_1. Auch diese Skale haben wir zur Deutlichkeit zur Seite (links) auf einer Parallelen $n_1 m_1$ zur X-Achse ausgeführt.

Hat man eine hinreichende Anzahl von Punkten für das Grundrißisophotensystem auf die angegebene Weise gefunden, so hat man dieselben nur noch durch stetige krumme Linien zu verbinden, um die Grundrißisophoten $0, +1, +2, +3, \ldots, +8, +9, -1,$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

-2, -3, ... selbst zu erhalten. Und indem man die betreffenden Isophotenpunkte auf die Vertikalprojektionen S'_1, S'_2, S'_3, S' der konaxialen Schraubenlinien oder noch besser auf die Vertikalprojektionen $a'_0 b'_0$, $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$, $a'_3 b'_3$, ... der zugehörigen Erzeugenden projiziert und durch stetige krumme Linien miteinander verbindet, erhält man auch die zugehörigen Aufrißisophoten 0, $+1$, $+2$, $+3$, ..., $+8$, $+9$, -1, -2, -3, ...

160. Will man im Aufriß auch noch die Isophotenpunkte auf der Schraubenachse bestimmen, so verfahre man auf die gleiche Weise, wie bei der geraden oder flachen Schraubenfläche gezeigt worden ist. Man konstruiere für den horizontalen Neigungswinkel α und für o l als Richtung den Tangentenbüschel oder für o Y als Richtung den Normalenbüschel, dessen Centrum und Nullpunkt mit o zusammenfällt und dessen Maximalpunkte nach $+M$ und $-M$ zu liegen kommen, und betrachte die Strahlen dieses Büschels als die Grundrißprojektionen der Erzeugenden. Die Aufrißprojektionen dieser Erzeugenden bestimmen dann auf der Schraubenachse $o' o''$ die verlangten Isophotenpunkte.

Die Strahlen des Tangentenbüschels berühren in o die Grundrißisophoten. Die Punkte, in welchen die Grundrißprojektion e o ε der Aufrißkontur von den Isophoten im Grundriß geschnitten wird, liefern, in die V.E. projiziert, die Punkte, in welchen die Aufrißisophoten die Konturkurve $a'_0 e'_4 e'_3 e'_2 e'_1 b'_2$ und $a'_4 \varepsilon'_4 \varepsilon'_3 \varepsilon'_2 \varepsilon'_1 b'_6$ durchschneiden.

Die Grenzisophote 0 des Grundrisses zeichnet sich bei der schiefen Schraubenfläche besonders aus, weil sie, wie man in unserer Figur sieht, nebst einem krummlinigen Teil $o p_1 z$, auch einen geradlinigen Teil besitzt, der mit der Erzeugenden $o a_5$ zusammenfällt.

Denkt man sich die Erzeugende $(A_0 o, a'_0 b'_0)$ um ein gleiches Stück über den Punkt (o, b'_0) hinaus verlängert, so erzeugt die Verlängerung derselben (wie bereits oben in einer Anmerkung zu § 155 bemerkt worden ist) die andere (obere) Hälfte der vollständigen schiefen Schraubenfläche. Die Beleuchtung dieser zweiten Flächenhälfte ist in Bezug auf die Y-Achse zu jener der ersten Hälfte symmetrisch, und die Isophoten derselben werden ähnlich wie die der letztern gefunden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN