UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Visual Library

21 SE

DAS

PROJECTIVE ZEICHNEN

nebst den

für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben

aus der

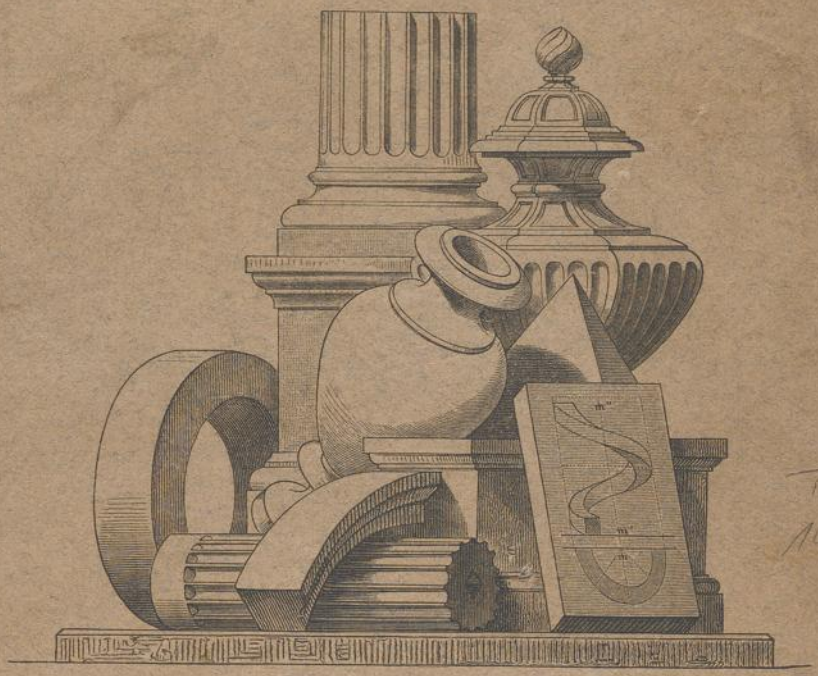
EBENEN GEOMETRIE.

Im Auftrage der Kgl. Kunstgewerbeschule zu München herausgegeben

von

MAX KLEIBER

Professor an der kgl. Kunstgewerbeschule und Docent an der kgl. Akademie der bildenden Künste zu München.



Ol
T PH
1453

50 VORLAGE-BLÄTTER

mit begleitendem Text.

Für gewerbliche Fortbildungs-Schulen, Realschulen, Kunstgewerbe-, Baugewerk- und Industrie-Schulen,

sowie zum Selbstunterricht.

Stuttgart & Leipzig.

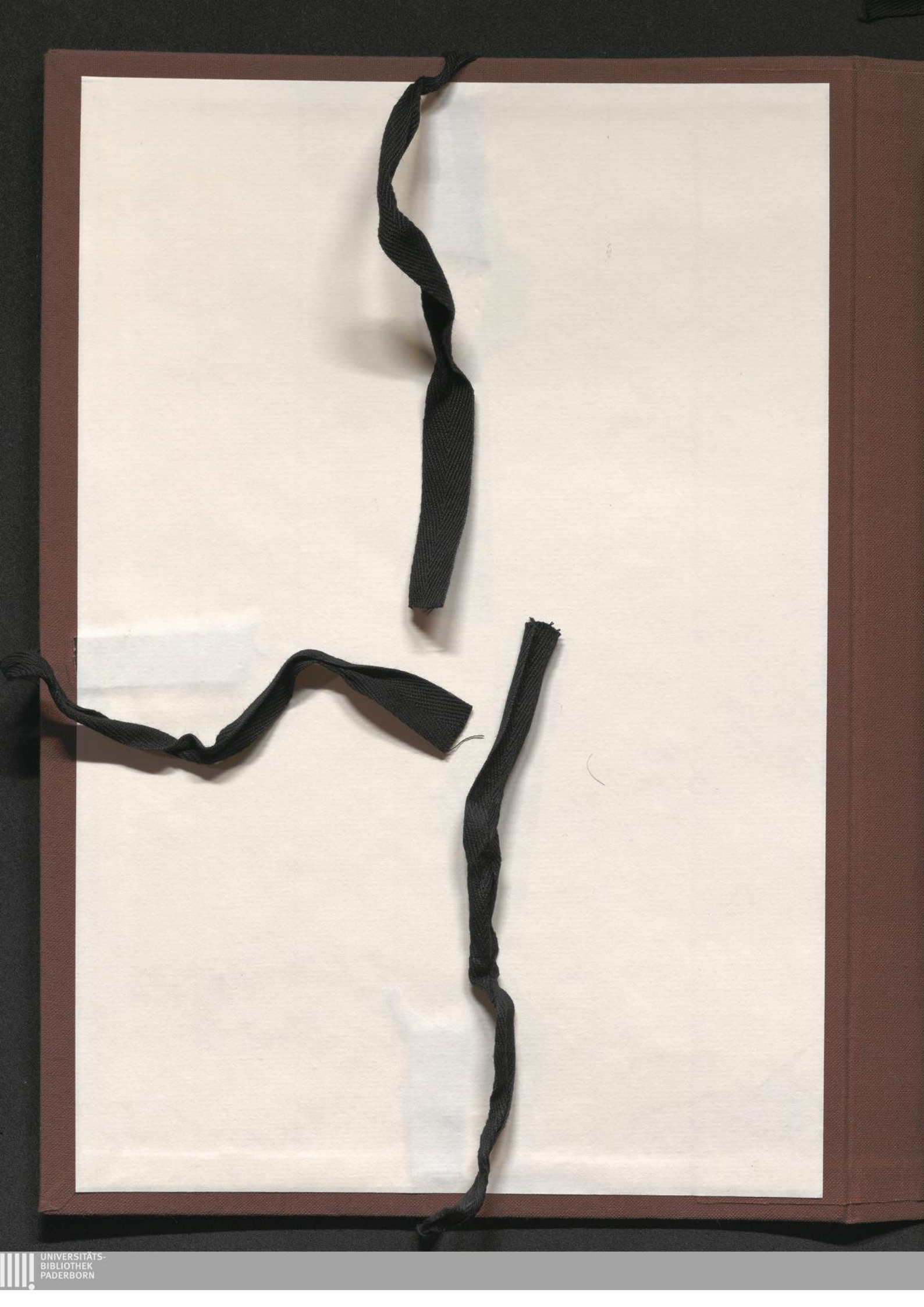
Verlag von Wilhelm Effenberger.

(F. Loewe's Verlag.)

Universitäts-Bibliothek Paderborn 51

EK 1511
K AV/K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

DAS

PROJECTIVE ZEICHNEN

nebst den

für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben

aus der

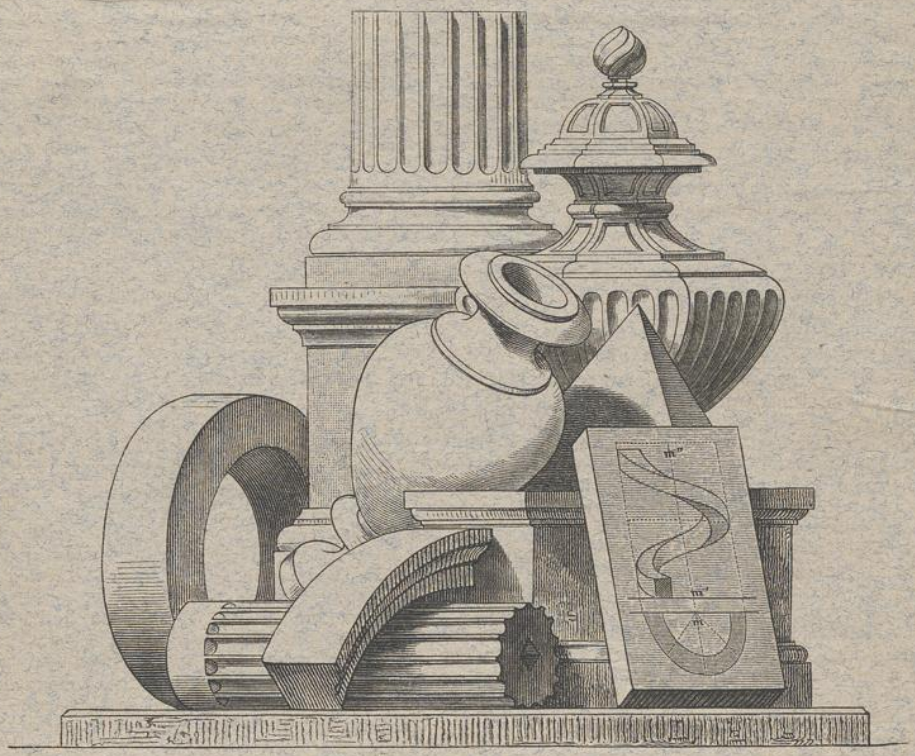
EBENEN GEOMETRIE.

Im Auftrage der Kgl. Kunstgewerbeschule zu München herausgegeben

von

MAX KLEIBER

Professor an der kgl. Kunstgewerbeschule und Docent an der kgl. Akademie der bildenden Künste zu München.



50 VORLAGE-BLÄTTER

mit begleitendem Text.

Für gewerbliche Fortbildungs-Schulen, Realschulen, Kunstgewerbe-, Baugewerk- und Industrie-Schulen,

sowie zum Selbstunterricht.

Stuttgart & Leipzig.

Verlag von Wilhelm Effenberger.

(F. Loewe's Verlag.)

DAS

PROJECTIVE ZEICHNEN

nebst den

für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben

aus der

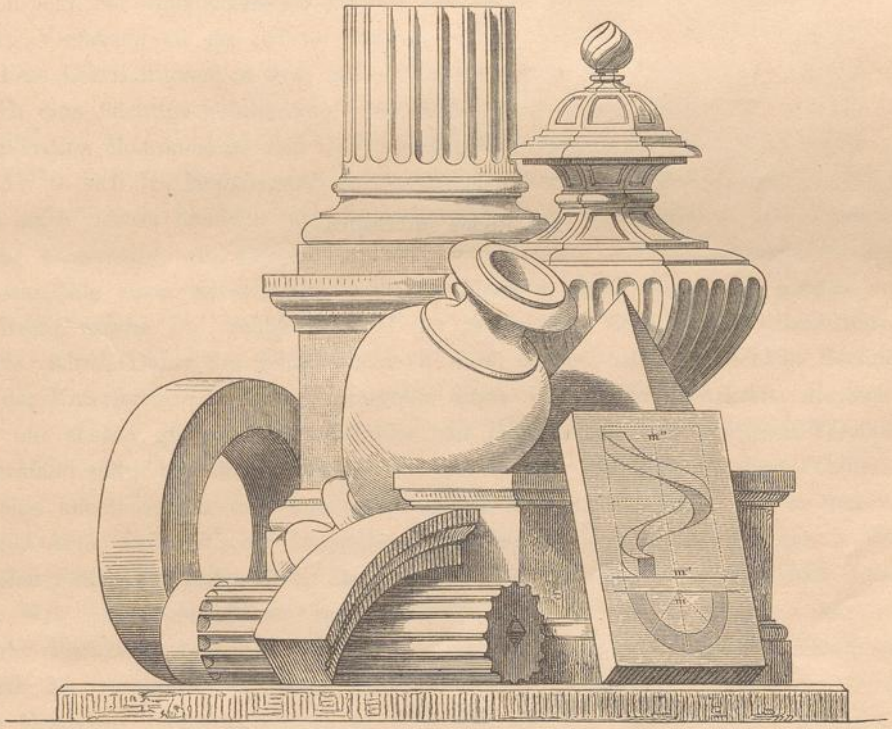
EBENEN GEOMETRIE.

Im Auftrage der Kgl. Kunstgewerbeschule zu München herausgegeben

von

MAX KLEIBER

Professor an der kgl. Kunstgewerbeschule und Docent an der kgl. Akademie der bildenden Künste zu München.



50 VORLAGE-BLÄTTER

mit begleitendem Text.

Für gewerbliche Fortbildungs-Schulen, Realschulen, Kunstgewerbe-, Baugewerk- und Industrie-Schulen,

sowie zum Selbstunterricht.

Stuttgart & Leipzig.

Verlag von Wilhelm Effenberger.

(F. Loewe's Verlag.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Alle Rechte vorbehalten.

Universitätsbibliothek Paderborn 51
06
TPA
1453
EK 1511
KA IV /K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorwort.

Vom Verfasser vorliegenden Werkes ersucht, dieser seiner Erstlingspublication einige empfehlende Worte mit auf den Weg zu geben, glaube ich diesem Wunsche nicht besser und nachdrücklicher entsprechen zu können, als durch einen kurzen Hinweis auf die Lehrthätigkeit des Herrn Verfassers an der meiner Leitung unterstellten kgl. Kunstgewerbeschule dahier, indem speciell diese Lehrthätigkeit es war, welche die Anregung zur Bearbeitung vorliegenden Werkes bot, und durch eine flüchtige Schilderung ihrer Entstehung, Entwickelung und Erfolge wohl am besten diese Publication charakterisirt und in ihrem Werthe richtig bemessen werden kann.

Als es sich bei Erweiterung des Lehrprogramms an hiesiger kgl. Kunstgewerbeschule unter Anderem auch darum handelte, die Projectionslehre, die bis dahin an der Anstalt nur in ihren Elementen gleichzeitig mit den Anfängen des technischen und architektonischen Zeichnens gelehrt worden war, als einen selbstständigen Unterrichtszweig auszubilden und hierbei den eigenartigen Verhältnissen, welche das Schülermaterial der Anstalt in Bezug auf Vorkenntnisse, Fähigkeiten, Berufsziele, Alter, Dauer des Schulbesuches u. s. w. darbot, nach Möglichkeit Rechnung zu tragen, da fand der Unterfertigte in dem Herausgeber dieses Werkes eine Lehrkraft, die sich der gestellten Aufgabe mit ebenso grosser Bereitwilligkeit und Hingabe als mit richtigem Verständnisse für den Lehrgegenstand selbst wie für die Zwecke der Schule und die Eigenart ihrer Schülerschaft unterzog. Durch seine künstlerischen und kunstgewerblichen Studien von Hause aus in den wichtigsten Methoden und Arten zeichnerischer Darstellung unterrichtet, desgleichen mit den in der Praxis meist auftretenden Fällen für Anwendung des constructiven Zeichnens vertraut, wusste derselbe sofort den richtigen Weg einzuschlagen, um seinen Schülern, ob aus der Werkstätte, dem Atelier oder aus elementaren Vorschulen kommend, in kurzer Frist und bei nur bescheidenen Voraussetzungen Wesen und Werth des projectiven Zeichnens anschaulich und verständlich zu machen. In der Hauptsache war sein Bestreben darauf gerichtet, in Rücksicht auf die meist nur sehr geringen Vorkenntnisse der Zöglinge alle theoretischen Erklärungen und Darlegungen auf das Nothwendigste zu beschränken, dafür aber für jede Aufgabe zahlreiche Fälle ihres Vorkommens und ihrer Nutzanwendung im Kunstgewerbe heranzuziehen und somit mehr an der Hand praktischer Beispiele, als in abstracter Darstellung die Lösung der Aufgaben zu versuchen. Unmittelbar mit den Vorträgen wurden sodann zeichnerische Uebungen in entsprechendem Zeitmass verbunden, um den Schülern das Gehörte sofort besser einzuprägen. War auf solche Weise von allem Anfange an das Interesse der Schüler für dieses vorher oftmals trocken und anstrengend erschienene Lehrfach gewonnen, so gelang es dann leicht, bei der Mehrzahl der Zöglinge den Eifer für diese Uebungen zur förmlichen Lust und Vorliebe zu steigern. Der günstige Einfluss, welcher hierdurch auf Fleiss, Streben und Entwickelung der Zöglinge innerhalb

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

eines speciellen Studiums ausgeübt wurde, machte sich auch bald bei den Uebungen in anderen Disciplinen, namentlich in jenen, welche zu ihrer Pflege des constructiven Zeichnens bedürfen, in günstigster Weise geltend.

Wo solche Erfolge sprechen, bedarf es sicherlich keiner weiteren Empfehlung, und hegt der Unterfertigte daher die volle Ueberzeugung, dass ein Lehrbuch wie das vorliegende, das eine erprobte und von den besten Erfolgen begleitete Lehrweise getreu wiedergibt, allen Jenen, welche sich um die Kenntniss und besondere Pflege des projectiven Zeichnens interessiren, eine willkommene Gabe sein werde.

München, im Dezember 1885.

Emil Lange.

Vorwort des Verfassers.

Seit einer Reihe von Jahren an beiden Abtheilungen der hiesigen kgl. Kunstgewerbeschule mit der Ertheilung des Unterrichts in der Projectionslehre betraut, war es stets mein eifrigstes Bemühen, diesen Unterricht sowohl den vorwiegend praktischen Zwecken der Anstalt, als auch dem Verständnisse der in Vorbildung, Fähigkeiten und Berufsziel meist sehr ungleichen Zöglinge dieser Schule nach Möglichkeit anzupassen. Dieses Bestreben führte mich, nachdem keines der gleichwohl in grosser Zahl vorhandenen Lehrbücher und Tafelwerke über Projectionslehre den besonderen Bedingungen meiner Lehraufgabe entsprechend erschien, zur Bearbeitung eigener Vorlageblätter, welche, für den zeichnerischen Theil des Unterrichts in Verwendung, dem jungen Kunsthandwerker, dem Dekorationsmaler, Bildhauer, Kunsttischler u. s. w. nach vorausgegangener bündiger Darlegung der Elemente der Projectionslehre sofort die hauptsächlichsten und wichtigsten Nutzanwendungen derselben im Kunstgewerbe leichtfasslich darstellen sollten. Bei solcher, lediglich dem praktischen Bedürfnisse entsprungenen Gestaltung des Unterrichts musste selbstredend von streng wissenschaftlichen Darlegungen in den meisten Fällen abgesehen werden, und auch das vorausgehende, dem noch vollständig unerfahrenen Anfänger zugedachte Kapitel der ebenen Geometrie auf die einfachsten, für das Zeichnen unentbehrlichsten Erklärungen und Constructionen beschränkt bleiben.

Die günstigen Resultate, welche ich nun seit mehreren Jahren mit diesem stetig vermehrten und in den praktischen Beispielen verbesserten Lehrmaterial erzielte, sowie vielfach an mich gelangte Anfragen nach einem für den Selbstunterricht geeigneten Werk dieser Art, legten mir den Gedanken nahe, fragliche Blätter als ein selbstständiges Vorlagenwerk für den Gebrauch an ähnlichen Schulen, wie für das Privatstudium herauszugeben. Um dem gedachten Zwecke auch hinsichtlich des für Herausgabe und Bezug eines Tafelwerkes so wichtigen Kostenpunktes zu entsprechen, sah ich mich bei Bearbeitung des Werkes genöthigt, Tafeln und Text desselben in Zahl und Umfang auf das Nothwendigste zu beschränken, ohne jedoch, was Auswahl, Anordnung und Darstellung der Figuren betrifft, es an möglichster Vollständigkeit, Uebersichtlichkeit und Klarheit fehlen zu lassen. So wurden die Vorlageblätter fast auf die Hälfte ihres für die wirkliche Darstellung durch den Schüler bestimmten Formates reducirt und ein nicht geringer Theil der Constructionsaufgaben und erklärenden Figuren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dem Texte eingefügt. Um auf den Tafeln die Anschaulichkeit der Figuren und Constructionen zu erhöhen, wurden einzelne Flächen und Schnitte durch leichte Farbtöne hervorgehoben, eine Zuthat, die, wenn auch nicht absolut nothwendig, so doch sicher von wohlthuender Wirkung für das Auge wie für das raschere Verständniss des Vorgeführten sein dürfte. In gleicher Absicht ist auch der Bearbeitung des Textes im Hinblick auf klares Hervortreten des Wesentlichen wie zur leichteren Orientirung besondere Sorgfalt zugewendet worden.

Indem ich hiermit das ursprünglich nur für den Kreis meiner Schüler bearbeitete Vorlagenwerk der Oeffentlichkeit übergebe und dabei wohl noch mancher Mängel desselben bewusst bin, hege ich nur den einen Wunsch, dass unter freundlicher Berücksichtigung der Umstände, welche das Werk entstehen liessen, dasselbe in Schule und Werkstätte, in fachmännischen Kreisen wie im Kreise der lernenden Jugend sich einer wohlwollenden Aufnahme erfreuen möge! In der Erfüllung dieses Wunsches wie in dem Bewusstsein, auch meinerseits ein Scherflein zur grösseren Werthschätzung und Nutzanwendung des projectiven Zeichnens, namentlich bei den Studien des Künstlers und Kunsthandwerkers beigetragen zu haben, würde ich den schönsten Lohn meiner Arbeit finden!

München, im Dezember 1885.

Der Verfasser.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Inhalt.

Einleitung.

		Seite	Tafel
	Allgemeine Begriffe über Linie, Winkel, Fläche, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz . .	1	

I. Theil.

(Constructionen der Ebene.)

1.	Aufgaben über das Zeichnen von Senkrechten zu einander, Antragen und Theilen der Winkel und Linien	4	I
2.	Das Dreieck	6	—
3.	Aufgaben über Dreiecke	8	II
4.	Das Viereck	9	—
5.	Aufgaben über Vierecke	10	II
6.	Aufgaben über das Zeichnen ähnlicher Figuren	11	III
7.	Das Vieleck	13	—
8.	Aufgaben über reguläre Vielecke	14	IV
9.	Der Kreis	15	—
10.	Aufgaben über Kreise	17	V
11.	Die Ellipse	19	—
12.	Aufgaben über Ellipsen	20	VI
13.	Das Oval; Aufgaben über Ovale und elliptische Bögen	21	VII
14.	Die Spirale	22	—
15.	Aufgaben über Spiralen	23	VIII

II. Theil.

	Das projective Zeichnen (Projectionslehre)	24	—
1.	Erklärungen zu Tafel IX	25	—
2.	Weitere Ausführungen zur rechtwinkligen Projectionsart	27	IX
3.	Projection des Punktes, der Geraden und Fläche	27	X
4.	Die ebene Fläche (Ebene)	30	—
5.	Darstellung einer begrenzten ebenen Fläche (Dreieck) in verschiedenen Lagen	30	XI
6.	Projection der Körper; Darstellung eines hohlen vierseitigen Prismas	32	XII
7.	Zusammenstellung verschiedener Körper und deren Projectionen	33	XIII
8.	Darstellung eines gothischen Pfeilerstückes in verschiedenen Lagen	33	XIV
9.	Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Prismas mit schrägen Schnittflächen und deren Netzbestimmung	34	XV
10.	Darstellung einer regelmässigen und einer unregelmässigen Pyramide	36	XVI
11.	Darstellung des Kreises in verschiedenen Lagen	37	XVII
12.	Darstellung eines Säulenstückes	41	XVIII
13.	Darstellung einer Vase in verschiedenen Lagen	42	XIX
14.	Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Cylinders mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung	45	XX
15.	Darstellung eines senkrechten Kreiskegels mit schräger Schnittfläche und dessen Netzbestimmung	47	XXI
16.	Darstellung des Kegels mit den Kegelschnittlinien Hyperbel, Parabel u. s. w.	49	XXII
17.	Darstellung der Kugel und ihrer Schnitte	52	XXIII
18.	Darstellung und Abwicklung der Kugel	54	XXIV

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

		Seite	Tafel
19.	Darstellung weiterer Rotationsflächen und ihrer Schnitte	55	XXV
20.	Schnitte der Körper unter sich (Durchdringungen)	57	—
21.	Durchdringung von Prisma und Ebene, von zwei Prismen und zwei Cylindern	58	XXVI
22.	Durchdringung von Cylinder und Kegel und zweier Kegel	59	XXVII
23.	Durchdringung von Prisma und Kugel, Pyramide und Kugel, Cylinder und Kugel	61	XXVIII
24.	Durchdringung von Cylinder und Ringfläche, Kegel und Kugel	61	XXIX
25.	Anwendung der Durchdringungen bei architektonischen Formen	63	XXX
26.	Darstellung gewundener Linien auf Rotationskörpern	63	XXXI
27.	Darstellung windischer Flächen	65	XXXII
28.	Darstellung der geraden und schiefen Schraubenfläche und eines gewundenen Körpers	67	XXXIII
29.	Darstellung gewundener Körper	68	XXXIV
30.	Darstellung einer körperlichen Volute	70	XXXV
31.	Darstellung verzierter Gefäss- und Säulenformen	71	XXXVI
32.	Darstellung verzierter Säulenschäfte und einer achteckigen Vase	72	XXXVII
33.	Darstellung weiterer architektonischer Details	73	XXXVIII
34.	Darstellung wulstförmiger Ausladungen u. s. w.	74	XXXIX
35.	Darstellung von Rundbögen und eines Nischengewölbes	75	XL
36.	Darstellung kreisrunder Bogengesimse	78	XLI
37.	Darstellung eines durchbrochenen Giebels	79	XLII
38.	Darstellung eines ausgezackten Rundbogens, und einer Nische mit muschelförmigem Gewölbeabschluss	79	XLIII
39.	Darstellung von Gewölbflächen u. s. w.	80	XLIV
40.	Die schiefwinklige Projection (Parallelperspective)	81	—
41.	Weitere Ausführung der schiefwinkligen Projectionsart	82	XLV
42.	Uebungsbeispiele in dimetrisch und trimetrisch schiefer Projection	87	XLVI
43.	Uebungsbeispiele in trimetrischer schräger Ansicht	89	XLVII
44.	Weitere Beispiele in trimetrisch und dimetrisch schiefer Projection	90	XLVIII
45.	Uebungsbeispiele in isometrischer Projection	92	XLIX
46.	Die centrale Projection (Polarperspective)	94	L

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Einleitung.

Unter Geometrie versteht man diejenige Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften, der Ausmessung und Darstellung räumlicher Grössen befasst.

Solche Raumgrössen sind: Körper, Flächen und Linien. Je nachdem man die eine oder andere dieser Raumgrössen in Betracht zieht, zerfällt die Geometrie in folgende Haupttheile:

I. Ebene Geometrie oder Planimetrie.

II. Körperliche, bezw. darstellende oder descriptive Geometrie (Projectionslehre).*)

a) Zur Planimetrie gehören nur ebene Gebilde, d. h. solche, welche in einer Ebene liegend gedacht werden können.

b) Unter Projectionslehre versteht man die Darstellung oder das Zeichnen räumlicher (körperlicher) Gegenstände nach ihren drei Dimensionen**) auf einer in der Regel als eben angenommenen Bildfläche.

Die für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben der ebenen Geometrie bilden den Anfang unserer Studien.

Diese setzen folgende Grundbegriffe voraus:

1. Ein allseitig begrenzter Raum heisst Körper.
2. Die Grenzen des Körpers heissen Flächen.
3. Die Grenzen der Flächen heissen Kanten oder Linien.
4. Die Grenzen der Linien heissen Punkte.

Körper, Flächen und Linien unterscheiden sich nach ihrer Form, Grösse und Lage. Punkte nur nach ihrer Lage.

Der geometrische Punkt hat keinerlei Ausdehnung und bezeichnet lediglich einen bestimmten Ort im Raume. Eine Linie kann man sich dadurch entstanden denken, dass ein Punkt, sei es im Raume oder in einer ebenen Fläche, sich fortbewegt; die Bahn, welche er zurückgelegt, bildet die Linie.

Eine Fläche kann man sich durch Fortbewegung einer Linie entstanden denken, soferne die Bewegung nicht mit deren Verlängerung zusammenfällt.

Einen Körper kann man sich durch Fortbewegung einer Fläche entstanden denken, soferne die Bewegung nicht mit ihrer eigenen Ausdehnung zusammenfällt.

Allgemeine Begriffe über Linie, Winkel, Fläche, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz.

Die Linie.

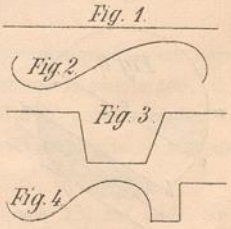
§ 1. Linien unterscheidet und bezeichnet man:

a) nach ihrer Form,

b) nach ihrer Lage,

c) nach ihrer gegenseitigen Verbindung.

a) Eine gerade Linie (oder kurzweg eine Gerade) entsteht, wenn ein Punkt während seiner Fortbewegung die ursprünglich genommene Richtung unverändert beibehält (Fig. 1). Sie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten. Eine krumme Linie oder Curve entsteht, wenn der Punkt seine Richtung fortwährend ändert (Fig. 2). Alle weiteren Linienformen lassen sich aus diesen beiden Elementen zusammensetzen; so heisst z. B. Fig. 3 eine gebrochene, Fig. 4 eine gemischte Linie. Eine Gerade von bestimmter Länge heisst eine Strecke; ihre Grenzen sind die Endpunkte; zu ihrer Benennung dienen in der Regel zwei Buchstaben.



b) Eine Gerade heisst im Allgemeinen senkrecht oder vertical, wenn ihre Richtung mit der eines Lothes oder Senkbleies, wagrecht oder horizontal, wenn ihre Lage mit der einer Wasserfläche zusammenfällt. Jede andere Lage heisst schief.

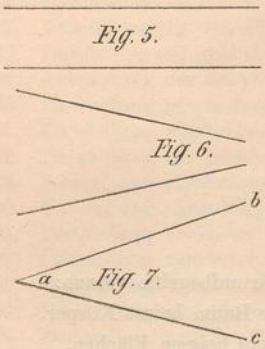
c) Zwei Gerade, welche in allen ihren Punkten gleich weit auseinander sind, also einerlei Richtung verfolgen, heissen gleichlaufende oder Parallel-

*) Die ebenfalls zur körperlichen Geometrie gehörige Stereometrie oder Raumberechnung ist hier nicht in Betracht gezogen.

**) Dimension heisst Ausdehnung. Ein Körper hat drei Ausdehnungen, Länge, Breite und Tiefe (oder Höhe). Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen, Länge und Breite. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

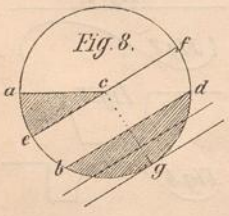
linien, Fig. 5 (Parallele). Ungleichlaufende oder nicht parallele Linien sind nach der einen Seite zusammenlaufend (convergent*), nach der andern Seite auseinander laufend (divergent); wenn hinlänglich verlängert, müssen sie sich, soferne sie in einer Ebene liegen, auf der Seite, nach welcher sie convergiren, schneiden (Fig. 6).



Zwei Gerade, welche in einem Punkte zusammentreffen, bilden einen Winkel (Fig. 7); die Seiten desselben liegen stets in einer Ebene. Unter einem Winkel versteht man also den Richtungsunterschied, den zwei Gerade in einer Ebene haben; die Seiten, welche den Winkelraum einschliessen, heissen Schenkel, der Punkt, in welchem zwei Gerade sich schneiden oder zusammentreffen, Scheitelpunkt. Einen Winkel bezeichnet man entweder durch einen Buchstaben in der Nähe des Scheitelpunktes oder, wenn Verwechselungen möglich sind, mit drei Buchstaben, in welchem Falle der in der Mitte stehende Buchstabe den Winkel bedeutet, z. B. Winkel $b\,a\,c$ gleichbedeutend mit Winkel bei a (Fig. 7).

Krumme Linien oder Curven gibt es unendlich viele; die wichtigsten darunter sind: der Kreis, die Ellipse, Parabel, Hyperbel, Schraubenlinie etc.**); von diesen wollen wir vorerst nur den Kreis in Betracht ziehen.

§ 2. Die Kreislinie entsteht, indem ein Punkt auf einer Ebene um einen anderen, in der gleichen Ebene liegenden Mittelpunkt (Centrum) sich derart bewegt, dass seine Entfernung von letzterem stets gleich bleibt. Die Kreislinie (Kreisumfang oder Peripherie) ist daher eine ebene, in sich geschlossene, regelmässige Curve, welche in allen ihren Theilen gleiche Krümmung hat. Eine Gerade $a\,c$, welche vom Centrum nach der Peripherie gezogen wird (Fig. 8), heisst Halbmesser oder Radius, eine Gerade $b\,d$, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, ohne dass sie darüber hinaus verlängert wird, heisst Sehne oder Chorde. Ein jeder der auf beiden Seiten der Sehne liegenden Theile der Peripherie heisst ein Bogen oder Arcus. Eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne $e\,f$ heisst ein Durchmesser oder Diameter; wird eine Sehne über die Peripherie hinaus verlängert, so heisst sie eine Schneidelinie oder Secante; eine Secante, welche durch das Centrum geht, heisst eine Centrale. Wird eine Secante gegen die Peripherie hinausgerückt, d. h. vom Centrum entfernt, so werden sich die beiden Schnittpunkte immer mehr nähern, bis sie zuletzt in g zusammenfallen; in letzterem Falle heisst die Gerade eine Berührende oder Tangente. In Bezug auf den von der Peripherie eingeschlossenen Flächenraum heisst derjenige Theil einer Kreisfläche, welcher durch einen Bogen $a\,e$ und durch zwei Halbmesser $a\,c$, $e\,c$ begrenzt wird, ein Kreisausschnitt oder Sector; derjenige, welcher durch einen Bogen $b\,g\,d$ und eine Sehne $b\,d$ begrenzt wird, ein Kreisabschnitt oder Segment.



*) Gerade Linien, welche nach einem sehr entfernt oder unendlich entfernt liegenden Punkte convergiren, können ebenfalls als Parallele betrachtet werden.

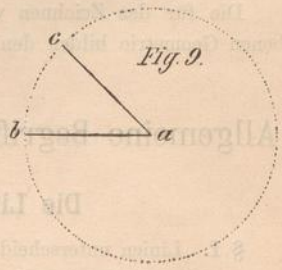
**) Die vier ersten sind ebene, die letzte eine Raumcurve.

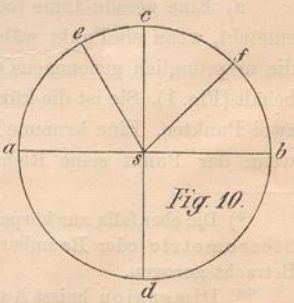
§ 3. Zum Messen von Liniengrössen oder Längen dienen verschiedene Längeneinheiten; die am meisten angewandte ist der Meter mit seinen Unterabtheilungen Decimeter (dm), Centimeter (cm), Millimeter (mm); 1 Meter = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Zum Messen von Winkelgrössen dienen Bogeneinheiten; eine solche Bogeneinheit heisst Grad; das Zeichen für Grad ist eine kleine Null rechts oberhalb der Zahl; kleinere Theile sind noch: Minuten und Sekunden ($1^0 = 60'$, $1' = 60''$).

Der Winkel.

§ 4. Um eine richtige Vorstellung über verschiedene Winkelgrössen zu erhalten, denke man sich die Entstehung derselben etwa auf folgende Weise (Fig. 9): Eine Strecke $a\,b$ sei unbeweglich, während eine zweite gleich lange und in der gleichen Ebene liegende Strecke $a\,c$, deren Lage ursprünglich mit $a\,b$ zusammenfällt, um a so gedreht wird, dass c einen Kreis beschreibt; während dieser Drehung wird der Winkel stets grösser werden, bis der Schenkel $a\,c$ mit $a\,b$ wiederum zusammenfällt, d. h. einen Kreis beschrieben hat; diesen Kreis denke man sich in 360 Theile getheilt; ein solcher Theil heisst Grad. Schneiden sich nun zwei Gerade ($a\,b$, $c\,d$, Fig. 10) derart, dass die vier Winkel um den Scheitelpunkt (s) einander gleich sind, so ist jeder $= \frac{360}{4}$ $= 90^0$; ein Winkel von 90^0 heisst ein rechter, und die Geraden $a\,b$, $c\,d$ stehen senkrecht zu einander.





Jeder Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heisst spitz (z. B. Winkel $a\,s\,e$); derjenige, welcher grösser ist als ein rechter und weniger als 180^0 enthält, heisst stumpf (z. B. $a\,s\,f$); liegen die beiden Schenkel in einer Geraden, so heisst der Winkel ein flacher oder gestreckter; ein flacher Winkel ist gleich zwei rechten gleich 180^0; ein Winkel, welcher grösser ist als ein flacher, heisst ein erhabener; spitze, rechte und stumpfe Winkel sind hohl; die Grösse eines Winkels ist unabhängig von der Länge seiner Schenkel und nur bedingt durch die Neigung, welche die beiden Schenkel zu einander haben.

§ 5. Schneiden sich zwei beliebig lange Gerade, so wird die Ebene in vier Winkelräume getheilt; hiervon heissen je zwei gegenüberliegende Winkel $a\,b$ oder $c\,d$ Scheitelwinkel (Figur 11). Scheitelwinkel sind einander gleich (Winkel $a = b$, Winkel $c = d$).

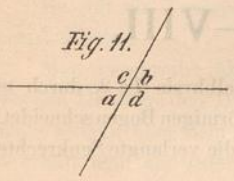


Fig. 11.

Je zwei Winkel, welche auf einer und derselben Seite einer Geraden liegen, heissen Nebenwinkel; z. B. a ist Nebenwinkel zu c oder auch Nebenwinkel zu d; je ein Paar Nebenwinkel sind zusammen gleich zwei Rechten, da ihre Bogensumme $= 180^0$ ist; alle um einen Scheitelpunkt liegenden Winkel betragen zusammen vier Rechte $= 360^0$.

§ 6. Werden zwei Parallele durch eine dritte Gerade geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel oder vier Winkelpaare (Fig. 12). Die vier Winkel, welche innerhalb der Parallelen liegen, heissen innere; die vier anderen dagegen äussere. Die vier Winkelpaare, welche an den Durchschnittspunkten einander gegenüber liegen, heissen Wechselwinkel, Gegenwinkel und gleichliegende oder correspondirende Winkel. Innere Wechselwinkel sind: f und c, e und d, äussere Wechselwinkel g und b, h und a; sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie. Die Winkel a und f, e und b, g und d, h und c heissen gemischte Wechselwinkel. Innere Gegenwinkel sind c und e, f und d; äussere Gegenwinkel sind: a und g, h und b; sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen je paarweise auf einer Seite der schneidenden Geraden. Gleichliegende oder correspondirende Winkel sind: a und e, c und g, b und f, d und h. Sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen je paarweise auf einer Seite der schneidenden Geraden. Je zwei Wechselwinkel sind einander gleich. Gleichliegende Winkel sind einander gleich. Je zwei innere Gegenwinkel und je zwei äussere Gegenwinkel betragen zusammen zwei Rechte. Zum Messen und Auftragen von Winkelgrössen dient der sogenannte Transporteur oder Winkelmesser, ein aus Metall oder Horn gefertigtes halbkreisförmiges Instrument, auf welchem, wie in Fig. IX Tafel I ersichtlich, die einzelnen Grade, und zwar 180^0, aufgetragen sind.

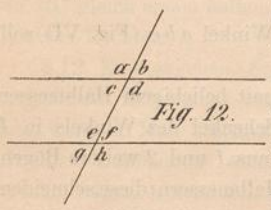


Fig. 12.

Die Fläche.

§ 7. Die Fläche ist ein Raum, welcher sich nach Länge und Breite ausdehnt. Eine Fläche entsteht, wenn sich eine Linie in anderer Richtung als in ihrer Verlängerung fortbewegt. Im Allgemeinen unterscheidet man ebene und krumme Flächen. Eine Fläche ist eben oder einfach eine Ebene, wenn man in ihr nach jeder beliebigen Richtung eine Gerade ziehen kann; krumm, wenn sich entweder gar keine oder nur nach bestimmten Richtungen Gerade auf ihr ziehen lassen (z. B. die Kugelfläche, Cylinder- und Kegelfläche). Jede krumme Fläche, in ihrer Vertiefung betrachtet, heisst hohl oder concav; im entgegengesetzten Falle erhaben oder convex. Die Linien, welche die Fläche begrenzen, heissen die Seiten derselben.

Zwei sich schneidende oder aneinander stossende Flächen bilden eine Kantenlinie. (Ebene Flächen schneiden sich stets nach einer geraden Kante.) Zwei Kantenlinien, welche in einem Punkte zusammentreffen, bilden einen Kantenwinkel oder ebenen Winkel. Zwei Flächen, welche in einer Kantenlinie zusammentreffen, bilden einen Flächenwinkel. Eine allseitig begrenzte ebene Fläche heisst eine Figur. Es gibt geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren (z. B. Dreieck, Viereck, Kreis, Ellipse, Kreisabschnitt, Kreisausschnitt). Man unterscheidet regelmässige (reguläre) und unregelmässige (irreguläre) Figuren.

Eine Figur heisst regelmässig, wenn alle Seiten und Winkel gleich gross oder paarweise gleich gross sind, oder wenn sie durch eine regelmässige Curve begrenzt wird; ist dieses nicht der Fall, so heisst sie unregelmässig.

Alle Seiten einer Figur zusammengenommen, heisst ihr Umfang; alle Winkel zusammengenommen, ihre Winkelsumme. Eine jede durch gerade Linien begrenzte Figur hat ebenso viele Winkel wie Seiten, und umgekehrt.

§ 8. Die Raumgrösse einer Fläche oder eines Körpers, soferne man sie mit einer andern, schon bekannten Grösse oder Masseinheit (z. B. Quadratcm, Kubikcm) ausdrückt, heisst ihr Inhalt.

Zwei ebene oder räumliche Gebilde, welche zwar in der Form verschieden, aber von gleichem Rauminhalt sind, heissen gleich (das Zeichen für gleich ist $=$).

Zwei Gebilde, welche zwar hinsichtlich der Form

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

übereinstimmen, in der Grösse aber verschieden sind, heissen ähnlich; ähnlich sind z. B. alle Quadrate, Kreise, Würfel, Kugeln (das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∼).

Gebilde, welche sowohl hinsichtlich der Form, als auch der Grösse nach vollkommen übereinstimmen, heissen congruent (das Zeichen der Congruenz ist ≌, aus den Zeichen = und ∽ zusammengesetzt); congruente Gebilde sind z. B. gleich lange Gerade, gleich grosse Quadrate, Kreise von gleichem Halbmesser, gleich grosse Kugeln etc.; congruente Gebilde decken sich gegenseitig.

I. Theil.

Constructionen der Ebene. Tafel I—VIII.

Aufgaben über das Zeichnen von Senkrechten zu einander, Antragen und Theilen der Winkel und Linien.

Tafel I. Figur I—XVI.

§ 9. Gegeben ist eine Gerade $a\,b$ (Fig. I); es soll in c eine Senkrechte errichtet werden.

Man schneide aus c mit beliebiger Zirkelöffnung (Halbmesser) zwei gleiche Grössen $c\,1$, $c\,2$ ab, zeichne mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser aus 1 und 2 Bögen oberhalb der Geraden, verbinde deren Schnittpunkt d mit c, so ist diese die verlangte Senkrechte zu $a\,b$.

Gegeben ist eine Gerade $a\,b$ (Fig. II und III); es soll von einem ausserhalb gelegenen Punkte c die Senkrechte zu $a\,b$ gefällt werden.

Man beschreibe von einem beliebigen Punkte *1* auf der gegebenen Geraden mit dem Halbmesser $1\,c$ den Bogen $c\,b\,d$, ebenso von einem zweiten beliebigen Punkte *2* mit dem Halbmesser $2\,c$ den Bogen $c\,a\,d$ und verbinde c, d durch eine Gerade; oder: man beschreibe aus dem gegebenen Punkte c (Fig. III) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die gegebene Gerade $a\,b$ in zwei Punkten *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* mit gleichem Halbmesser Bögen, welche sich in d schneiden, und verbinde c mit d, so ist in beiden Fällen $c\,d$ die verlangte Senkrechte.

Gegeben ist eine Gerade $a\,b$ (Fig. IV); es soll an dem Endpunkte a eine Senkrechte dazu errichtet werden.

Man wähle einen beliebigen Punkt m, welcher voraussichtlich innerhalb des Winkels liegt, beschreibe mit dem Halbmesser $m\,a$ den Halbkreis durch a, welcher $a\,b$ in *1* schneidet, ziehe die Gerade $1\,m$, welche den Halbkreis in *2* schneidet, ziehe von a durch *2*, so bildet $a\,c$ den rechten Winkel zu $a\,b$;

oder: man beschreibe aus dem Endpunkte a*) der gegebenen Geraden $a\,b$ mit beliebigem Halbmesser $a\,1$ den Bogen $1\,m$, aus *1* mit dem gleichen Halbmesser den Bogen $a\,m$, und aus m den Halbkreis $1\,a\,2$, durch m eine Gerade, bis sie den halbkreisförmigen Bogen schneidet, ziehe von a durch *2*, so ist $a\,c$ die verlangte Senkrechte zu $a\,b$.

*) Siehe nebenstehende Figur rechts, welche aus Versehen nicht bezeichnet ist.

§ 10. Zu einer gegebenen Geraden $a\,b$ (Fig. V) soll von einem Punkte c aus die Parallele construirt werden.

Man beschreibe von c mit möglichst grossem Halbmesser $c\,n$ einen Bogen $n\,d$, ebenso von n mit gleichem Halbmesser $n\,c$ den Bogen $c\,e$, nehme die Grösse $e\,c$ als Sehne in den Zirkel und trage sie von n aus als Sehne auf den Bogen nach d. Die Gerade $c\,d$ ist die verlangte Parallele. Die zweite Parallele aus f wurde auf gleiche Weise construirt.

§ 11. Ein gegebener Winkel $a\,b\,c$ (Fig. VI) soll halbirt werden.

Man beschreibe aus b mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des Winkels in *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* weitere Bögen mit beliebigen, aber gleichen Halbmessern; diese schneiden sich in m, b mit m verbunden ist die Halbirungslinie, und die zu beiden Seiten derselben liegenden Winkel sind congruent.

Ein Winkel soll in eine ungleiche Zahl von Theilen (z. B. 3) getheilt werden.

Man beschreibe ebenso, wie bei Fig. VI, einen Bogen, nehme dem Augenmasse nach den dritten Theil des Bogens in den Zirkel und probire, ob derselbe genau als Sehne dreimal im Bogen enthalten ist; wäre die schätzungsweise angenommene Zirkelöffnung zu gross oder zu klein gewesen, so hätte man das plus oder minus sich wieder in drei gleiche Theile getheilt zu denken und wäre die Zirkelöffnung um ein solches Drittheil zu vergrössern oder zu verkleinern, und damit das Antragen auf's neue zu probiren, bis die Aufgabe gelöst ist; die auf diese Weise erhaltenen Punkte *2* und *1* verbinde man mit e, und es sind die drei neben einander liegenden Winkel congruent.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es soll der Winkel def (Fig. VII) von einem gegebenen grösseren Winkel ghi (Fig. VIII) abgezogen werden.

Man beschreibe aus den Scheitelpunkten der beiden Winkel Bögen von gleichen Halbmessern, trage die Sehnenlänge des Bogens aus Fig. VII von e nach o als Sehne in Fig. VIII auf und ziehe von h durch o; der dadurch entstandene Winkel ghk ist nun gleich dem Unterschiede (Differenz) der beiden Winkel def (Fig. VII) und ghi (Fig. VIII); auf ähnliche Art könnten auch mehrere Winkel addirt, oder ein Winkel um ein mehrfaches vergrössert werden; jedoch kann die Winkelsumme um einen Punkt nie mehr als vier Rechte, d. h. 360° betragen.

Es soll ein Transporteur oder Winkelmesser construirt werden.

Man beschreibe über einer als Durchmesser gegebenen Geraden den Halbkreis (hier der äussere), errichte sodann über dem Mittelpunkte m die Senkrechte, so erhält man auf jeder Seite derselben einen rechten Winkel von 90°; beschreibt man ferner mit dem Halbmesser des Kreises aus den Endpunkten des Durchmessers, sowie aus dem Schnittpunkte der Senkrechten Bögen, so ist damit der Halbkreis in sechs gleiche Theile getheilt, und die Theilpunkte mit m verbunden ergeben sechs Winkel von je 30°; durch weiteres Halbiren erhält man Winkel von je 15° u. s. w. In Fig. IX sind zum Theil auch noch die einzelnen Grade eingetragen worden.

Ein Winkel von 30° ist gleich $^1/_3$, ein Winkel von 45° gleich einem halben, ein Winkel von 60° gleich $^2/_3$ eines Rechten.

§ 12. Eine gegebene Strecke ab (Fig. X) soll durch fortgesetztes Halbiren in eine Anzahl gleiche Theile getheilt werden. Man beschreibe aus den Endpunkten ab mit einem Halbmesser, welcher grösser ist als die halbe Strecke, Bögen, welche sich über und unter der Geraden schneiden; verbindet man nun die beiden Schnittpunkte durch eine Gerade, so halbirt letztere die Strecke ab in m; wiederholt man das gleiche Verfahren bei den Strecken am und mb, so erhält man für die ganze Strecke ab vier Theile, durch weiteres Halbiren acht Theile u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke ab (Fig. XI) in eine ungleiche Anzahl von Theilen getheilt werden, z. B. drei. Man nehme schätzungsweise den dritten Theil der ganzen Strecke in den Zirkel und probire, ob derselbe genau darin enthalten ist. Angenommen, man hätte dieses Drittel zu klein geschätzt, so hätte man den bleibenden Rest ax sich in drei gleiche Theile zu denken und die Zirkelöffnung um ein solches Drittel zu vergrössern, und mit dieser die Theilung aufs neue zu probiren u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke ab (Fig. XII) nach irgend einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden. Angenommen, die Theile seien alternirend, d. h. abwechselnd kleiner und grösser, und es soll sich ein jeder kleinere Theil zum grösseren etwa wie zwei zu drei verhalten, so trage man auf einer unter beliebigem Winkel an einem Endpunkte a gezeichneten Geraden erst zwei beliebige, aber gleiche Theile, und von Punkt *2* an dieselben Theile dreimal auf, die Strecken $a\,2$, $2\,5$ werden so oft auf ac weiter angetragen, als man dieses Verhältniss auf der Strecke ab wiederholen will; verbindet man nun den Endpunkt (z. B. *18*) mit dem Endpunkt b und zieht aus den Punkten *2*, *5* u. s. w. die Parallelen zu $18b$, so ergibt sich auf ab die gewünschte Theilung.

Die Aufgabe hätte auch lauten können:

Es soll das Theilverhältniss einer gegebenen Strecke auf eine andere grössere oder kleinere Strecke übertragen werden. Die Lösung der Aufgabe bliebe dabei ganz dieselbe.

§ 13. Es soll ein Winkel halbirt werden, dessen Scheitelpunkt unzugänglich ist; oder mit anderen Worten: es soll in der Mitte zweier convergirender Geraden ab, cd (Fig. XIII) eine dritte mm'' construirt werden, welche nach dem gleichen Convergenzpunkte geht.

Man verbinde zwei auf ab und cd beliebig gewählte Punkte x, y durch eine Gerade, halbire die dadurch entstandenen vier Winkel ayx, byx, cxy und dxy, durch die Schnittpunkte s je zweier Halbirungslinien lege man die Gerade mm'', so geht letztere nach dem gleichen Convergenzpunkte; oder: man zeichne innerhalb ab, cd in beliebigen, aber gleichen Abständen Parallele; diese schneiden sich in einem Punkte s''; halbirt man den hierdurch entstandenen spitzen Winkel bei s, welcher gleich ist dem Winkel, unter welchem sich ab und cd, wenn hinlänglich verlängert, schneiden müssen, so ist, wie aus der Figur ersichtlich, das Resultat das gleiche.

Gegeben sind die beiden Geraden ab, cd (Fig. XIV), und es sollen von beliebigen Punkten a' und b' Gerade construirt werden, welche den gleichen Convergenzpunkt haben. Man ziehe eine beliebige Gerade, welche ab, cd in e und f schneidet, zu dieser parallel eine zweite Gerade bd, verbinde a' mit f und e, ebenso b' mit e und f, ziehe ferner aus b und d die Parallelen zu eb', ea', fa', fb', so ergeben sich die Schnittpunkte $a''b''$, und die Geraden $a'a''$, $b'b''$ gehen nach dem gleichen Punkte, wie ab und cd.

§ 14. Es soll der Schnittpunkt zweier Geraden (Fig. XV), welche sich unter sehr kleinem Winkel schneiden, genau bestimmt werden.

Schneiden sich zwei Gerade unter sehr spitzem Winkel, so ist es nicht möglich, den Schnittpunkt derselben mit Genauigkeit direkt zu bestimmen.

Man ziehe daher in diesem Falle auf beiden Seiten des Schnittpunktes und in möglichst grossen Abständen von demselben zwei Parallele in beliebiger Richtung; auf diesen trage man die zwischen den Geraden liegenden

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Abschnitte *1″0*, *1″0* beliebig, aber gleich oft in entgegengesetzter Richtung auf (z. B. viermal) und verbinde die äusseren Punkte (*4*, *4*) durch eine Gerade miteinander, wodurch sich *s* als der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden bestimmt.

In Fig XVI ist ein Decimeter $= {}^1/_{10}$ Meter in ${}^2/_3$ natürlicher Grösse aufgetragen*); um eine gemischte Zahl, z. B. Centimeter und Millimeter, leicht entnehmen zu können, trägt man zunächsä von dem Punkte *0* aus zehn Centimeter nach rechts, sowie einen Centimeter nach links auf; letzterer wird wieder in zehn Theile, welche Millimeter bedeuten, getheilt; will man nun z. B. mit dem Zirkel eine Grösse von 7 cm und 8 mm diesem Massstabe entnehmen, so setze man die eine Spitze in 7 ein und greife mit demselben, indem man den Zirkel von rechts nach links öffnet, 7 cm + 8 mm = 78 mm; in Fig. XVI sind auch die Centimeter nochmals halbirt worden, so dass ein kleinster, rechts von *0* liegender Theil $= {}^1/_2$ cm $= 5$ mm ist.

Das Dreieck.

§ 15. Das Dreieck ist eine durch drei Strecken begrenzte Figur; eine Strecke heisst eine Seite des Dreieckes; jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel; Dreiecke unterscheidet man:

a) nach ihren Seiten,

b) nach ihren Winkeln.

a) Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn es drei gleich lange Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat; die gleichlangen Seiten heissen Schenkel; die dritte Seite, welche kleiner oder grösser sein kann, heisst die Basis oder Grundlinie; die der Grundlinie gegenüber liegende Ecke heisst die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

Ein Dreieck heisst ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

b) Ein Dreieck heisst spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat. Es heisst rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel enthält; ein jeder der beiden andern Winkel ist dann spitz.

Ein Dreieck heisst stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, die Katheten (Senkrechten); diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst die Hypotenuse (Schräge). Unter einem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke versteht man ein solches, dessen Katheten gleich lang sind; ist von den Katheten eines Dreieckes die Rede, so kann es nur ein rechtwinkliges sein; ist von den Schenkeln eines Dreieckes die Rede, so ist es gleichschenklig.

*) Die Ausführung der Blätter seitens des Lernenden ist um die Hälfte grösser gedacht; der Massstab ist daher in seiner wahren Grösse zu zeichnen.

Die Transversalen.

§ 16. Unter der Transversalen eines Dreieckes versteht man eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreieckes oder deren Verlängerungen schneidet; es kann dieses in drei oder auch in zwei Punkten geschehen, in welch letzterem Falle zwei Punkte in einen, und zwar an der Spitze des Dreieckes zusammenfallen, oder die Transversale schneidet die dritte, verlängerte Seite erst in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist parallel zu einer Seite. Man unterscheidet vier specielle Arten von Transversalen; diese sind: a) Höhen, b) Medianen, c) Mittellothe, d) Flächenhalbirungslinien oder kurz Transversalen.

a) Unter der Höhe versteht man eine Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seite gefällt wird (siehe Fig. VI, Tafel II); da das Dreieck drei Seiten und drei Winkel hat, so hat es im Allgemeinen auch drei Höhen; die zur Höhe rechtwinklige Seite heisst deren Basis oder Grundlinie.

b) Unter der Mediane (mittlere Linie) versteht man eine Gerade, welche den Winkel eines Dreieckes halbirt, also eine Winkelhalbirungslinie; in jedem Dreiecke können drei Medianen verzeichnet werden; diese schneiden sich in einem Punkte innerhalb des Dreieckes, dessen kleinster Abstand von den drei Seiten gleich ist. (Siehe Fig. VII, Tafel II.)

c) Unter Mittelloth versteht man eine Gerade, welche senkrecht (lothrecht) auf der Mitte einer Dreiecksseite steht; der Punkt, in welchem sich die drei Mittellothe schneiden, hat gleichen Abstand von den Spitzen des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

d) Unter einer Transversalen im engeren Sinne versteht man eine Gerade, welche den Flächenraum eines Dreieckes theilt oder halbirt; zieht man von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seitenmitte eine Gerade, so ist diese eine Transversale; sie halbirt die Fläche ihrem Inhalte nach*); solche Transversalen treffen sich in der Mitte der Fläche; der Schnittpunkt dreier Transversalen ist der Schwerpunkt des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

Höhen und Mittellothe können sowohl innerhalb wie ausserhalb eines Dreieckes, sowie im Umfange desselben sich schneiden; so z. B. liegt der Schnittpunkt der Höhen im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb desselben, im rechtwinkligen fällt derselbe mit der Spitze des rechten Winkels, und zwei der Höhen fallen mit den Katheten zusammen, im stumpfwinkligen liegt er ausserhalb der Dreiecksfigur in der Verlängerung der Höhen.

*) Theilt man die Seite eines Dreieckes in drei, vier, fünf gleiche Theile und zieht von diesen Theilpunkten nach der gegenüberliegenden Spitze, so wird das Dreieck in drei, vier, fünf inhaltlich gleiche Theile zerlegt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zwei Höhen treffen hierbei senkrecht auf die Verlängerung jener Seiten, welche den stumpfen Winkel bilden. Der Schnittpunkt der Mittellothe liegt im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb der Figur; im rechtwinkligen auf der Mitte der Hypotenuse und im stumpfwinkligen ausserhalb der Figur. Im rechtwinkligen Dreiecke heisst insbesondere jene Gerade die Höhe, welche von der Spitze des rechten Winkels gegen die Hypotenuse gefällt wird; im gleichschenkligen jene, welche von der Spitze gegen die Basis gefällt wird; man spricht somit bei dem rechtwinkligen und bei dem gleichschenkligen Dreiecke nur von einer Höhe. Mediane und Transversalen schneiden sich stets innerhalb des Dreieckes.

Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Höhe sowohl den Winkel an der Spitze, als auch die Basis, und bildet zugleich Mediane, Transversale und Mittelloth. Im gleichseitigen Dreiecke fallen Höhen, Mediane, Mittelloth und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt (siehe Fig. X, Tafel II) hat also von den Ecken, sowie von den Seiten gleichen Abstand.

Dreiecksgesetze.

§ 17. In einem jeden Dreiecke ist die Summe der inneren Winkel = zwei Rechten = 180°. Der Beweis für diesen Satz ist leicht zu erbringen. Man denke sich durch eine beliebige Spitze b des Dreieckes abc (Fig. 13) eine Parallele zur gegenüber liegenden Seite ac gelegt; so sind: ad Wechselwinkel, daher Winkel d = Winkel a, ebenso Winkel e = Winkel c; die drei Winkel dbe sind aber, da ihre Summe einen Halbkreis bildet, = zwei Rechten = 180°, und daher auch $a = d$, $b = b$, $c = e$ oder $a + b + c$ = zwei Rechten.

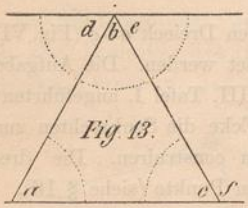


Fig. 13.

Der Aussenwinkel f eines Dreieckes, welcher durch die Verlängerung einer Dreiecksseite entsteht, ist so gross wie jene beiden inneren Dreieckswinkel, welche seinem Nebenwinkel c gegenüberliegen. Der Beweis ist auch hier leicht ersichtlich; denn es sind cf als Nebenwinkel = zwei Rechten, $a + b + c$ = zwei Rechten, daher $f = a + b$; daraus folgt auch, dass die Summe der Aussenwinkel eines Dreieckes (= 3 . 2 R. — 2 R. = 4 R.) gleich vier Rechten ist. Im gleichseitigen Dreiecke sind die Winkel einander gleich, daher jeder $(= \frac{180^0}{3} = 60^0)$ gleich $^2/_3$ eines Rechten.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe derjenigen Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, gleich einem Rechten; ist daher in einem rechtwinkligen Dreiecke ausser dem rechten Winkel noch ein anderer bekannt, so kennt man auch die Grösse des dritten; dasselbe gilt auch für jedes beliebige Dreieck, in welchem zwei Winkel ihrer Grösse nach bekannt sind; z. B. in einem Dreiecke enthalte ein Winkel 60°, der andere 45°, so ist, da die Winkelsumme eines Dreieckes 180° beträgt, der dritte Winkel gleich 75°.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich (siehe Fig. III, Tafel II); ist daher in einem solchen ein Winkel seiner Grösse nach bekannt, so sind es auch die beiden anderen.

Im gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, jeder gleich einem halben Rechten = 45°.

In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte; die Differenz oder der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte; der grösseren Seite liegt auch immer der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Congruenz der Dreiecke.

§ 18. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, decken sich gegenseitig und sind daher congruent, d. h. an Grösse und Form einander gleich. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite und die beiden daranliegenden Winkel gleich haben.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie alle drei Seiten gleich haben. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie einen Schenkel und einen anliegenden Winkel, oder die Basis und einen anliegenden Winkel gleich haben. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Katheten oder eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben. Zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Kathete oder eine Hypotenuse gleich haben.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 19. Zwei Dreiecke, welche an Form einander gleich, der Grösse nach aber verschieden sind, heissen ähnlich; zieht man z. B. in einem schon vorhandenen Dreiecke abc (Fig. 14) zu irgend einer Seite eine Parallele, so entsteht ein zweites Dreieck ade, welches dem ersten (grösseren) ähnlich ist.

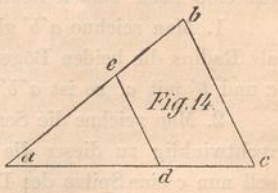


Fig. 14.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Winkel des einen Dreieckes einzeln den drei Winkeln des andern Dreieckes gleich sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern gleich proportionirt sind. In ähnlichen Dreiecken nennt man die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleichliegende Seiten.

In ähnlichen Dreiecken stehen die gleichliegenden Seiten mit einander in gleichem Verhältniss (Proportion).

Aufgaben über Dreiecke.

Tafel II, Fig. I—X.

§ 20. Ein Dreieck ist im Allgemeinen seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln eines solchen drei Stücke davon, z. B. drei Seiten, oder zwei Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel gegeben sind; eine Seite ist immer nothwendig. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch Schenkel und Basis, oder Basis und anliegende Winkel, ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei Katheten oder eine Kathete und Hypotenuse bestimmt. Das gleichseitige Dreieck ist durch eine Seite oder auch seine Höhe bestimmt.

§ 21. Gegeben sind drei Strecken $a\,b$, $b\,c$, $c\,a$ (Fig. I); es soll aus diesen ein Dreieck construirt werden.

Man zeichne $a'\,b'$ gleich $a\,b$, beschreibe mit einem Halbmesser gleich $b\,c$ aus b' einen Bogen über $a'\,b'$, nehme ferner die Strecke $a\,c$ in den Zirkel und beschreibe aus a' damit einen zweiten Bogen; beide schneiden sich im Punkte c'; $a'\,b'\,c'$ ist das verlangte Dreieck.

Hätte man mit der Strecke $b\,c$ als Radius den Bogen statt aus b' aus a' beschrieben, und demgemäss auch mit der Strecke $a\,c$ als Radius den Bogen aus b' beschrieben, so wäre das Dreieck $a'\,b'\,c''$ wohl seiner Lage nach verschieden, an Form und Grösse aber dem ersten vollständig gleich (congruent). Die durch den Schnittpunkt der beiden Dreiecksseiten $a'\,c'$, $a'\,c''$ gehende Senkrechte heisst die Symmetrieachse beider Dreiecksfiguren.

§ 22. Gegeben ist 1. eine Strecke $a\,b$ (Fig. II), als die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, oder 2. die Höhe H eines gleichseitigen Dreieckes; es soll dasselbe nach beiden Bedingungen gezeichnet werden.

1. Man zeichne $a'\,b'$ gleich $a\,b$, beschreibe mit $a'\,b'$ als Radius die beiden Bögen $a'\,c$, $b'\,c$, verbinde a' mit c und b' mit c, so ist $a'\,b'\,c$ das gleichseitige Dreieck.

2. Man zeichne die Senkrechte H' gleich der Höhe, rechtwinklig zu dieser die beiden Parallelen $a'\,b'$, $d\,c$; soll nun c eine Spitze des Dreieckes sein, so beschreibe man mit beliebigem Halbmesser $c\,d$ einen Viertelskreis und mit gleichem Halbmesser aus d den Bogen $c\,e$, ziehe von c durch e eine Gerade, bis sie die untere Parallele in a' schneidet; zieht man jetzt noch mit dem Halbmesser $a'\,c$ aus a' den Bogen $c\,b'$, so ist b' ein dritter Eckpunkt und $a'\,b'\,c$ das verlangte Dreieck. In Fig. II sind beide Constructionen angegeben.

§ 23. Gegeben sind in Fig. III B als Basis, S als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Man zeichne B' gleich B, beschreibe aus den Endpunkten der Basis mit dem Halbmesser des Schenkels S zwei Bögen über der Grundlinie, so ist deren Schnittpunkt die Spitze des verlangten gleichschenkligen Dreieckes, B' die Basis und $S'\,S''$ sind die beiden Schenkel.

§ 24. Gegeben sind (Fig. IV): 1. die Strecke K als die Kathete, die Strecke H als die Hypotenuse, oder 2. K, K' (Fig. V) als die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes.

1. Man zeichne K' gleich K, errichte in einem der Endpunkte die Senkrechte und beschreibe aus dem andern Endpunkte mit einem Halbmesser, welcher gleich der Hypotenusenlänge ist, einen Bogen, welcher die Senkrechte schneidet; verbindet man letzteren Schnittpunkt mit dem Endpunkte der Kathete (hier rechts), so ergibt sich das rechtwinklige Dreieck; oder man zeichne H' gleich H, beschreibe über H' als Durchmesser einen Halbkreis und mit einem Halbmesser gleich K aus dem einen oder andern Endpunkte der Hypotenuse (hier von dem Endpunkte rechts) einen Bogen, so ergibt sich das gleiche Resultat.*)

Beide Constructionsarten sind in Fig. IV angedeutet.

2. Man zeichne K'' gleich K (Fig. V), errichte in einem Endpunkte von K'' die Senkrechte und mache sie gleich lang K' etc.

§ 25. In einem gegebenen Dreieck $a\,b\,c$ (Fig. VI) sollen die Höhen eingezeichnet werden. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. II und III, Tafel I, angeführten; es sind nämlich von jeder Ecke die Senkrechten zur gegenüber liegenden Seite zu construiren. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte (siehe § 16).

§ 26. In einem gegebenen Dreieck $a\,b\,c$ (Fig. VII) sind die Medianen oder Winkelhalbirungslinien einzuzeichnen; die Aufgabe ist gleich der in Fig. VI, Tafel I, ausgeführten. Die Medianen schneiden sich in m; dieser Schnittpunkt hat gleichen Abstand von den drei Seiten des Dreieckes; werden zwei Seiten eines Dreieckes über eine Ecke hinaus verlängert und einer der hierdurch entstandenen Nebenwinkel, z. B. $b\,c\,d$, ebenfalls halbirt, so steht letztere Mediane senkrecht zu $m\,c$. Dieses gilt selbstverständlich auch für die übrigen Ecken.

§ 27. In einem gegebenen stumpfwinkligen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. VIII) sollen 1. die Mittellothe und 2. die Flächenhalbirungslinien oder Transversalen gezeichnet werden.

*) Die letztere Construction beruht auf dem geometrischen Satz, dass alle Winkel, welche über dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Scheitel in der Peripherie liegen, Rechte sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

1. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. X, Tafel I, angeführten; es ist nämlich jede der Dreiecksseiten durch Construction zu halbiren und jede der Halbirungslinien bis zu ihrem Schnittpunkte S, welcher hier ausser dem Dreiecke liegt, zu verlängern. S hat gleichen Abstand von den Ecken a, b, c; verbindet man die Ecken mit je einem Mittelpunkte m, m', m'' der gegenüberliegenden Dreiecksseite, so erhält man die Transversalen; m''' ist der Schwerpunkt des Dreieckes etc. (siehe § 16).

In dem gegebenen rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. IX) fällt der Schnittpunkt der Mittellothe auf die Mitte m' der Hypotenuse; ein Mittelloth $b\,m'$ fällt mit der Höhe dieses Dreieckes zusammen.

In dem gegebenen gleichseitigen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. X) fallen Höhen, Medianen, Mittellothe und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt derselben liegt in der Mitte des Dreieckes, und sein Abstand von den Ecken wie von den Seiten ist gleich.

Das Viereck.

Parallelogramm, Trapez, Trapezoid.

§ 28. Das Viereck ist eine durch vier Strecken begrenzte Figur. Die Strecken heissen Seiten des Viereckes; das Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Eine Gerade, welche zwei Ecken mit einander verbindet und nicht Seite ist, heisst eine Diagonallinie oder kurz Diagonale. Jede Diagonale theilt das Viereck in zwei Dreiecke; die innere Winkelsumme eines jeden Viereckes ist gleich vier Rechten gleich 360^0; da nämlich jedes Dreieck zwei rechte Winkel enthält, das Viereck aber in zwei Dreiecke zerlegt werden kann, so enthält dasselbe $2 \cdot 180^0 = 360^0$. Die Aussenwinkel e, f, g, h (Fig. 15) eines Viereckes betragen zusammen ($4 \cdot 2 = 8$ Rechte — Winkel $a + b + c + d$) vier Rechte. (Siehe Dreiecke.)

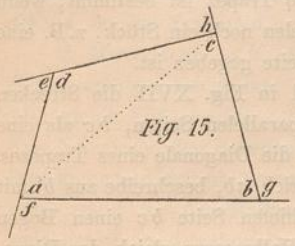


Fig. 15.

Vierecke werden eingetheilt in:

a) Parallelogramme,

b) Trapeze,

c) Trapezoide.

a) Ein Viereck heisst ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und von gleicher Länge sind. Im Parallelogramm sind je zwei schräg gegenüberliegende Winkel gleich. Die Diagonalen halbiren sich gegenseitig. Unter der Höhe eines Parallelogrammes versteht man den Abstand zweier paralleler Seiten, und kann jede derselben als die Basis betrachtet werden. Bei dem Parallelogramm unterscheidet man noch vier besondere Arten: nämlich Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid.

Ein Parallelogramm heisst ein Quadrat oder Gevierte, wenn es vier gleiche Seiten und einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. Die beiden Diagonalen haben gleiche Länge, halbiren die vier Winkel und stehen senkrecht zu einander. (Siehe Fig. XIII, Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Oblong oder Rechteck, wenn es einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. (Siehe Fig. XIV Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Rhombus oder Raute, wenn es, wie das Quadrat, vier gleiche Seiten, aber nur je ein paar gleiche Winkel hat; die Diagonalen halbiren ebenso, wie bei dem Quadrat, die Winkel und stehen senkrecht zu einander, sind jedoch ungleich lang. (Siehe Fig. XVI, Tafel II.) Ein Parallelogramm, welches nur je zwei Seiten gleich hat und keinen rechten Winkel enthält, heisst auch Rhomboid, das eigentliche Parallelogramm. (Siehe Fig. XI, Tafel II.) Das Parallelogramm hat im Allgemeinen zwei verschiedene Höhen (H, H', Fig. 16). Im Quadrat fallen die Höhen mit den Seiten zusammen, und da diese alle gleich sind, so gibt es hierfür nur einerlei, d. h. eine Höhe.

Im Rechteck sind die Seiten den Höhen gleich, d. h. fallen mit diesen zusammen.

Im Rhombus oder der Raute sind die beiden Höhen H, H' einander gleich (Fig. 17).

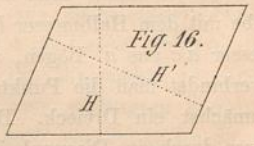


Fig. 16.

Fig. 17.

b) Ein Viereck heisst ein Trapez, wenn es nur zwei parallele Seiten hat; die beiden übrigen Seiten, welche schief heissen, können beliebig zu einander geneigt sein. Die Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich lang; eine Ausnahme hiervon bildet das gleichschenklige Trapez, dessen beide schiefe Seiten zu den Parallelen gleich oder symmetrisch geneigt sind (siehe Fig. XIX, Tafel II); ihr Convergenzpunkt befindet sich bei entsprechender Verlängerung über der Mitte der beiden Parallelen; fällt man aus dem Convergenzpunkt eine Senkrechte zu den Parallelen, so bildet diese die Symmetrieachse der Figur; die Diagonalen sind in diesem Falle gleich lang. Bei dem Trapez bezeichnet man allgemein nur den Abstand der beiden Parallelen als die Höhe, und jede der Parallelen kann als die Basis oder Grundlinie betrachtet werden.

c) Ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist, heisst Trapezoid.

Winkel und Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich gross (siehe Fig. XX und XXI, Tafel II); es

können aber auch je zwei Winkel oder je zwei Seiten einander gleich sein; in diesem Falle kann eine der Diagonalen auch zugleich die Symmetrieachse darstellen (z. B. $a\,b$, Fig. 18); ist dieses der Fall, oder wird überhaupt im Trapezoid durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt, so heisst die Figur eine symmetrische.

Fig. 18.

Aufgaben über Vierecke.

Construction des Parallelogrammes.

Tafel II. Fig. XI—XVI.

§ 29. Das schiefwinklige Parallelogramm (Rhomboid) ist seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn zwei Seiten und eine Diagonale oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder wenn Basis, Höhe und ein Winkel gegeben sind.

Das Rechteck, wenn zwei Seiten oder eine Seite und eine Diagonale gegeben sind.

Der Rhombus, wenn eine Seite und eine Diagonale, oder zwei Diagonalen, oder eine Seite und der anliegende Winkel gegeben sind.

Das Quadrat ist durch eine Seite oder auch eine Diagonale bestimmt.

§ 30. Fig. XI. Gegeben sind: die Strecken $a\,b$, $b\,c$ als zwei Seiten, $a\,c$ als die Diagonale eines schiefwinkligen Parallelogrammes. Man zeichne $a'\,b'$ gleich $a\,b$, beschreibe mit dem Halbmesser $b\,c$ aus b' und mit dem Halbmesser $a\,c$ aus a' Bögen, welche sich in c' schneiden; verbindet man die Punkte a', b', c', so erhält man zunächst ein Dreieck. Da nun ein jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, so braucht man nur über der Diagonalen, ein zweites mit $a'\,b'\,c'$ congruentes Dreieck zu construiren, indem man mit dem Halbmesser $a'\,b'$ aus c' und mit dem Halbmesser $b'\,c'$ aus a' weitere Bögen beschreibt, welche sich in d schneiden; $a'\,b'\,c'\,d$ ist der Rhombus.*)

§ 31. Gegeben ist: 1. die Strecke $a\,b$ (Fig. XII) als eine Seite, oder 2. die Strecke $a\,b$ (Fig. XIII) als die Diagonale eines Quadrates.

1. Man zeichne $a'\,b'$ gleich $a\,b$, errichte in b' eine Senkrechte zu $a'\,b'$, mache sie gleich lang $a'\,b'$ und schneide durch Bögen, deren Halbmesser gleich der Quadratseite ist, aus a' und c den Punkt d ab; oder 2. man errichte zu der in $a'\,b'$ übertragenen Diagonalen $a\,b$ (Fig. XIII) das Mittelloth $c\,m\,d$ und beschreibe mit dem Halbmesser $m\,a'$ aus m den Kreis, so schneidet dieser in c und d weitere Eckpunkte des Quadrates ab.

§ 32. Gegeben sind: 1. die Strecken $a\,b$, $b\,c$ (Fig. XIV) als die Seiten, oder: 2. (Fig. XV) die Strecke $a\,b$ als Seite, $a\,c$ als Diagonale eines Rechteckes.

1. Man mache $a'\,b'$ gleich $a\,b$, errichte in b' eine Senkrechte und mache sie gleich $b\,c$, beschreibe aus c' und a' mit dem Halbmesser $a\,b$ und $b\,c$ Bögen, welche sich in d schneiden;

2. oder man trage $a\,b$ nach $a'\,b'$ (Fig. XV), errichte in b' eine Senkrechte vorläufig von unbestimmter Länge und schneide aus a' mit dem Halbmesser $a\,c$ den Punkt c' auf derselben ab; zieht man ferner aus a' und c' mit dem Radius $a'\,b'$, $b'\,c'$ die weitern Bögen, so ergibt sich d als der vierte Punkt.

§ 33. Gegeben ist in Fig. XVI die Strecke $a\,b$ als Seite, $a\,c$ als Diagonale einer Raute.

Man zeichne zuerst die Diagonale $a'\,c'$ gleich $a\,c$, nehme dann $a\,b$ in den Zirkel und beschreibe aus a' und c' nach jeder Seite der Diagonalen je zwei Bögen, welche sich in b' und d schneiden; a', b', c' d sind die vier Eckpunkte der Raute.

Construction des Trapezes.

Tafel II. Figur XVII—XIX.

§ 34. Ein Trapez ist seiner Form und Grösse nach bestimmt, wenn von den darin enthaltenen vier Seiten, vier Winkeln, zwei Diagonalen und der einen Höhe ausser den beiden Parallelen (siehe § 28) noch zwei Stücke, z. B. die Diagonale und eine schiefe Seite, oder die Höhe und eine schiefe Seite, oder die schiefe Seite und ein anliegender Winkel*), im Ganzen also vier Stücke gegeben sind.

Das gleichschenklige Trapez ist bestimmt, wenn ausser den beiden Parallelen noch ein Stück, z. B. eine Höhe oder eine schiefe Seite gegeben ist.

§ 35. Gegeben sind in Fig. XVII die Strecken $a\,b$, $d\,c$ als die beiden parallelen Seiten, $b\,c$ als eine schiefe Seite und $a\,c$ als die Diagonale eines Trapezes.

Man zeichne $a'\,b'$ gleich $a\,b$, beschreibe aus b' mit dem Halbmesser der schiefen Seite $b\,c$ einen Bogen über $a'\,b'$ und mit dem Halbmesser gleich der Diagonalen $a\,c$ aus a' einen Bogen. Beide schneiden sich in c', man verbinde b' mit c'; aus c' ziehe man die Parallele zu $a'\,b'$ und mache diese gleich $d\,c$, so ist $a'\,b'\,c'\,d'$ das durch drei Seiten und eine Diagonale bestimmte Trapez.

§ 36. Gegeben sind: 1. die beiden parallelen Seiten und die Höhe (Fig. XVIII) oder: 2. die beiden parallelen Seiten und die schiefe Seite eines gleichschenkligen Trapezes (Fig. XIX).

1) Man zeichne $a'\,b'$ (Fig. XVIII) gleich $a\,b$, errichte auf der Mitte m' derselben eine Senkrechte, mache

*) Die weiteren Constructionen nach den in § 29 angegebenen Bedingungen sind hier nicht ausgeführt, da es nicht schwer sein dürfte, die Art der Constructionen durch eigenes Nachdenken zu finden.

*) Letzterer Fall ist hier nicht ausgeführt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

diese gleich der Höhe H und zeichne durch deren Endpunkt m eine Parallele zu $a'b'$, halbire die gegebene Strecke dc und trage eine solche Hälfte von m aus nach rechts und links auf, verbinde a' mit d' und b' mit c', so ist $a'b'c'd'$ das gleichschenklige Trapez.

2. Man zeichne $a'b'$ (Fig. XIX) gleich der gegebenen Strecke ab, errichte über der Mitte m eine Senkrechte, halbire die als Parallele gegebene Strecke dc und trage eine solche von m aus nach *1* und *2*, errichte in *1* und *2* Senkrechte, beschreibe ferner aus a' und b' mit dem Halbmesser der schiefen Seite bc Bögen, welche die beiden Senkrechten aus *1* und *2* in d' und c' schneiden, so ist $a'b'c'd'$ das gleichschenklige Trapez.

Construction des Trapezoides.

Tafel II. Figur XX und XXI.

§ 37. Ein Trapezoid ist seiner Form und Grösse nach bestimmt, wenn von den vier Seiten, zwei Diagonalen und vier Winkeln, welche ein Viereck enthält, vier Seiten und eine Diagonale, oder vier Seiten und der von zwei bestimmten Seiten eingeschlossene Winkel, oder drei Seiten und der von je zwei Seiten eingeschlossene Winkel*), im Ganzen also fünf Elemente gegeben sind.

§ 38. Gegeben sind: 1. die Strecken ab, bc, cd, da (Fig. XX) als die Seiten, die Strecke bd als die Diagonale, 2. die Strecken ab, bc, cd, da (Fig. XXI) als die Seiten, und ein durch die Seiten ab, bc eingeschlossener Winkel gleich 75°.

1) Man zeichne die Seite $a'b'$ gleich ab (Fig. XX), beschreibe mit dem Halbmesser ad einen Bogen aus a' und mit dem Halbmesser der Diagonalen bd einen Bogen aus b', beide schneiden sich in d'; beschreibt man ferner aus d' mit dem Halbmesser dc, sowie aus b' mit dem Halbmesser bc zwei Bögen, so schneiden sich diese in c'; $a'b'c'd'$ ist das Trapezoid.

2. Man zeichne $a'b'$ (Fig. XXI) gleich ab, construire an dem Endpunkte b' den gegebenen Winkel abc gleich 75° (= 60 + 30 — 15) (siehe Blatt I, Fig. X), mache den Schenkel $b'c'$ desselben gleich der Strecke bc und beschreibe aus c' mit dem Halbmesser cd, sowie aus a' mit dem Halbmesser ad die beiden Bögen, welche sich in d' schneiden, so ist $a'b'c'd'$ das verlangte Trapezoid.

Aufgaben über das Zeichnen ähnlicher Figuren.

(Vergrössern und Verkleinern einer gegebenen Figur.) Auftragen verschiedener Massstäbe etc.

Tafel III. Figur I—X[a].

§ 39. Da jede Figur in eine Anzahl Dreiecke zerlegt und in ähnlichen Figuren ähnliche Dreiecke gezeichnet werden können (siehe Fig. I, Tafel III), ebenso das Theilverhältniss einer Strecke auf eine andere grössere oder kleinere übertragen werden kann (siehe Fig. XII, Tafel I), so kann man auf Grund dieser Aehnlichkeitsgesetze mit Hilfe von sog. Proportional- oder Winkelmassstäben (ähnliche Dreiecke) eine gegebene Figur leicht in eine grössere oder kleinere umwandeln, d. h. eine gegebene Figur grösser oder kleiner zeichnen.

In Fig. I ist z. B. das Dreieck abc gegeben; es soll 1. in ähnliche, oder 2. in congruente Dreiecke zerlegt werden.

1. Man theile irgend eine Seite, etwa ab, zuerst in beliebig viele gleiche oder ungleiche Theile (hier wurden drei gleiche Theile angenommen) und ziehe aus den Theilpunkten *1* und *2* die Parallelen zu einer Seite ac, welche die Seite bc in den Punkten *1'*, *2'* schneiden, so sind die Dreiecke $b\,1\,1'$, $b\,2\,2'$ $b\,a\,c$ einander ähnlich, da sie je gleich liegende Winkel gleich haben und gleich liegende Seiten gleich proportionirt sind. Dasselbe gilt auch von den Dreiecken $c\,1'\,2''$, $c\,2'\,1''$ u. s. w.

2. Da die beiden Seiten ac, bc durch die aus den Theilpunkten *1* und *2* gezogenen Parallelen ebenfalls in drei gleiche Theile getheilt wurden, so zerfällt, wenn man zuletzt noch aus *1'*, *2'* oder *1''*, *2''* die Parallelen zu ab zieht, das gegebene Dreieck in neun congruente Dreiecke, welche sämmtlich dem gegebenen abc ähnlich sind.

Fig. II. Gegeben ist das Fünfeck $abcde$; es soll ein kleineres und dem gegebenen ähnliches gezeichnet werden, dessen eine gleichliegende Seite mit ae zusammenfällt und deren Grösse gleich $a'e$ bestimmt wird.

Man ziehe die Diagonalen eb, ec (welche man gleich über e hinaus verlängern kann), ziehe aus a' parallel zu ab, aus b' parallel zu bc u. s. w., so ist das Fünfeck $a'b'c'd'e$ dem gegebenen ähnlich. Das aussen liegende kleinere Fünfeck $a''b''c''d''e$ ist dem gegebenen gleichfalls ähnlich; hierbei wurde $a''b''$ als die mit ab gleichliegende oder ähnliche Seite bestimmt, $a''b''$ daher parallel mit ab, $b''c''$ parallel mit bc u. s. w. gezogen.

§ 40. In Fig. III ist ein Gesimsprofil gegeben; es soll dasselbe verkleinert werden, nachdem irgend eine Seite, z. B. $b'c'$ in Fig. III[b] kleiner angenommen ist.

Man zeichne eine Gerade de (Fig. III[a]), beschreibe mit dem Halbmesser bc aus d einen Bogen ef, trage auf diesen die in Fig. III[b] gegebene Strecke $b'c'$ von e aus als Sehne auf, verbinde d mit f, so ist der Kreissector def der für die Verkleinerung benützbare Proportionalmassstab. Um nun z. B. die Strecke $b'a'$ zu finden, entnehme man aus Fig. III die gleichliegende Strecke ba, beschreibe mit dieser als Halbmesser aus d einen Bogen und trage dessen Sehne nach $b'a'$ in Fig. III[b] über; ebenso verfährt man, um die übrigen Punkte zu finden.

§ 41. In Fig. IV ist die Ansicht eines Postamentes

*) Die Construction nach der letzten Bedingung ist hier nicht weiter ausgeführt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gegeben; dasselbe soll 1. kleiner, 2. grösser gezeichnet werden.

1. Man betrachte die Senkrechte $a'b'$ in Fig. IV^a als die verkleinerte Symmetrieachse, zeichne dieselbe nebenan etwa in $a''b''$ auf der gleichen Grundlinie, auf welcher $a'b'$ steht, ziehe die Horizontale $b''b'$, beschreibe mit der aus Fig. IV entnommenen Grösse ab aus a'' einen Bogen, welcher die Gerade $b''b'$ in d schneidet, und verbinde a'' mit d. Trägt man nunmehr die einzelnen Höhenabschnitte aus Fig. IV auf die Gerade $a''d$ in gleicher Ordnung von a'' aus über und zieht aus den entsprechenden Theilpunkten die Horizontalen, so wird damit die Symmetrieachse $a'b'$ in demselben Verhältniss getheilt, wie ab durch die Wagrechten getheilt ist. Um mit Hilfe desselben Dreieckes $a''b''d$ auch die entsprechenden Breiten antragen zu können, nehme man z. B. die Länge ac aus Fig. IV in den Zirkel, trage sie von d aus nach r, setze sodann die Zirkelspitze in r ein und schliesse den Zirkel, bis ein Bogen die Gerade $b''d$ berührt. Die so erhaltene Grösse trage man von a' aus nach beiden Seiten der Fig. IV^a an; in gleicher Weise findet man sämmtliche Breiten.*)

2. Man betrachte die Senkrechte $a'''b'''$ in Fig. IV^b als die vergrösserte Symmetrieachse, beschreibe mit derselben als Radius aus a''' einen Bogen $b'''b^4$, ziehe aus dem Punkte b der Fig. IV eine Horizontale, welche den Bogen in b^4 schneidet, und verbinde a''' mit b^4. Zieht man nun aus sämmtlichen Höhenabschnitten der Fig. IV die Horizontalen, bis sie die Schräge $a'''b^4$ schneiden, und denkt man sich letztere mit den darauf erhaltenen Abschnitten wieder in ihre ursprüngliche Lage nach $a'''b'''$ zurückgedreht, so ist damit $a'''b'''$ in demselben Verhältniss getheilt, wie ab in Fig. IV oder auch wie $a'b'$ in Fig. IV^a. Um die entsprechenden Breiten für die Fig. IV^b zu finden, stelle man z. B. ac in Fig. IV senkrecht in ac' auf, ziehe von c' die Horizontale $c'c'''$ und lege die Strecke $a'''c'''$ von a''' aus nach $a'''c^4$ nieder, oder man verlängere in Fig. IV^b die Symmetrieachse, etwa nach aufwärts, entnehme aus Fig. IV die entsprechenden Breiten und trage sie auf die verlängerte Symmetrieachse in Fig. IV^d von einem beliebig gewählten Punkte a aus nach aufwärts, ziehe aus a eine Parallele zu $a'''b^4$ und ziehe aus den vorhin aufgetragenen Abschnitten die Wagrechten, welche auf $a'b$ die vergrösserten Breiten ergeben. Letztere trage man in Fig. IV^b in entsprechender Ordnung an.

§ 42. In Fig. V ist ein unregelmässiges Viereck gegeben. Es soll ein ähnliches kleineres oder grösseres gezeichnet werden.

Ist $a'b'$ (Fig. V^a) als eine verkleinerte, mit ab in Fig. V gleichliegende Seite bestimmt, so construire man an den Endpunkten a' und b' die gleichen Winkel, wie bei a und b, und zeichne die Schenkel vorerst unbestimmt lang, ziehe in Fig. V eine Diagonale ac und unter gleichem Winkel (cab) aus a' die Diagonale $a'c'$; diese schneidet die Gerade aus b' in c'; das Dreieck $a'b'c'$ in Fig. V^a ist ähnlich dem Dreiecke abc in Fig. V; zieht man ferner $c'd'$ unter dem gleichen Winkel zu $c'b'$ wie cd zu cb in Fig. V, so schneidet $c'd'$ die vorher gezogene Gerade $a'd'$ in d'. Beide Vierecke sind ähnlich, da sie aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind (siehe § 19).

In den ähnlichen Rechtecken Fig. X und X^a ist ein gegebenes Blattornament mittelst der in jedem der ähnlichen Rechtecke eingezeichneten Quadrate oder kleinen Rechtecke verkleinert worden. Die Anzahl der Quadrate ist in jedem der Rechtecke gleich.

Das Antragen verjüngter Massstäbe.

§ 43. Da ein Gegenstand nur höchst selten in seiner wahren Grösse gezeichnet werden kann, so bedient man sich zu technischen Zeichnungen fast immer sog. verjüngter Massstäbe, d. h. man setzt an die Stelle der wirklichen Grösse irgend eine kleinere Masseinheit. Wird z. B. statt eines ganzen Meters nur 1 dm oder 1 cm genommen, so ist damit ausgedrückt, dass ein Gegenstand in $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ seiner wirklichen Grösse, d. i. im Massstabe von 1 : 10 oder 1 : 100 (sprich Eins zu zehn oder Eins zu hundert) gezeichnet ist; ein Meter bedeutet also in diesen beiden Fällen 10 oder 100 Meter.

Soll z. B. ein Gegenstand in einem Zwanzigstel seiner natürlichen Grösse oder im Massstab von 1 : 20 gezeichnet werden, so sind an Stelle eines Meters 5 cm (Fig. VI) zu setzen. Man findet die Zahl 5, indem man die hundert cm, welche ein Meter enthält, durch 20 dividirt (z. B. $\frac{100}{20} = 5$ cm). In Fig. VII ist ein Massstab gleich 1 : 25 gefertigt ($1 : 25 = \frac{100}{25} = 4$).

Fig. VIII zeigt einen sogenannten Transversalmassstab im Verhältniss von 1 : 10, d. h. 10 cm gleich 1 Meter.

Man zeichne zuerst auf der obersten Geraden einen einfachen Massstab gleich 1 : 10*), ziehe im Endpunkte links eine Senkrechte nach abwärts und trage darauf zehn beliebige, aber gleiche Theile, ziehe aus diesen Theilpunkten Parallele mit der ersten eingetheilten Geraden, endlich ziehe man aus den Punkten *0*, *1*, *2* ... ebenfalls die Senkrechten und theile die unterste Strecke von *0* nach links ebenso wie oben. Zieht man nun von *1* nach dem Punkte *0* die Transversale und mit dieser parallel aus *2*, *3*, *4* ... die Parallelen nach den unteren Theilpunkten, so ist dies ein Massstab, auf welchem

*) Die gleiche Aufgabe hätte auch nach der in Fig. III und III^b angegebenen Methode gelöst werden können. Die letztere ist jedoch die kürzere und einfachere.

*) Die ganzen Meter sind hier nochmals halbirt worden.

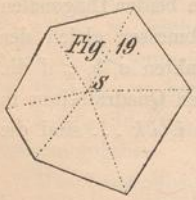
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

man Meter, Decimeter und Centimeter auf einmal abmessen kann. Die einzelnen zwischen der Senkrechten *0 0* und der Transversalen *1 0* liegenden Abschnitte enthalten von unten nach oben je 1, 2, 3, 4 ... Centimeter; die zwischen zwei Transversalen liegenden gleichen Strecken sind Decimeter.

Soll daher z. B. eine Länge von 2,270 m diesem Massstabe entnommen werden, so nehme man auf derjenigen Horizontalen, welche durch den Punkt *7* geht, die Strecke *b'* bis *a'* (*b'* bis *7* = 2 m, *7* bis *a'* = 7 cm + 2 dm) in den Zirkel. Zur besseren Veranschaulichung ist diese Länge auf eine Gerade in Fig. IX übertragen worden.

Das Vieleck (Polygon).

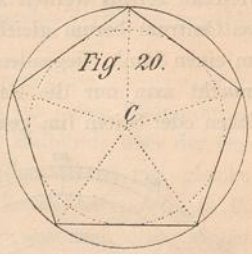
§ 44. Unter einem Vielecke (Polygon) versteht man eine durch mehrere Strecken begrenzte Flächenfigur; jede Strecke heisst eine Seite des Vieleckes; es heisst je nach der Zahl der Seiten oder Ecken ein Fünf-, Sechs-, Siebeneck u. s. w. Die Anzahl der Winkel und Seiten ist gleich. Eine jede Gerade, welche zwei Ecken verbindet und nicht Seite ist, heisst Diagonale. In jedem Vieleck ist die Summe der innern Winkel = n . 2 — 4 Rechten; n bedeute hier irgend eine bestimmte Zahl von Seiten oder Ecken, z. B. sechs, so ist 6 . 2 — 4 = 8 Rechten. Ein Sechseck enthält somit als Winkelsumme acht Rechte gleich 720°.



Um sich davon zu überzeugen, wähle man innerhalb des Sechseckes einen beliebigen Punkt *S* (Fig. 19), ziehe von den Ecken Gerade nach *S*, wodurch das Polygon in sechs Dreiecke zerlegt wird. Nun ist nach § 17 die Winkelsumme eines Dreieckes gleich zwei Rechten; die Winkelsumme der sechs Dreiecke somit gleich 6 . 2 Rechten; davon sind aber die um *S* liegenden Winkel, welche zusammen vier Rechte ausmachen und nicht zu den Vieleckswinkeln gehören, abzuziehen; somit verbleiben noch acht Rechte. Demnach enthält ein Siebeneck zehn Rechte, ein Achteck zwölf Rechte u. s. w.*)

Vielecke können eingetheilt werden in gleichseitige, gleichwinklige, regelmässige (reguläre) und unregelmässige (irreguläre). Ein Vieleck ist nur dann regulär, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; alle andern sind irregulär. In Verbindung mit dem Kreis heisst ein Polygon, dessen Ecken in der Peripherie eines Kreises liegen und dessen Seiten somit Sehnen desselben bilden, ein Sehnenvieleck. Ein Vieleck, dessen Seiten als Tangenten erscheinen, heisst ein Tangentenvieleck; im erstern Falle heisst der Kreis umschrieben, im zweiten einbeschrieben.

Jedes reguläre Vieleck ist zugleich Sehnenvieleck und Tangentenvieleck, da ein Kreis sowohl umschrieben als einbeschrieben werden kann (Fig. 20). Das Centrum des Kreises ist zugleich das Centrum des Polygons.*)

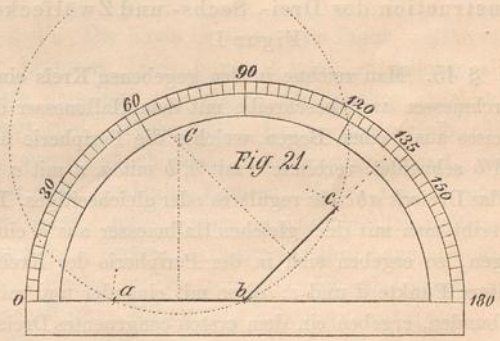


Gerade, welche von dem Mittelpunkte eines regulären Polygons nach den Ecken gezogen werden, haben gleiche Länge und zerlegen dasselbe in congruente, gleichschenklige Dreiecke.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich für die Construction eines regulären Vieleckes mittels des sogenannten Transporteurs ein allgemein giltiges Verfahren; z. B. es soll 1. ein reguläres Polygon, etwa ein Achteck construirt werden, wenn die Länge einer Seite *a b* gegeben ist, oder es soll 2. ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

1. Man berechne nach § 44 die Winkelsumme des Polygons, welche in diesem Falle = 12 Rechten = 1080° ist, theile dieselbe durch die Zahl der Seiten oder Ecken, in diesem Falle also durch acht, so ergibt sich die Grösse des Winkels, welchen zwei Seiten einschliessen (hier gleich 135°).

Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 21 unschwer zu ersehen; sind ein-



mal zwei Seiten eines regulären Polygons in ihrer Neigung zu einander bekannt, so lässt sich der Mittelpunkt eines durch die Ecken gehenden umschriebenen (oder auch eines einbeschriebenen) Kreises dadurch finden, dass man auf der Mitte einer jeden Seite Senkrechte errichtet, welche sich im Mittelpunkte *C* des zu

*) Ebenso kann auch die Summe der Aussenwinkel eines Polygons, welche stets gleich vier Rechten ist, berechnet werden (z. B. 6 . 2 Rechte = 12 Rechte — 8 = 4 Rechte, siehe § 17).

*) Je grösser in einem regulären Polygone die Anzahl der Seiten ist, desto mehr nähert es sich der Kreisform; ein reguläres Polygon mit unendlich vielen Seiten kann als ein Kreis betrachtet werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

umschreibenden Kreises schneiden (siehe Fig. 21). Auf diesen letztern trage man die Seitengrösse wiederholt an; sie wird in diesem Falle achtmal ohne Rest enthalten sein.

2. Da jedes Polygon in gleichschenklige, congruente Dreiecke zerlegt werden kann, und deren Winkel um das Centrum herum gleich sind, und die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel gleich 360° ist, so braucht man nur die Zahl 360 mit der Anzahl der Ecken oder Seiten (im gegebenen Falle 8) zu dividiren, um diejenige Winkelgrösse zu erhalten, welche von je zwei Schenkeln eines solchen Dreieckes eingeschlossen wird (in diesem Falle $\frac{360}{8} = 45°$). Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 22 ersichtlich.

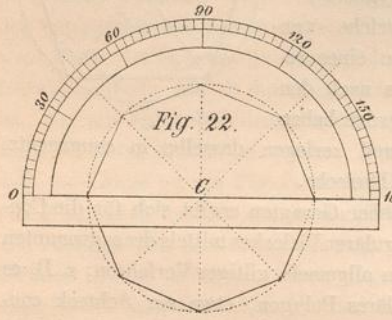


Fig. 22.

(Ueber weitere Constructionsmethoden siehe Aufgaben Taf. IV.)

Aufgaben über reguläre Vielecke (Polygone).

Tafel IV. Figur I—XIII.

Es soll (Fig. I—V) ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

Construction des Drei-, Sechs- und Zwölfeckes, Figur I.

§ 45. Man zeichne in den gegebenen Kreis einen Durchmesser amf, beschreibe mit dem Halbmesser des Kreises aus f einen Bogen, welcher die Peripherie in c und b schneidet, verbinde c mit b, b mit a, a mit c, so ist das Dreieck abc ein reguläres oder gleichseitiges. Beschreibt man mit dem gleichen Halbmesser aus a einen Bogen, so ergeben sich in der Peripherie des Kreises weitere Punkte d und e; diese mit einander und mit f verbunden, ergeben ein dem ersten congruentes Dreieck in entgegengesetzter symmetrischer Lage; verbindet man die auf der Peripherie liegenden Punkte $a, d,\ d, e,\ e, f$ . . ., so erhält man das reguläre Sechseck.

Die symmetrisch liegenden Dreiecke abc, def bilden ein reguläres Sternpolygon und im Innern desselben ein zweites reguläres Sechseck. Halbirt man die Bögen da, ae u. s. w., oder verlängert man die Diagonalen des im Innern der beiden Dreiecke entstandenen Sechseckes bis zur Peripherie, so ergeben sich die Punkte i und k, und diese mit je zwei auf der Peripherie nächstliegenden Punkten verbunden bilden die Zwölfecksseiten. (Das Zwölfeck ist hier nur zur Hälfte ausgeführt.) Der Winkel, den zwei Dreiecksseiten bilden, beträgt 60°, der Winkel, den zwei Sechsecksseiten bilden, 120° u. s. w. (Siehe § 44.)

Construction des Vier-, Acht- und Sechszehneckes.

§ 46. In den gegebenen Kreis (Fig. II) zeichne man zwei zu einander senkrechte Durchmesser, z. B. ac, bd, und verbinde $a, b,\ b, c,\ c, d,\ d, a$, so erhält man das reguläre Viereck (Quadrat); halbirt man die durch die Diagonalen ac, db gebildeten vier rechten Winkel, so schneiden die Halbirungslinien auf der Peripherie vier weitere Punkte e, g, h, f, und diese als Seiten verbunden ergeben ein zweites Quadrat $efgh$, dessen Seiten mit den Diagonalen ac, bd des ersten Quadrates parallel sind; verbindet man nun a mit h, h mit d, d mit g u. s. w., so erhält man das reguläre Achteck; durch Halbiren der 45° Winkel hma, ame . . . erhält man ein Sechszehneck u. s. w. Der Winkel, den zwei Achtecksseiten mit einander bilden, ist gleich 135° (= 8 . 2 Rechten — 4 Rechten. Siehe § 44); den Winkel, den ein gleichschenkliges Dreieck imh bei m bildet, ist gleich 45° ($\frac{360}{8} = 45$).

§ 47. In einem gegebenen Quadrat $abcd$ (Fig. III) soll ein reguläres Achteck so eingezeichnet werden, dass vier Seiten desselben mit den Quadratseiten zusammenfallen.

Man zeichne in das Quadrat die beiden Diagonalen ac, bd, beschreibe mit einem Halbmesser gleich der halben Diagonalen aus den Eckpunkten a, b, c, d die Viertelskreise, welche die gegebenen Quadratseiten in e, k, d, g, f, i, h, l schneiden; gh, hi, ik . . . sind die Achtecksseiten.

Construction des Fünf- und Zehneckes.

§ 48. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. IV) einen Durchmesser ab, errichte in dem Mittelpunkte m eine Senkrechte mc, halbire am in n, beschreibe mit dem Halbmesser nc aus n einen Bogen, welcher den Durchmesser in d schneidet, so ist die Strecke cd gleich einer Fünfecksseite und die Strecke md gleich einer Zehnecksseite; die Strecke cd trage man wiederholt auf die Peripherie, in welcher sie dann genau fünfmal als Sehne enthalten ist. Zieht man von einem Fünfeckspunkte g oder f durch m, so erhält man gleichfalls Punkte für das Zehneck und ist ck und ci gleich md, gleich einer Zehnecksseite.

Construction eines regulären Vieleckes mit beliebiger Seitenzahl (n Eck).*)

§ 49. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. V) zwei Durchmesser senkrecht zu einander, und verlängere jeden derselben von a und d über die Peripherie hinaus,

*) n bedeutet hier irgend eine beliebige Seitenzahl.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

theile einen der Durchmesser, z. B. ab, in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will*), z. B. sieben, trage einen solchen Theil von der Peripherie aus nach aussen in ac, de auf die verlängerten Durchmesser an und ziehe die Gerade ce, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet; verbindet man nun denjenigen Schnittpunkt f, welcher dem getheilten Durchmesser am nächsten liegt, mit dem zunächst liegenden dritten Theilpunkte 3, so ist $f3$ gleich einer n-Ecksseite; im gegebenen Falle also, da der Durchmesser ab in sieben Theile getheilt wurde, gleich einer Siebenecksseite, welche daher als Sehne siebenmal ohne Rest auf die Peripherie getragen werden kann.

Es soll ein reguläres Polygon construirt werden, wenn die Länge einer Seite gegeben ist.

§ 50. In Fig. VI ist die Seite eines Sechseckes gegeben.

Man mache ab gleich der Strecke $a'b'$, welche als Seitenlänge eines Sechseckes gegeben ist, beschreibe aus a und b mit dem Halbmesser gleich der Seitenlänge die Bögen amc, bmf, beschreibe aus m den Kreis durch ab, so ist in diesem ab sechsmal als Sehne enthalten.

§ 51. In Fig. VII ist ab gleich $a'b'$ als die Seite eines Achteckes gegeben.

Man beschreibe über ab einen Halbkreis, zeichne in denselben das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck anb, trage eine Kathetenlänge an oder bn von n nach m, beschreibe aus m durch ab einen Kreis, so ist in letzterem die Strecke ab achtmal enthalten und braucht nur herumgetragen zu werden.

§ 52. In Fig. VIII ist ab gleich $a'b'$ als Fünfecksseite gegeben.

Man beschreibe aus einem Endpunkte, z. B. b, mit dem Radius ba den Bogen $acfn$, errichte in b eine Senkrechte bc, halbire ab in m, und ziehe mc; die Strecke mc lege man von m aus in md nieder und beschreibe aus a und b mit dem Halbmesser ad Bögen, welche sich in e, d. i. über der Mitte von ab schneiden. Die Geraden ae, be sind Diagonalen des Fünfeckes, e die der Seite ab gegenüberliegende Spitze. Zieht man aus e mit dem Halbmesser gleich ab einen weitern Bogen, so ergibt dieser die Eckpunkte g und f.

Wäre $a'b'$ als eine Zehnecksseite bestimmt worden, so würde diese in einem Kreise, welcher aus e durch ab beschrieben wird, zehnmal als Sehne enthalten sein.

§ 53. In Fig. IX ist ab gleich $a'b'$ als Zwölfecksseite gegeben.

Um den Kreis zu erhalten, in welchem ab zwölfmal als Sehne enthalten ist, zeichne man über ab ein gleichseitiges Dreieck anb, errichte über der Mitte von ab eine Senkrechte und trage an oder bn von n nach m; m ist der Mittelpunkt und ma oder mb der Halbmesser des gesuchten Kreises, auf welchem die Strecke zwölfmal herumgetragen werden kann.

§ 54. Sollte ein reguläres Vieleck gezeichnet werden, dessen Seitenzahl gleich n, d. h. eine beliebige sein kann, so könnte etwa folgendes Verfahren gewählt werden.

Man verlängere die gegebene Seite ab gleich $a'b'$ (Fig. X) nach links, beschreibe aus einem Endpunkte a mit dem Halbmesser ab einen Halbkreis über der Geraden $ba7$, und theile denselben in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will, z. B. sieben. Zieht man nun von a aus nach dem zweiten Theilpunkt über 7 die Gerade ag, so ist diese eine zweite Seite und gab der Winkel, unter welchem die beiden Seiten eines Siebeneckes zu einander geneigt sind. Der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe, welche über den Seiten ab, ag errichtet wurden.

In Fig. XI ist ein Sternpolygon, die sog. Windrose, dargestellt, wie selbe ähnlich auf einem Compasse angegeben ist. Die acht Hauptspitzen sind nach den Himmelsrichtungen, z. B. *N* Nord, *W* West, *NW* Nordwest u. s. w. bezeichnet.

Fig. XII und XIII sind Netzwerke, welche mittels der Reissschiene und eines sog. 60° Winkels gezeichnet werden können, und sind die Constructionen der Figur XI, sowie der Figuren XII und XIII aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

Der Kreis.

§ 55. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, in welcher alle Punkte derselben von einem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. (Siehe § 2.) Kreise, deren Halb- oder Durchmesser gleich sind, heissen congruent; alle Kreise sind ähnliche Figuren; Kreise von verschiedener Grösse, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heissen in Bezug auf ihre Lage concentrisch; Kreise, welche sich schneiden, also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, excentrisch.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Centrum kleiner ist, als dessen Halbmesser; er liegt auf der Peripherie, wenn sein Abstand gleich dem Halbmesser, und ausserhalb, wenn sein Abstand grösser ist als der Halbmesser; das gleiche gilt auch von einer Geraden, welche im ersten Falle den Kreis in zwei Punkten schneidet (Secante), im zweiten berührt und im dritten ausserhalb des Kreises liegt. Je näher eine Sehne dem Mittelpunkte liegt, desto grösser ist sie, und umgekehrt; die grösste Sehne heisst Durchmesser (siehe § 2).

Eine Senkrechte, welche von dem Mittelpunkte

*) Das Verfahren kann nur vom Sechsecke aufwärts angewendet werden; bei einem Sechsecke ist die Gerade ce Tangente.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gegen eine Sehne gefällt wird, halbirt dieselbe, und umgekehrt; errichtet man auf der Mitte einer Sehne eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt (siehe Fig. 23).

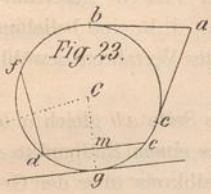


Fig. 23.

Eine Gerade wird zur Tangente, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällte Senkrechte gleich dem Radius ist; die Tangente hat mit der Peripherie nur einen Punkt gemein und steht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.*) Von einem Punkte a ausserhalb des Kreises können nur zwei Tangenten an denselben gelegt werden; die Entfernungen der Berührungspunkte b, c (Fig. 23) von dem gegebenen Punkte sind gleich.

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist der Summe ihrer Halbmesser; die Berührung heisst in diesem Falle eine äussere (siehe Fig. 24).

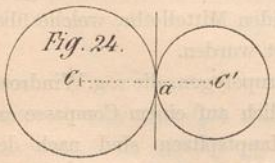


Fig. 24.

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist dem Unterschiede (Differenz) der beiden Halbmesser (siehe Fig. 25); die Berührung heisst in diesem Falle eine innere. Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt immer in der Geraden (Centrale), welche die beiden Mittelpunkte verbindet. Eine Gerade, welche in dem Berührungspunkte der beiden Kreise senkrecht zur Centralen steht, heisst eine gemeinschaftliche Tangente.

Fig. 25.

Ein Kreis ist seiner Grösse nach bestimmt:

a) durch den Radius oder Diameter;

b) durch zwei mit den Endpunkten aneinander stossende Sehnen**);

c) durch eine Sehne und einen Punkt, welcher ausserhalb der Sehne liegt und nicht mit deren Verlängerung zusammenfällt;

d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen;

e) durch den Winkel, welchen eine Sehne und eine Tangente an einem Punkte der Peripherie bilden.

Die Auffindung des Kreismittelpunktes nach der Bestimmung b ist schon in Fig. 23 angedeutet. Betrachtet man nämlich ab, ac (Fig. 26) als die aneinander stossenden Sehnen und errichtet man auf der Mitte von ab die Senkrechte (Mittelloth), so liegt auf dieser irgendwo der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises; dieses Mittelloth hat die Eigenschaft, dass die Entfernungen eines jeden Punktes auf demselben von den Endpunkten der Sehne (a, b) stets gleich sind; es könnten somit, soferne man nur die eine Sehne in Betracht zieht, eine Reihe von Kreisen oder Kreisbögen durch ab gezeichnet werden, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem Mittellothe liegen müssen; eine Linie aber, auf welcher das Gesuchte liegen muss, heisst auch ein geometrischer Ort; zeichnet man nun noch das Mittelloth zur Sehne ac, so bildet dieses für die Sehne ac einen weiteren geometrischen Ort; da auf beiden das Gesuchte liegen muss, zwei Gerade sich aber nur in einem Punkte schneiden, so kann der Mittelpunkt eines Bogens, bzw. eines Kreises, welcher durch a, b, c geht, nur in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe (geometrische Oerter) liegen.

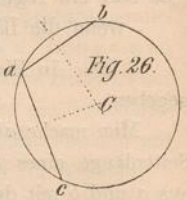
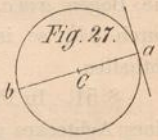


Fig. 26.



c) Dieser Fall führt auf die gleiche Aufgabe b) zurück, wenn man den gegebenen Punkt mit irgend einem Endpunkte als Sehne verbindet und ebenso verfährt wie vorhin.

d) Die Lösung ist gleich den Vorhergehenden, wenn man sich die drei Punkte durch Sehnen verbunden denkt.

e) Der Winkel, den eine Sehne mit einer Tangente bilden kann, ist entweder ein spitzer, bzw. stumpfer, oder ein rechter*); steht die Sehne rechtwinklig zur Tangente, so fällt sie mit dem Durchmesser zusammen (siehe Fig. 27), und das Kreiscentrum liegt auf der Mitte derselben. Ist der Winkel, welcher durch eine Sehne und Tangente gebildet wird (siehe Fig. 28), ein spitzer, bzw. ein stumpfer (je nachdem man den einen oder anderen der beiden Nebenwinkel bad oder bac in Betracht zieht), so ist die Auffindung des Kreismittelpunktes, wie schon in

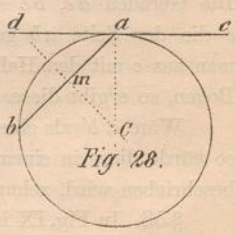


Fig. 28.

*) Die Tangente eines Kreises bezeichnet auch die jeweilige Richtung, welche die Kreislinie an dem betreffenden Punkte einnimmt, d. h., wenn man sich die Kreislinie durch Bewegung eines Punktes entstanden denkt, und der Punkt während derselben von einer bestimmten Stelle an seine Richtung unverändert beibehält (gerade fortschreitet), so fällt letztere mit einer Tangente an dieser Stelle der Curve zusammen.

**) Die Lösung ist nur dann nicht möglich, wenn die beiden Sehnen in eine Gerade zusammenfallen, da in diesem Falle der Radius unendlich gross, und damit auch der Kreis zu einer Geraden wird.

*) Würden Sehne und Tangente einen flachen Winkel bilden, oder mit anderen Worten in eine Gerade zusammenfallen, so würden die beiden Geraden, welche die geometrischen Oerter bilden, parallel sein, d. h. sich erst in unendlicher Entfernung schneiden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

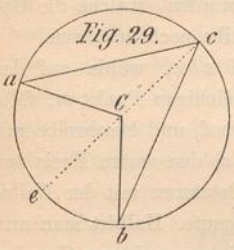
Fig. 23 angedeutet, folgende: Da nämlich der Kreis die Tangente cd in a berühren muss, der Halbmesser von dem betreffenden Berührungspunkte aber senkrecht zur Tangente steht, so ist die Senkrechte in a ein geometrischer Ort für alle Kreismittelpunkte, deren Peripherien die Gerade cd in a berühren sollen; zeichnet man daher noch den zweiten geometrischen Ort (nämlich das Mittelloth zu ab), so ist der Schnittpunkt beider das gesuchte Centrum.

Eigenschaften der im Kreise vorkommenden Winkel.

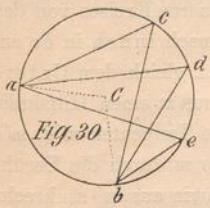
§ 56. Von diesen sollen hier nur die für das Projectionszeichnen wichtigsten erwähnt werden; solche sind:

1. Ein Peripheriewinkel ist halb so gross, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

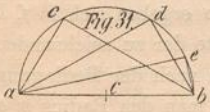
Zieht man von zwei beliebigen Punkten a, b eines Kreises (Fig. 29) nach einem beliebigen Punkte c der Peripherie zwei Gerade, so bilden diese bei c den auf der Peripherie liegenden Winkel (Peripheriewinkel); zieht man ferner von a und b nach dem Kreiscentrum, so ist der Winkel bei C ein Centriwinkel über dem gleichen Bogen ab, und Winkel acb ist halb so gross, wie Winkel aCb, oder Winkel aCb ist doppelt so gross wie acb. Beweis: Man ziehe die Gerade cCe, so sind nun aCc und bCc gleichschenklige Dreiecke, und deren Winkel an der Basis also gleich (siehe § 15); da nun ferner die Winkel aCe, bCe als Aussenwinkel dieser Dreiecke so gross sind wie je zwei an der Basis eines solchen gleichschenkligen Dreieckes liegende Winkel (siehe § 17), so folgt daraus, dass Winkel acC gleich der halben Grösse von Winkel aCe, und ebenso Winkel bcC gleich der halben Grösse von Winkel bCe, mithin Winkel acb halb so gross ist als Winkel aCb.



2. Alle über einem Bogen stehenden Peripheriewinkel haben gleiche Grösse; die Winkel acb, adb, aeb in Fig. 30 sind also gleich. Der Beweis folgt aus dem vorhergehenden Satz.



3. Alle Peripheriewinkel, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, welche also auf einem Halbkreise stehen, sind rechte Winkel; der dazugehörige Centriwinkel aCb ist ein flacher, also gleich zwei Rechten. Die Winkel acb, adb u. s. w. in Fig. 31 sind also rechte Winkel. Ein Peripheriewinkel ist ein spitzer, wenn er auf einem Bogen steht, der kleiner ist als ein Halbkreis, und ein stumpfer, wenn er auf einem Bogen steht, der grösser als ein Halbkreis ist.



Aufgaben über Kreise.

Tafel V. Figur I—XIII.*)

§ 57. In einem gegebenen Kreise soll der Mittelpunkt gefunden werden.

Angenommen, es sei in einem Kreise der Mittelpunkt nicht bekannt, so zeichne man eine beliebige Sehne ab (Fig. I), errichte darauf das Mittelloth und halbire die innerhalb der Peripherie liegende Strecke, d. i. den Durchmesser; m ist sodann der gesuchte Mittelpunkt; oder man zeichne eine beliebige zweite Sehne bc, errichte darauf ebenfalls das Mittelloth, so ergibt sich in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe der gleiche Punkt m.

§ 58. In dem Punkte a eines gegebenen Kreises (Fig. II) soll die Tangente gezeichnet werden.

Man verbinde a mit dem Mittelpunkte m und errichte in a die Senkrechte zu ma (siehe § 9). Soll eine Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden bc gezeichnet werden, so fälle man aus m die Senkrechte zu bc (siehe § 9), welche die Peripherie in a' schneidet; durch a' construire man die Parallele zu bc (siehe § 10).

§. 59. In Fig. III sollen mehrere Kreise gezeichnet werden, welche sich in einem gegebenen Punkte a berühren.

Die Halbmesser der Kreise können beliebig gross gewählt werden, die Kreismittelpunkte müssen jedoch auf einer Geraden $mm'm''$ liegen, welche durch den Punkt a geht; zeichnet man durch a eine Senkrechte zu $m'm''m'$, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangente sämmtlicher Kreise (siehe § 55); wählt man auf letzterer einen beliebigen Punkt P und zieht man von P die Tangenten Pb, Pd, Pc an sämmtliche Kreise, so sind die Entfernungen Pb, Pd, Pc gleich der Strecke Pa (siehe § 55, Fig. 23).

Eine Anzahl Kreise von verschiedenem Halbmesser sollen sich in zwei beliebig gewählten Punkten einer Geraden PR schneiden (Fig. IV).

Man errichte in m'' das Mittelloth zwischen den beiden gegebenen Punkten; auf diesem liegen sodann die Mittelpunkte der zu zeichnenden Kreise; zeichnet man aus P Tangenten an dieselben, so sind auch hier, wie bei Fig. III, die Entfernungen von P bis zu den Berührungspunkten gleich. Die Gerade PR bildet eine gemeinschaftliche Secante.

§ 60. Durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes soll ein Kreis gezeichnet werden (Fig. V).

Man errichte über jeder Dreiecksseite das Mittelloth; diese schneiden sich im Punkte M, dessen Abstand von a, b und c gleich ist (siehe § 55).

*) In Tafel V sind die Flächen der zunächst gegebenen Kreise zur bessern Unterscheidung gelb, die übrigen grau abgetont.

§ 61. An einen Kreis sollen von einem gegebenen Punkte P aus die Tangenten gelegt werden (Fig. VI).

Um die Berührungspunkte c, d im Voraus zu bestimmen, zeichne man über mP als Durchmesser einen Kreis; dieser schneidet den gegebenen Kreis in den beiden Berührungspunkten c und d*); die Tangenten Pd, Pc bilden mit den Halbmessern dm, cm rechte Winkel (siehe § 55).

§ 62. In einem gegebenen Kreissector (siehe § 2) abc (Fig. VII) soll ein die Seiten desselben berührender Kreis gezeichnet werden.

Man halbire den Winkel bac, zeichne im Schnittpunkte h die Tangente an den Bogen, verlängere ab bis e, ac bis d und halbire die Winkel aed und ade; diese drei Mediane schneiden sich im Mittelpunkte m des zu zeichnenden Kreises; die Berührungspunkte g, f auf den Geraden ab, ac ergeben sich, wenn man mit dh als Radius aus d und e Bögen beschreibt. Diese Aufgabe ist identisch mit derjenigen, in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben.

In einen Kreis (Fig. VIII) sollen mehrere Kreise, z. B. drei, einbeschrieben werden, welche denselben, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den Kreis in so viel congruente Sectoren, als man Kreise einbeschreiben will, z. B. drei, und verfahre wie bei Fig. VII, wodurch sich m''' als Mitte eines Kreises agi ergibt; die übrigen Mittelpunkte m', m'' liegen auf den Halbirungslinien der Sectoren und werden durch einen Kreis, dessen Radius gleich mm''' ist, abgeschnitten; g, h, i, sowie a, c, e sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 63. Um einen gegebenen Kreis $abcd\ldots$ (Fig. IX) soll eine beliebige Anzahl congruenter Kreise gezeichnet werden, welche den gegebenen, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den gegebenen Kreis in so viele gleiche Sectoren, als man Kreise daran zeichnen will, z. B. sechs, halbire die Winkel derselben, ziehe an einen Punkt a eines Sectors die Tangente sa und halbire den Aussenwinkel aso, oder trage die Strecke sa von s nach o, und errichte in o über mo eine Senkrechte; diese schneidet die Halbirungslinie des Sectors in einem Punkte 1; zieht man nun mit dem Halbmesser $m1$ aus m einen Kreis, so schneidet dieser sämmtliche Mittelpunkte $2, 3, 4, 5\ldots$ auf den übrigen Medianen ab; $a, b, c, d\ldots$ sowie $h, i, k, l\ldots$ sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 64. Eine Anzahl Kreise, deren Halbmesser beliebig sind, sollen aneinander gelegt werden (sich berühren).

Man zeichne aus den Mittelpunkten m, m' (Fig. X) Kreise, welche sich berühren (siehe § 55); soll nun ein dritter Kreis, dessen Mittelpunkt n' ist, die gegebenen berühren, so trage man dessen beliebig gewählten Halbmesser von b aus nach beiden Seiten auf die Centrale, ziehe durch die so erhaltenen Punkte aus m und m' Bögen, welche den Mittelpunkt n' des zu zeichnenden Kreises ergeben; verbindet man n' mit m und m' durch Gerade, so sind die Schnittpunkte t, t' der letztern mit den gegebenen Kreisen die Berührungspunkte.

Der Halbmesser eines zu zeichnenden Kreises, welcher die Kreise $aft''\ldots$ und $tt'''d\ldots$ berühren soll, hätte auch von der Peripherie der beiden Kreise nach aussen auf zwei beliebig aus m und n' gezeichnete Gerade mg, ne, in fg und de angetragen werden können; man hätte alsdann durch Ziehen der Bögen, deren Halbmesser gleich mg und ne ist, den Mittelpunkt n erhalten u. s. w.

§ 65. Innerhalb zweier gegebener Geraden (Fig. XI), welche sich unter einem beliebigen Winkel abc schneiden, sollen Kreise gezeichnet werden, welche die Geraden, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man halbire den Winkel abc, wähle auf der Halbirungslinie zuerst einen beliebigen Punkt m, fälle von m die Senkrechten mg und md, und beschreibe mit dem Halbmesser mg (gleich md) den ersten Kreis aus m; an den Schnittpunkt des letzteren mit der Halbirungslinie zeichne man eine Tangente. Halbirt man nun den Winkel, den letztere mit einer gegebenen Geraden ba oder bc bildet, oder verfährt man ähnlich wie bei Fig. VII, so ergibt sich der Mittelpunkt m' eines zweiten Kreises, welcher den gegebenen Kreis sowie die Geraden berührt, und zwar letztere in h und e u. s. w.

§ 66. An zwei gegebene Kreise (Fig. XII) sollen die Tangenten gezeichnet werden. Es sind hier vier Tangenten möglich, und zwar:

1. zwei, welche die Kreise auf gleichen Seiten, und
2. zwei, welche sie auf verschiedenen Seiten berühren.

Man verbinde zunächst die beiden Mittelpunkte m, m' durch eine Gerade (Centrale). Sollten nun zwei Tangenten nach der Bedingung 1. gezeichnet und deren Berührungspunkte im Voraus bestimmt werden, so trage man den Halbmesser $m'a$ des kleineren Kreises von der Peripherie des grösseren Kreises nach innen in bc an, beschreibe mit dem Radius mc, d. i. gleich dem Unterschiede der beiden Halbmesser, aus m einen Hilfskreis und zeichne aus m' an diesen die Tangenten $m'd$, $m'e$ (siehe Fig. VI); zieht man nun aus m durch die Berührungspunkte d, e die Geraden, sowie aus m' senkrecht zu $m'e$ und $m'd$ die Parallelen, so ergeben sich in f, h und g, i je zwei Berührungspunkte der zu zeichnenden Tangenten. Sollten die Tangenten nach der Bedingung 2. gezeichnet werden, so trage man den Radius $m'a$ von der Peripherie des grösseren Kreises, d. i. von b aus nach aussen an und beschreibe aus m einen Hilfskreis, dessen Radius gleich der Summe der beiden

*) Die Construction beruht auf dem geometrischen Satze, dass alle Winkel, welche auf dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Ecken in der Peripherie desselben liegen, Rechte sind. (Siehe § 56.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Halbmesser ($m'a$, mb) ist, zeichne aus m' an diesen Hilfskreis die Tangenten $m'k$, ml, verbinde m mit k und l und ziehe zu $m'k$ und ml aus m' die Senkrechten $m'p$, $m'o$, welche zu mk und ml parallel sind, so ergeben sich die auf verschiedenen Seiten liegenden Berührungspunkte; zeichnet man durch diese die Tangenten, so schneiden sich diese in einem Punkte s der Centralen; ebenso würden auch die Tangenten fh, gi, wenn hinlänglich verlängert, sich in der nach links verlängert gedachten Centralen mm' schneiden.

§ 67. In Fig. XIII soll die Länge der Peripherie eines gegebenen Kreises auf eine Gerade ausgestreckt, d. h. rectificirt werden.*)

Man theile den Durchmesser ab in sieben gleiche Theile und trage auf eine Gerade, welche hier als eine Tangente an den Kreis gezeichnet wurde, $3^1/_7$ Durchmesser gleich 22 Theilen auf.

Das Theilen des Durchmessers wurde hier nach der in § 12 (Tafel I, Fig. XII) angegebenen Methode bewerkstelligt. Auf der tangirenden Geraden cd, deren Länge gleich dem Kreisumfange ist, wurde der Durchmesser von a aus einmal nach links in ac, dann zweimal nach rechts in af und fe, sowie $^1/_7$ des Durchmessers gleich $a1'$ von e nach d getragen.

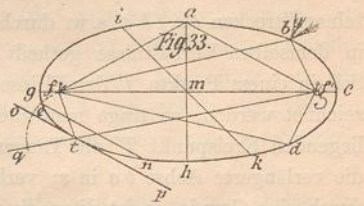
Die Ellipse.

§ 68. Die Ellipse ist eine ebene, geschlossene Curve, welche dadurch entsteht, dass ein Punkt um zwei feststehende Punkte sich derart bewegt, dass die Summe seiner Entfernungen stets gleich einer gegebenen Strecke ist. Um von dem eben Gesagten eine klare Vorstellung zu erhalten, denke man sich in zwei beliebigen Punkten f, f' (Fig. 33) die beiden Enden einer Schnur befestigt, welche länger ist als der Abstand der beiden Punkte, nehme einen Stift und bewege denselben, die Schnur anspannend, so vorwärts, dass diese um den Stift aussen herum gleitet. Die auf solche Weise beschriebene Curve ist eine Ellipse.

Während der Bewegung des Stiftes wird die Schnur die verschiedenen Lagen von faf', fbf', fcf', fdf', fgf' u. s. w. angenommen haben; da nun in der Lage fcf' die kleinere Strecke cf' mit der grösseren Strecke fc zusammenfällt, das gleiche aber auch bei der Lage $f'gf$ der Fall sein wird, so folgt daraus, dass $fc + cf' = f'g + gf = fa + af' \ldots$ gleich gc, d. h. gleich dem grössten Durchmesser der Ellipse ist.

Bezeichnet man nun die beiden Punkte f, f' als die Brennpunkte (Foci*), die Strecken fa, af', fb, bf', fc, $cf' \ldots$ als die Brennstrahlen oder Fahrstrahlen (Vectoren), gc oder den grössten Durchmesser, welcher durch die beiden Brennpunkte geht, als die grosse Achse, so ergibt sich der Satz, dass in einer Ellipse die Summe der beiden Fahrstrahlen stets gleich der grossen Achse ist, oder mit anderen Worten: die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich einer gegebenen Strecke, d. i. gleich der grossen Achse.

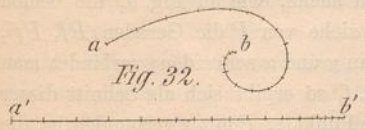
§ 69. Errichtet man auf der Mitte m der grossen Achse eine Rechtwinklige amh, so heisst dieser kleinste Durchmesser die kleine Achse. Die Endpunkte der Achsen, welche je paarweise von dem Mittelpunkte m gleichweit entfernt sind, heissen die Scheitelpunkte der Ellipse. Der Schnittpunkt der beiden Achsen heisst Mittelpunkt, die Curve selbst die Peripherie oder der Umfang; jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte (i, k) der Peripherie verbindet, heisst Durchmesser, en eine Sehne und op eine Tangente.



In einer Ellipse heissen die gleichen Entfernungen mf mf' die Excentricität der Ellipse; je weiter die Brennpunkte von dem Mittelpunkte entfernt sind, desto excentrischer, d. i. desto länglicher ist die Ellipse; je mehr sich die beiden Brennpunkte nähern, desto mehr nähert sie sich der Kreisform; sie wird ein Kreis, wenn beide Brennpunkte zusammenfallen. Eine Tangente an einem Punkte t der Ellipse halbirt den durch die Verlängerung eines Fahrstrahles entstandenen Winkel ftq.

Jene beiden Brennstrahlen, welche nach einem Scheitelpunkte der kleinen Achse gezogen werden, haben gleiche Länge (z. B. $fa = af'$). Die Ellipse kann auch als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden; so kann z. B. der Schatten

*) Eine allgemeine Methode, nach welcher die Länge einer jeden Curve auf eine andere gegebene Curve oder Gerade, oder auch die Länge einer Geraden auf eine Curve übertragen werden kann, ist folgende: Man theile jene Curve, welche übertragen werden soll, in eine Anzahl beliebiger Theile, deren Abstand jedoch so klein angenommen werden muss, dass jedes zwischen zwei Theilpunkten liegende Curvenstück praktisch als eine Gerade bezeichnet werden kann; diese Theile trage man auf die andere gegebene Curve oder Gerade über (siehe Fig. 32); je gekrümmter die Curve ist, welche auf eine andere Linie übertragen werden soll, um so kleiner müssen die Theile darauf angenommen werden. Sollte umgekehrt die Länge einer Geraden auf eine gegebene Curve übertragen werden, so müsste natürlich die Gerade in um so kleinere Abschnitte getheilt werden, je mehr die gegebene Curve gekrümmt ist, d. h. je kleiner ihr Krümmungs-Radius ist.



*) Focus, der Brennpunkt.

einer Kugel oder eines Kreises eine Ellipse bilden, wobei die Lichtstrahlen als die projicirenden Linien zu denken sind. Die Constructionen der Figuren I, II, IV und VI, Tafel VI, beruhen auf dieser Annahme.

Aufgaben über Ellipsen.

Tafel VI. Figur I—VI.

§ 70. Gegeben ist die Gerade ab (Fig. I) als die grosse, dc als die kleine Achse.

Um Punkte der Ellipse zu finden, durch welche dann die Curve mit freier Hand gezeichnet wird, beschreibe man um ab als Durchmesser aus m einen Kreis, verlängere die kleine Achse, bis sie den Kreis in e und g schneidet, errichte ferner in symmetrischen Abständen von m rechts und links der kleinen Achse Senkrechte zu ab, welche zugleich Sehnen des Kreises, wie auch der Ellipse bilden. Nun trage man me oder mg auf eine Gerade hk in Fig. I[a] und beschreibe mit dieser Grösse als Radius einen Bogen aus h, nehme mc oder md in den Zirkel, trage diese Strecke als Sehne auf den Bogen in Fig. I[a] von k nach i und ziehe hi; beschreibt man nun mit den Strecken en, fh u. s. w. aus h in Fig. I[a] Bögen, und trägt die zwischen dem Winkel liegenden Sehnen in Fig. I von der grossen Achse nach oben und unten in entsprechender Ordnung an, so ergeben sich die Ellipsenpunkte; es sind dabei die einzelnen Strecken en, fh u. s. w. durch die Ellipsenpunkte in demselben Verhältnisse getheilt, wie me durch c. Soll in einem Punkte T der Ellipse eine Tangente gezeichnet werden, so trage man zuerst an den darüber liegenden Kreispunkt T' die Tangente; diese schneidet die verlängerte Achse ba in s; verbindet man T mit s durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Tangente.

Um nachträglich die beiden Brennpunkte f, f' zu bestimmen, nehme man am oder bm in den Zirkel und beschreibe damit als Radius aus c (oder auch aus d) einen Bogen, welcher die grosse Achse in den beiden Brennpunkten schneidet (siehe § 68).

§ 71. In Fig. II sind ab, cd als die beiden Achsen gegeben; man beschreibe um beide als Durchmesser Kreise, theile den grössern Kreis in eine Anzahl gleicher Theile*) und verbinde diese Theilpunkte mit m, wodurch auch der kleinere Kreis gleich dem grössern getheilt ist; ziehe aus den Theilpunkten des grössern Kreises Senkrechte zur grossen Achse, z. B. gi, nl u. s. w., sowie aus den Theilpunkten des kleinern Kreises Senkrechte zur kleinen Achse, z. B. die Geraden hi, kl u. s. w., so ergeben sich ausser den schon anfänglich vorhandenen Scheitelpunkten noch weitere Ellipsenpunkte (hier z. B. 12). Das Zeichnen einer Tangente Ts geschieht wie in Fig. I; errichtet man in T eine Senkrechte nn' zu Ts, so heisst diese eine Normale.

§ 72. Gegeben sind in Fig. III ab als grosse, cd als kleine Achse. Um nun auf eine möglichst einfache Weise und ohne viele Construstionslinien Ellipspunkte zu erhalten, trage man md von m nach e, mache auf einen Papierstreifen die Grösse $p'k'$ gleich am und trage die Grösse ae von k' aus nach g', so dass also $g'k'$ gleich dem Unterschiede der beiden halben Achsen $(am - dm)$ ist*); diesen Papierstreifen verschiebe man nun derart, dass k' stets auf der kleinen und g' stets auf der grossen Achse liegt, so beschreibt p' eine Ellipse.

Sollten parallel einer gegebenen Geraden AB die Tangenten an die Ellipse gelegt werden, so findet man deren Berührungspunkte, wenn man parallel zu AB eine Sehne, z. B. ci, zeichnet, diese in n halbirt und durch m, n einen Durchmesser legt. Die Schnittpunkte T, T' des letztern sind Berührungspunkte, durch welche parallel zu AB (siehe § 10) die Tangenten gezeichnet wurden.

§ 73. In Fig. IV sind ab und cd als die Achsen gegeben, und die Ellipse soll im Ganzen durch acht Punkte nebst den durch diese Punkte gehenden Tangenten bestimmt sein.

Man zeichne durch die Scheitelpunkte a, b, c, d ein Rechteck $hnlo$, dessen Seiten parallel mit den Achsen sind, ziehe die Diagonalen hl, on, zeichne ferner um ab als Durchmesser einen Kreis und um diesen ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls parallel den Achsen sind, also gleiche Richtung mit den Rechtecksseiten haben; in das Quadrat zeichne man die Diagonalen und markire deren Schnittpunkte mit dem Kreise; zieht man nun aus diesen Schnittpunkten die Senkrechten zu ab, so schneiden sie die Diagonalen des Rechteckes in den Punkten k, u, w', w; diese sind Ellipspunkte; zieht man durch k und w' die Parallelen zu on, sowie durch u und w die Parallelen zu hl, so sind letztere, nämlich pus, $tw's$, pk, tw, Tangenten der Ellipse; durch die Punkte a, w, d, w', b, u . . . . und berührend an die Tangenten zeichne man die Ellipse.

§ 74. Von einem beliebigen Punkte P soll die Normale gegen die Ellipse gefällt werden.

Fig. IV. Man suche, wie in Fig. I, die beiden Brennpunkte f, f', ziehe von P die Geraden Pf, Pf', welche die Ellipse in y und x schneiden; verbindet man y mit f' und x mit f, so ergibt sich als Schnitt dieser beiden Geraden der Punkt z; P mit z verbunden ist die verlangte Normale und eine Senkrechte dazu in dem Punkte T eine Tangente an dem gleichen Punkte.

*) Dass die Theile auf den Kreisen gleich sind, ist zwar nicht unbedingt nothwendig, jedoch besser, da man durch symmetrisch liegende Punkte die Curve leichter zeichnet.

*) Einfacher noch erhält man auf dem Papierstreifen die Grössen $k'g'$, $k'p'$, wenn man denselben an am legt, die Grösse $p'k'$ gleich am markirt, sodann den Streifen mit p' an d in der Richtung dm legt, und die Grösse dm von $p'k'$ abzieht; es ist also $p'k'$ gleich am und $p'g'$ gleich dm, $k'g'$; daher gleich am weniger dm.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 75. In Fig. V sind $a\,b$, $c\,d$ als die beiden Achsen gegeben. Um Punkte der Curve zu bestimmen, suche man zunächst die Brennpunkte f, f', beschreibe sodann mit beliebigem Halbmesser $f'\,e$ aus f' und f Bögen in der Nähe des Umfanges, trage $f'\,e$ von b nach 1, nehme nunmehr $1\,a$ in den Zirkel und beschreibe mit dieser Grösse aus f, f' weitere Bögen, wodurch sich vier Punkte der Ellipse ergeben; in gleicher Weise beschreibe man aus f' und f mit beliebigem Halbmesser $f'\,g$ Bögen, trage $f'\,g$ von b nach 2, nehme $a\,2$ in den Zirkel und beschreibe mit diesem Halbmesser aus f und f' weitere Bögen, durch welche man abermals vier Punkte erhält u. s. w.

Diese Methode beruht auf den in § 68 angeführten Eigenschaften der Fahrstrahlen; es ist nämlich $f'\,e = b\,1$, $f\,e = 1\,a$, daher $f\,e + e\,f' = a\,1 + 1\,b = a\,b$; in Worten: die Summe der beiden Fahrstrahlen ist gleich der grossen Achse $(a\,b)$; dasselbe gilt auch für die beiden Fahrstrahlen $f\,g$, $f'\,g$ u. s. w.

§ 76. Von einem gegebenen Punkte P sollen die Tangenten an die Ellipse gelegt werden.

Man beschreibe mit dem Halbmesser $P\,f$ aus P einen Bogen $f\,i$, aus f' mit dem Halbmesser gleich der grossen Achse $a\,b$ einen zweiten Bogen, welcher den ersten $f\,i$ in i schneidet, verbinde i mit f', so ergibt sich auf dem Umfange T als der Berührungspunkt; verbindet man T mit f, so ist $f\,T\,i$ der durch die Fahrstrahlen gebildete Aussenwinkel, welcher durch die Tangente $P\,T$ halbirt wird. In gleicher Weise findet man den Berührungspunkt T'', indem man mit einem Halbmesser, gleich $P\,f'$, aus P einen Bogen beschreibt*), diesen durch einen zweiten Bogen, dessen Radius gleich $a\,b$, aus f schneidet u. s. w.

§ 77. In Fig. VI sind zwei beliebige, zu einander schief stehende Durchmesser $a\,b$, $c\,d$ gegeben; es sollen Punkte der Peripherie, sowie nachträglich die grosse und kleine Achse $A\,B$, $C\,D$ gefunden werden.

Man beschreibe zunächst um den grössern Durchmesser $a\,b$ einen Kreis, dessen Mittelpunkt m zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist (siehe § 69), ziehe $e\,m\,f$ senkrecht zu $a\,b$, verbinde e mit c und f mit d; nun theile man $m\,b$ in eine beliebige Anzahl von Theilen $m\,1$, $1\,2, 2\,3 \ldots$ und trage dieselben Theile von m nach links auf. Durch diese Theilpunkte zeichne man Senkrechte zu $a\,b$, welche den Kreis schneiden; zeichnet man nunmehr aus den Schnittpunkten 1, 2, 3 . . . die Parallelen zu $c\,d$, sowie aus den Schnittpunkten des Kreises, z. B. $1'$, $2'$, $3'$ . . ., die Parallelen zu $e\,c$, $f\,d$, so ergeben sich hierdurch Punkte des Umfanges, z. B. $1''$, $2''$, $3''$ . . ., durch welche die Curve mit freier Hand gezogen wird. Um nachträglich die grosse und kleine Achse zu bestimmen, markire man die Punkte, in welchen der Kreis den Umfang der Ellipse schneidet, z. B. a, h, b, g; ziehe $h\,m\,g$ ($a\,m\,b$ ist als Durchmesser schon vorhanden), und halbire die Winkel $a\,m\,h$ ($= g\,m\,b$) und $a\,m\,g$ ($= h\,m\,b$), so sind diese Halbirungslinien die verlangten Achsen $A\,B$, $C\,D$.*)

*) Diese Construction ist hier nicht mehr angegeben.

Das Oval.

§ 78. Das Oval, obgleich scheinbar der Ellipse ähnlich, ist lediglich die Nachahmung einer solchen durch Kreisbögen. Grundbedingung ist hiebei, dass die Kreisbögen, aus denen ein Oval zusammengesetzt ist, sich berühren.

Aufgaben über Ovale und elliptische Bögen.

Tafel VII. Figur I—IX.

In Fig. I ist $a\,b$ als grösster Durchmesser angenommen. Man theile denselben in drei gleiche Theile, zeichne aus den Theilpunkten 1 und 2 mit dem Halbmesser gleich $1\,a$ oder $2\,b$ Kreise, und beschreibe aus den Schnittpunkten 3 und 4 mit dem Halbmesser $4\,c$ (gleich $4\,d$) und $3\,e$ (gleich $3\,f$) die Bögen $e\,f$ und $c\,d$, welche die vorhin gezeichneten Kreise in den gleichen Punkten e, f, e, d berühren.**)

§ 79. In Fig. II sind der grösste und kleinste Durchmesser $a\,b$, $c\,d$ rechtwinklig zu einander gegeben. Man ziehe $a\,c$, trage die Differenz der beiden Halbmesser von c nach g (d. i. $m\,a - m\,c = a\,c$) auf, errichte über der Strecke $a\,g$ das Mittelloth, so schneidet dieses zwei Zirkelpunkte 1 und 4 ab. Trägt man den Abstand $1\,m$ von m nach 3, und ebenso den Abstand $m\,4$ von m nach 2, so erhält man die weiteren Zirkelpunkte.

§ 80. In Fig. III sind ebenso wie vorher die beiden Achsen $a\,b$, $c\,d$ gegeben.

Man zeichne über $a\,m$ ein gleichseitiges Dreieck $a\,m\,s$, trage $m\,c$ nach $m\,n$, ziehe $c\,n\,o$ und aus dem Schnittpunkte o parallel mit der Dreiecksseite $s\,m$, so ergeben sich die Zirkelpunkte 2 und 3.***) Man mache nun $m\,4$ gleich $m\,2$, und $m\,1$ gleich $m\,3$ u. s. w.; o, f . . . sind Berührungspunkte der Kreisbögen.

§ 81. In Fig. IV sind die Achsen $a\,b$, $c\,d$ gegeben. Man ziehe $a\,c$ und ergänze $a\,m\,c$ zu einem Rechteck $a\,m\,c\,e$, halbire die Winkel $e\,a\,c$ und $e\,c\,a$, so schneiden sich die Halbirungslinien in g; aus g fälle man eine Senkrechte zu $a\,c$, welche auf den beiden Achsen die Zirkelpunkte 2 und 3 ergibt. Im übrigen verfahre man wie bei Fig. II und III. Bei dem Eirund (Fig. V) sind

*) Man hätte statt des schon vorhandenen Kreises $a\,e\,b\,f$, ebenso gut einen andern Kreis, welcher die Ellipse in vier Punkten schneidet, zeichnen, und damit wie oben verfahren können.

**) Die übrigen parallelen Kreise innerhalb des Umrisses wurden in den Figuren I, II, III, IV, V und IX aus den gleichen Zirkelpunkten beschrieben.

***) 3 und 1 fallen hier zufällig mit c, d zusammen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

m, a, b und n Zirkelpunkte, im übrigen ist die Construction dieser Figur aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 82. In Fig. VI ist ein elliptischer Bogen über $a\,b$ als grossem und $m\,c$ als halbem, kleinstem Durchmesser mit freier Hand gezeichnet. Um Hilfspunkte $i, k \ldots$ zu erhalten, theile man $c\,e$ sowie $b\,e$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. drei, und $c\,d$ sowie $a\,d$ in die gleiche Anzahl gleicher Theile, verbinde a, $2'$, 1, $1'$, 2, c, ebenso b, $2'''$, $1''$, $1'''$, $2''$, c, so ergeben sich auf jeder Seite je zwei Zwischenpunkte der Curve, z. B. i, $k \ldots$. Ferner sei ausserhalb des Bogens ein beliebiger Punkt P gewählt, und es soll von diesem die Normale, d. i. die Senkrechte zur Curve gefällt werden. Man suche zunächst die Brennpunkte f, f'' der halben Ellipse (siehe § 74), ziehe sodann Pf, Pf'', sowie aus den sich ergebenden Schnittpunkten i, k die Fahrstrahlen if'', kf und zeichne durch den Schnittpunkt s der letzteren aus P die Normale Ps.

In Fig. VII ist der schiefe Durchmesser $a\,b$ als Sehne, $m\,c$ als die Höhe eines sog. hängenden Bogens*) gegeben. Um die Curvenpunkte $1'$, $2'$, $1''$, $2''$ zu finden, beschreibe man mit $m\,c$ als Radius aus m einen Viertelskreis $c\,b''$, theile denselben in beliebig viele gleiche Theile, z. B. drei, fälle von den Punkten 1, 2 die Senkrechten bis $b''m$, ziehe aus b'' nach b eine Gerade und aus d und e Parallele zu $b''\,b$, bis diese $a\,b$ schneiden; aus letzteren Schnittpunkten errichte man Senkrechte und mache sie gleich den Strecken $d\,2$, $e\,1$, so ergeben sich die Curvenpunkte $1''$, $2''$ u. s. w.; die Senkrechten, welche durch $1'$, $2'$ gehen, haben von $m\,c$ die gleichen Abstände und gleichen Höhen wie $e\,1''$, $d\,2''$. Sollten ausser den Punkten $1'$, $1''$, $2'$, $2''$ auch noch die betreffenden Tangenten an diese gezeichnet werden, so zeichne man zuerst die Tangenten an 1 und 2, welche die nach oben verlängerte Gerade mc in s'', s schneiden; aus s'' und s können sodann die Tangenten an $1'$, $1''$ und $2'$, $2''$ gezogen werden. Fig. VIII zeigt dieselbe Aufgabe in einer Lösung, wie sie ähnlich bei Fig. VI schon ausgeführt wurde.**)

Fig. IX zeigt ein Verfahren, nach welchem ein Oval aus mehr als vier Zirkelpunkten construirt werden kann.

Es wurden zunächst $a\,b$, $c\,d$ als die Achsen einer Ellipse angenommen, sodann ein Viertelsbogen, etwa $c\,a$, mit freier Hand gezeichnet. Man wähle nun auf diesem solche Abschnitte, wie z. B. $c\,1$, $1\,2$, $2\,3$, $3\,a$ (vergl. Fig. 34), welche ihrer Krümmung nach als Kreisbögen betrachtet werden können; aus 1, 2, 3 ziehe man alsdann die Fahrstrahlen nach den Brennpunkten f, f' und halbire die Winkel*), welche je zwei Fahrstrahlen an einem Punkte innerhalb der Ellipse bilden, so ergibt eine erste Halbirungslinie $1\,2'\,1'$ auf der verlängerten kleinen Achse $c\,d$ einen Zirkelpunkt $1'$, auswelchem mit $1'\,c$ als Radius der Bogen $1''\,c\,1$ gezogen wurde. Die Halbirungslinie aus 2 ergibt auf $1\,1'$ einen zweiten Zirkelpunkt $2'$, aus welchem mit dem Radius $2'\,1$ ein Bogen $1\,2$ gezeichnet wurde, u. s. w. Die Halbirungslinien sind zugleich die Normalen zur Curve. Hat man, wie in Fig. 34 gezeigt wurde, die Punkte 1, $2''$, $3''$, $4''$ der Fig. IX gefunden, so sind nur noch die Punkte 2, 3, 4, $3'$, $2'$, $1'$ und $2'''$, $3'''$ in gleicher Ordnung innerhalb der rechten Winkel $d\,m\,b$, $b\,m\,c$, $c\,m\,a$ anzutragen, und durch 1, 2, 2, 3, 3, 4 sowie $1'$, $2'$, $2'$, $3'$, $3'$, $4 \ldots$ die entsprechenden Geraden zu ziehen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung (Fig. IX) unschwer zu ersehen.

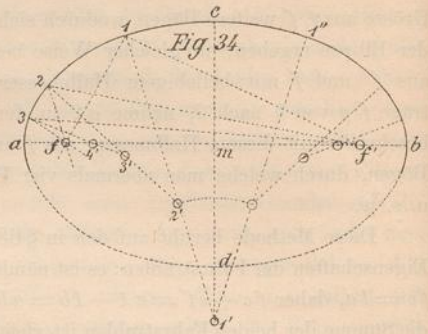


Fig. 34.

Die Spirale.

§ 83. Die Spirale ist eine offene Curve, welche entsteht, wenn ein Punkt sich um ein Centrum dreht, und dabei radial fortschreitend sich nach einem bestimmten Gesetze entfernt, oder umgekehrt sich von aussen her dem Centrum nähert.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Spiralen:

1. die gewöhnliche oder Archimedische Spirale,
2. die Schneckenspirale oder Schneckenlinie.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn das Verhältniss der fortschreitenden zur drehenden Bewegung sich stets gleich bleibt; in diesem Falle ist die Gangweite $a\,c$ oder $c\,d$ (siehe Fig. I, Tafel VIII) immer dieselbe. Das Curvenstück $a\,o\,T\,c$ heisst ein Umgang der Spirale; die Spirale in Fig. I hat somit drei Umgänge.

2. Eine Schneckenlinie entsteht, wenn das Verhältniss oder die Geschwindigkeit der fortschreitenden zur drehenden Bewegung vom Centrum aus nach aussen hin zunimmt, oder umgekehrt von aussen nach innen

*) Diese Figur ist eine halbe Ellipse, wobei $a\,b$ als ein schiefer Durchmesser und $m\,c$ als ein schiefer Halbmesser gegeben sind. Das Gleiche gilt auch von den Geraden $a\,b$, $m\,c$ in Figur VIII.

**) Dieses Verfahren zur Bestimmung einer Ellipse könnte z. B. auch angewendet werden, wenn der Mittelpunkt derselben aus irgend welchem Grunde unzugänglich ist, in welchem Falle dann das umschliessende Rechteck oder schiefwinklige Parallelogramm statt der Achsen zu geben wäre.

*) Diese Construction ist in Fig. IX nicht angegeben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

abnimmt, so dass die äusseren Gangweiten grösser als die inneren sind (siehe Fig. II).

Aufgaben über Spiralen.

(Construction derselben.)

Tafel VIII. Fig. I—VIII.

§ 84. Gegeben ist in Fig. I der umschriebene Kreis, dessen Durchmesser ab ist, sowie die Anzahl der Umgänge. Es soll von a aus die Archimedische Spirale in den Kreis eingezeichnet werden.

Man theile den Radius ea in so viel gleiche Theile, als man Umgänge innerhalb des Kreises haben will, z. B. in drei; alsdann theile man die Gangweiten ac, cd, de in je vier gleiche Theile und ebenso den Kreis in dieselbe Anzahl gleicher Theile, ziehe die Halbmesser $2'e$, be, $6e$ und beschreibe aus dem Centrum e durch jeden der auf ea liegenden Theilpunkte Kreise, so sind, a als Anfangspunkt genommen, a, o, $2''$, T, c Spiralenpunkte eines ersten Umganges. In gleicher Weise findet man auch die Punkte der übrigen Umgänge; wollte man statt der vier Hilfspunkte o, $2''$, T, c deren acht, so hätte man den Kreis statt in vier, in acht gleiche Theile zu theilen, und dasselbe hätte dann auch mit je einer Gangweite ac, cd, de geschehen müssen.*)

§ 85. An irgend einem Punkte T soll eine Tangente gezeichnet werden.

Man wähle auf dem Curvenstück aoT der Spirale irgend einen Punkt o, welcher zugleich auf einem der Parallelkreise liegt, ziehe durch den gegebenen Punkt T aus e einen Halbmesser und zeichne in t, d. i. da, wo der durch o gehende Kreis den Halbmesser schneidet, die Kreistangente $t4'''$, auf diese trage man die Länge des Kreisbogens to von t aus nach abwärts, ziehe $4'''T$, so ist letztere die verlangte Tangente. Die Richtung, nach welcher die Kreistangente $t4'''$ gezeichnet werden muss, ist stets gleich der Richtung, welche der Kreis von dem Punkte t aus gegen o hat.

§ 86. In Fig. II ist $abeg$ der umschriebene Kreis, in welchen von a aus eine Schneckenlinie mit drei Umgängen eingezeichnet werden soll.

Man theile zunächst den Kreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe die Halbmesser am, cm, bm..., zeichne sodann eine Gerade ab**) und theile dieselbe in so viel gleiche Theile, als man Umgänge haben will, also drei. Nun nehme man auf dem Halbmesser am eine erste Gangweite $a1$ beliebig, jedoch grösser als ein Drittheil von am an, und ziehe aus I durch 1 eine Gerade, bis dieselbe die Horizontale bg in F schneidet. Zieht man nunmehr IIF, so schneidet diese am in 2, und die Abschnitte $a1$, 12, $2m$ sind die gegen das Centrum abnehmenden Gangweiten. Theilt man ferner die Strecke aI in acht gleiche Theile und zieht aus diesen Theilpunkten nach F, so ergeben sich auf $a1$ die gegen 1 abnehmenden Theile, welche nun in ihrer Reihenfolge von aussen nach innen, von m aus auf die Halbmesser mc, mb, md... übertragen werden: für die zweite und dritte Gangweite 12, $2m$ wurde III und IIb nur in vier gleiche Theile getheilt, aus diesen nach F gezogen, und die Abschnitte zwischen 1, 2 und 2, m auf die Halbmesser mb, me, mg wie vorher übertragen, wodurch sich für den zweiten und dritten Umgang nur je vier Curvenpunkte ergeben haben.

Sollte an irgend einem Punkte T der Schneckenlinie eine Tangente gezeichnet werden, so könnte sie ähnlich wie bei Fig. I gefunden werden. Kürzer jedoch ist folgendes Verfahren: Man schneide aus T mit sehr kleiner Zirkelöffnung auf der Spirale zwei von T gleich entfernte Punkte ab, setze in diese den Zirkel ein und beschreibe mit gleichen Halbmessern die Bögen bei v und w; vw ist sodann eine Normale und eine in T zu vw senkrecht stehende Gerade tu die verlangte Tangente.

§ 87. Fig. III und IV sind Nachahmungen einer gewöhnlichen Spirale durch Kreisbögen.

In Fig. III wurde zunächst das kleine Quadrat $0'1'2'3'$ gegeben, sodann mit dem Halbmesser $1'0'$ aus $1'$ der Viertelskreis $0'1$, aus $2'$ mit dem Radius $2'1$ der Viertelskreis 12, aus $3'$ der Viertelskreis 23 u. s. w. gezeichnet. Eine Gangweite $0'4$ oder 15 . . . ist dann gleich der vierfachen Länge einer Quadratseite $0'1'$; ein um das Quadrat gezeichneter Kreis heisst das Auge der Spirale.

In Fig. IV ist die Spirale aus den Halbkreisen 01, 12, 23 . . ., deren Mittelpunkte b und a sind, zusammengesetzt; die Kreise berühren sich auf der Horizontalen, welche durch ab geht, und die Gangweiten $b1$, 13 . . . sind gleich der doppelten Grösse ab.

§ 88. Fig. V und VI sind Constructionen der sog. jonischen Schneckenlinie, welche die charakteristische Grundform des jonischen Kapitäls bildet und im Bauzeichnen öfters in Anwendung kommt.*) Bei Fig. V wurde zunächst die Entfernung des Anfangspunktes o bis zum Mittelpunkte 9 beliebig gewählt und diese Strecke in neun gleiche Theile getheilt, mit einem Theil als Radius sodann aus 9 ein Kreis, das sog. Schneckenauge gezeichnet, in demselben ein Quadrat über Eck stehend und in dieses ein zweites eingezeichnet, dessen Ecken auf den Seitenmitten des erst gezeichneten liegen (in

*) In Fig. I wurde eine Gangweite bloss in vier, der Kreis dagegen in acht gleiche Theile getheilt, und der auf den Halbmessern $1e$, $3e$, $5e$, $7e$ zwischen je zwei Parallelkreisen liegende kleine Abschnitt halbirt, wodurch man ebenfalls acht Punkte für je einen Umgang erhielt.

**) Die Gerade ab könnte von a aus irgend eine beliebige Lage haben, soferne nur der eine Punkt b auf der Horizontalen Fb liegt.

*) Die Construction in Fig. V ist nach Vignola, die in Fig. VI nach Goldmann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. V^a ist das Auge etc. vergrössert dargestellt). Theilt man nun eine jede halbe Diagonale *m 1*, *m 2* . . . des innern Quadrates (siehe Fig. V^a) in drei gleiche Theile und zieht durch diese Theilpunkte die Geraden *4 5*, *5 6*, *6 7*, *7 8*, *8 9* . . ., so sind *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* . . . Zirkelpunkte, aus denen die in *I*, *II*, *III*, *IV* . . . sich berührenden Kreise gezeichnet werden, und zwar aus *1* mit dem Halbmesser *1 0* (Fig. V) der Kreisbogen *0 I*, aus *2* mit dem Halbmesser *2 I* der Bogen *I II*, aus *3* mit dem Halbmesser *3 II* der Bogen *II III*, aus 4 mit dem Halbmesser *4 III* der Bogen *III IV* u. s. w.; der letzte Bogen *XI XII* berührt das Schneckenauge oben in dem Punkte *8* (*8* fällt hier mit *XII* zusammen).

Fig. VI zeigt dieselbe jonische Schneckenlinie, jedoch bei anderer Anordnung der Zirkelpunkte.

In dem Auge, welches hier ebenfalls in Fig. VI^a vergrössert dargestellt ist, wurden zunächst in *8″* und *c′* die horizontalen Tangenten *8″ a*, *c′ b″* gezeichnet, sodann aus *m* eine Parallele dazu gezogen, und wo diese den Kreis schneidet, eine weitere Tangente a b″ gezeichnet, so dass der Halbkreis rechts durch das Rechteck *8″ a b″ c′* eingeschlossen ist; ferner theile man die Rechtecksseite *a b* in vier gleiche Theile und ziehe aus den Theilpunkten *2* und *3* die Parallelen zu *a 8″*, *b″ c′*, so entsteht das Rechteck *1 2 3 4**). In letzterem werden die Zirkelpunkte dadurch bestimmt, dass man aus dem Mittelpunkte *m* des Auges die Geraden *m 2*, *m 3* zieht, letztere in je drei gleiche Theile zerlegt, und aus diesen die Parallelen zu den Viereckssseiten, nämlich *5 6*, *6 7*, *7 8* . . . zeichnet. *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* . . . sind nun der Reihe nach die Zirkelpunkte, aus denen mit den Halbmessern *1 0*, *2 I*, *3 II*, *4 III*, *5 IV* . . . (siehe Fig. VI) die Bögen *0 I*, *I II*, *II III*, *III IV* . . . gezogen werden. Die Punkte *I*, *II*, *III* . . . sind Berührungspunkte je zweier Bögen, da je zwei Mittelpunkte desselben auf einer Geraden liegen (s. § 55).

§. 89. Fig. VII zeigt eine in der Praxis leicht anwendbare Methode, nach welcher die Hauptpunkte einer Schneckenlinie gefunden werden können. Angenommen, es sei der Schnittpunkt der beiden zu einander senkrecht stehenden Geraden *a c*, *b d* das Centrum, *a* ein Punkt der Spirale über demselben und *b* ein zweiter beliebiger Punkt links auf der Horizontalen, dessen Abstand vom Centrum jedoch kleiner ist als der Abstand des Punktes *a*, so findet man weitere Punkte *c*, *d*, *e*, *f*, *g* . . ., indem man *a*, *b* durch eine Gerade verbindet, zu dieser in *b* eine rechtwinklige errichtet, welche die durch das Centrum gehende Senkrechte in *c* schneidet, und aus *c* parallel zu *b a* die Gerade *c d*, aus *d* parallel zu *c b* die Gerade *d e* u. s. w. zeichnet. Durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d* . . . wird die Curve mit freier Hand gezeichnet. *a b*, *b c*, *c d* . . . bilden Sehnen der Schneckenlinie und stehen senkrecht zu einander.

In Fig. VIII sind *a c* als ein Durchmesser, *q**) als das Centrum und *q b* als der grösste Halbmesser einer gedrückten Schneckenspirale gegeben. Um die weitern Punkte *d*, *e*, *f*, *g* . . . zu erhalten, verbinde man *a* mit *b*, *b* mit *c*, ziehe aus *c* parallel mit *b a*, aus *d* parallel mit *c b* u. s. w.

II. Theil.

Das projective Zeichnen (Projectionslehre).

§. 90. Haben wir im ersten Theile nur solche Aufgaben behandelt, welche unmittelbar in einer Ebene ausgeführt und gedacht werden konnten, so werden wir im zweiten Theile nur räumliche, bezw. körperliche Gebilde zur Darstellung bringen. Die Aufgabe der Projectionslehre besteht somit darin, Gegenstände des Raumes von drei Dimensionen oder dreifacher Ausdehnung auf einer Bildfläche, welche nur zwei Ausdehnungen hat, graphisch so darzustellen, dass daraus deren Grösse und Form ersichtlich ist. Unter einer Projection**) versteht man daher das Bild eines wirklich vorhandenen oder gedachten Gegenstandes.

Das Mittel zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man von den einzelnen Punkten des Gegenstandes sich gerade Linien (Projicirende) nach einem bestimmten Gesetze gegen die angenommene Bildfläche (Projectionsebene) gezogen denkt; die Durchschnitte solcher Linien mit der Bildfläche sind Projectionen. Werden z. B. von allen Ecken eines Körpers solche Projicirende gegen eine Bildfläche gezogen und die betreffenden Durchschnittspunkte in gleicher Ordnung wie bei dem Körper verbunden, so ergibt sich die Projection sämmtlicher Ecken und Kanten.

*) Sollte die Schneckenlinie die Lage wie Fig. V haben, so würden die Zirkelpunkte auf der andern Seite des Durchmessers *8″ c′* in dem Rechtecke *1 d e 4* liegen.

**) Projection, gleichbedeutend mit Hinwurf, Entwurf.

*) Die Strecke *a q* muss natürlich grösser als *q c* sein

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zu einer Projection gehören, oder hat man sich demnach zu denken:

1. den Gegenstand, welcher projicirt werden soll, oder dessen Bild man entwerfen will;

2. die Bildfläche, auf welche projicirt werden soll;

3. das Gesetz, nach welchem projicirt werden soll.

§ 91. Man unterscheidet drei verschiedene Projectionsarten, oder mit andern Worten drei verschiedene Gesetze, nach welchen projicirt werden kann:

a) die Centralprojection (Perspective);

b) die schiefe oder klinogonale Parallelprojection;

c) die rechtwinklige oder orthogonale Parallelprojection: die beiden letzteren werden auch summarisch als Parallelprojectionen bezeichnet.

Je nach dem Zwecke, den eine Darstellung erfüllen soll, wird man die eine oder andere Projectionsart wählen und zwar: soll das Bild eines Gegenstandes einen möglichst subjectiven Eindruck hervorbringen, d. h. so aussehen, wie der Gegenstand dem Auge des Beschauers von einem bestimmten Standpunkte aus erscheint, so wird man die Centralprojection oder die perspectivische Darstellungsart wählen.

Eine Centralprojection entsteht, wenn alle projicirenden Strahlen sich in dem Auge, als dem Projectionscentrum, vereinigen (siehe Taf. IX, Fig. I).

§ 92. Die Parallelprojection entsteht, wenn alle von dem Gegenstande ausgehenden Projectionsstrahlen unter sich parallel sind; es entsteht dadurch ein Bild, welches zwar nicht jener subjectiven Wahrheit gleich kommt, die uns aus einer perspectivischen Darstellung entgegen tritt, sich aber insoferne auszeichnet, als aus einer solchen Darstellung die Grössenverhältnisse der einzelnen Dimensionen leicht, in vielen Fällen unmittelbar entnommen werden können, während dieses bei einer perspectivischen Zeichnung nicht der Fall ist. Es eignet sich daher die Parallelprojection, insbesondere die orthogonale, bei welcher die Projicirenden senkrecht (perpendiculär) gegen die Bildfläche fallen, vorzüglich zu technischen Zeichnungen, welche zum Zwecke der Ausführung, z. B. von Gebäuden, Möbeln u. s. w. angefertigt werden.

§ 93. Die schiefe Parallelprojection entsteht, wenn die projicirenden Strahlen unter sich parallel, aber in schiefer Richtung gegen die Bildfläche fallen. Sie vereinigt bis zu einem gewissen Grade die Vortheile der centralen und orthogonalen Projectionsart, indem aus ihr ebensowohl die Form des Gegenstandes übersichtlicher, als auch die Grössenverhältnisse mittelst eigener Massstäbe leicht zu entnehmen sind. Anwendung findet letztere hauptsächlich bei den Entwürfen architektonischer Details, bei Darstellung von Möbeln, Maschinen und Geräthen aller Art. Fig. IV, V, VI und VII, Taf. IX, veranschaulichen einen Würfel in diesen drei Darstellungsarten, und zwar in der in § 91 angeführten Reihenfolge. Der Unterschied ist hier sofort leicht ersichtlich und besteht im Wesentlichen darin, dass in Fig. IV gewisse in Wirklichkeit parallele Kanten, z. B. $a\,d$, $b\,c$, $f\,g$, $e\,h$, nach einem Punkt zusammenlaufen und gewisse, an sich gleiche Grössen (nämlich die Würfelkanten) ungleich gross erscheinen, z. B. $e\,f$, $h\,g$ u. s. w., während bei der in Fig. V veranschaulichten schiefwinkligen Projection parallel laufende Würfelkanten, z. B. $a\,d$, $b\,c$ u. s. w. parallel bleiben und dabei gleichartig verkürzt erscheinen. Der Würfel in Fig. V zeigt eine Daruntersicht, der in Fig. VI eine Daraufsicht.

§ 94. Die orthogonale Projection erfordert im Allgemeinen zwei verschiedene Ansichten des Gegenstandes und zwar auf zwei Bildflächen oder Projectionsebenen, welche in der Regel senkrecht zu einander angenommen werden; so zeigt sich z. B. in Fig. VII das Quadrat unter der Geraden *I II* als die Ansicht eines Würfels von oben gesehen (Grundriss), und die Figur oberhalb der Geraden *I II* als eine Ansicht des Würfels von vorn (Aufriss), so dass eine Kante $b\,f$, welche sich von oben gesehen zu einem Punkte verkürzt, im Aufriss in ihrer wahren Grösse $b'\,f'$ sichtbar wird; aus dem Grundriss lassen sich Länge und Breite, aus dem Aufriss die Höhe des Körpers*) unmittelbar entnehmen.

Erklärungen zu Tafel IX, Figur I—VIII.

§ 95. Um von dem bisher Gesagten eine klare Vorstellung zu erhalten, ist in Fig. I der Vorgang veranschaulicht, nach welchem man auf mechanischem Wege das perspectivische Bild eines Körpers, z. B. eines Würfels, erhält.

Man betrachte das Viereck *I II III IV* als eine horizontal liegende ebene Fläche, auf welcher die Bildfläche *V VI VII VIII* senkrecht steht**); links der Bildfläche befinde sich der Körper $a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$, dessen Bild entworfen werden soll, und rechts habe der Beschauer in *F O* Stellung genommen. Das Auge *O* sieht nun den Körper vermittels der Strahlensumme, welche von der Oberfläche desselben nach dem Auge gelangen. Die Durchschnittspunkte dieser Strahlen auf der Bildfläche sind Projectionen. Zieht man daher aus einem Punkte a die Projicirende $a\,O$, so wird diese die Bildfläche in a' durchschneiden, und a' ist ein perspectivisches Bild des

*) Da hier der dargestellte Körper ein Würfel ist, bei welchem alle Kanten gleiche Länge haben, so folgt daraus, dass $a\,b = b\,c \ldots$ gleich der Höhe $b'\,f'$, $c'\,g'$ etc., d. i. gleich der wirklichen Länge einer Würfelkante sein muss.

**) Zur Darstellung der Figuren I, II, III und III^a ist die schräge Projectionsart angewendet worden. Bei dem Anfertigen der Zeichnung zeichne man die Tafelkanten *I IV, V VI, II III* u. s. w. in Fig. I und ebenso auch die entsprechenden Kanten in Fig. II und III unter einem Winkel von etwa 45°, ebenso auch die entsprechenden Kanten des zu projicirenden Körpers; desgleichen mache man die Längen $a\,b$ etc. in Fig. I und II gleich $a\,d$.

Punktes a; um den Durchschnittspunkt a' in der Bildfläche bestimmen zu können, denke man sich die Projicirende $a\,O$ in die horizontale Ebene nach $a\,F$ niedergelegt.*) Da nun Punkt a, wie auch die Punkte b, c, d des Würfels, sowie F (der Fusspunkt des Auges) und die Tafelkante $V\ VI$ in einer und derselben Horizontalebene $I\ II\ III\ IV$ angenommen sind, so wird $a\,F$ die Tafelkante $V\ VI$ in 1 schneiden; errichtet man daher in 1 eine Senkrechte, so schneidet diese die Projicirende in a'; denn $1\,a'$ liegt ja in der senkrecht stehenden Dreiecksebene $a\,F\,O$, welch letztere die Bildfläche nach der Geraden $1\,a'$ durchschneidet; weshalb a' auch in der Bildfläche liegen muss. Verlängert man $1\,a'$ nach oben und zieht man aus der Ecke e des Würfels ebenfalls die Projicirende $e\,O$, so schneidet letztere die Tafel in e', da, wie Figur zeigt, die Kante $a\,e$, wie auch die Bildfläche senkrecht stehen, so muss $a'\,e'$ ebenfalls als Senkrechte sich darstellen**); in gleicher Weise findet man auch die Bilder der Punkte b, f u. s. w. Man ziehe $b\,O, f\,O$, sowie $b\,F$; letztere schneidet die Tafelkante in 2. Errichtet man in 2 die Senkrechte, so schneidet diese wieder b', f' ab u. s. w.

Zieht man von O eine Perpendiculäre $O\,A$ gegen die Bildfläche (um A zu bestimmen, zeichne man $O\,A$, $F\,F'$ parallel $I\ II$ und errichte $F'A$), so ist A der sog. Augenpunkt und bezeichnet dieser die Stelle, welcher gegenüber das Auge sich befindet; der Augenpunkt ist zugleich die Flucht (Convergenzpunkt) aller Linien, welche zur Bildfläche senkrecht stehen. Diejenigen Kanten, welche mit der Tafel parallele Lage haben, bleiben auch in ihren Projectionen unter sich parallel. Die weitere Ausführung dieser Projectionsart bildet eine eigene Wissenschaft, welche unter dem Namen Linienperspective bekannt ist. Fig. IV zeigt, wie schon früher erwähnt, denselben Würfel, wenn die Bildfläche mit der Fläche, auf welche man zeichnet, identisch ist.

§ 96. Fig. II zeigt einen ähnlichen Vorgang wie Fig. I, nur mit dem Unterschiede, dass hier das Projectionscentrum aufgegeben, und statt dessen die projicirenden Strahlen unter sich parallel und schief gegen die Bildfläche einfallen; man könnte sagen, das Auge befindet sich in der Richtung $R'S'$ in unendlicher Entfernung, da alle Geraden, welche nach einem unendlich entfernt liegenden Punkt convergiren, als Parallele betrachtet werden können. Das hierdurch entstandene Bild heisst auch ein parallelperspectivisches.

*) Die Gerade $a\,F$ kann als die Horizontalprojection des Strahles $a\,O$, d. i. als ein Grundriss desselben betrachtet werden.

**) Die Gerade $a'\,e'$ ist nichts anderes als der Schnitt, den die Ebene $O\,e\,a\,F$ mit der Bildfläche erzeugt; das Viereck $O\,e\,a\,F$ bildet nämlich eine senkrecht stehende Ebene, welche die Bildfläche nach der Geraden $1\,a'\,e'$ schneidet. Der Schnitt zweier Ebenen ist immer eine Gerade (siehe § 7).

Um die schiefen Projectionen $a', b', c', d', e', f' \ldots$ eines in der Horizontalebene liegenden Körpers $a\,b\,c\,d\,e\,f \ldots$ zu erhalten, zeichne man $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c' \ldots\ldots$ parallel mit der vorausbestimmten Richtung $R'S'$, welche die Projicirenden haben sollen, ziehe ebenso aus $a, b, c, d, e, f \ldots$ parallel mit $r\,s$, wobei $r\,s$ als die Horizontalprojection von $R'S'$ zu betrachten ist (siehe Bemerkung zu § 95), und errichte aus den Schnittpunkten $1, 2, 3, 4$ die Senkrechten, so ergeben sich hierdurch in $a', b', c', d', e' \ldots$ sämmtliche Projectionen der Körperecken, und diese in gleicher Ordnung verbunden, das parallel-perspectivische Bild des Körpers. Das unendlich entfernt liegende Auge konnte man sich in diesem Falle auch ebenso gut diesseits der Bildfläche, auf welcher sich auch der Körper befindet, denken und zwar links unten, also in der Richtung $S'R'$, in welchem Falle die Kanten $a\,b$, $a\,d$, $a\,e$, $e\,f$, $e\,h$, sowie auch die Kanten $d\,c$, $b\,c$, wenn man sich die horizontale Tafel $I\ II\ III\ IV$ als durchsichtig denkt, sichtbar sind; wesshalb deren schiefe Projectionen $a'\,b'$, $a'\,d'$, $b'\,c'$, $c'\,d'$ u. s. w. ausgezogen, die übrigen unsichtbaren ($h'\,g'$, $g'\,c'$, $g'\,f'$) aber punktirt wurden.

Die Projection $a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots$ stellt somit eine Daruntersicht und zwar von links dar. Fig. V zeigt den Körper in einer Daruntersicht von rechts bei gerader Stellung der Bildfläche. Die schiefe Projection $a''\,b''\,c''\,d''\,e'' \ldots$ (Fig. II) stellt eine Daraufsicht von der linken Seite dar, wobei die Strahlen $a\,a'', b\,b'', c\,c'' \ldots$ parallel mit $R\,S$, und deren Horizontalprojectionen parallel mit $r\,s$, also mit den schon gezeichneten $a\,1$, $b\,2$, $c\,3$, $d\,4$ zusammenfallend angenommen wurden.

Fig. VI zeigt eine Daraufsicht von rechts, bei gerader Stellung der Bildfläche.

§ 97. In Fig. III, welche den Vorgang bei der rechtwinkligen oder orthogonalen Projectionsart veranschaulicht, wurden zunächst zwei Projectionsebenen (Bildflächen) als rechtwinklig zu einander, und zwar $I\ II\ III\ IV$ als eine verticale, und $I\ II\ V\ VI$ als eine horizontale angenommen. $I\ II$ ist die Schnittkante der beiden Tafeln (Projectionsachse).

Ferner wurde ein Körper, dessen Flächen $A\,C\,E\,G$ und $B\,D\,F\,H$ zur horizontalen Tafel, und dessen Flächen $A\,B\,D\,C$ und $G\,H\,F\,E$ zur verticalen Tafel parallel sind, zwischen den beiden Tafeln als im Raume frei schwebend angenommen. Man denke sich nun von sämmtlichen Ecken $A, B, C, D, E, F \ldots$ die Projicirenden senkrecht (perpendiculär) gegen die horizontale Tafel gezogen, so treffen diese die Tafel $I\ II\ V\ VI$ in den Punkten a, b, c, d, e, f, g, h, wobei, wie aus der Zeichnung leicht ersichtlich, je zwei Punkte, z. B. A, B, in ihrer Horizontalprojection in a, b zusammenfallen. Dasselbe gilt von den übrigen Punkten, z. B. C, D, deren Projectionen c, d zusammenfallen u. s. w. Die Projection irgend eines Punktes, z. B. A, konnte anfänglich innerhalb der Projectionsebene beliebig, z. B. bei a, gewählt werden; die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

übrigen Schnittpunkte ergaben sich dann dadurch, dass man aus a parallel zu BD, sowie aus a parallel zu BH zog u. s. w.; die Parallelen bh, df schneiden, wenn hinlänglich verlängert, die Projectionsachse $I\ II$ in den Punkten *1* und *2*. Errichtet man hierin die Senkrechten und zieht man aus den Eckpunkten des Körpers die Parallelen zu $a1$, $c2$, d. i. die Senkrechten zur verticalen Tafel, so ergeben sich in derselben die Projectionen der Eckpunkte, wobei, wie dieses auch im Grundrisse der Fall war, wieder je zwei Punkte, z. B. A, G, B, H, D, F ... in $a'g'$, b', h', d', f' ... zusammenfallen.

$ab\ cd\ ef\ gh$ heisst eine Horizontalprojection (Grundriss), $a'g'\ e'c'\ f'd'\ b'h'$ eine Verticalprojection (Aufriss) des Körpers; aus ersterer ist Länge und Breite, aus der zweiten die Höhe, und in diesem speciellen Falle der Parallelstellung auch die Breite zu entnehmen.

§ 98. In vielen Fällen genügen zwei Projectionen; verlangt man aber in Folge der Beschaffenheit oder Lage des Körpers noch eine dritte Ansicht, so könnte durch Annahme einer dritten Projectionstafel, welche in der Regel senkrecht zur einen oder andern der schon vorhandenen beiden Projectionsebenen angenommen wird, diesem Verlangen entsprochen werden. Die Tafel *II III VII V* mit der darin enthaltenen dritten Projection $a''c''\ b''d''\ h''f''\ g''e''$ veranschaulicht die Lösung dieser Aufgabe, wobei die Projicirenden Aa'', Cc'', Bb'', Dd'' etc., welche hier wieder paarweise zusammenfallen, ebenfalls als Senkrechte zur Tafel *II III VII V* zu betrachten sind. Diese dritte Projection heisst auch ein Seitenriss, und kann aus demselben Länge und Höhe des Körpers in diesem Falle unmittelbar entnommen werden. (Z. B. $a''b'' = AB$, $a''g'' = AG$ = der wahren Höhe und Länge des Körpers.*)

Fig. III[a] zeigt die angenommene Richtung der drei von einem Punkte S ausgehenden Projectionsstrahlen SR, SR', SR'', welche in S als senkrecht zu einander stehend zu betrachten sind, und welchen parallel auch die Tafelkanten, sowie die Kanten des Körpers angenommen wurden.

Fig. VII zeigt, wie schon erwähnt, Grund und Aufriss eines Würfels, wenn die beiden Projectionstafeln in einer Ebene liegen (siehe § 101); ab, bc . . ., sowie $a'e'$, $b'f'$ . . . entsprechen der wahren Länge einer Würfelkante.

Weitere Ausführungen zur rechtwinkligen Projectionsart.

§ 99. Wie schon in § 92 erwähnt, eignet sich die rechtwinklige Projectionsart für Zeichnungen, aus denen die einzelnen Masse unmittelbar oder doch möglichst leicht entnommen werden sollen. Nach dem oben Gesagten sind hierzu zum mindesten zwei Projectionen (Grundriss und Aufriss), mitunter auch eine dritte Projection (Seitenriss) nöthig; diese Projectionen liegen aber auf verschiedenen Projectionsebenen.

Da jedoch die Fläche, worauf man zeichnet, nur eine Ebene bildet, und es sich demnach darum handelt, diese verschiedenen Körperansichten in einer Ebene darzustellen, so können die Projectionsebenen ihre natürliche Lage im Raume nicht mehr beibehalten, sondern müssen so umgelegt werden, dass sie in eine Ebene fallen oder nur eine Ebene bilden. Eine Projectionsebene wird dabei um ihre Schnittkante so gedreht, bis sie in die Verlängerung der andern fällt. Der Vorgang ist in Tafel X, Fig. I mit zwei Projectionstafeln nebst den darinliegenden Projectionen eines Dreieckes veranschaulicht.

§ 100. Sehr oft ist zur genauern Kenntniss eines Körpers noch nöthig, dass man sich denselben nicht nur nach seinen Aussenseiten dargestellt, sondern auch von einer Ebene durchschnitten denkt und einen solchen Durchschnitt graphisch zur Darstellung bringt. Soll z. B. die Dicke der Wandung irgend eines Gefässes aus der Zeichnung ersichtlich sein, so würde etwa ein Verticalschnitt durch die Mitte des Körpers, d. i. durch dessen Achse, wie ihn Fig. 35 veranschaulicht, diesem Verlangen entsprechen. Die vordere Hälfte denke man sich weggenommen, so dass die Schnittfigur sichtbar wird; solche Schnitte heissen auch Profile oder Querschnitte.

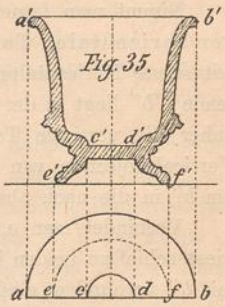


Fig. 35.

Projection des Punktes, der Geraden und Fläche.

Tafel X. Figur I—X.

§ 101. Es seien in Fig. I die beiden Projectionstafeln wie in Fig. II oder III, Tafel IX, rechtwinklig zu einander gegeben. PP ist die Projectionsachse, und a ein Punkt im Raume.*) Zieht man nun von a die projicirende senkrecht gegen die horizontale Tafel und bestimmt an beliebiger Stelle innerhalb ihrer Grenzen ihren Schnittpunkt a', so kann a' als die Horizontalprojection des Punktes a betrachtet werden.

Zieht man ferner aus a die Senkrechte zur verticalen Tafel, so ist deren Schnittpunkt a'' eine Verticalprojection des Punktes a. Um die Verticalprojection a'' zu finden, welche, nachdem a' einmal bestimmt war, nicht mehr beliebig gewählt werden konnte, ziehe man aus a' parallel mit aa'' und aus dem Schnittpunkte,

*) Bei der angenommenen Lage dieses Körpers sind je vier Kanten zu einer der drei Tafeln parallel, wesshalb auch deren Projectionen die wahre Länge enthalten.

*) Man betrachte vorerst die Ecke a als einen für sich gegebenen Punkt ohne Rücksicht auf die Dreiecksfläche.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

welcher auf der Projectionsachse sich ergibt, die Senkrechte, so schneidet letztere aa'' in a'' (vergl. § 97).

Bis jetzt sind die Projectionen des Punktes a räumlich ausgeführt worden, indem man die beiden Tafeln als senkrecht zu einander betrachtete. Damit es nun möglich werde, die gleiche Aufgabe in einer Ebene anszuführen, denke man sich die eine oder andere der beiden Tafeln, etwa die horizontale mit der darin liegenden Projection a', um die Projectionsachse PP nach abwärts geklappt, bis sie mit der Verticalen in eine und dieselbe Ebene $ABC'D'$ zu liegen kommt; die Horizontalprojection a' fällt sodann nach a''' und die beiden Projectionen a''', a'' liegen nunmehr in einer projicirenden Geraden $a'''a''$, welche zur Projectionsachse senkrecht steht (d. h. als senkrecht zu denken ist). Die Strecke a''' bis zur Projectionsachse bedeutet dabei den Abstand des Punktes a von der verticalen, die Strecke a'' bis zur Projectionsachse den Abstand des Punktes a von der horizontalen Tafel.

Nimmt man ferner einen zweiten Punkt b' als in der horizontalen Tafel liegend an, so fällt derselbe mit seiner Horizontalprojection zusammen; die Projicirende $b'b''$ liegt in der horizontalen Tafel und schneidet daher die verticale Tafel in der Achse. b'' ist die Verticalprojection von b', die Strecke $b''b'$ lege man um b'' in die nach abwärts geklappte Tafel nach b'''.

Verbindet man a, b' durch eine Gerade, so steht diese schief zu beiden Tafeln, und a' mit b', sowie a'' mit b'' verbunden, sind Projectionen der Geraden, wie dieselben räumlich zu denken sind ($a'''b'''$, $a''b''$); aber die in einer Ebene liegenden gleichen Projectionen. Aehnlich verhält es sich mit dem Punkte c'', welcher in der verticalen Tafel liegt, daher mit seiner Verticalprojection zusammenfällt, dessen horizontale Projection deshalb in die Achse nach c' fällt. Bei dem Umklappen der horizontalen Tafel bleibt c' unverändert liegen. Verbindet man noch a mit c'', und b' mit c'', so erhält man nachträglich ein zu beiden Tafeln schief stehendes Dreieck $ab'c''$, dessen eine Ecke a im Raume und dessen andere Ecken b' und c'' in der horizontalen und verticalen Projectionsebene liegen. $a'b'c'$ ist ein Grundriss (Horizontalprojection), $a''b''c''$ ein Aufriss (Verticalprojection) und $a'''b'''c'$ der mit der Tafel um die Achse geklappte Grundriss. $a'''b'''c'$ und $a''b''c''$ liegen in einer Ebene und die Projicirenden $a'''a''$, $b'''b''$, $c'c''$ stehen auf der Projectionsachse senkrecht. Liegt endlich ein Punkt in der Projectionsachse selbst, also zugleich in beiden Tafeln, so fällt er mit seinen beiden Projectionen, z. B. P', P'', zusammen, ist also zugleich seine Horizontal- und Verticalprojection.

Fig. II zeigt die in einer Ebene liegenden Projectionstafeln mit den darin enthaltenen Projectionen in gerader Ansicht, d. h. wenn man sich die beiden Tafeln als mit der Zeichnungsfläche identisch denkt. Die Buchstaben haben dabei die gleiche Bedeutung wie in Fig. I.

§ 102. Fig. III zeigt die Projectionen einer Geraden*), welche zu beiden Tafeln parallel ist. Der Abstand der beiden Endpunkte a', b' von der Projectionsachse ist gleich dem Abstande der Geraden von der horizontalen Tafel und ebenso verhält es sich mit der Horizontalprojection ab der beiden Endpunkte, welche ebenfalls gleichen Abstand von der Projectionsachse, mithin von der verticalen Tafel haben. Die Linie zeigt sich in beiden Projectionen nach ihrer wahren Länge.

§ 103. In Fig. IV sind $(ab, a'b')$ die beiden Projectionen einer Geraden, welche zur horizontalen Tafel senkrecht steht, zur verticalen Tafel daher parallel ist. Der Grundriss erscheint als ein Punkt, indem a und b senkrecht übereinander liegen; im Aufrisse ist $a'b'$ die wahre Länge der Geraden. Umgekehrt hätte man die Gerade senkrecht zur verticalen Tafel annehmen können, wodurch der Aufriss als Punkt und der Grundriss als eine Senkrechte zur Achse sich dargestellt hätten.

§ 104. In Fig. V sind $(ab, a'b')$ die beiden Projectionen einer Geraden, welche zur verticalen Tafel parallel, zur horizontalen Tafel schief oder geneigt ist. Ihr Neigungswinkel zu letzterer ist gleich dem Winkel, welcher durch die Verlängerung von $b'a'$ mit der Projectionsachse entstehen würde; ihre wahre Länge zeigt sich in $a'b'$.

Dasselbe ist jedoch umgekehrt mit den beiden Projectionen $(ab, a'b')$ Fig. VI der Fall. Die Gerade ist parallel zur horizontalen und schief zur verticalen Tafel. ab ist daher gleich der wahren Länge.

Da nun in den Figuren III bis VI die Lage einer Geraden stets parallel zu einer der Tafeln angenommen wurde, so ergab sich in der betreffenden einen Tafel auch immer die wahre Länge der Linie (siehe Bem. zu § 98). Nimmt man dagegen wie in Fig. VII die Endpunkte $(ab, a'b')$ in ungleichen Abständen von der Projectionsachse, d. i. von den Tafeln an, so steht die Gerade schief zu beiden Projectionsebenen und wird daher in keiner derselben nach ihrer wahren Grösse, sondern mehr oder weniger verkürzt erscheinen.**) Soll nun die wahre Länge einer solchen Geraden gefunden werden, so muss dieselbe parallel

---

*) Die gegebenen Projectionen der Geraden wurden hier zur bessern Veranschaulichung als dünne Stäbchen gezeichnet, ihre Umlegungen in Fig. VII—IX als feine Linien ausgezogen.

**) Die Projection einer Geraden erscheint umsomehr verkürzt, je grösser ihr Neigungswinkel zur Projectionsebene ist. Der grösste Neigungswinkel ist 90°, in welchem Falle die Gerade sich zu einem Punkte verkürzt (siehe Fig. IV). Unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den kleinsten Winkel, den diese Gerade mit der Ebene bildet, und die durch den Winkel gebildete zweite Ebene steht senkrecht zur ersten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zu einer der beiden Tafeln gedreht, oder in eine der beiden Tafeln umgelegt werden.

Man wähle zu diesem Zwecke auf der Geraden $(ab, a'b')$ einen beliebigen Punkt, etwa den Endpunkt a' der verticalen Projection, betrachte denselben als feststehend und drehe die Strecke $a'b'$ um a', bis sie in $a'b''$ zur Projectionsachse, d. h. zur horizontalen Tafel parallel geworden ist, fälle von b'' die Senkrechte herab und ziehe aus b eine Parallele zur Achse, so schneiden sich diese in b'''; a mit b''' durch eine Gerade verbunden ist die wahre Länge der Linie $(ab, a'b')$. Während dieser Drehung ist, wie schon gesagt, (a, a') der feste Punkt, während (b, b') bei dieser Drehung stets die gleiche Entfernung von der verticalen Tafel behielt, so dass also der zurückgelegte Weg im Aufrisse als ein Kreisbogen, im Grundrisse aber dieser Bogen als die Gerade bb''' erscheint; (b, b') also in einer zur verticalen Tafel parallelen Ebene sich fortbewegt hat. Die Gerade $(ab, a'b')$ ist damit in $(a'b'', ab''')$ zur horizontalen Projectionstafel parallel geworden und erscheint desshalb bei ab''' in ihrer wahren Länge (vergl. Fig. VI).

In ähnlicher Weise hätte die gegebene Gerade $(ab, a'b')$ auch zur verticalen Tafel parallel gedreht werden können, indem man ab um a nach ab^4 drehte, aus b^4 eine Senkrechte und aus b' eine Wagrechte zeichnete, welche sich in b^5 schneiden; $a'b^5$ ist nun wieder gleich der wahren Grösse, also auch gleich ab''' (vergl. Fig. V). Statt um a oder a' hätte man auch ebenso gut um b oder b' die Drehung vornehmen können, z. B. um b, so dass nun a nach a'', a' nach a''' zu liegen kommt, und $a'''b'$ nun ebenfalls parallel zur verticalen Tafel und daher gleich der wahren Grösse ist.

§ 105. Einen besonderen Fall, in welchem die gegebene Gerade gleichfalls schief zu beiden Tafeln steht, zeigt Figur VIII, in welcher die beiden Projectionen einer Geraden $(ab, a'b')$ als Senkrechte zur Projectionsachse sich darstellen; die Gerade, deren Projectionen $(ab, a'b')$ sind, lässt sich nunmehr in einer Ebene denken, welche zu den beiden Tafeln senkrecht steht (vergl. Fig. 36).

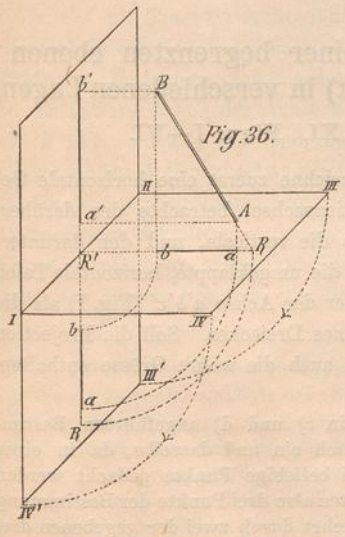


Fig. 36.

Durch Drehung um einen Endpunkt a parallel zur verticalen Tafel ergibt sich in $a'b'''$, d. i. im Aufriss, und ebenso durch Drehung oder Umlegen um einen Punkt a' parallel zur horizontalen Tafel in ab^5, d. i. im Grundriss, wieder die wahre Grösse.

Man drehe daher ab in ab'' parallel zur Projectionsachse, zeichne aus b'' eine Senkrechte und aus b' eine Wagrechte, so schneiden sich beide in b'''.

Oder man mache $a'b^4$ gleich $a'b'$, fälle aus b^4 die Senkrechte nach abwärts und ziehe aus b parallel zur Projectionsachse, wodurch sich b^5 ergibt; $a'b'''$ sowie ab^5 sind gleich der wahren Länge. Ferner ist in diesem Falle der Winkel bab^5 gleich dem Neigungswinkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel einschliesst, und der Winkel bei b''', welcher durch die Senkrechte aus b''' und durch $b'''a'$ gebildet wird, gleich dem Neigungswinkel, welchen die Gerade, wenn hinlänglich verlängert, mit der verticalen Projectionsebene bildet; ebenso ist in diesem speciellen Falle auch der Winkel bb^5a gleich dem Winkel bei b'''.

§ 106. In Fig. IX sind wiederholt, wie in Fig. VII, die beiden Projectionen $(ab, a'b')$ einer Geraden gegeben; es soll nicht nur die wahre Grösse derselben, sondern auch deren Neigungswinkel zu jeder der beiden Tafeln gefunden werden.

Man denke sich vorerst durch die Horizontalprojection ab eine Ebene gelegt, welche zur horizontalen Tafel senkrecht stehe; ihre horizontale Projection fällt mit der Projection ab zusammen, d. h. die Ebene erscheint von oben gesehen als Linie. Diese Ebene schneidet die horizontale Tafel nach einer Geraden, deren Projection, wie die Ebene selbst, mit der Richtung ab zusammenfällt. Um diese Schnittkante denke man sich die Ebene mit der darinliegenden Geraden in die horizontale Tafel umgelegt; die beiden Endpunkte der Geraden beschreiben sodann während des Umlegens Viertelskreise, deren Ebenen senkrecht zur horizontalen Tafel stehen, mithin im Grundrisse als die zu ab rechtwinkligen Geraden aa''', bb''' sich darstellen. Da nun die Entfernungen der Punkte a und b von der horizontalen Tafel gleich den Entfernungen a' und b' von der Projectionsachse sind (siehe § 101), so ergibt sich für die Auffindung der wahren Grösse folgendes Verfahren.

Man errichte zu ab die Senkrechten aa''', bb''', nehme die Abstände der Punkte a', b' von der Projectionsachse in den Zirkel und trage sie von a nach a''' und von b nach b'''; $a'''b'''$ ist sodann die verlangte wirkliche Länge der gegebenen Geraden. Verlängert man $b'a'$ und ba in der Richtung gegen a', a, also nach abwärts, so schneidet die Gerade $(ab, a'b')$ die horizontale Tafel in (R, R'), und bRb''' ist der Neigungswinkel, welchen die gegebene Gerade mit der Horizontalebene bildet.

In ganz der gleichen Weise hat man auch die Gerade um ihre verticale Projection $a'b'$ umlegen kön-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nen*), indem man die Abstände a und b von der Projectionsachse (d. i. von der verticalen Tafel) von a' nach a'' und von b' nach b'' auf die zu $a'b'$ rechtwinkligen Geraden $a'a''$, $b'b''$ trägt.

Die Strecke $a''b''$ ist nun ebenso wie $a'''b'''$ gleich der wirklichen Länge; der Neigungswinkel der Geraden $(ab, a'b')$ zur verticalen Tafel ist gleich dem Winkel, welcher durch die Verlängerung von $a'b'$ und $a''b''$ rechts oben entstehen würde.

§ 107. In Fig. X sind zwei Punkte durch ihre Projectionen (a, a'), (b, b') in der horizontalen Tafel angenommen: es sollen aus diesen zwei Gerade gezeichnet werden, welche sich in einem Punkte (s, s') schneiden.

Man bestimme zunächst aus (a, a') die Lage der einen Geraden $(ac, a'c')$ beliebig und ziehe z. B. aus dem Grundrisse b die Gerade bd, welche ac in s schneidet. Soll nun s ein Schnittpunkt zweier Geraden sein, so ist damit die Verticalprojection s' vollständig bestimmt, da nach § 101 die Projectionen eines Punktes stets in einer Senkrechten (Projicirenden) zur Achse liegen müssen, der Schnittpunkt aber auch auf der zuerst gegebenen Geraden $(ac, a'c')$ liegen muss. Man ziehe also aus s eine Senkrechte, bis sie $a'c'$ in s' schneidet, und verbinde b' mit s', so sind $(ac, a'c')$, $(bd, b'd')$ die Projectionen der sich schneidenden Geraden. Denkt man sich ferner eine dritte Gerade, welche z. B. in wagrechter Lage durch die beiden gegebenen Geraden nach abwärts gleitet, so erzeugt diese eine Ebene, welche die horizontale Tafel in der Richtung $(ab, a'b')$ schneidet. Der Schnitt einer Ebene mit einer der beiden Projectionstafeln heisst die Spur oder Trace der Ebene; so ist die punktirte Gerade ab eine horizontale Trace, deren verticale Projection $a'b'$ mit der Projectionsachse zusammenfällt.

Die ebene Fläche (Ebene).

§ 108. Eine ebene Fläche kann entweder begrenzt oder auch unbegrenzt gedacht werden; eine unbegrenzte ebene Fläche heisst einfach eine Ebene; zu den begrenzten ebenen Flächen gehören: das Dreieck, das Parallelogramm, die Kreis- und Ellipsfläche u. s. w. Eine Ebene entsteht, wenn auf zwei sich schneidenden oder zwei parallelen Geraden eine dritte Gerade fortgleitet, oder wenn eine Gerade durch einen Punkt und eine feststehende Gerade sich bewegt. Eine Ebene ist somit, abgesehen von ihrer Ausdehnung oder Begrenzung, durch folgende Elemente ihrer Lage nach bestimmt:

a) durch zwei sich schneidende Gerade;
b) durch zwei parallele Gerade;
c) durch eine Gerade und einen Punkt, welcher nicht in der Verlängerung der Geraden liegt;
d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.*)

In Bezug auf die Lage, welche eine Ebene oder ebene begrenzte Fläche gegen zwei Projectionstafeln einnehmen kann, unterscheidet man folgende Fälle:

1. Eine Ebene kann zu einer der beiden Tafeln parallel sein, in welchem Falle sie dann zur andern immer senkrecht steht; ihre Projectionen stellen sich in der ersten Tafel als eine Ebene, oder wenn man sich die Fläche durch Gerade allseitig begrenzt denkt, als eine Flächenfigur nach ihrer wahren Grösse und Gestalt dar; in der zweiten Tafel projicirt sie sich als eine zur Projectionsachse parallele Gerade (siehe Fig. I, Tafel XI).

2. Eine ebene begrenzte Fläche (Figur) kann zu einer der beiden Tafeln senkrecht, zur andern schief sein, in welchem Falle sie in der ersten als gerade Linie, in der zweiten als verkürzte Flächenfigur erscheint (siehe Fig. I^a, II, III und IV, Tafel XI).

3. Eine ebene Fläche kann zu beiden Projectionstafeln senkrecht stehen, in welchem Falle sie in beiden als eine Gerade erscheint, welche zur Projectionsachse senkrecht steht (siehe abc, $a'b'c'$ in Fig. V, Tafel XI).

4. Eine ebene Fläche kann endlich zu beiden Tafeln eine schiefe Lage haben; beide Projectionen sind sodann Flächenfiguren, deren jede mehr oder weniger verkürzt erscheint (siehe abc, $a'b'c$ in Fig. VI, Tafel XI).

Die wahre Grösse und Gestalt einer Fläche ist also nach dem oben Gesagten nur dann aus einer ihrer Projectionen ersichtlich, wenn sie parallel zu einer Tafel ist; in allen übrigen Lagen erscheint sie verkürzt.

Darstellung einer begrenzten ebenen Fläche (Dreieck) in verschiedenen Lagen.

Tafel XI. Figur I—VI.

§ 109. Man zeichne zuerst eine horizontale Gerade als die Projectionsachse, betrachte den darüberliegenden Raum als die verticale, und den darunterliegenden Raum als die umgeklappte, horizontale Tafel, bestimme sodann über der Achse $a'b'c'$ (Fig. I) als die Verticalprojection eines Dreieckes. Soll die Projection $a'b'c'$ nun zugleich auch die wahre Grösse enthalten,

*) Man wende für einen Augenblick die Zeichnung, betrachte $a'b'$ als Grundriss und verfahre damit wie vorhin mit der Projection ab.

*) Die beiden in c) und d) angeführten Bestimmungen sind eigentlich ein und dasselbe, da in einer Geraden immer zwei beliebige Punkte gedacht werden können, mit dem dritten also drei Punkte der Bestimmung d) bilden, und umgekehrt durch zwei der gegebenen drei Punkte immer eine Gerade gelegt werden kann, wodurch die Bestimmung d) mit Bestimmung c) identisch wird.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

so muss (nach § 108) die Horizontalprojection der Fläche eine zur Achse parallele Gerade $a\,b\,c$ sein. Die Fläche ist also parallel zur verticalen und senkrecht zur horizontalen Tafel. Bringt man die Horizontalprojection $a\,b\,c$ in die Lage von $a''\,b''\,c''$ (Fig. I[a]), so ändert die Fläche ihre Lage nur zur verticalen Tafel, und die Entfernungen der Punkte a''', b''', c''' von der Achse bleiben demnach die gleichen. Man ziehe daher aus a'', b'', c'' die Senkrechten, sowie aus a', b', c' (Fig. I) die Wagrechten, so ergibt sich der Aufriss a''', b''', c'''. Die Fläche erscheint sodann auch im Aufriss verkürzt, da sie zur verticalen Tafel schief steht.

§ 110. In Fig. II zeichne man zunächst das reguläre Fünfeck $a\,b\,c\,d\,e$ (siehe § 48) und errichte aus dessen Eckpunkten die Senkrechten (Projicirenden). Angenommen, es würden nun sämmtliche Verticalprojectionen der Ecken a, b, c, d, e in der Achse oder in einer Parallelen zur Achse liegen, so würde damit die Fünfecksfläche in der horizontalen Tafel oder parallel zu derselben liegen, und die Fläche wäre in Wirklichkeit ein reguläres Fünfeck.

Nimmt man dagegen, wie dies in Fig. II der Fall ist, die Verticalprojectionen in einer zur Achse geneigten Geraden $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ an, so ist die Fläche schief oder geneigt zur horizontalen und senkrecht zur verticalen Tafel; in ersterer erscheint sie deshalb als eine verkürzte Flächenfigur*), in der zweiten als eine Gerade. Ihr Neigungswinkel zur horizontalen Tafel ist gleich dem Winkel, welchen die Gerade $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ mit der Projectionsachse bildet.

Soll nun die wahre Grösse der Fläche gefunden werden, so muss dieselbe parallel zu einer der beiden Tafeln gedreht oder in eine der Tafeln umgelegt werden. Man nehme die Entfernungen der Punkte a, b, c, d, e von der Achse, denke sich dieselbe perpendiculär über a', b', c', d, e im Raume und sodann um die Gerade $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ als Trace**) rechtwinklig umgelegt, so ergibt sich in $a''\,b''\,c''\,d''\,e''$ die wahre Grösse der Fünfecksfläche. Es ist demnach die Entfernung $a'\,a''$ gleich der Entfernung a von der Achse u. s. w.

§ 111. In Fig. III sind die Projectionen $(a\,b\,c, a'\,b'\,c')$ einer Dreiecksfläche gegeben. (Ihre Stellung zu den Tafeln ist ähnlich wie bei Fig. I[a].) Um die wahre Grösse derselben zu finden, trage man $c\,b\,a$ von c'' aus parallel zur Achse (vgl. Fig. I) in $c''\,b''\,a''$ an, ziehe aus diesen Punkten die Senkrechten und aus c', a', b' die Wagrechten, so ergibt sich $a'''\,b'''\,c'$ als die wahre Dreiecksgrösse, oder kürzer: man ziehe die Senkrechte $c\,c'\,1\,2$, ferner aus a', b' die Horizontalen vorläufig unbestimmt lang, trage aus dem Grundrisse $c\,b$ von 2 nach links in $2\,b'''$, und ebenso $c\,a$ von 1 nach a''' an, so ergibt sich das gleiche Dreieck $a'''\,b'''\,c'$ als die zur verticalen Tafel parallel gestellte Dreiecksfläche.*) Das Dreieck $a^4\,b^4\,c^4$ ist die um die horizontale Trace $c\,b\,a$ umgelegte Figur ($a\,a^4$ gleich dem Abstande a von der Achse, b, b^4 gleich dem Abstande b' von der Achse u. s. w., vgl. Fig. II).

§ 112. In Fig. IV sind $(a\,b\,c, a'\,b'\,c')$ als die Projectionen eines in der horizontalen Tafel liegenden Dreieckes gegeben. Durch Erheben desselben um den fixen Punkt (c, c') und zwar so, dass die Ecken stets gleichen Abstand von der verticalen Tafel behalten, erhält es z. B. im Aufrisse zuerst die Lage von $a''\,b''\,c'$; durch Fällen der Senkrechten aus a'', b'', sowie durch Ziehen der zur Achse parallelen Geraden $a\,a'''$, $b\,b'''$ ergibt sich die verkürzte Fläche $a'''\,b'''\,c$. Bei fortgesetzter Drehung um (c, c') wird das Dreieck im Aufrisse einmal die Lage von $a^4\,b^4\,c'$ einnehmen, und die projicirenden Senkrechten aus a^4, b^4, c' fallen nunmehr in eine Gerade zusammen, weshalb sich das Dreieck auch im Grundriss als eine Gerade $a^5\,c\,b^5$ darstellt. Die Dreiecksfläche steht somit senkrecht zu beiden Projectionstafeln. (Siehe § 108.) Die verticalen Tracen der verschiedenen Stellungen fallen hierbei mit den Projectionen $a''\,b''\,c'$ und $a^4\,b^4\,c'$, sowie die horizontale Trace der beiden letzten Lagen mit $a^5\,c\,b^5$ zusammen. Bei der letzten Stellung bilden also die Geraden $a^4\,b^4\,c'$ und $a^5\,c\,b^5$ zugleich die Projection des Dreieckes, wie auch die horizontale und verticale Trace der Dreiecksebene.

Wären, wie in Fig. V, die beiden Projectionen $(a\,b\,c, a'\,b'\,c')$ einer zu beiden Tafeln senkrecht stehenden Dreiecksfläche schon vorhanden, so könnte die wahre Grösse derselben durch Umlegen in die horizontale Tafel (wodurch man eine der Fig. IV ähnliche Zeichnung erhielte) gefunden werden, oder man legt die Fläche um ihre verticale Trace $c'\,b'\,a'$ in die verticale Tafel um, d. h. man mache $c'\,c''$ gleich dem Abstande c von der Achse, $a'\,a''$ gleich dem Abstande a von der Achse u. s. w.

§ 113. Fig. VI zeigt die beiden Projectionen $(a\,b\,c, a'\,b'\,c')$ eines Dreieckes in beliebig schiefer Stellung zu beiden Tafeln. Das Dreieck erscheint dabei in jeder Projection als verkürzte Flächenfigur; die Eckpunkte (a, a'), (b, b'), (c, c') konnten beliebig gewählt werden, sofern nur je zwei Punkte (a, a'), $(b, b'\ldots)$ in einer Senkrechten (Projicirenden) liegen (siehe § 101), da durch

*) Die Fläche ist also in diesem Falle kein reguläres Fünfeck, sondern erscheint nur im Grundrisse als ein solches.

**) Denkt man sich die Fünfecksfläche gegen die verticale Tafel verlängert, so schneidet sie diese nach der Geraden $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$, d. h. die Trace fällt mit der Verticalprojection der Fläche zusammen und die Entfernungen der einzelnen Fünfeckspunkte von der Trace sind gleich den Entfernungen der Punkte a, b, c, d, e von der Achse.

*) Diese Abkürzung des Verfahrens ist leicht erklärlich, indem ja $2\,b'' = c''\,b'' = c\,b$, $1\,a''' = c''\,a'' = c\,a$ ist. Man hat also hierbei lediglich die Gerade $c''\,b''\,a''$, sowie die Senkrechten $a''\,a'''$, $b''\,b'''$ erspart.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

drei Punkte stets nur eine Ebene gelegt werden kann. (Siehe § 108.)

Um die wahre Grösse der Dreiecksfläche zu erhalten, muss zunächst eine der beiden Tracen, z. B. die horizontale, gefunden werden. Man verlängere hierzu irgend eine Gerade, welche der Dreiecksebene angehört und die horizontale Tafel noch schneidet, z. B. die Kante $(b'\,c',\ b\,c)$, bis sie in (R', R) die horizontale Tafel schneidet, so sind (R', R) die beiden Projectionen eines Tracenpunktes; da nach der gegebenen Zeichnung die Ecke (a, a') schon in der horizontalen Tafel liegt, so bildet (a, a') einen weitern Tracenpunkt, und a mit R verbunden ist eine horizontale Trace oder Spur der Dreiecksebene, um welche ähnlich wie bei den vorhergehenden Figuren IV und V die Fläche umgelegt werden kann. Hierzu ist jedoch die Annahme einer dritten Projectionstafel nöthig, welche zu der betreffenden Trace rechtwinklig stehen muss. Die Gerade $b^4\,a''\,3'\,2'$ stellt diese Tafel vor, welche senkrecht zur horizontalen Projectionsebene zu denken ist. Zu dieser dritten Tafel steht nun die Dreiecksebene senkrecht*), und projicirt sich daher in dieser dritten Tafel als eine Gerade. Um diese Projection auf einer und derselben Zeichnungsfläche darstellen zu können, ist ferner nothwendig, dass man die dritte Tafel um ihre Basis (Projectionsachse), welche mit ihrer Projection zusammenfällt, in die horizontale Tafel umklappt; die dritte Projection $a''\,c''\,b''$ der Fläche ist nun in der nach rechts umgeklappten Tafel zu denken.

Um die Lage von $a''\,c''\,b''$ zu bestimmen, denke man sich b in der Entfernung $b', 2$ perpendiculär über b im Raume, b von da aus nach rechts, senkrecht gegen die dritte Tafel projicirt und von $2'$ aus rechtwinklig, d. h. mit der Tafel nach b'' umgelegt. Da a in der horizontalen Tafel liegt, trifft seine dritte Projection in die Achse nach a'', und a'' mit b'' verbunden ist die verlangte dritte Projection (Kreuzriss oder Seitenriss). Ist die Zeichnung genau ausgeführt, so muss auch $3'\,c''$ gleich $3\,c'$ sein, indem ja $2'\,b''$ ebenfalls gleich $2\,b'$ bestimmt wurde.

Die wahre Grösse der Dreiecksfläche ergibt sich nun durch Umlegen dieser dritten Projection um einen fixen Punkt, etwa (a, a'') in gleicher Weise wie bei Fig. IV, indem man nur $b^4\,a''\,2'\ldots$ als Projectionsachse, $a''\,b''\,c''$ als Vertical- und $a\,b\,c$ als Horizontalprojection zu betrachten braucht, $a''\,c''\,b''$ um a'' nach $a''\,c^4\,b^4$ legt, aus $c^4\,b^4$, parallel $R\,a$, und aus b und c parallel mit $2'\,a''\,b^4$, d. h. mit der Projectionsachse zieht. (Vgl. Fig. IV.) $a\,b'''\,c'''$ ist die wahre Grösse der Dreiecksfläche.

*) Um sich davon eine richtige Vorstellung zu machen, nehme der Lernende irgend eine Fläche (Karton oder Kartenblatt) zur Hand und stelle sie senkrecht über der Geraden $b''\,a''\,3'\,2'$ auf, so versinnlicht diese die dritte Tafel. Legt man nun ein zweites Kartenblatt mit einer Kante nach $a\,R$, so steht die Ebene des letzteren zur ersten Ebene senkrecht, gleichviel welche Neigung die durch $a\,R$ gehende Ebene zur horizontalen Tafel auch haben mag.

§ 114. Ist P als ein in der Dreiecksfläche liegender Punkt zuerst im Grundriss bestimmt, so findet sich sein Aufriss P' dadurch, dass man durch P irgend eine Gerade legt, welche der Dreiecksfläche angehört, dieselbe also in ihren Kanten in zwei Punkten schneidet; diese Punkte sodann hinauf projicirt und oben verbindet, so liegt P' in der Verticalprojection dieser Geraden. Man zeichne daher z. B. aus der Ecke c durch P die Gerade $c\,P\,n$, projicire n nach n' und ziehe $c'\,n'$. Die Verticalprojection P' liegt nun auf der Geraden $c'\,n'$ und auf der Projicirenden aus P. Das Auffinden der Projectionen P'', P''' ist nach dem bisher Gesagten aus der Zeichnung leicht zu ersehen.

Projection der Körper.

§ 115. Unter einem Körper versteht man einen allseitig durch Flächen begrenzten Raum. Die Körper sind entweder eckige oder runde. Unter den eckigen Körpern versteht man im Allgemeinen solche, die von lauter Ebenen begrenzt werden; unter den runden aber solche, welche ganz oder zum grössten Theil von krummen Flächen begrenzt sind. Zu den eckigen Körpern gehören z. B. Prismen und Pyramiden; zu den runden der Cylinder, der Kegel, die Kugel u. s. w. Da eckige Körper im Allgemeinen leichter darzustellen sind als runde, so machen wir mit jenen den Anfang.

Darstellung eines hohlen vierseitigen*) Prismas mit quadratischer Grundfläche.

Tafel XII. Figur I—VI.

§ 116. Man zeichne im Grundriss (Fig. I) zuerst das Quadrat $a\,b\,c\,d$, dessen Fläche in der horizontalen Tafel liegen soll, dessen verticale Projection somit in der Achse liegt (vgl. Fig. IV, Taf. XI). Ueber a', b', c', d' senkrecht errichte man die Kanten. Da bei der Parallelstellung des Körpers a', d' und b', c' im Aufrisse zusammenfallen, so ist dies auch mit den über diesen Punkten errichteten Kanten der Fall.**)

Der Körper steht also parallel zur verticalen Tafel, d. h. gewisse Flächen desselben sind parallel mit dieser. Nun bringe man die Verticalprojection von Fig. I in die Lage von Fig. II, so dass die Grundfläche $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$ zur horizontalen Tafel etwa unter 30^0 geneigt ist, wodurch die Stellung des Körpers lediglich

*) Darunter sind natürlich nicht alle, sondern nur die Höhen oder Längenseiten zu verstehen.

**) Man denke sich vorerst den Körper massiv, also nicht hohl, wie in der Zeichnung angegeben ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zur horizontalen Tafel geändert wurde, indem der Körper jetzt auf einer Kante ($b\,c$, $b'\,c'$) ruht, die Entfernungen seiner Eckpunkte von der verticalen Tafel indess gleich blieben. Zieht man nun aus a', b', c', d', $1', 2', 3', 4'$ der Fig. II, sowie aus a, b, c, d, $1, 2, 3, 4$ der Fig. I die Projicirenden, so ergibt sich der Grundriss zu Fig. II.

In Fig. III ist der Grundriss gleich dem Grundriss in Fig. II, jedoch in schiefer Stellung zur verticalen Tafel gezeichnet. Die Projicirenden aus $a, b, c, d \ldots$ der Fig. III und $a', b', c', d' \ldots$ der Fig. II ergeben die Verticalprojection der Fig. III. Der Körper steht wie zuvor auf der Kante ($b\,c$, $b'\,c'$), jedoch schief zu beiden Tafeln. Die Stellung des Körpers zur horizontalen Tafel ist dabei dieselbe, wie in Fig. II.

Durch weitere Drehung der Verticalprojection Fig. III in die Lage von Fig. IV und Ziehen der entsprechenden Projicirenden aus $a', b', c', d' \ldots$ der Fig. IV und aus $a, b, c, d \ldots$ der Fig. III ergibt sich die Horizontalprojection $a, b, c, d \ldots$ zu Fig. IV. Der Körper steht nunmehr auf einer Ecke (b, b'). Um den Aufriss Fig. III in Fig. IV zu copiren, beschreibe man zunächst etwa mit dem Halbmesser $b'\,a'$ der Fig. III aus dem beliebig gewählten Punkt b' Fig. IV einen Kreisbogen, bestimme von b' aus den Erhebungswinkel beliebig und mache die Winkel $c'\,b'\,a'$ und $a'\,b'\,2'$ in Fig. IV gleich den entsprechenden Winkeln in Fig. III; ebenso mache man in Fig. IV die Kanten $b'\,a'$, $b'\,c'$, $b'\,2'$ gleich lang den entsprechenden Kanten in Fig. III und ziehe aus $a', c', 2'$ Parallele zu $b'\,c'$, $b'\,a'$, $b'\,2'$ u. s. w.*)

Zur Ausführung der Horizontalprojection, Fig. IV, würde es genügen, wenn man die Projectionen der drei von einer Ecke, z. B. von b ausgehenden Kanten sucht und dann zu diesen aus $a, c, 2$ Parallele zieht. So ist z. B. $a\,d$, $1\,4$, $2\,3$ parallel und gleich lang mit $b\,c$; ebenso $a\,1$, $d\,4$, $c\,3$ parallel und gleich lang mit $b\,2$ u. s. w.

Soll der Körper hohl und an beiden Querflächen offen sein, wie dieses hier bei sämmtlichen Projectionen der Fall ist, so können hier mit Vortheil die Diagonalen der beiden quadratischen Flächen benützt werden.

Man ziehe desshalb nachträglich die Diagonalen ($a\,c$, $b\,d$), ($a'\,c'$, $b'\,d'$) und ($1\,3$, $2\,4$), ($1'\,3'$, $2'\,4'$) in jede der Projectionen, bestimme im Grundriss der Fig. I zuerst die Dicke der Körperwandung und trage sie in die Projectionen in gleicher Ordnung, wie vorher die Körper gezeichnet wurden, über; die Ausführung ist aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

*) Wie schon aus Fig. I, II, III ersichtlich, sind die Projectionen gleichlanger paralleler Kanten (Linien) in jeder der Projectionen unter sich parallel und gleich lang. Da die projicirenden Ebenen, welche durch zwei parallele Gerade gehen, ebenfalls parallel sind, so schneiden sie auch die Projectionsebene nach parallelen Geraden.

Zusammenstellung verschiedener Körper und deren Projectionen.

Tafel XIII. Fig. I und II.

§ 117. Nachdem die Projectionsachse gegeben, zeichne man zuerst die drei Körper (d. i. ein Prisma mit quadratischer Grundfläche und eben solcher Deckplatte an einem Postament lehnend und daneben einen niedern Obelisk) in gerader geometrischer Ansicht, bestimme im Grundrisse $a\,d$, $b\,c$ gleich $a'\,b'$ ($c'\,d'$) und ebenso die Kanten $e\,f$, $h\,g$, $i\,m$, $k\,l$ der Deckplatte gleich $e'\,h'$ (oder $l\,m$) und zwar so, dass die Deckplatte des Prismas nach allen vier Seiten gleiche Ausladung hat. Länge und Breite des Postamentes konnte beliebig angenommen werden; der Obelisk habe eine quadratische Grundfläche ($A\,B\,C\,D$, $A'\,B'\,C'\,D'$). Sind die beiden Projectionen der Fig. I gezeichnet, so bringe man den Grundriss in die schiefe Lage von Fig. II, ziehe aus dessen sämmtlichen Eckpunkten a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, e, f, $g \ldots$, sowie aus den Punkten a', b', c', d', $1', 2', 3', 4'$, e', f', g' der Fig. I die Projicirenden, wodurch sich die Verticalprojection der Fig. II ergibt. Zum Zeichnen der auf dem Prisma liegenden Deckplatte können die Diagonalen ($1\,3$, $1'\,3'$) ($2\,4$, $2'\,4'$) in jeder der Projectionen zur Abkürzung benützt werden. Fig. I kann eine Parallelstellung, Fig. II eine schiefe Stellung der Körper zur verticalen Tafel genannt werden. Die Ausführung dieser Projectionen ist aus der Zeichnung unschwer zu entnehmen und dürfte nach dem Vorausgegangenen keine Schwierigkeiten bieten.

Darstellung eines gothischen Pfeilerstückes oder Pfostens in verschiedenen Lagen.

Tafel XIV. Figur I—III.

§ 118. Die Grundfläche des Pfeilerstückes bilde ein reguläres Achteck, die Oberfläche ein Quadrat. Den Uebergang aus dem Achteck zum Quadrat vermittelt eine karnissförmige Abschrägung, deren Gestalt aus dem Aufrisse in Fig. I zu entnehmen ist. Hierbei konnten die Curven, welche hier die karnissartige Abschrägung begrenzen, in $1'\,i'\,b''$ und $2'\,k'\,c''$ beliebig und nach ihrer wahren Form gezeichnet werden, da die Fläche, in welcher diese Curven liegen, parallel zur verticalen Tafel angenommen wurde. Die Curven projiciren sich daher im Grundrisse als die Geraden $I\,i\,b$, $II\,k\,c$; dasselbe ist auch bei den übrigen Ecken des Grundrisses der Fall. Die Karnisskanten ($2\,l\,d$, $2'\,l'\,d''$), ($1\,q\,a$, $1'\,q'\,a''$) u. s. w. projiciren sich in jeder der Tafeln als Gerade. Ferner fallen im Aufrisse die gleichen Curven rückwärts, nämlich $4'\,o'\,g''$, $3'\,n'\,f''$ mit den Projectionen $1'\,i'\,b''$, $2'\,k'\,c''$ zusammen, da die Flächen, auf welchen sie liegen, hinter einander stehen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

In Fig. II ist der Aufriss von Fig. I in eine schiefe Stellung gebracht, so dass der Pfosten auf einer der Achteckskanten ($d\,e, d'\,e'$) ruht und die achteckige Grundfläche unter 45^0 zur horizontalen Tafel geneigt ist. Zwei der Achteckskanten, nämlich ($de, d'e'$) und ($ah, a'h'$), sowie zwei Kanten des Quadrates ($I\ IV, I'\ IV'$) und ($II\ III, II'\ III'$) stehen hierbei senkrecht zur verticalen Tafel. Als Stütze wurde im Aufrisse Fig. II zuerst ein Balken von beliebiger Dicke, sowie dessen Grundriss gezeichnet. Mittels der Projicirenden aus dem Aufrisse der Fig. II und dem Grundrisse der Fig. I ergibt sich die Horizontalprojection der Fig. II. Die Horizontalprojection Fig. III ist gleich der in Fig. II, jedoch in schräger Lage zur verticalen Tafel (vergl. Fig. II. Taf. XIII).

Durch Errichten und Ziehen der Projicirenden aus dem Grundrisse Fig. III und dem Aufrisse Fig. II aus jedem der Eckpunkte u. s. w. ergibt sich schliesslich der Aufriss von Fig. III. Zur Vollendung dieses Aufrisses ist jedoch folgendes Verfahren einfacher:

Man denke sich den Pfosten vorerst ohne Abschrägung als einen einfachen Block, dessen Projectionen ($A\,B\,C\,D\ I\ II\ III\ IV, A'\,B'\,C'\,D'\ I'\ II'\ III'\ IV'$) sind; ($B\,C, B'\,C'$) bildet sonach eine Quadratseite, welche mit der Achtecksseite ($d\,e, d'\,e'$) zusammenfällt.*) In das Quadrat $A'\,B'\,C'\,D'$ zeichne man die Diagonalen $A'\,C'$, $B'\,D'$, ziehe ferner aus $b'\,g'$, $c'\,f'$ der Fig. II die Projicirenden, welche auf den Quadratseiten $A'\,B'$, $D'\,C'$, die Punkte b', c', g', f' als Achteckspunkte abschneiden.

Die weitern Achteckspunkte $a'\,d'\,h'\,e'$ ergeben sich, wenn man durch je zwei Schnittpunkte der letztgenannten Projicirenden mit den Diagonalen die Parallelen zu $A'\,B'$ oder $D'\,C'$ zieht. Aus den Achteckspunkten $a', b', c', d', e' \ldots$ ziehe man nun die Parallelen zu $A'\,I'$, d. i. zu den Längenkanten des Blockes, sowie aus den Punkten $a'', h'', q', p', 1', 4' \ldots$ der Fig. II die Projicirenden, so ergeben sich in Fig. III auf den vorher gezeichneten Parallelen $h'\,h''$, $a'\,a''$, sowie auf $A'\,I'$, $D'\,IV'$ die entsprechenden Punkte a'', h'', q', p' und $1', 4' \ldots$ Die Hilfspunkte p', q' für die Curven $4'\,p'\,h''$, $1'\,q'\,a''$ liegen dabei jedesmal in der Mitte je zweier Parallelen $A'\,I'$, $a'\,a''$, $D'\,IV'$, $h'\,h''$, da diese Hilfspunkte gleich anfänglich in Fig. I und II so angenommen wurden. Um die übrigen Punkte $i', b'', 2', k', c'', l', d'' \ldots$ zu erhalten, ziehe man die Geraden $1'\,2'$, $2'\,3'$, $3'\,4'$, ferner $v\,i'\,k'$, $l'\,m'$, $n'\,o'$ und $b''\,c''$, $d''\,e''$, $f''\,g''$ parallel zu den Quadratseiten $I'\,II'$, $II'\,III' \ldots$ u. s. w.

*) Im Grundrisse der Fig. III wurden die unsichtbaren Seiten des Achteckes nicht weiter angegeben, da bei obiger Abkürzung des Verfahrens diese zur Herstellung der Verticalprojection nicht unbedingt nöthig waren. (Vergl. übrigens die Grundrisse Fig. II und III.)

Darstellung eines senkrechten und schiefen Prismas mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung (Entwicklung der Oberfläche).

Tafel XV, Fig. I—II^a.

§ 119. Prismen werden eingetheilt in senkrechte und schiefe, je nachdem die Seitenflächen senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen. Bei senkrechten bilden die Seitenflächen mit der Grundfläche (Basis) rechte Winkel, bei schiefen bilden sie spitze bezw. stumpfe Winkel. Die Grundfläche kann bei beiden Gattungen ein beliebiges regelmässiges oder unregelmässiges Polygon sein; je nach der Seitenzahl des Polygones unterscheidet man drei-, vier-, sechs- und mehrseitige Prismen. Ein Prisma heisst regelmässig, wenn seine Seitenflächen senkrecht zur Basis stehen und diese Basis ein reguläres Polygon ist*); in allen andern Fällen heisst das Prisma unregelmässig (irregulär).

Fig. I zeigt die Darstellung eines senkrechten und regulären sechsseitigen Prismas, welches durch eine schiefe Ebene, deren Lage senkrecht zur verticalen Tafel ist, geschnitten wird; ihr Neigungswinkel zur horizontalen Tafel wurde hier gleich 45^0 angenommen. $R\,R'$ bildet die horizontale, $R'\,4'\,3' \ldots$ die verticale Spur der schneidenden Ebene. Die Grundfläche des Prismas liegt in der horizontalen Tafel und bildet in derselben das reguläre Polygon $a\,b\,c\,d\,e\,f$. Die horizontale Projection $1\,2\,3\,4\,5\,6$ der schrägen Schnittfläche fällt hierbei mit der Grundfläche zusammen, da die Kanten des Prismas zugleich die Projicirenden sind. Um die wahre Grösse und Form der schrägen Schnittfläche zu bestimmen, verfahre man entweder, wie bei § 110 (Taf. XI, Fig. II) gezeigt wurde, oder ist, wie hier, der Raum dazu nicht vorhanden, so zeichne man eine Gerade $I\ IV\ b \ldots$ parallel zur Achse, betrachte diese als die Projection einer zur verticalen Tafel parallelen Ebene und klappe die Schnittfigur in dieselbe um den fixen Punkt $(2, 2')$ nach aufwärts. Man errichte also über $1', 3', 4', 5', 6'$ die Senkrechten, mache $1'\,1''$ gleich $I\,1$, $3'\,3''$ gleich $III\,3$, $4'\,4''$ gleich $IV\,4$ u. s. w., so ist $1''\ 2''\ 3''\ 4''\ 5''\ 6''$ die verlangte wahre Grösse der Schnittfigur.

Entwicklung oder Netzbestimmung des senkrechten Prismas.

§ 120. Fig. I^a zeigt das Netz oder die in eine Ebene gelegten Körperflächen. Eine solche Netzbestim-

*) Hierbei ist keineswegs nöthig, dass eine der Querflächen, welche das Prisma an beiden Enden begrenzen, ein reguläres Polygon ist, da das Prisma an beiden Seiten durch schiefe Ebenen abgeschnitten sein könnte, sondern das Prisma ist immer regulär, wenn ein Durchschnitt (Normalschnitt), welcher zu den Längenkanten senkrecht steht, ein reguläres Polygon bildet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

mung ist z. B. dann nöthig, wenn der Körper aus Blech, Pappe u. dgl. gebildet werden soll. Bei eckigen Körpern, welche durch Ebenen begrenzt sind, bietet die Netzentwicklung keine weitern Schwierigkeiten, da man nur alle Flächen in ihrer wahren Grösse und in gleicher Ordnung, wie bei dem Körper, auf eine Ebene auszubreiten braucht.

Die Netzbestimmung in Fig. I^a erhält man auf folgende Weise: Man ziehe die Gerade $e f a b \ldots$, mache $a b$, $b c$, $c d \ldots$ gleich den Seiten $a b$, $b c$, $c d \ldots$ der Basis (in Fig. I), errichte über a, b, c, $d \ldots$ Senkrechte, mache diese gleich lang den entsprechenden Kanten $a' 1'$, $b' 2'$, $c' 3' \ldots$ in Fig. I und verbinde $1, 2, 2, 3, 3, 4$ durch Gerade. $e 5$ wurde hierbei als Trennungskante betrachtet, d. h. als jene Kante, nach welcher man sich den (etwa hohlen) Körper aufgeschnitten dachte. Die auf solche Weise neben einander gelegten Seitenflächen heissen der Mantel. An diesen lege man die Grundfläche mit einer ihrer Seiten, z. B. $c d$, an die gleich benannte Strecke des Mantels, und ebenso die Deckfläche mit einer ihrer Seiten, z. B. $3'' 4''$ (Fig. I), nach $3\ 4$ in Fig. I^a. Das unregelmässige Sechseck $1'' 2'' 3'' 4'' 5'' 6''$ wurde zuerst in vier Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke dann in entsprechend gleicher Ordnung in Fig. I^a von der Geraden $3\ 4$ aus aneinander gelegt.*)

§ 121. Fig. II zeigt die Darstellung eines schiefen Prismas, dessen Basisfläche $a b c d e f$, ein reguläres Sechseck, in der horizontalen Tafel liegt. Die Kanten $(a 1, a' 1')$, $(b 2, b' 2' \ldots)$ sind parallel zur verticalen und schief zur horizontalen Tafel; ihr Neigungswinkel zu letzterer wurde hier gleich 60^0 angenommen. Die Lage einer schiefen, das Prisma schneidenden Ebene $1' R'$ wurde hier ebenfalls unter 60^0 zur horizontalen Tafel gegeben, so dass das Prisma durch die Ebene symmetrisch (antiparallel) zur Grundfläche geschnitten wird. Da gleichliegende (parallele) und ebenso symmetrisch liegende Schnittebenen bei einem Prisma congruente Schnittfiguren ergeben, so ist die Schnittfigur $(1\,2\,3\,4\,5\,6, 1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6')$ in Wirklichkeit congruent der Basisfläche; desgleichen würde auch, wenn das Prisma durch eine zur Basisfläche parallele Ebene $1' x$ geschnitten würde, letzte Figur congruent der Basisfläche sein. Das in Wirklichkeit reguläre Sechseck verkürzt sich seiner Lage entsprechend im Grundrisse zu einem länglichen Sechseck $1\,2\,3\,4\,5\,6$. Die Gerade $1' R'$ bildet die verticale, $R'' R$ die horizontale Trace der schneidenden Ebene, wobei man sich die über die Projectionsachse hinausgehende Verlängerung der horizontalen Trace als in der gleichfalls über die Achse hinaus verlängerten horizontalen Tafel zu denken hat.

*) Der Anfänger thut gut, wenn er sich ein solches Netz ausschneidet und um die gezeichneten Kanten umbiegt: es entsteht sodann das plastische Modell dieses Körpers.

Entwicklung oder Netzbestimmung des schiefen Prismas.

§ 122. Da bei diesem Prisma weder die Grundfläche noch die obere Schnittfigur zu den Kanten desselben senkrecht steht, so wird sich auch der Umfang der Basis bei der Entwicklung, ebenso wie dieses bei der obern Schnittfigur der Fall ist, in eine unbestimmte gebrochene Gerade verwandeln. Man muss daher, um das Netz bestimmen zu können, das Prisma durch eine Hilfsebene schneiden, welche zu den Kanten desselben senkrecht steht (Normalschnitt oder Normalebene). Dadurch wird das schiefe Prisma in zwei Senkrechte — mit schief abgeschnittenen Endflächen — zerlegt, die nun ebenso wie Fig. I entwickelt werden können. Diese Hilfsebene, deren Projectionen $(g' h' i' k' l' m')$ und $(g h i k l m)$ sind, wurde durch die Mitte des Körpers gelegt, so dass die Ebene jede der Kanten halbirt*), mithin das schiefe Prisma in zwei congruente Hälften zerlegt.**)

Nun bestimme man die wahre Grösse dieser senkrechten Durchschnittsfigur, indem man dieselbe etwa um ihre zur verticalen Tafel parallele Diagonale $(g k, g' k')$ dreht, bis sie parallel zur verticalen Tafel ist, d. h. man mache $h' h''$, $m' m''$ gleich den Entfernungen, welche h und m von der Diagonalen $g k$ haben. Dasselbe gilt auch für die Auffindung der Punkte i'', l''. Das Sechseck $g' h'' i'' k' l'' m''$ ist nun die wahre Grösse des Normalschnittes.

Die Ausführung des Netzes Fig. II^a ist ähnlich wie bei Fig. I^a.

Man zeichne nämlich die Gerade $k k$ (Fig. II^a) vorerst von unbestimmter Länge, wähle auf dieser irgend einen Punkt, z. B. g, beliebig, trage von g aus die Seitenlängen $g' h''$, $h'' i''$, $i'' k'$ aus Fig. II auf die Gerade in Fig. II^a nach rechts, und ebenso die Längen $g' m''$, $m'' l''$, $l' k'$ von g auf die Gerade nach links über; errichte in k, l, m, g, h, i, k Senkrechte und mache $g 1$ gleich $g' 1'$ in Fig. I, ebenso $g a$ gleich $g' a'$, $h 2$ gleich $h' 2'$ u. s. w.; $d k 4$ bildet hierbei die Trennungskante der Mantelfläche: endlich sind zur Vollendung des Netzes noch die beiden Querflächen mit je einer beliebigen Seite an die Mantelfläche anzufügen. Da beide Querflächen reguläre Sechsecke sind, so sind auch die einzelnen

*) Dieses wäre nicht unbedingt nöthig, sondern es könnte die Hilfsebene an beliebiger Stelle durch den Körper gelegt werden.

**) Die verticale Trace $g' R'$ dieser Normalebene fällt hierbei wieder mit der Richtung der Verticalprojection $g' h' i' k' l' m'$ zusammen und ihre horizontale Trace fällt in die schon vorhandene der oberen Schnittfläche, so dass also beide Schnittflächen eine gemeinschaftliche horizontale Trace haben. In diesem Falle haben je drei nach einerlei Richtung gehende und symmetrisch liegende Kanten der drei Schnittflächen, z. B. $(cd, c'd')$, $(ik, i'k')$, $(3\,4, 3'\,4')$ u. s. w. einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt (R, R'), welcher in der horizontalen Trace liegt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Strecken $a\,b$, $1\,2$, $b\,c$, $2\,3$ . . der gebrochenen Linien von der gleichen Länge einer Sechsecksseite; es ist daher in diesem Falle gleichgiltig, wo oder mit welcher Seite man die Polygone anlegt. Die punktirte gebrochene Linie $x''\ 1\ x'$ zeigt die Mantelfläche des Prismas, wenn dasselbe aus dem Punkte $1'$ durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird.

Darstellung einer senkrechten, regelmässigen, und einer schiefen, unregelmässigen Pyramide mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzentwicklung.

Tafel XVI. Fig. I—II^a.

§ 123. Pyramiden werden ebenso wie die Prismen in senkrechte und schiefe, mit regelmässiger und unregelmässiger Basisfläche eingetheilt. Eine Pyramide heisst nur dann senkrecht oder regelmässig, wenn ihre Basis ein reguläres Polygon und die Seitenflächen congruente gleichschenklige Dreiecke sind; jede andere Pyramide heisst schief oder unregelmässig. Je nach der Seitenzahl der Grundfläche heisst auch die Pyramide eine drei-, vier-, sechs- oder mehrseitige (vielseitige) Pyramide.

In Fig. I ist eine senkrechte, regelmässige Pyramide dargestellt; deren Basis $(a\,b\,c\,d\ldots, a'\,b'\,c'\,d'\ldots)$ ist ein regelmässiges, in der horizontalen Projectionstafel liegendes Sechseck; $m'\,S'$ heisst die Höhe der Pyramide und (S, S') liegt senkrecht über der Mitte der Grundfläche; $(a\,b\,S,\ a'\,b'\,S')$, $(b\,c\,S,\ b'\,c'\,S')$ . . . heisst je eine Seite der Pyramide. Die schneidende Ebene ist unter einem Winkel von 45° zur horizontalen und senkrecht zur verticalen Tafel angenommen und durchschneidet die Pyramide nach einem unregelmässigen Sechseck, dessen Verticalprojection $1'\,2'\,3'\,4'\ldots$ eine Gerade und dessen Horizontalprojection die verkürzte Flächenfigur $1\,2\,3\,4\ldots$ bildet. $1'\,R, R'\,r$ sind die beiden Tracen der schneidenden Ebene. Je zwei in einer Pyramidenseite liegende Kanten, z. B. $(b\,c, b'\,c')$, $(2\,3, 2'\,3')$, treffen sich, wenn verlängert, in einem Punkte r''' der horizontalen Trace; $r, r, r'\ldots$ sind weitere solche Punkte, in welchen sich je zwei Seiten der Grund- und Schnittfläche in ihrer Verlängerung schneiden. Die wahre Grösse der schiefen Schnittfigur $(1\,2\,3\ldots 1'\,2'\,3')$ wurde durch Umlegen der verticalen Tafel, wie bei Fig. II, Tafel XI, gefunden, d. h. die Entfernungen $1'\,1''$, $2'\,2''$, $3'\,3''\ldots$ wurden gleich gemacht den Entfernungen, welche die Punkte $1, 2, 3\ldots$ von der Achse haben; $1''\,2''\,3''\,4''\ldots$ ist die wahre Grösse der Schnittfigur.

Entwicklung oder Netzbestimmung der senkrechten Pyramide.

§ 124. Da die Seitenkanten der Pyramide sich im Allgemeinen sowohl horizontal, als vertical verkürzt projiciren, so müsste, falls nicht wie in Fig. I eine der Kanten in ihrer wahren Länge erscheint, diese wahre Länge erst durch Drehung gefunden werden. Bei der Stellung jedoch, welche hier die Pyramide zur verticalen Tafel einnimmt, zeigt sich die wahre Länge einer Kante sowohl bei $a'\,S'$, als auch bei $d'\,S'$, da $(a\,S, a'\,S')$ und ebenso $(d\,S, d'\,S')$ parallel zur verticalen Tafel ist; $a'\,S'$ gibt nun auch die wahre Länge der übrigen Seitenkanten an.*)

Man beschreibe daher aus einem beliebigen Punkte S (Fig. I^a) mit dem Radius $S'\,a'$ (Fig. I) einen Kreisbogen, trage auf diesen die wahren Grössen der Basisseiten (d. i. $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$, in Fig. I^a = $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ in Fig. I) als Sehnen in gleicher Ordnung auf und verbinde die Punkte $a, b, c, d\ldots$ durch Gerade, so ist $S\,f\,a\,b\,c\,d\,e\,f$ die Mantelfläche. Legt man die Basis mit einer beliebigen Seite, z. B. $b\,c$ an die gleichbenannte Seite der Mantelfläche, so bildet diese in Verbindung mit dem Mantel das Netz der nicht abgestumpften Pyramide. Soll das Netz der abgestumpften Pyramide, wie hier in der Zeichnung angegeben ist, ausgeführt werden, so mache man die Strecken $a\,1$, $b\,2$, $c\,3\ldots$ des Netzes gleich den wahren Grössen der Kanten $(a\,1, a'\,1')$, $(b\,2, b'\,2')$, $(c\,3, c'\,3')\ldots$. Um diese wahren Grössen zu erhalten, denke man sich jede der Seitenkanten um ihren gemeinschaftlichen Scheitelpunkt (S, S') nach $(S\,a, S'\,a')$ gedreht, so werden damit auch die Punkte $2', 6', 3', 5'$ nach $2''', (6'''), 3''', (5''')$ zu liegen kommen, und $a'\,2'''$, $a'\,3'''\ldots$ sind die wahren Grössen der betreffenden Kanten, welche nun in Fig. I^a von den Punkten $b, c, d\ldots$ aus übertragen werden können. Legt man endlich die Schnittfigur mit einer beliebigen Seite, z. B. $3''\,4''$ an die gleiche Seite $3\,4$ des Mantelumfanges, so ist damit das Netz der abgestumpften Pyramide bestimmt.

§ 125. Die Darstellung der schiefen unregelmässigen Pyramide, wie sie Fig. II zeigt, bietet nichts wesentlich Neues. Der Unterschied ist hier nur der, dass die Seitenfläche nicht mehr congruent, sondern Dreiecke von verschiedener Grösse sind. Die Basis kann dabei regulär**), oder wie im gegebenen Falle (Fig. II) irregulär sein.

In Fig. II wurde, um alle vorkommenden Fälle anzudeuten, eine Seitenkante $(a\,S, a'\,S')$ parallel zur verticalen Tafel, und eine Seitenkante $(e\,S, e'\,S')$ so angenommen, dass ihre beiden Projectionen senkrecht zur Achse stehen, d. i. mit ihren Projicirenden zusammen-

*) Man betrachte zunächst die Pyramide als nicht durch die schiefe Fläche abgestumpft und zeichne das Netz der ganzen Pyramide ohne Rücksicht auf die schiefe Schnittfigur.

**) Wäre die Basis ein reguläres Polygon, die Spitze oder der Scheitelpunkt aber nicht senkrecht über der Mitte dieser Basis, so ist die Pyramide ungeachtet der regelmässigen Basisfläche dennoch schief, d. i. unregelmässig.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

fallen*) (siehe § 105, Tafel X, Fig. VIII). Die übrigen Seitenkanten sind schief zu beiden Tafeln. Die schneidende Ebene, deren Tracen $R'' R''' R'$ und $R' 1' 2' \ldots$ sind, steht wie bei Fig. I senkrecht zur verticalen Tafel und ist zur horizontalen unter einem Winkel von 30° angenommen. Die wahre Grösse der Schnittfigur wurde hier in gleicher Weise wie bei Fig. I durch Umlegen in die verticale Tafel gefunden.

Abwicklung des Netzes der schiefen Pyramide.

§ 126. Zur Bestimmung des Netzes müssen, wie bei Fig. I^a, die Seitenflächen der Pyramide nach ihrer wahren Grösse und in derselben Ordnung wie bei dem Körper neben einander gelegt werden. Die Basiskanten zeigen sich im Grundriss bei $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$ . . . in ihrer wahren Grösse, ebenso ist $a' S'$ die wahre Länge einer Seitenkante, die übrigen Seitenkanten wurden durch Drehung um den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und zwar parallel zur verticalen Tafel**) in ihrer wahren Grösse bestimmt. So ist z. B. $b^3 S'$ die wahre Grösse der Kante $(b\,S, b'\,S')$, $e^3 S'$ die wahre Grösse der Kante $(e\,S, e'\,S')$ u. s. w. Dasselbe gilt auch von den Strecken $a' 1'$, $b^3 2'''$, $e^3 5''$ u. s. w. Aus den wahren Grössen derjenigen Strecken, welche je eine vollständige oder abgestumpfte Pyramidenseite begrenzen, werden nunmehr die einzelnen Seiten des Netzes in Fig. II^a gebildet und um S herum aneinander gelegt. Das Anlegen der Schnittfigur geschieht wie bei Fig. I^a.***)

Darstellung des Kreises, bezw. der Kreisfläche in verschiedenen Lagen.†)

Tafel XVII. Fig. I—IX.

§ 127. Die beiden Projectionen eines Kreises können sich darstellen:

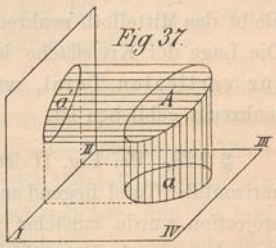
1. als Kreis und Gerade, in welchem Falle die Kreisebene parallel zu einer Tafel ist;

2. als zwei Gerade von gleicher Länge, in welchem Falle die Kreisebene senkrecht zu beiden Tafeln ist;

3. als Gerade und Ellipse, in welchem Falle die Kreisebene senkrecht zu einer und schief zur andern Tafel ist;

4. als zwei Ellipsen, deren grosse Achsen gleiche Länge haben, in welchem Falle die Kreisebene schief zu beiden Tafeln steht (s. Taf. XVII).

Die Projectionen der Kreislinie werden, wie dies überhaupt bei jeder Curve der Fall ist, dadurch bestimmt, dass man eine Anzahl von Punkten auf derselben annimmt, und deren Projectionen durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand verbindet. Ist die Curve, wie dies bei dem Kreise der Fall ist, eine gleichförmig gekrümmte, so theilt man am besten dieselbe in gleiche Theile.



Die Summe der projicirenden Linien, welche von einer Kreislinie oder sonstigen Curve gegen eine Projectionstafel gezogen werden, bilden dabei eine projicirende Cylinderfläche*) und der Durchschnitt dieser Cylinderfläche mit der Projectionstafel ist die Projection des Kreises oder der Curve (s. Fig. 37.)

In Fig. I sind zunächst die beiden Projectionen $(a\,b\,c\,d \ldots, a'\,b'\,c'\,d' \ldots)$ einer Kreisfläche in paralleler Stellung zur verticalen Tafel gegeben; die Kreisfläche erscheint daher oben in ihrer wahren Grösse, unten als eine Gerade, deren Länge gleich dem Kreisdurchmesser ist. Eine zum Mittelpunkte der Kreisebene senkrecht stehende Gerade (Mittelloth der Kreisfläche) projicirt sich im Grundrisse als die zu $a\,b\,c\,d$ . . . senkrecht stehende Gerade $m\,L$, im Aufrisse als ein Punkt m'. Soll nun die Kreisfläche in eine andere Lage oder Stellung gebracht werden, so theile man den Umfang zuerst in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf**); $(a', b', c', d' \ldots a, b, c, d \ldots)$ sind solche Theilpunkte. Dreht man nun die Kreisfläche um den Punkt (g, g'), so dass sie zur horizontalen Tafel stets senkrecht bleibt, so wird ihre Horizontalprojection einmal senkrecht zur Projections-

*) Um hier den Punkt e in der Horizontalprojection bestimmen zu können, muss man zuvor die Kante $(e\,S, e'\,S')$ um (S, S') parallel zur verticalen Tafel nach $(S'\,e'', S'\,e^3)$ drehen; der Punkt $5'$ fällt alsdann im Aufriss in die gedrehte Kante nach $5''$. Fällt man von $5''$ die Projicirende, so ergibt sich im Grundriss $5'''$; den so erhaltenen Punkt $5'''$ denke man sich mit der Kante $(e''\,S, e^3 S')$ wieder in die ursprüngliche Lage nach $(e\,S, e'\,S')$ zurückgedreht, wodurch sich Punkt 5 in der Horizontalprojection ergeben hat. Ausserdem könnte Punkt 5 auch gefunden werden, indem man $e\,a$ bis R''' verlängert und aus R''' durch 1 eine Gerade zieht, welche $e\,S$ in 5 schneidet.

**) Die Seitenflächen der Pyramide könnten auch ebenso gut um ihre Basiskanten, z. B. $a\,b$, $b\,c$ . . . in die horizontale Tafel gelegt werden. Dieses Verfahren ist hier jedoch nicht angegeben, da es in diesem Falle weniger zur Anwendung kommt.

***) Die Basisfläche wurde in Fig. II^a wegen Mangel an Raum weggelassen.

†) Die Darstellung des Kreises oder der Kreisfläche mit der auf dem Mittelpunkte der Kreisfläche senkrecht stehenden Achse (Mittelloth der Kreisebene) findet bei dem projectiven Zeichnen eine so vielseitig praktische Verwerthung, dass wir dieses Blatt dem Studium des Anfängers ganz besonders empfehlen.

*) Wenn eine Gerade auf irgend einer krummen Linie fortgleitet und dabei zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so heisst die durch die Gerade erzeugte Fläche eine Cylinderfläche, die Gerade eine Erzeugende und die gegebene krumme Linie die Leitlinie.

**) Der Kürze halber wurde der Kreis so getheilt, dass immer je zwei Punkte, z. B. m', b' und l', c' . . ., ebenso l', i' und m', h' u. s. w. in eine Projicirende und somit deren Horizontalprojectionen zusammenfallen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

achse stehen, so dass die Projicirenden aus a'', b'', c'', d'' ... in eine Gerade fallen, somit die Verticalprojection ebenfalls eine Gerade wird, deren Länge $d'''k'''$ gleich dem Durchmesser ist. Die Kreisfläche steht somit senkrecht zu beiden Tafeln, und das Mittelloth steht senkrecht zu den beiden Projectionen. Setzt man die Drehung um (g, g') nach rechts weiter fort, bis die Horizontalprojection die Lage von $a^4b^4c^4d^4$ ... angenommen hat, und zeichnet man aus diesen Punkten, sowie aus a', m', l', k', i', h' ... die Projicirenden, so ergeben diese in $a^5m^5l^5k^5i^5h^5$... den zur Ellipse verkürzten Kreisumfang oder die zur Ellipse verkürzte Kreisfläche.

Das Mittelloth m^5L der Kreisfläche steht hierbei senkrecht auf dem in wahrer Grösse erscheinenden Kreisdurchmesser $d^5m^5k^5$, welcher sich geometrisch betrachtet als die grosse Achse der Ellipse darstellt; in der Horizontalprojection bleibt das Mittelloth senkrecht zur Horizontalprojection. Die Lage der Kreisfläche ist im letzten Falle schief zur verticalen Tafel, während sie zur horizontalen senkrecht geblieben ist.

§ 128. Bei Fig. II ist die Kreisfläche als in der horizontalen Tafel liegend angenommen. Die Horizontalprojection wurde zunächst in acht gleiche Theile ab, bc, cd ... getheilt, und die Theilpunkte gemäss der Annahme nach a', b', c', d', e', f' ... in die Achse projicirt, wobei in der Verticalprojection wieder je zwei Punkte b, h in b', h', c, g in c', g' u. s. w. zusammenfallen. An die Punkte a, b, c, d ... der Horizontalprojection wurden ferner Tangenten gelegt, welche zwei symmetrisch liegende Quadrate bilden, in welche der Kreis eingeschlossen ist. Denkt man sich nun den Kreis sammt den ihn umschliessenden Quadraten oder Tangenten um (e, e') als fixen Punkt erhoben, so dass seine Lage zur verticalen Tafel stets gleich, also senkrecht bleibt, so kommt hier die Kreisfläche einmal in eine zu beiden Tafeln senkrechte Stellung $(a'''m'''e')$, $(c'''eg''')$, wie dieses bei Fig. I der Fall war.

Wird die Drehung weiter fortgesetzt, d. h. bringt man die Verticalprojection $a'b'c'd'$ ... in die Lage von $a^4b^4c^4d^4$ ..., so erscheint deren Horizontalprojection wieder als Ellipse $a^5b^5c^5d^5$ ..., und die den Kreis tangirenden Quadrate projiciren sich als Rechteck und Raute und bilden, geometrisch betrachtet, die Tangenten an die Ellipse. So sind z. B. $s''b^5$, $s''d^5$ die Projectionen der Kreistangenten sb, sd u. s. w.

Die Tangenten $s''b^5$, $s''d^5$, $s'h^5$ u. s. w. können am einfachsten dadurch gefunden werden, dass man in das die Ellipse einschliessende und tangirende Rechteck, dessen Seiten parallel den Ellipsachsen sind, die Diagonalen zieht; ferner mittels der Projicirenden aus b, d, h, f ... auf den Diagonalen die Punkte b^5, d^5, h^5, f^5 ... abschneidet und durch letztere parallel mit den Diagonalen die Tangenten zeichnet.*)

Das Mittelloth $(L'm^4, Lm^5)$ steht auch hier, wie in den vorigen Figuren, senkrecht zu den sich nicht verkürzenden Projectionen des Durchmessers c^5g^5 und $e'a^4$.**)

§ 129. In Fig. III wurde die Gerade $a'c'$ als die Verticalprojection eines Kreises gegeben. Die Länge dieser Geraden $a'c'$ ist, wie schon erwähnt, zugleich die wahre Grösse des Kreisdurchmessers; derselbe muss daher in der Horizontalprojection parallel der Projectionsachse liegen. Man nehme daher ac innerhalb der Projicirenden aus $a'c'$ in beliebiger Entfernung von der Projectionsachse und parallel zu derselben an; die Projicirende aus m' ergibt unten den Mittelpunkt m dieses Durchmessers. Ein zweiter zu $(ac, a'c')$ rechtwinkliger Durchmesser projicirt sich oben in $b'm'd'$ als ein Punkt, ist somit parallel zur horizontalen Tafel und erscheint desshalb in letzterer nach seiner wahren Länge $(bd = a'c')$. Macht man daher mb gleich $a'm'$, md gleich $a'm'$ oder $m'c'$, so sind a, b, c, d die vier Scheitelpunkte der Ellipse; um weitere Punkte derselben, z. B. *1*, *2*, *3*, *4*, zu erhalten, denke man sich etwa die Hälfte des Kreises um den Durchmesser $(ac, a'c')$ parallel zur verticalen Tafel in $a'b''c'$ aufgestellt, halbire die Viertelsbögen $a'b''$, $b''c'$ durch $1''$ und $4''$, ziehe aus $1''$ und $4''$ die Projicirenden $1''1'$, $4''4'$, fälle ebenso aus $1'$ und $4'$ die Projicirenden herab und trage die Entfernungen $1'1''$, $4'4''$ von dem Durchmesser ac aus nach *1* und *4* an. Dieselbe Grösse kann auch von dem Durchmesser ac aus nach *2* und *3* getragen werden. Man hat damit acht Punkte, nämlich a, *1*, b, *4*, c ... erhalten, durch welche die Ellipse mit freier Hand gezeichnet wird.***)

Man bringe ferner den Grundriss von Fig. III in die schiefe Lage des Grundrisses Fig. IV, ziehe aus a'', b'', c'', d'' (Fig. IV) und a', b', c', d' (Fig. III) die Projicirenden, so ergeben sich die Curvenpunkte a''',

---

*) Mit Hilfe von Tangenten lässt sich eine Curve stets leichter und genauer zeichnen, als dieses durch Punkte allein möglich ist.

**) Der in der Verticalprojection sich nicht verkürzende Durchmesser $e'a^4$ fällt in derselben mit der Projection der Kreisfläche zusammen, weshalb $L'm^4$ sowohl zur Projection der Kreisfläche, als auch zu dem Durchmesser $e'a^4$ senkrecht erscheint. In der Horizontalprojection dagegen erscheint das Mittelloth senkrecht zu dem Durchmesser c^5g^5, dessen Verticalprojection c^4g^4 sich als ein Punkt darstellt. (c^5g^5, c^4g^4) ist parallel zur horizontalen, $(ea^5, e'a^4)$ parallel zur verticalen Tafel, wesshalb jeder der betreffenden Durchmesser in derjenigen Tafel, zu welcher er parallel ist, sich nach seiner wahren Grösse projicirt (vergl. § 102 und 104, Fig. III und V, Tafel X).

***) $(o'n', o''n'')$ kommen hier vorerst noch nicht in Betracht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

b''', c''', d''' der Verticalprojection von Fig. IV*), und die Geraden $a'''m'''c'''$, $b'''m'''d'''$ bilden, geometrisch betrachtet, zwei schiefe Durchmesser der Ellipse. Angenommen aber, man verlange im Aufrisse nicht nur eine Anzahl von Hilfspunkten, sondern hauptsächlich die Scheitelpunkte der Ellipse, oder mit anderen Worten: man will den grössten und kleinsten Durchmesser, d. h. die Ellipsachsen, erhalten, so ziehe man durch den Mittelpunkt m'' der Horizontalprojection einen zur Projectionsachse parallelen Durchmesser $om''n$, denke sich ferner die Horizontalprojection mit dem darin enthaltenen neuen Durchmesser $om''n$ nach Fig. III in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, aus $o'n'$ in Fig. III die Verticalprojectionen $o''n''$ bestimmt, aus letzteren die Wagrechten und aus on der Fig. IV die Senkrechten gezogen, so ergibt sich in der Verticalprojection (Fig. IV) $o'''m'''n'''$ als ein unverkürzter Durchmesser, oder geometrisch genommen, $o'''m'''n'''$ als die grosse Ellipsachse. ($om''n$, $o'''m'''n'''$) ist nämlich ein zur verticalen Tafel paralleler, und ($b''m''d''$, $b'''m'''d'''$) ein zur horizontalen Tafel paralleler Kreisdurchmesser, wesshalb $o'''m'''n'''$ gleich $b''m''d''$ gleich der wahren Grösse dieses Kreisdurchmessers ist.

Zur Bestimmung des kleinsten Durchmessers (kleine Ellipsachse) kann folgendes Verfahren dienen:

Man beschreibe um $o'''n'''$ als Durchmesser einen Kreis, ziehe aus einem der vorhin erhaltenen Ellipspunkte, z. B. aus b''', eine ihrer Lage nach zu $o'''n'''$ rechtwinklige Gerade $b'''f$, welche den Kreis in f schneidet, zeichne den Radius fm''', sowie aus b''' eine Parallele zu $n'''o'''$, so wird fm''' durch letztere in g geschnitten; $m'''g$ ist dann gleich der halben kleinen Achse, welche Strecke man nur rechtwinklig zur grossen Achse von m''' aus nach beiden Seiten anzutragen braucht. Das Verfahren ist ähnlich, wie schon in § 71 (Fig. II, Tafel VI) angedeutet.**) Da hier die Kreisfläche in beiden Projectionen als eine mehr oder weniger excentrische Ellipse erscheint, so folgt daraus, dass ihre Lage schief zu beiden Tafeln ist (siehe § 127).

Das Mittelloth der Kreisebene projicirt sich dabei stets senkrecht zu dem in wahrer Grösse erscheinenden Durchmesser. Zeichnet man parallel mit den Projicirenden an eine der Kreisprojectionen die Tangenten, so müssen diese auch die andere Kreisprojection berühren. In der Praxis handelt es sich oft darum, die Projectionen von Kreisen auf möglichst einfache Art zu zeichnen. Hierzu bietet obiges Verfahren, nämlich die Bestimmung der als Ellipsen sich projicirenden Kreise durch ihre Achsen, den einfachsten Weg, weil, wenn einmal diese beiden Achsen bekannt sind, die Ellipse selbst, etwa nach einer der in Tafel VI angegebenen Methoden, z. B. wie bei Fig. III, mittels des Papierstreifens leichter gezeichnet werden kann*), als dieses durch die projective Bestimmung einzelner Curvenpunkte möglich ist. Die folgenden Figuren zeigen, auf welche Weise das oben bei Fig. III und IV erörterte Verfahren noch weiter abgekürzt werden kann.

§ 130. In Fig. V ist die Ellipse, deren Achsen ac, bd sind, beliebig als die Horizontalprojection eines Kreises gegeben. Da ac die wahre Grösse des Kreisdurchmessers ist, so muss die Verticalprojection $a'c'$ ebenfalls parallel zur Projectionsachse sein**), (vgl. Fig. III, Tafel X) und es handelt sich jetzt nur noch darum, die Verkürzung des zweiten Kreisdurchmessers bd, d. i. $b'd'$, in der Verticalprojection zu bestimmen. Man denke sich hierzu durch den Mittelpunkt (m, m') eine Ebene senkrecht zu beiden Tafeln gelegt: diese Ebene schneidet die Kreisfläche sodann nach dem Durchmesser $(bd, b'd')$. Denkt man sich ferner diese Hilfsebene mit dem in seiner wahren Grösse darin liegenden Durchmesser $(bd, b'd')$ um den Mittelpunkt (m, m') parallel zur horizontalen Tafel gedreht, so muss dieser Durchmesser in der umgedrehten Hilfsebene (Seitenriss) nach seiner wahren Grösse enthalten sein. $b''md''$ ist dieser Seitenriss und $b''md''$ gleich amc gleich der wahren Grösse. Um die Lage von $b''md''$ zu bestimmen, ziehe man aus b und d die Projicirenden bb'', dd'' in paralleler Richtung zur Projectionsachse, nehme den Halbmesser am (oder mc) und schneide mit demselben von m aus auf dd'' und bb'' die Punkte d'' und b'' ab. Denkt man sich nun etwa (d, d') als den höher liegenden und (b, b') als den tiefer liegenden Punkt, so ist die Strecke dd'' in die Verticalprojection von m' nach d' aufwärts, und ebenso

---

*) Dass man auch die Verticalprojectionen der Punkte $1''$, $2''$, $3''$ . . . auf gleiche Weise wie $a'''b'''$ . . . finden könnte, braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden.

**) Ist nämlich, wie in Fig. 38, ab die grosse, cd die kleine Achse einer Ellipse, so konnte ein weiterer Punkt b' gefunden werden, indem man um ab und cd als Durchmesser Kreise beschrieb, aus m einen Halbmesser durch beide Kreise legte und aus den Schnittpunkten g und f die Parallelen zu ab und cd zeichnete, welche in b' einen Ellipspunkt ergaben. Ist jedoch statt der kleinen Achse Punkt b' angenommen, so ergibt sich umgekehrt die halbe Grösse der kleinen Achse, wenn man aus b' in rechtwinkliger Lage zu ab die Gerade $b'f$, ferner fm, sowie aus b' parallel mit ab, oder was dasselbe ist, senkrecht zur Richtung der kleinen Achse zieht.

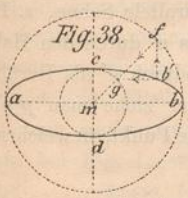


Fig. 38.

*) Bei einiger Uebung im Zeichnen wird es auch nicht allzu schwer fallen, eine Ellipse allein mittels ihrer beiden Achsen und ohne weitere Hilfspunkte zu zeichnen, wenn diese nicht allzu gross ist.

**) Diese Gerade $a'c'$ konnte in beliebiger Entfernung von der Projectionsachse gewählt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$m'b'$ gleich bb'' nach abwärts anzutragen*), wodurch in der Verticalprojection die Verkürzung $b'd'$ des zweiten Durchmessers gefunden ist.

Statt anfangs die Projection $abcd$ zu geben, hätte man ebenso gut zuerst den Seitenriss $b''md''$ seiner Lage nach (etwa unter einem Winkel von 30° zur horizontalen Tafel) bestimmen können; das Resultat wäre dann das gleiche gewesen.

§ 131. In Fig. VI ist die Ellipse $abcd$ als die Horizontalprojection eines Kreises gegeben. Die grosse Ellipsachse ab ist als der unverkürzte, cd als ein verkürzter Kreisdurchmesser zu betrachten. Die Kreisfläche denke man sich mit dem Punkte (c, c') in der horizontalen Tafel liegend. Man bestimme zunächst den Seitenriss $cm''d''$, indem man aus d eine Projicirende rechtwinklig zu cd errichtet und sodann mit dem unverkürzten Durchmesser ab aus c einen Bogen beschreibt, welcher die in d errichtete Projicirende in d'' schneidet. Man denke sich dabei, ähnlich wie in Fig. V, durch cd eine zur horizontalen Tafel senkrechte Hilfsebene und diese mit der darin enthaltenen wahren Grösse des Durchmessers $(cd, c'd')$ in die horizontale Tafel umgelegt (siehe § 106), so dass nunmehr cmd nach $cm''d''$ zu liegen kommt und $cb''d''a''m''$ auch zugleich eine Projection der Kreisfläche darstellt. Die Strecken dd'', mm'', aa'' ... sind nun gleich den Entfernungen, welche die Punkte (d, d'), (m, m'), (a, a')... von der horizontalen Tafel haben. Um daher die Verticalprojection der Fig. VI zu bestimmen, ziehe man aus c, a, b, m, d die Projicirenden nach aufwärts und mache die Entfernungen, welche d', m', a', b' ... von der Projectionsachse haben, gleich den Strecken dd'', ma'', $(mb''$, $mm'')$ u. s. w. $(ma'' = mb'' = mm'')$. Dadurch ergeben sich in der Verticalprojection a', c', b', d' als Curvenpunkte. Um in derselben die grosse Achse der Ellipse zu erhalten, ziehe man in der Horizontalprojection fe parallel zur Projectionsachse, errichte über f und e die Projicirenden und beschreibe mit der wahren Grösse des Halbmessers aus m' einen Kreis, so schneidet dieser die Projicirenden in f' und e'.**) Die kleine Achse wird wie bei Fig. IV bestimmt, indem man $d'h$ parallel $e'f'$, $d'g$ parallel $m'h'L'$ (d. i. senkrecht zu $e'f'$) und den Radius gm' zieht, wodurch sich h als Schnittpunkt und $m'h'$ gleich $m'h$ als halbe kleine Achse ergibt. Die Richtung des Mittellothes $(Lm, L'm')$ fällt, wie schon bekannt, senkrecht zu ab und $e'f'$, also mit der Richtung der kleinen Ellipsachse in jeder der Projectionen zusammen.

*) Der Vorgang wird erklärlich, wenn man bedenkt, dass, wie aus dem Seitenriss ersichtlich ist, (d, d') um die Strecke dd'' höher und (b, b') um die gleiche Strecke bb'' tiefer als (m, m') liegt.

**) Die Abstände der Punkte e' und f' von der Projectionsachse sind übrigens gleich den Abständen, welche e'' und f'' von der Geraden cd im Seitenriss haben u. s. w.

§ 132. In Fig. VII sind zuerst $(AB, A'B')$ als die Projectionen einer Geraden, sowie in derselben (m, m') als Mittelpunkt eines Kreises bestimmt. Dessen Ebene soll zu der gegebenen Geraden senkrecht stehen, oder mit anderen Worten: $(AB, A'B')$ bilde das Mittelloth einer Kreisfläche, deren Mittelpunkt (m, m') ist.

Man ziehe durch m und m' rechtwinklig zu den Projectionen des Mittellothes je eine Gerade $a'b'$, cd, trage die wahre Grösse des Kreishalbmessers in jeder der Projectionen von m und m' nach beiden Seiten auf, d. h. man mache $m'a'$ gleich $m'b'$ gleich mc gleich md, d. i. gleich der wahren Grösse des Kreishalbmessers. Nun muss, weil $a'b'$ gleich der wahren Grösse ist, die Horizontalprojection dieses Durchmessers durch m parallel zur Projectionsachse gehen; ab ist die Horizontalprojection von $a'b'$. Damit sind aber ausser der grossen Achse cd noch zwei Ellipspunkte a und b gegeben, wodurch sich auf die schon erwähnte Weise die kleine Achse der Ellipse bestimmen lässt. (Siehe Fig. IV und VI.)

In gleicher Weise findet man auch in der Verticalprojection die kleine Achse, da c', d' (Verticalprojectionen von c, d) zwei Ellipspunkte sind.

§ 133. Fig. VIII zeigt als ein Beispiel der Anwendung einen hohlen Cylinder, dessen Wandung eine bestimmte Dicke hat. Die Stellung des Cylinders ist schief zu beiden Tafeln, und sollen hierbei zuerst die Projectionen einer Geraden $(AB, A'B')$ als die Achse des Cylinders und Punkt (n, n') als der Mittelpunkt eines im Raume liegenden und zur Achse senkrechten Kreises gegeben sein. Man bestimme die Kreisprojectionen $clbd$ ..., $a'hb'd'g$ ..., wie bei Fig. VII ($n'a'$ oder $n'b'$ und ebenso nc oder nd sind gleich dem wahren Kreishalbmesser), denke sich nun den Kreis parallel seiner angenommenen Lage in der Cylinderachse $(AB, A'B')$ nach abwärts geschoben, bis derselbe die horizontale Tafel in (p, p'') berührt, so ist durch das Abwärtsgleiten dieses Kreises ein Cylinder erzeugt worden, welcher mit einem Punkte (p, p'') seiner Basis in der horizontalen Projectionsebene ruht.*) Um diesen Punkt (p, p''), sowie die Lage von (m, m') in beiden Projectionen zu bestimmen, ziehe man parallel zur Projectionsachse an den verkürzten Kreis in p' eine Tangente. Damit man den Berührungspunkt p' genau erhalte, zeichne man eine zur Tangente parallele Sehne, z. B. ho, halbire dieselbe und ziehe aus n' durch den Halbirungspunkt die Gerade $n'p'$, wodurch p' als Berührungspunkt festgestellt ist. Ferner ziehe man $p'p''$ parallel mit $B'A'$, so ist p'' derjenige Punkt, in welchem

*) Der Kreis ist in diesem Falle die Erzeugende und die Gerade $(AB, A'B')$ die Leitlinie. Der Kreis gleitet mit seinem Mittelpunkte auf der geraden Leitlinie fort und bleibt dabei parallel seiner ursprünglichen Lage.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der herabgeschobene Kreis die horizontale Tafel berührt. Um den Mittelpunkt m' des letzteren zu finden, ziehe man $p''m'$ parallel zu $p'n'$; m' ist nun der Mittelpunkt und $m'b''$ der Halbmesser u. s. w. Punkt m' herab projicirt ergibt m der Horizontalprojection. Da der untere Kreis parallele Lage mit dem obern hat, so sind auch seine Verkürzungen in jeder der Projectionen gleichartig, d. h. die Ellipsen haben gleiche Achsenverhältnisse, sind also in jeder Projection paarweise congruent u. s. w.

Die Dicke der Cylinderwandung kann in jeder der Projectionen in wahrer Grösse direct angegeben werden. So ist cr und ebenso $a'q$ gleich dieser wahren Dicke. Die Projectionen der innern Kreise haben ebenso wie die äussern je paarweise gleiche Achsenverhältnisse. Man ziehe daher, um deren halbe kleine Achsen zu bestimmen, z. B. rs, parallel cl und ebenso in der Verticalprojection aus q parallel zu $a'g$ u. s. w.

Fig. IX zeigt das gleiche Verfahren bei Kreisen, deren Radien ma, $n1$ ungleich gross sind. Es verhält sich hierbei $n1$ zu $n3$ wie ma zu mc u. s. w.

Fig. X zeigt den verticalen Cylinderdurchschnitt in gerader oder geometrischer Ansicht. Die wahre Höhe desselben wurde dadurch ermittelt, dass man die Achse (mn, $m'n'$) in Fig. VIII um ihre Horizontalprojection nach $m''n''$ umklappte ($mm'' = m'1$ und $nn'' = n'2$), und die Höhe $m'n'$ in Fig. X gleich $m''n''$ in Fig. VIII machte. (Siehe Fig. IX Taf. X.)

Darstellung eines Säulenstückes mit darunterliegender quadratischer Platte.

Tafel XVIII. Figur I—II^a.

§ 134. In Fig. I ist zuerst der Aufriss, sodann der Grundriss der Säule nebst der Platte gegeben. Auf der Mantelfläche wurden Linien in der Form von Caneluren angegeben. Der Grundriss von Fig. I wurde sodann in eine schiefe Lage (hier rechts) gebracht und bildet derselbe nunmehr die Hilfsfigur zur Ausführung des Seitenrisses Fig. II und des Aufrisses Fig. II^a. Zweck der Aufgabe ist, die Säule in Fig. II^a so darzustellen, dass auch die horizontalen Flächen als solche zur Anschauung kommen, die Säule also eine nach vorwärts geneigte Stellung erhält. Um allzu viele Constructionslinien zu vermeiden, wurde hier der cylindrische Theil des Grundrisses in der schiefen Stellung aufs neue und zwar so eingetheilt: dass, wie bei Fig. I, wieder je zwei Punkte, z. B. *1, 7, 2, 6* . . . ., sowie *14, 1, 13, 2* . . . in eine Projicirende fielen. Man konnte sich dabei die auf der Platte stehende Säule um ihre Achse in dieser Stellung gedreht denken. Zur Ausführung der Fig. I^a ist zunächst Seitenriss Fig. II nothwendig.

Man denke sich bei dem schief gedrehten Grundriss die unterste Fläche $a\,b\,c\,d$ in der horizontalen Tafel liegend, zeichne rechtwinklig zur Projectionsachse die Gerade $a'' \ldots c''$, betrachte diese als die Projection einer dritten Tafel und die Fläche rechts davon als ihre Umlegung. Nun projicire man a nach a'', b nach b', c nach c', d nach d' und denke sich dieses Quadrat $a\,b\,c\,d$, dessen Seitenriss in der Achse der dritten Tafel $a''\,b'\,c'\,d'$ ist, um den feststehenden Punkt $a\,(a'')$ erhoben, so dass $c''\,a''\,c'$ geometrisch betrachtet, der Winkel ist, unter welchem die Grundfläche zur horizontalen Tafel geneigt ist. Mit der Grundfläche denke man sich auch den ganzen Körper erhoben. Die Ausführung des Seitenrisses ist leicht. Man mache nur die Grössen $a''e''$, $b''f''$, $c''g'' \ldots$ (in Fig. II) gleich $a'e'$, $b'f'$, $c'g' \ldots$ (in Fig. I) u. s. w. Ferner ziehe man aus a, b, c, d, e, f, g, h . . . die Projicirenden nach aufwärts und mache die Entfernungen der Punkte b''', c''', d''', e''', f''', g''', h''' . . . u. s. w. von der Projectionsachse gleich den Entfernungen, welche b'', c'', d'', e'', f'', g'', h'' von der horizontalen Tafel haben. Durch die Projicirenden aus dem Seitenrisse ist der Vorgang veranschaulicht; die Abstände der projicirenden Linien von der horizontalen Tafel wurden, wie aus der Zeichnung ersichtlich, in die verticale Projection Fig. II^a aufgestellt. Das vierkantige Prisma, welches hier den Körper stützt, wurde nachträglich in den betreffenden Projectionen bestimmt. Ferner sei noch erwähnt, dass der in schiefe Lage gebrachte Grundriss nicht als die Horizontalprojection des schief auf der Ecke stehenden Körpers, sondern lediglich als eine Hilfsfigur zu betrachten ist, vermittelst welcher im Verein mit Fig. II die Projection Fig. II^a bestimmt wurde. Die in Fig. II^a vorkommenden Ellipsen, bezw. verkürzten Kreise, konnten nach der in § 133 angegebenen Methode, d. i. mittels der beiden Achsen u. s. w., gezeichnet werden. Die kleine Achse q^4p^4 eines ersten Kreises, z. B. $n'q^4 4'p^4$, wurde, wie ersichtlich, aus dem Seitenriss abgeleitet; alle weiteren Ellipsen haben nun nach dem in § 133 Gesagten gleiche Achsenverhältnisse. Ferner sind in Wirklichkeit gleiche Längen auch in ihren Verkürzungen unter sich gleich, z. B. $a'''e'''$ gleich $b'''f'''$ gleich $c'''g'''$ u. s. w.

§ 135. Da es häufig vorkommt, dass aus einem gemeinschaftlichen Mittelpunkt mehrere ähnliche Ellipsen zu zeichnen sind, so sei in Fig. III ein Verfahren angegeben, nach welchem man diese Aufgaben lösen kann.

Angenommen, die äussere Ellipse $a\,c\,b\,d$ sei gegeben, ebenso die grosse Achse hp einer zweiten Ellipse, welche den gleichen Mittelpunkt hat, und es sollen für diese zweite Ellipse mehrere Curvenpunkte gefunden werden, so zeichne man zunächst in die erste Ellipse beliebige Durchmesser el, ko, ziehe die Sehnen ae, ec, co . . . und z. B. aus h anfangend zu diesen parallel hg,

$g\,i\ldots$ u. s. w., so ergeben sich auf den Durchmessern die Curvenpunkte $g, i\ldots$ der innern Ellipse, welche mit der äussern ähnlich ist.*)

Darstellung einer Vase in verschiedenen Lagen.

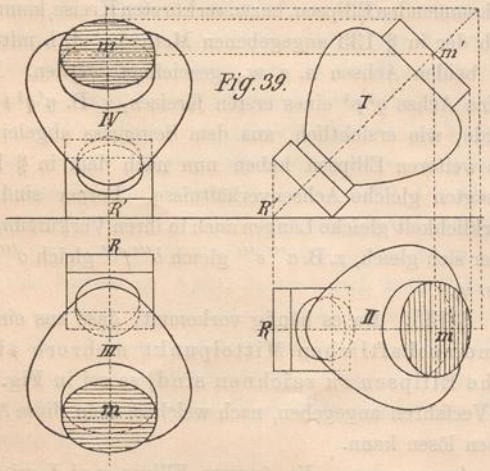
Tafel XIX. Figur I—III.

§ 136. Die Verticalprojection Fig. I zeigt die geometrische Ansicht einer Vase; in der Horizontalprojection wurde nur die Sockelplatte mit dem ersten daraufliegenden Basiskreis (12, $1'2'$) angegeben; (mno, $m'n'o'$) ist die Achse dieser Vase.

Fig. II zeigt in der verticalen Projection die Ausführung derselben Vase in schiefer Stellung nach vorne geneigt und zwar so, dass die Kanten ($a\,b$, $a'\,b'$), ($c\,d$, $c'\,d'$)... der quadratischen Basis noch parallel zu beiden Tafeln sind. Die Gerade $a''\,(b'')\,m''\,c''\,(d'')$, sowie die dazu rechtwinklige $m'o''$ bilden den Seitenriss der untersten Fläche ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$) und der Achse ($m\,o$, $m'\,o'$).**) Dieser Seitenriss konnte entweder gleich anfänglich seiner Lage nach bestimmt werden, oder man hätte auch ebenso gut $a'\,b'\,c'\,d'$ in der Verticalprojection als die Verkürzung der untersten quadratischen Basisfläche annehmen und daraus die Lage des Seitenrisses bestimmen können.*)

Angenommen, es sei die Gerade $a''\,(b'')\,m''\,c''\,(d'')$ als Seitenriss gleich der wahren Länge einer Quadratseite ihrer Lage nach bestimmt worden, so errichte man über dem Mittelpunkte m' derselben die Senkrechte $m'o''$, mache $m'o''$ gleich $m'o'$ in Fig. I und theile $m'o''$ in Fig. II, ebenso wie $m'o'$ in Fig. I durch die Kreisebenen, welche sich als horizontale Gerade darstellen, getheilt ist; mache also $m'n''\ldots m'I''\ldots$ in Fig. II gleich $m'n'\ldots m'I$ u. s. w. in Fig. I, errichte ferner über m' eine Senkrechte $m'o'$ als die Projection der nach vorne geneigten Achse**), und ziehe aus den einzelnen Theilpunkten der Geraden $m'o''$ die wagrechten Projicirenden gegen die Achsenprojection $m'o'$, wodurch auf dieser die Verkürzungen der Höhenabschnitte gefunden werden. Trägt man nun aus Fig. I die Grössen $m'a'$, $m'b'$, $n'k'$, $n'g'\ldots I3$, $I4\ldots$ u. s. w. von $m'o'$ der Fig. II nach rechts und links auf die durch m', $n'\ldots I'$ u. s. w. gehenden Horizontalen in $m'e'$, $m'f'$, $n'2'$, $n'5'\ldots I'4''$, $I'3''\ldots$ an, und verbindet die auf gleichen Seiten liegenden Endpunkte f', $5'$, $7'\ldots 3''\ldots$ und e', $2'$, $4'\ldots 4''\ldots$, so ergibt sich das verkürzte und nach vorne geneigte verticale Durchschnittsprofil***), welches hier der Deutlichkeit halber durch einen Farb-Ton hervorgehoben wurde. Die Verticalprojection $a'\,b'\,c'\,d'$ der untersten quadratischen Fläche wurde gefunden, indem man durch f' und e' die Senkrechten $a'f'd'$ und $b'e'c'$, sowie durch $c''\,(d'')$ und $a''\,(b'')$ die Horizontalen $d'c'$ und $a'b'$ zeichnete, wobei letztere, wie ersichtlich, in die Projectionsachse fällt, mithin in der horizontalen Tafel liegt.

Sollte die Horizontalprojection der quadratischen Basisfläche bestimmt werden, so zeichne man zunächst $f\,m\,e$ (gleich $f'\,m'\,e$) parallel zur Projectionsachse und in beliebiger Entfernung von derselben, projicire sodann $a''\,(b'')$ und $c''\,(d'')$ nach $a'''\,(b''')$ und $c'''\,(d''')$ auf die Gerade $e\,f$, drehe $a'''\,(b''')$, $c'''\,(d''')$ um m nach $a^4\,(b^4)$ und $c^4\,(d^4)$, ziehe durch e und f die Geraden $b\,c$ und $a\,d$ senkrecht zur Projectionsachse, sowie durch $a^4\,(b^4)$, $c^4\,(d^4)$ Parallele zur Projectionsachse, so hat sich dadurch die



es Fig. 39 zeigt und wodurch, da es sich in Fig. II nur um die Verticalprojection handelt, die Projectionen I und II wie auch die Ausführung von III erspart blieb. Uebrigens konnte in Fig. II die Verticalprojection lediglich mit Hilfe des Seitenrisses, soweit derselbe dort ausgeführt ist, also unabhängig von der Horizontalprojection gezeichnet werden.

*) Die Projectionen concentrischer Kreise, deren Ebenen unter sich parallel sind, werden sich, wenn ihre Lage schief zu den Tafeln, stets als ähnliche Ellipsen darstellen. (Siehe § 133, Fig. IX, Tafel XVII.)

**) Das obige Verfahren, nämlich nur die unterste Quadratfläche und die Körperachse im Seitenrisse anzugeben, ist lediglich eine Abkürzung des Verfahrens, wie

*) Letztere Aufgabe wäre ähnlich der Aufgabe in Fig. VI, Tafel XVII, wo die Verkürzung einer Kreisfläche zuerst in der horizontalen Tafel bestimmt, und aus dieser Verkürzung die umgelegte Projection $c\,a''\,b''\,d''$ gefunden wurde (siehe daselbst).

**) Wenn man sich den Seitenriss, in welchem sich die unterste quadratische Fläche zu einer Geraden $a''(b'')c''(d'')$ verkürzt, um den Mittelpunkt m' des Quadrates so gedreht denkt, dass die im Seitenrisse als Punkte erscheinenden Geraden $a''\,b''$, $c''\,d''$ nach $a'\,b'$, $c'\,d'$, also parallel zu beiden Tafeln zu liegen kommen, so erscheint die Achse $m'\,o''$ in beiden Projectionen als eine Senkrechte zur Projectionsachse (vgl. § 105, Fig. VIII, Tafel X, sowie Fig. V, Tafel XVII).

***) Darunter verstehen wir einen senkrechten längs der Körperachse gelegten Durchschnitt des Körpers, d. i. ein Höhenprofil (siehe § 100, Fig. 35).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

horizontale Projection des Quadrates in $a\,b\,c\,d$ ergeben. Um auch die obere Fläche der Sockelplatte zu bestimmen, mache man in der Verticalprojection $a'k'$, $b'g'$, $c'h'$, $d'i'$ gleich $m'n'$, und in der Horizontalprojection $a\,k$, $b\,g$, $c\,h$, $d\,i$ gleich $n'n''$ der Verticalprojection. Ebenso ist $e\,2$, $f\,5$, $m\,n$ gleich $n'n''$. Das Rechteck $ef\,5\,2$ ist die Horizontalprojection des Durchschnittes der Sockelplatte und $m\,n\,1$ die Horizontalprojection der Körperachse. Die Veticalprojection des verkürzten Durchmessers $3'n'8'$ des untersten auf der quadratischen Platte liegenden Kreises ergibt sich, wenn man zu einer Diagonalen $k'h'$ oder einer Geraden $1'2'$ aus $4'$ und $7'$ Parallele zieht, welche die Endpunkte des verkürzten Durchmessers, d. i. der kleinen Ellipsachse in $3'$ und $8'$ abschneiden. Es verhält sich hierbei $n'3'$ zu $n'4'$ wie $n'2$ zu $n'1$... Das Gleiche gilt auch von der Horizontalprojection, indem hier ebenfalls $n\,3 : n\,4$ gleich $n\,1 : n\,2$ ist.

Sind von den beiden Projectionen eines Kreises die Achsenverhältnisse derselben, bezw. der Ellipsen, bekannt, so haben nach § 133 alle Kreise, deren Ebenen mit der Ebene des gegebenen Kreises parallel sind, gleiche Achsenverhältnisse. Man findet demnach die kleinen Achsen der übrigen Ellipsen, wie in Fig. IX Taf. XVII, indem man aus den Endpunkten der grossen Achsen Parallele zu $4'3'$ oder $2'1'$ zieht.

Sind nun in der angedeuteten Weise um $4'7'$... $4''3''$, $6''5''$... als unverkürzten Durchmessern die Kreisprojectionen, bezw. Ellipsen, nach der im § 133 angegebenen Methode gezeichnet, so bildet die sämmtliche Ellipsen berührende Curve den äussern Umriss der Vase.

§ 137. In den Figuren 40 und 41 soll das zuletzt Gesagte noch deutlicher veranschaulicht werden, indem hier einzelne Theile, wie sie ähnlich bei der Vase vorkommen, separat behandelt sind.

Betrachtet man in Fig. 40 $m\,m'$ als die Achse, $a\,c\,e\,g\,i\,l\,n\,k\,h\,f\,d\,b$ als den verkürzten, nach vorne geneigten Verticaldurchschnitt eines Gefässtheiles, und $a\,p\,b\,o$, $c\,r\,d\,q$... als Projectionen von Kreisen, deren Ebenen zur Achse senkrecht stehen, so bildet eine Curve, welche sämmtliche Kreisprojectionen berührt, die Umrisslinie des Getässtheiles. Hierbei ist nun der Kreis $c\,r\,d\,q$ besonders zu beachten, indem derselbe in q den höchsten Punkt des Umfanges dieses sphärischen, d. i. kugelförmigen oder kugelähnlichen Körpers bezeichnet. Wie aus der Zeichnung zu entnehmen, ist nämlich entsprechend der Lage, auch über o noch ein Theil der sphärischen Rundung sichtbar, wovon q die äusserste Grenze nach oben bildet.

Um den Kreis $c\,r\,d\,o$ zu bestimmen, wurde parallel mit einer der Geraden $a\,o$ oder $p\,b$ u. s. w. eine Tangente $c\,q$ an die Durchschnittsfigur gelegt, der Berührungspunkt c markirt, durch c die Gerade $c\,d$ gezogen und durch diese als grosse Achse eine den übrigen Kreisprojectionen ähnliche Ellipse gezeichnet.

In Fig. 41 ist eine dem Halse der Vase ähnliche Form, eine sog. Kehle oder Einziehung als Fläche gezeichnet. Auch hierbei bestimmen sich die Umrisse wie bei Fig. 40 durch eine Linie, welche die Kreisprojectionen berührt. Von besonderer Bedeutung sind hier die Kreisprojectionen $c\,p\,d\,o$ und $g\,v\,h\,u$, auf welchen

Fig. 40.

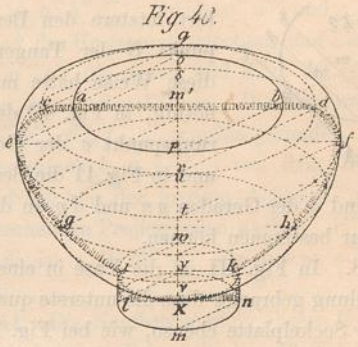
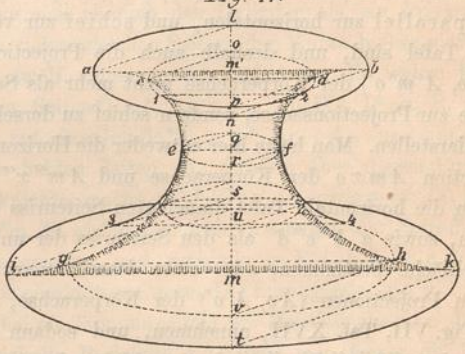


Fig. 41.



hier die sog. Uebergangspunkte $1, 2$ und $3, 4$ liegen.*) Dieselben wurden annähernd bestimmt, indem man parallel mit den Geraden, vermittelst welcher die kleinen Achsen der Ellipsen bestimmt wurden, z. B. mit $a\,l$ oder $b\,n$, Tangenten an die verticale Durchschnittsfigur $a\,e\,g\,i\,k\,h\,f\,b$ legte, welche dieselbe in d und g berühren, durch d und g die Geraden $d\,c$, $g\,h$ legte, und durch diese als grosse Achsen zwei den übrigen Kreisprojectionen ähnliche Ellipsen $c\,p\,d\,o$, $g\,v\,h\,u$ zeichnete. Wie schon erwähnt, wurden hier die Punkte $1, 2, 3, 4$ nur annähernd und auf eine mehr praktische Weise bestimmt; doch dürfte diese Methode für die

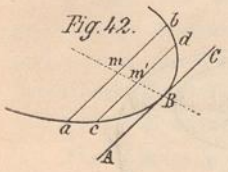
*) 1, 2, 3, 4 sind Endpunkte der Umrisslinie $1\,e\,3$ und $2\,f\,4$. Die Ellipse ist unten die äusserste, welche von der Umrisslinie $1e3$ und $2\,f\,4$ noch berührt werden kann. Eine jede zwischen $g\,v\,h\,u$ und $i\,t\,k\,s$ liegende Ellipse würde nicht mehr berührt, sondern durch die Verlängerung von $1\,e\,3$ oder $2\,f\,4$ geschnitten werden. Dasselbe gilt auch oben für die Ellipse $c\,p\,d\,o$, auf welcher nicht nur die Uebergangspunkte 1, 2 liegen, sondern deren Bogen $1\,p\,2$ zugleich als Contour der als offen gedachten Kehlfläche erscheint.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Verwerthung bei dem Zeichnen ähnlicher Formen vollständig genügend sein.

Fig. 42 zeigt ein Verfahren, nach welchem man den Berührungspunkt B einer gegebenen Tangente $A\,B\,C$ an einer beliebigen Curve bestimmt.

Man zeichne nämlich parallel zu der gegebenen Tangente in kleinen Entfernungen zwei parallele Sehnen $a\,b$, $c\,d$, halbire dieselben in m und m', und ziehe durch m und m' eine Gerade, so markirt letztere den Berührungspunkt B der Tangente. Auf diese Weise hätte man, wenn nöthig, in Fig. 40 den Berührungspunkt c der Geraden $c\,q$ und in Fig. 41 die Berührungspunkte g und d der Geraden $g\,u$ und $d\,p$ an der Durchschnittsfigur bestimmen können.



§ 138. In Fig. III ist die Vase in eine derartig schiefe Stellung gebracht, dass die unterste quadratische Fläche der Sockelplatte ebenso, wie bei Fig. II, schief zu beiden Tafeln, ihre Kanten $(a\,b,\ a'\,b')$, $(c\,d,\ c'\,d')\ldots$ aber parallel zur horizontalen, und schief zur verticalen Tafel sind, und deshalb auch die Projectionen $(A\,m\,o,\ A'\,m'\,o')$ der Körperachse nicht mehr als Senkrechte zur Projectionsachse, sondern schief zu derselben sich darstellen. Man hätte hier entweder die Horizontalprojection $A\,m\,x\,o$ der Körperachse und $A\,m''\,x''$ als den in die horizontale Tafel umgelegten Seitenriss derselben, sowie $a''\,b''\,c''\,d''$ als den Seitenriss der untern Sockelfläche bestimmen, oder statt dessen zuerst die beiden Projectionen $(A\,o,\ A'\,o')$ der Körperachse, wie bei Fig. VII, Taf. XVII, annehmen, und sodann den Seitenriss $a''\,b''\,c''\,d''\,m''\,x''$ daraus ableiten können.

Angenommen, es wäre das Letztere geschehen, also die beiden Projectionen $(A\,o, A'\,o')$ als die Richtung der Körperachse zuerst bestimmt worden, und es sollte die Vase mit $(a\,b,\ a'\,b')$ der Sockelplatte in der horizontalen Tafel liegen, so wähle man zuerst auf den Projectionen $(A\,o,\ A\,o')$ einen beliebigen Punkt $(x,\ x')$, errichte zu $A\,o$ in x eine Senkrechte $x\,x''$, mache $x\,x''$ gleich $y\,x'$, d. i. gleich der Entfernung, welche (x, x') von der horizontalen Projectionstafel hat (siehe § 106 Fig. IX, Taf. X), und ziehe $A\,x''$. Ferner zeichne man senkrecht zu $A\,x''$ in A eine Gerade $A\,1$, mache $A\,1$ gleich der halben Länge einer Sockelkante $(a\,b, a'\,b')\ldots$, also z. B. gleich $a'\,m'$ in Fig. I, ziehe aus 1 in Fig. III eine Parallele zu $A\,x''$, so ist der Schnittpunkt $a''\,(b'')$ der letzteren mit $A\,o$ der Seitenriss einer Kante $(a\,b, a'\,b')$, welche in der horizontalen Tafel liegt. Zieht man nun aus $a''(b'')$ senkrecht zu $A\,o''$ die Gerade $a''(b'')\,m''\,c''(d'')$, so ist, wie aus der Zeichnung zu ersehen, $a''(b'')\,m''$ gleich $A\,1$, d. i. gleich der halben Länge einer Sockelkante; macht man $m''\,c''\,(d'')$ gleich $m''\,a''\,(b'')$, so ist $a''\,b''\,c''\,d''$ als Seitenriss der untern Sockelfläche gleich $a\,b$ oder $a'\,b'$ in Fig. I, also gleich der wahren Länge einer Sockelkante. Aus diesem Seitenriss werden nun die beiden Projectionen $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$ der untern Sockelfläche abgeleitet, indem man aus $a''(b'')$ und $c''(d'')$ rechtwinklig zu $A\,o$ die Geraden $a\,b$ und $c\,d$ in der Horizontalprojection zeichnet, darauf von $a''(b'')$ und $1''$ aus je die Hälfte einer Kantenlänge (z. B. $a'\,m'$ aus Fig. I) nach beiden Seiten der Achse $A\,o$ anträgt und a mit d, sowie b mit c verbindet; $a\,b\,c\,d$ ist dann die Horizontalprojection der untern Sockelfläche. Errichtet man in a, b, c, d die Projicirenden, so liegen die Verticalprojectionen von a, b in der Projectionsachse und die Verticalprojectionen c', d' in einer Entfernung von derselben, welche gleich der Grösse $1''\,c''\,(d'')$ ist. Zeichnet man ferner in beiden Vierecken $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$ die Diagonalen $(a\,c,\ a'\,c')$, $(b\,d,\ b'\,d')$, so ergibt sich dadurch auf den Achsenprojectionen $(A\,o,\ A'\,o')$ der Mittelpunkt (m, m') der quadratischen Fläche $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$, d. i. der Schnittpunkt dieser Achse mit der untern Sockelfläche.

Soll, wie in der Zeichnung angegeben, nur die Verticalprojection der Vase ausgeführt werden, so lege man die Achse $(A\,o,\ A'\,o')$ in die verticale Tafel nach $A''\,x''\,o''$ um (siehe § 106, Fig. IX, Taf. X), indem man $A'\,A''$, $x'\,x'''$ rechtwinklig zu $A'\,x'\,o'$ und gleich $A\,A'$, $x\,y$ macht, ziehe aus m' gleichfalls die zu $A'\,o'$ rechtwinklige Gerade $m'\,m'''$ und trage von m''' aus auf die Gerade $A''\,m'''\,o''$ die einzelnen Höhenabschnitte aus Fig. I, z. B. $m'\,n'\ldots m'\,I$, $m'\,II$, $m'\,III\ldots$ in $m'''\,n''\ldots m'''\,I''$, $m'''\,II''$, $m'''\,III''\ldots$ über, so dass also $m'''\,o''$ in Fig. III, gleich $m'\,o'$ in Fig. I getheilt ist. Aus diesen Theilpunkten ziehe man nun die Senkrechten zu $A'\,o'$, mache sodann $n'\,t$, $n'\,l'\ldots I'\,3'$, $I'\,4'$ u. s. w. gleich $n'\,1'$, $n'\,2'\ldots I\,3$, $I\,4$ u. s. w. in Fig. I und zeichne gleichwie in Fig. II durch die auf beiden Seiten der Achse $A'\,o'$, liegenden Punkte, wie $t'\ldots$, $3'$, $5'\ldots$ und $l'\ldots$, $4'$, $6'\ldots$ das schiefliegende verticale Durchschnittsprofil der Vase. Um die Dicke der Sockelplatte in der Verticalprojection zu bestimmen, ziehe man aus a', b', c', d' parallel mit $A'\,o'$, mache $a'\,k'$, $b'\,g'$, $d'\,i'$, $c'\,h'$ gleich $m'\,n'$ und verbinde k', g', g', h', h', i', i', k' durch Gerade.

In der Horizontalprojection wurden k, g, h, i dadurch bestimmt, dass man im Seitenriss $A\,m''\,x''$ die Strecke $m''\,n''$ gleich $m'\,n'$ in Fig. I machte, durch n'' die Gerade $6\,n''\,n\,4\,3$ zeichnete und nunmehr die Grösse $m\,n$ von a, b, c, d in $a\,k$, $b\,g$, $c\,h$, $d\,i$ antrug. Auf diesem oberen Quadrat $(k\,g\,h\,i,\ k'\,g'\,h'\,i')$ liegt nun auch der unterste Vasenkreis, dessen Projectionen $5\,4\,8\,l\,9$, $t\,s\,l'\,r$ sind. Derselbe wurde zuerst in der horizontalen Projection bestimmt, indem man $n\,4$, $n\,9$ gleich $n'\,1'$ oder $n'\,2'$ in Fig. I, also $4\,n\,9$ gleich der wahren Grösse des Durchmessers machte, sodann aus 4 und 9 parallel mit einer Diagonalen $k\,h$ die Geraden $4\,5$, $9\,8$ zeichnete, wodurch sich $5\,n\,8$ als kleine Ellipsachse ergeben hatte. Die Kreisprojection (Ellipse) wurde nun in bekannter Weise fertig gezeichnet, und aus ihr die kleine Ellips-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

achse $s\,r$ der Verticalprojection nach der in § 132, Fig. VII, Taf. XVII angeführten Methode gefunden.

Da nun nach § 133 die übrigen Kreisprojectionen ähnliche Ellipsen sind, so ist die weitere Ausführung dieselbe wie bei Fig. II.

Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Cylinders mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung.

Tafel XX. Figur I—II^a.

§ 139. Eine Cylinderfläche wird erzeugt, wenn sich eine Gerade als Erzeugende über irgend einer Curve als Leitlinie so bewegt, dass sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage, d. i. parallel mit sich selbst bleibt. Eine Cylinderfläche kann aber auch entstehen, wenn man die Curve als Erzeugende auf der Geraden als Leitlinie so fortgleiten lässt, dass sie dieselbe stets in dem gleichen Punkte berührt, und die Lage der Curve oder deren Ebene stets parallel mit sich selbst bleibt. Cylinderflächen theilen sich wieder in zwei Hauptgattungen, nämlich in senkrechte und schiefe Cylinderflächen. Die senkrechte Cylinderfläche entsteht, wenn die Gerade als Erzeugende senkrecht zur Ebene der Leitlinie steht; die schiefe Cylinderfläche, wenn die gerade Erzeugende schief zur Ebene der Leitlinie steht. Ist die Leitlinie ein Kreis, und steht die Erzeugende senkrecht zur Kreisebene, so erzeugt sie durch ihre Fortbewegung einen senkrechten Kreis- oder Rotationscylinder. Dabei kann man sich die Cylinderfläche auch durch Rotiren der Erzeugenden um eine Gerade als Achse entstanden denken, soferne die rotirende (sich drehende) Gerade stets parallel zu der Cylinderachse bleibt. Ebenso wird auch ein Kreiscylinder entstehen, wenn ein Kreis mit seinem Mittelpunkte durch eine Gerade gleitet und seine Ebene stets rechtwinklig zu dieser Geraden bleibt. Der Schnitt einer Ebene, welche rechtwinklig zu den geraden Erzeugenden steht, heisst ein Normalschnitt des Cylinders. Je nach der Gestalt des Normalschnittes wird auch die Cylinderfläche benannt. Ist z. B. dieser Normalschnitt ein Kreis, eine Ellipse oder Spirale etc., so heisst die Cylinderfläche eine kreisförmige, elliptische oder spiralförmige.

Die Cylinderfläche ist gleich den Mantelflächen der Prismen eine abwickelbare, da zwei sehr nahe oder unendlich nahe liegende Erzeugende ein ebenes Flächenelement bilden, d. h. man kann den Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen und kleinen Seiten betrachten.

§ 140. In Fig. I ist ein senkrechter Kreiscylinder dargestellt, dessen Basisfläche in der horizontalen Tafel liegt. Die schräge Schnittfläche steht senkrecht zur verticalen Tafel und ist zur horizontalen unter 45° geneigt; $r'\,r\,R$ ist die horizontale Trace der schneidenden Ebene, welche den Cylinder nach einer Ellipse durchschneidet, deren Horizontalprojection mit der gleichen Projection der Basisfläche zusammenfällt, sich also zu einem Kreise verkürzt. Ihre wahre Grösse $a'''\,b'''\,c'''\,d'''\ldots$ wurde durch Aufstellen um den fixen Punkt (d, d'') parallel zur verticalen Tafel gefunden.

Um die wahre Grösse der schrägen Schnittfigur zu bestimmen, ziehe man $a''\,a'''$, $b''\,b'''\,m'''$, $c''\,c'''\,l'''$ senkrecht zu $a''\,b''\,c''\ldots$, mache $a''\,a'''$ und $g''\,g'''$ gleich $o\,d$ oder $o\,k$ der Horizontalprojection, und ziehe $a'''\,g'''$, so ist $a'''\,o'''\,g'''$ die grosse und $d''\,o'''\,k'''$ (gleich $d\,o\,k$) die kleine Achse der Ellipse. Die weiteren Curvenpunkte $b''', c''', e''', f'''\ldots$ wurden gefunden, indem man die Entfernungen $b, c, e, f\ldots$ von dem Durchmesser $a\,g$ (Grundriss) von der grossen Achse $a'''\,g'''$ aus auf die entsprechenden Projicirenden nach $b''', c''', e''', f'''\ldots$ antrug. So ist z. B. $b'''\,m'''$ gleich $b\,m$, $c'''\,l'''$ gleich $c\,l$ u. s. w.

§ 141. Die Netzbestimmung dieses Cylinders ist ähnlich wie bei dem Prisma in Fig. I^a Taf. XV. Man denke sich nämlich den Cylinder als ein Prisma von sehr vielen gleichen Seiten (der Kürze halber sind hier nur zwölf angenommen) und trage die wahre Breite dieser Seiten*) $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ in Fig. I^a, z. B. von a aus, auf eine Gerade**) in $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ und $a\,m, m\,l\ldots$ nach beiden Seiten an, errichte über diesen Punkten Senkrechte, mache $a\,a', b\,b', c\,c'\ldots$, sowie $m\,m'$, $l\,l', k\,k'\ldots$ in Fig. I^a gleich den wahren Längen der betreffenden Erzeugenden, und verbinde $g, h, i, k, l, m, a, b, c\ldots$ durch eine stetige Curve. Die Erzeugende $(g, g'\,g'')$ bildet hierbei die Trennungslinie der Mantelfläche. An die abgewickelte Basislinie $g\,a\,g$ lege man ferner die Basisfläche, d. i. den Kreis $a\,b\,c\ldots$; derselbe berührt hier den Mantel in einem beliebigen Punkte f. Ferner ist die Ellipse mit irgend einem beliebigen Punkt an den entsprechend gleichen Punkt des Mantelumrisses zu legen.

Angenommen, es solle die Ellipse mit einem Scheitelpunkte d'' den Mantelumriss in d'' berühren, so hat man, um die Lage der kleinen Achse $d''\,k''$ (Fig. I^a) bestimmen zu können, zuerst an die Curve $a'\,b'\,c'\,d''\,e'\ldots$, und zwar in d'', eine Tangente zu zeichnen. Um diese Tangente $d''\,r'$ genau zu bestimmen, lege man in Fig. I durch den Punkt (d, d'') eine tangirende Ebene an die Cylinderfläche, welche diese nach der Erzeugenden $(d, d'\,d'')$ berührt, daher senkrecht zur horizontalen Tafel steht, und

*) Da ein solches Bogenstück, z. B. ab, zu gross ist, um als eine Gerade betrachtet werden zu können, so thut man gut, dasselbe noch einmal zu halbiren und diese Hälfte dann zweimal im Netze anzutragen, wodurch sich die Strecken $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ in Fig. I^a genauer ergeben.

**) Diese Gerade $g\,g$ ist hier in der Projectionsachse angenommen worden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

deren Trace $d\,R$ mit der Horizontalprojection dieser Ebene zusammenfällt. Da nun $(R,\ R')$ sowohl auf der Trace der berührenden, wie auch auf der Trace der schrägen schneidenden Ebene liegt, so ist $(R,\ R')$ ein Punkt, welcher beiden Ebenen gemeinschaftlich angehört; dasselbe gilt auch von dem Punkte $(d,\ d'')$, welcher ebenfalls sowohl auf der schneidenden, als berührenden Ebene liegt. Denkt man sich nun $(d,\ d'')$ mit $(R,\ R')$ verbunden, so bildet diese Gerade ihrerseits wieder die Schnittkante der beiden erwähnten Ebenen und damit die Tangente an den Punkt $(d,\ d'')$ (vgl. Fig. 43); deren Projectionen sind $(d\,R,\ d''\,R)$.

Man mache daher in Fig. I^a $d\,r'$ gleich $d\,R$ in Fig. I und ziehe von d'' nach r'' (Fig. I^a), so ist diese die verlangte Tangente. Zu dieser rechtwinklig steht

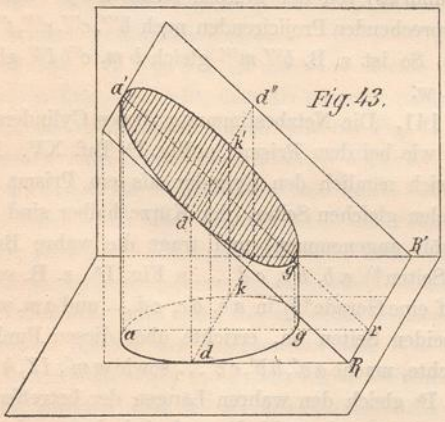


Fig. 43.

die kleine Achse $d''\,o''\,k''$ u. s. w. $d''\,r'$ bildet dabei zugleich auch die Tangente an den gleichen Punkt d'' der Ellipse.

Da bei der Netzentwicklung die tangirende Ebene, bezw. das begrenzte Stück $d\,d''\,r'$ derselben mit der gleichen Ebene zusammentällt, in welche die Cylinderfläche ausgebreitet wurde, so ist aus diesem Grunde auch $d\,d''$, $d\,r'$, $d''\,r'$ in Fig. I^a gleich $d'\,d''$, $d'\,R'$ (oder $d\,R$) und $d''\,R'$ in Fig. I.

Dass man in gleicher Weise auch an irgend einen andern Punkt, etwa f des Mantelumrisses, die Tangente hätte legen können, ist nach dem Gesagten nicht besonders schwer zu ersehen. So bildet z. B. $f\,r'$ die Trace einer die Cylinderfläche in $(f,\ f'\ f'')$ berührenden Ebene, wobei $(f\,r',\ f''\,R')$ zugleich die Projectionen der betreffenden Tangente sind. Würde man daher aus Fig. I die Strecke $f\,r'$ von f in Fig. I^a nach rechts antragen und Punkt f' mit dem so erhaltenen Punkte rechts verbinden, so hätte man damit die Tangente für f' in Fig. I^a gefunden.*) Die Ellipse wäre nun, falls sie in f' berührend mit Punkt f'' angelegt werden sollte, in eine solche Lage zu bringen, dass eine in f' berührende Gerade (Tangente) mit der in f''' die Ellipse berührenden zusammenfällt.

*) Diese Construction ist hier nicht ausgeführt.

In Fig. I wurde die Ellipstangente in f''' auf projectivem Wege gefunden; man dachte sich nämlich auch die horizontale Trace der schneidenden Ebene in die verticale Tafel in $R'\,r'''\,r^4$ aufgestellt, verlängerte sodann die Projectionen $(a\,g,\ a'''\,g''')$ der grosen Ellipsachse bis $(r,\ r''')$, machte $r'''\,r^4$ gleich $r\,r'$ und zeichnete durch $f'''\,r^4$ die verlangte Tangente. Eine in f''' zu $f'''\,r^4$ senkrechte Gerade heisst die Normale der Curve.

§ 142. Fig. II ist die Darstellung eines schiefen Cylinders in Parallelstellung zur verticalen Tafel. Die Basisfläche wurde als ein Kreis zuerst, und die Erzeugenden darauf schief zur horizontalen und parallel zur verticalen Tafel angenommen. Der Cylinder wurde oben durch eine schiefe Ebene $(a''\,k''\,g''\,d'',\ a'''\,k'''\,g'''\,d''')$, deren horizontale Trace $R'''\,R''$ ist, geschnitten. Der Normalschnitt $(a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'\,h'\ldots,\ a\,b\,c\,d\,e\,f\,g)\ldots$ bildet eine Ellipse, deren wahre Grösse $a''\,b''\,c''\,d''\,e''\,f''\,g''\ldots$ durch Drehen um die kleine Achse $(a'\,g',\ a\,g)$ parallel zur verticalen Tafel gefunden wurde (siehe § 129). Die nach abwärts verlängerte Gerade $R\,R'$ ist die horizontale Trace der Normalebene.

Bei der Netzentwicklung wird die Ellipse des Normalschnittes zu einer Geraden $g''\,g$ werden (vgl. § 122). Betrachtet man $(7\,g''',\ 7'\,g'')$ als diejenige Erzeugende, in welcher die Cylinderfläche auseinander geschnitten wurde, so bildet diese in Fig. II^a die Trennungslinie des Mantels.

§ 143. Um den Mantel zu bestimmen, verstrecke man die Bogenstücke $a'\,b''$, $b''\,c''$, $c''\,d''\ldots$ in Fig. II^a von einem Punkte a aus nach rechts und links auf die Gerade $g''\,g$*), errichte in den Theilpunkten g', h, i, k, l, m, a, $b\ldots$ die Senkrechten, trage die wahren Grössenabschnitte $a'\,a''$, $a\,1'\ldots$ $d'\,d''$, $d'\,4'\ldots$ der Erzeugenden von den entsprechenden Punkten der Geraden $g''\,g$ aus nach aufwärts und abwärts an und verbinde die Punkte $7, 8, 9, 10, 11, 12\ldots$, sowie oben $g'\ldots a''\ldots g'$ durch eine stetige Curve; lege sodann an 1 berührend die kreisförmige Basisfläche und ebenso in a'' die Ellipse des obern Cylinderschnittes an die Mantelfläche. Die Ellipse wurde hier mittels ihrer beiden Achsen bestimmt, wobei $a''\,g''$ und $d''\,k''$ in Fig. II^a gleich $a''\,g''$ und $d'''\,k'''$ in Fig. II angenommen wurde.**) Sollte in Fig. II an einen Punkt $(b,\ b')$ des Normalschnittes eine Tangente gelegt werden, so zeichne man zuerst $2\,R$, d. i. die Kreistangente an den Basispunkt $(2,\ 2')$ der Erzeugenden $(b\,2,\ b'\,2')$ und ziehe sodann $(b\,R,\ b'\,R')$ als die verlangte Tangente, deren verticale Projection $b'\,R'$ mit der Verticalprojection der Normalebene zusammenfällt. Die

*) Da hier die Basis in gleiche Theile getheilt ist, so ergeben sich in der Ellipse die Theile symmetrisch, z. B. $a'\,b'' = b''\,c'' = c''\,d'' = g''\,f'' = f''\,e'' = e''\,d''$ u. s. w.

**) Das Netz des schiefen Cylinders fällt hier des mangelnden Raumes halber zum Theil in das Netz Fig. I^a und ist das Ganze so ausgeführt, als wenn das erste Netz theilweise unter dem zweiten liegen würde.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Gerade $2R$ bildet die horizontale Trace einer den Cylinder in der Erzeugenden $(b\,2, b'\,2')$ berührenden Ebene, $R\,R'$ die horizontale Trace der Normalebene; (R, R'), wie auch (b, b') liegen daher wieder gemeinschaftlich in beiden erwähnten Ebenen, daher ist $(b, R, b'\,R')$ die verlangte Tangente (siehe § 141, Fig. 43). Ebenso verhält es sich mit einer Tangente, deren Horizontalprojection $T\,R''$ ist.

Darstellung eines senkrechten Kreiskegels mit schräger Schnittfläche und dessen Netzbestimmung.

Tafel XXI. Fig. I – II[a].

§ 144. Eine Kegelfläche wird erzeugt, wenn eine Gerade als Erzeugende über eine Curve als Leitlinie sich derart fortbewegt, dass sie dabei stets durch einen ausserhalb der Linie liegenden festen Punkt geht. Denkt man sich die Erzeugende über den Punkt hinaus verlängert, so entsteht durch ihre Bewegung eine vollständige Kegelfläche mit zwei Mantelflächen, welche in dem gegebenen Punkte S (Spitze oder Scheitelpunkt) zusammenstossen (vgl. Fig. 44).

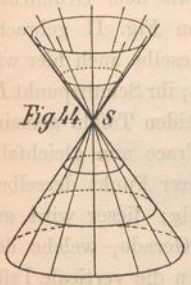


Fig. 44.

Auch die Kegelfläche kann man sich auf eine zweite Art entstanden denken, indem man nämlich die Leitende mit der Erzeugenden verwechselt, d. h. die Curve als Erzeugende über die Gerade als Leitende so hingleiten lässt, dass sie diese stets mit demselben Punkte berührt, parallel sich selbst bleibt, und in dem Verhältnisse sich verkleinert, als sie sich dem festen Punkte oder Scheitelpunkte nähert. Kegelflächen theilt man wieder in zwei Hauptgattungen, nämlich in senkrechte und schiefe Kegelflächen. Zur ersten Gattung gehört streng genommen nur die senkrechte Kreiskegelfläche oder auch Rotationskegelfläche, welche entsteht, wenn die gerade Erzeugende um eine andere Gerade als Drehungsachse rotirt, d. i. in allen Lagen zu dieser stets den gleichen Winkel am Scheitelpunkte bildet. Jede hierbei zur Drehungsachse senkrechte Ebene schneidet die Kegelfläche nach einem Kreise. Alle andern Kegelflächen heissen schief, und ausserdem je nach Gestalt der Leitlinie elliptische, spiralförmige etc.; schiefe Kegelflächen gibt es also unendlich viele, weil es unendlich viele Curven als Leitlinien geben kann.*)

§ 145. In Fig. I ist ein Kreiskegel dargestellt, welcher durch eine Ebene, die zur verticalen Tafel senkrecht und zur horizontalen unter 45^0 geneigt ist, geschnitten wird. Die Basis liegt in der horizontalen Tafel, die schneidende Ebene ergibt als Schnittfigur eine Ellipse, deren wahre Grösse durch Aufstellen parallel zur verticalen Tafel gefunden wurde. Man zeichne zuerst die beiden Projectionen $(a\,b\,c\,d\,e \ldots S,$ $a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots S')$ des Kegels*), d. h. man theile zuerst den Basiskreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe aus diesen Punkten und deren Verticalprojectionen die Erzeugenden $(a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und $a'\,S',\ b'\,S',\ c'\,S',\ d'\,S' \ldots)$, bestimme sodann die schneidende Ebene, deren Tracen $R\,R',\ 1'\,R'$ sind. Die Horizontalprojection des Schnittes ergibt sich durch die Projicirenden aus $1', 2', 3', T', 4' \ldots$, auf den Erzeugenden $a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und ist eine Ellipse, deren grosse Achse die Gerade $1\ 5$ bildet.

Da hier die Projicirenden aus $3'$ und $7'$ mit den Projectionen der Erzeugenden $(c\,S,\ g\,S)$, $(c'\,S',\ g'\,S')$ zusammenfallen, somit die Horizontalprojectionen 3 und 7 hierdurch nicht direct bestimmt werden können, so wird es nöthig, die Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit den darin liegenden Punkten um den Scheitelpunkt (S, S') parallel zur verticalen Tafel, etwa gegen (a, a') zu drehen (vgl. § 125, Fig. II, Taf. XVI), so dass nun die um (S, S') gedrehten Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit $(a\,S,\ a'\,S')$ zusammenfallen und die Punkte $3', 7'$, nach i' zu liegen kommen. Fällt man nun von i' die Projicirende, so ergibt sich i als Horizontalprojection, und diese mit den betreffenden Erzeugenden, welche wie schon gesagt, mit $(a\,S, a'\,S')$ zusammenfallen, in ihre ursprüngliche Lage nach $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ zurückgedreht, ergibt die Punkte 3 und 7 der Horizontalprojection. Da die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ gleiche Höhe im Raume haben, so liegt 3 und 7 in dem Halbkreise, welcher aus S durch i gezeichnet wurde; oder man denke sich durch die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ eine Hilfsebene parallel zur Basis gelegt, welche den Kegel nach einem Kreise schneidet**), dessen linke Hälfte $(3\,i\,7,$ $3'\,i'\,7')$ ist; die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ liegen daher sowohl auf diesem Kreise, als auch auf den Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$. In gleicher Weise konnten auch die Punkte $T, u, 4, 6 \ldots$ der Horizontalprojection gefunden werden. Dieselben haben wie ersichtlich, je paarweise gleichen Abstand von der horizontalen Tafel. Die Punkte x und y, welche nur dazu dienen, die Ellipse genauer zeichnen zu können, wurden von der kleinen Achse $T\,u$ in gleiche Entfernung, wie 2 und 8 auf den Geraden $2\,x$ und $8\,y$ bestimmt. Um die wahre Grösse der Schnittfigur (Ellipse) zu bestimmen, errichte man

*) Wir haben für unsere Zwecke in diesem Werke nur den Rotationskegel mit seinen charakteristischen Schnittfiguren, Ellipse, Hyperbel und Parabel, zur Darstellung gebracht.

*) Es ist hier nur der Kegel mit einer Mantelfläche in Betracht gezogen; die zweite Mantelfläche würde entstehen, wenn die Erzeugenden über (S, S') hinaus verlängert würden.

**) Parallele Schnitte ergeben im Kegel ähnliche Figuren, wesshalb auch hier jede zur Basis parallele Ebene den Kegel nach einem Kreise schneidet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zunächst über deren Verticalprojection $1'2'3'T'4'5'\ldots$ die Senkrechten zu dieser, zeichne ferner $1''5''$ in beliebiger Entfernung, jedoch parallel zu $1'2'3'T'\ldots$; so ist $1''5''$ gleich $1'5'$ die grosse Ellipsachse, ferner Tu der Horizontalprojection halbirt und von dem Mittelpunkte der Achse $1''5''$ nach beiden Seiten rechtwinklig angetragen, ergibt $T''u''$ gleich Tu als kleine Achse. Die übrigen Curvenpunkte ergeben sich in gleicher Weise, indem man die Abstände $2''$ und $8''$, $3''$ und $7''\ldots$ von der Achse $1''5''$ gleich den Abständen macht, welche 2 und 8, 3 und 7 von der Achse $1\,5$ in der Horizontalprojection haben.

§ 146. Wäre die Aufgabe gestellt, auf projectivem Wege die Brennpunkte der Ellipse in jeder der Projectionen, wie auch in deren Umlegung zu bestimmen, so denke man sich hierzu in jedem der Kegelabschnitte, welche hier durch die schneidende Ebene zu beiden Seiten derselben, d. i. oben und unten entstanden sind, je eine Kugel gelegt, welche sowohl die Kegelfläche, und zwar nach Kreisen, wie auch die schneidende Ebene berühren. Diese letzteren Berührungspunkte F, F'' sind dann die Brennpunkte der Schnittfigur*) (Ellipse). Die Verticalprojectionen solcher Kugeln bilden Kreise, welche geometrisch betrachtet, die Seiten $S'1'$, $1'5'$, $5'S'$ und $a'1'$, $1'5$, $5'e'$ berühren. Die Brennpunkte F''', F^4 ergeben sich in der aufgestellten Ellipse auf deren grosser Achse mittelst der Projicirenden aus F, F''.

§ 147. Fig. II zeigt denselben Kegel mit der gleichen schrägen Schnittfläche, jedoch in einer solchen Stellung, dass die schneidende Ebene nunmehr schief zu beiden Tafeln ist und ihre beiden Tracen RnR' und $R''v'o$ schief zur Projectionsachse stehen und in $R'(R'')$ zusammentreffen.*)

Die Projectionen der Fig. II wurden ausgeführt, indem man zuerst den Grundriss der Fig. I in die Lage des Grundrisses von Fig. II brachte, ferner die Verticalprojectionen der Erzeugenden (aS, bS, $cS\ldots$ in $a'S'$, $b'S'$, $c'S'\ldots$) bestimmte (und zwar (S, S') in gleicher Höhe wie in Fig. I) und sodann mittelst der wagrechten Projicirenden aus $1'2'3'4'\ldots$ der Fig. I, auf den Erzeugenden $a'S'$, $b'S'$, $c'S'$, $d'S'\ldots$ die entsprechenden Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'\ldots$ abschnitt. Die horizontale Trace RnR' wurde mit dem Grundrisse ebenfalls in die schiefe Lage von Fig. II gebracht (en Fig. II $=$ en Fig. I), so dass dieselbe auch hier wie in Fig. I rechtwinklig zu Sen steht; ihr Schnittpunkt R' mit der Projectionsachse gehört beiden Tafeln gemeinschaftlich an. Soll die verticale Trace nun gleichfalls bestimmt werden, so ist ein weiterer Punkt derselben in der verticalen Tafel nothwendig; dieser wird gefunden, indem man irgend eine Gerade, welche der schneidenden Ebene angehört, gegen die verticale Tafel verlängert und ihren Durchschnittspunkt mit derselben bestimmt. Zeichnet man z. B. durch den Mittelpunkt der Schnittfigur, etwa im Grundrisse, zuerst eine Parallele zu RnR', deren Schnitt mit der Achse, d. i. mit der verticalen Tafel v ist, ebenso deren Verticalprojection, welche aus dem Mittelpunkte der Schnittfigur parallel zur Projectionsachse ist, so ergibt sich (v, v') als ein zweiter Punkt und $R''v'$ ist die verticale Trace.

§ 148. Das Netz des ganzen oder abgestumpften Kegels konnte hier aus jeder der Projectionen Fig. I oder II abgeleitet werden. Fig. I eignet sich jedoch hierzu besser. Die Bestimmung des Netzes ist ähnlich wie bei der Pyramide, indem der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen und kleinen Seiten betrachtet werden kann. Zwei sehr nahe liegende Erzeugende bilden nämlich, ähnlich wie bei dem Cylinder, ein ebenes Flächenelement, wodurch der Kegel ebenso wie der Cylinder in eine Ebene ausgebreitet werden kann. Man zeichne hierzu mit der wahren Länge einer

*) Wie schon früher in § 69 angedeutet worden ist, kann eine Ellipse als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden. Es kann sowohl die Central- wie auch die Parallelprojection einer Kugel oder eines Kreises eine Ellipse bilden, soferne die Projicirenden schief gegen die Projectionsebene fallen.

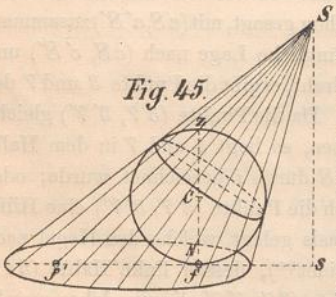


Fig. 45.

Bei der centralen Projection einer Kugel oder eines Kreises gegen eine Ebene bilden die Projicirenden, deren Scheitelpunkt das Projectionscentrum ist (siehe Fig. 45), eine Kegelfläche. Bei der Parallelprojection einer Kugel oder eines Kreises bilden die Projicirenden eine Cylinderfläche (siehe Fig. 46).

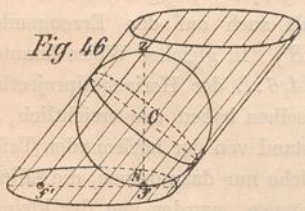


Fig. 46.

Nimmt man nun eine Kugel als den zu projicirenden Körper an, so wird in beiden Fällen die Kugel von den Projicirenden nach einem Kreise berührt werden (vgl. Fig. 45 mit 46), und es ist gleich, ob wir nun sagen, die Ellipse ist die Projection dieses Kreises oder der Kugel. Die Brennpunkte jedoch sind Projectionen derjenigen beiden Kugelpunkte (z, n), welche von der Projectionsebene die grösste und kleinste Entfernung haben (Zenith und Nadir).

Man könnte die Ellipse als den Schatten der Kugel und die Projicirenden als die Lichtstrahlen betrachten.

*) Die Aufgabe hätte man auch bei Prisma, Pyramide und Cylinder stellen können, was dort jedoch unterblieben ist. Für denjenigen, welcher sich dafür interessirt, dürfte es nicht schwer sein, das hier Gesagte auch auf jene Beispiele anzuwenden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Erzeugenden*) als Radius aus S in Fig. II einen Kreisbogen, trage auf diesen die Bogentheile ab, bc, cd ... aus Fig. I über und ziehe aus den so erhaltenen Theilpunkten a, b, c, d ... die Geraden nach S, trage ferner auf aS von a aus die wahre Länge von $(a1, a'1')$, d. i. $a'1'$ und ebenso von b aus die wahre Länge von $(bS, b'S')$ u. s. w. an und verbinde $6, 7, 8, 1, 2$ ... durch eine stetige Curve; $f6$ ist hierbei die Trennungslinie der Mantelfläche. Da hier das Netz des abgestumpften Kegels als wirklich bestehend gedacht ist, so ist ausser der Basisfläche auch noch die Schnittfigur an die Curve oben anzulegen.

Angenommen, es solle die Schnittfigur mit einem Scheitelpunkte (T, T') den Mantelumriss berühren, so ist die Aufgabe ähnlich wie in Fig. I und II, Taf. XX zu lösen (vgl. Fig. 47).

Man lege nämlich durch (T, T') in Fig. I eine tangirende Ebene an die Kegelfläche, welche dieselbe nach der Erzeugenden $(tTS, t'T'S')$ berührt und deren horizontale Trace die Kreistangente tR ist und verbinde T mit R. (Die Verticalprojection $T'R'$ dieser Tangente fällt mit der gleichen Projection der schneidenden Ebene zusammen.) Ferner trage man den Punkt t aus Fig. I nach t in Fig. II^a in gleicher Ordnung über und lege durch t die Kreistangente tR, mache tR in Fig. II^a gleich tR in Fig. I und verbinde T mit R, so ist letztere die verlangte Tangente an den Punkt T der abgewickelten Mantelfläche. Zu dieser Tangente steht die kleine Achse Tu (= $T''u''$ in Fig. I) senkrecht u. s. w. Die Ellipse wurde hier mittels ihrer Brennpunkte F, F' gezeichnet (siehe Fig. V, Tafel VI).

Eine beliebige zweite Tangente $(6R, 6'R')$, wie auch deren geometrische Lage $6''s'r'$ konnte ebenso gefunden werden.

$R'R'''r'n'$ ist die parallel zur verticalen Tafel aufgestellte horizontale Trace der schneidenden Ebene, in welcher $n'r'$ gleich nR der Horizontalprojection gemacht wurde. Ebenso ist $n'R'''$ gleich nR, und $T''R'''$ die Tangente an den Scheitelpunkt T'' der aufgestellten Ellipse (vgl. Fig. I, Tafel XX).

In gleicher Weise wurde auch in Fig. II an Punkt (T, T'), welcher mit $(7, 7')$ identisch ist, eine Tangente gelegt; gR ist hier die Trace der berührenden, RnR' die Trace der schneidenden Ebene, (R, R') und (T, T') Punkte, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich angehören, somit $(TR, T'R')$ eine Tangente (vgl. Fig. 47).

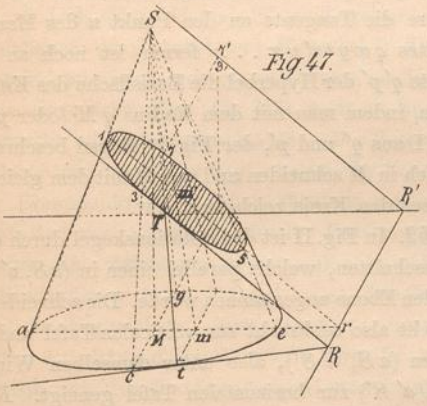


Fig. 47.

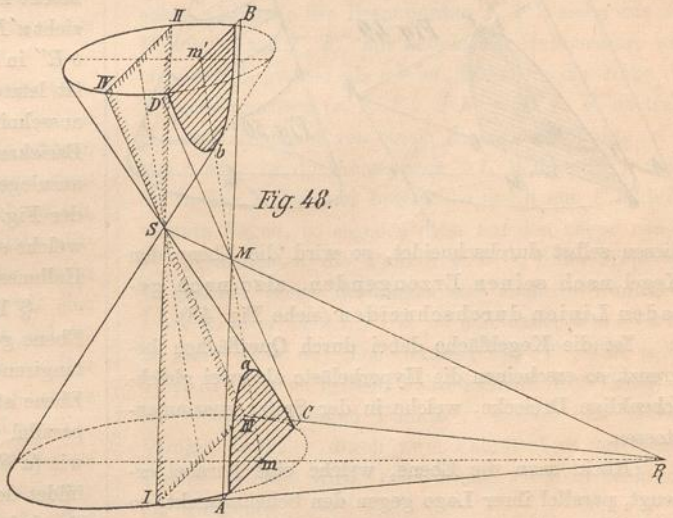


Fig. 48.

Darstellung des Kegels mit den Kegelschnittlinien Hyperbel und Parabel und Netzbestimmung des ersten Kegels.

Tafel XXII. Figur I—II^a.

§ 149. Unter den sog. Kegelschnittlinien versteht man die schon früher erwähnte Ellipse, ferner die Hyperbel und Parabel. Die Ellipse entsteht, wenn die schneidende Ebene sämmtliche Erzeugende eines Kreiskegels durchschneidet (siehe Fig. I und II, Tafel XXI). Liegt eine Ebene so, dass sie alle Erzeugenden unter gleichen Winkeln durchschneidet, so wird dadurch ein Kreis erzeugt; der Kreis kann somit als eine specielle Art von Ellipse betrachtet werden, wobei die beiden Brennpunkte im Centrum zusammenfallen. Der Schnitt einer Rotationskegelfläche und einer Ebene, welcher parallel ist der Drehungsachse, oder allgemeiner ausgedrückt, welcher auch den zweiten Mantel des Kegels durchschneidet, ist eine Hyperbel (vergl. Fig. 48). Die

*) Da hier alle Erzeugenden in der Wirklichkeit gleiche Länge haben, $a'S'$ aber parallel zur verticalen Tafel ist, so repräsentirt $a'S'$ mit den darauf liegenden Punkten l', k', i' ... sowohl die wahre Länge sämmtlicher Erzeugenden $(aS, a'S')$, $(bS, b'S')$ u. s. w., wie auch die wahren Längen der einzelnen Abschnitte $(a1, a'1')$, $(b2, b'2')$, $(c3, c'3')$ ... auf denselben, so dass z. B. $a'i'$ die wahre Grösse von $(c3, c'3')$ ist u. s. w.

Hyperbel ist eine Linie, welche aus zwei einander congruenten und gegenüberliegenden offenen Curven besteht (siehe Fig. IV, Tafel XXII). Der Schnitt einer Rotationskegelfläche und einer Ebene, welche parallel einer tangirenden Ebene der Kegelfläche ist, ist eine Parabel (vergl. Fig. 49).

Rückt man die schneidende Ebene, welche eine Ellipse erzeugt, immer näher dem Scheitelpunkte S, so wird die Ellipse um so kleiner werden, je näher sie diesem Scheitelpunkte zu liegen kommt, bis sie schliesslich mit demselben zusammentällt, d. h. zu einem Punkte geworden ist (vergl. Fig. 50).

Rückt man eine schneidende Ebene, welche eine Hyperbel erzeugt, näher dem Scheitelpunkte, bis sie

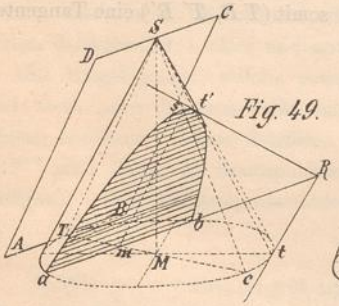


Fig. 49.

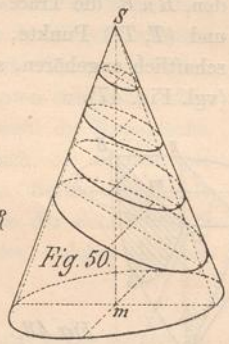


Fig. 50.

diesen selbst durchschneidet, so wird die Ebene den Kegel nach seinen Erzeugenden, also nach geraden Linien durchschneiden (siehe Fig. 48).

Ist die Kegelfläche dabei durch Querflächen begrenzt, so erscheinen die Hyperbeläste als zwei gleichschenklige Dreiecke, welche in der Spitze zusammenstossen.

Rückt man die Ebene, welche eine Parabel erzeugt, parallel ihrer Lage gegen den Scheitelpunkt, so wird sie zur tangirenden Ebene der Kegelfläche, die Parabel wurde dabei immer schmäler, bis sie zu einer Linie geworden ist. Die Hyperbel hat, wie die Ellipse, zwei Brennpunkte, die Parabel nur einen Brennpunkt.*)

§ 150. In Fig. I sind die Projectionen eines Rotationskegels gegeben. Die schneidende Ebene steht senkrecht zur horizontalen und parallel zur verticalen Tafel, die Schnittfigur bildet eine Hyperbel**), deren verticale Projection ($q' w' q' t' r' u \ldots$) in wahrer Grösse, und deren Horizontalprojection ($g w y t r u \ldots$) als eine Gerade parallel zur Projectionsachse erscheint.

Ihre horizontale Projection wurde hierbei zuerst angenommen, ihre verticale Projection ergab sich auf den Erzeugenden $l' S'$, $n' S'$, $m' S' \ldots$ durch die Projicirende aus $w, y, t \ldots$; die Punkte (q, q'), (p, p'), (w, w'), $(y, y') \ldots$ derselben liegen aber auch ebenso auf Kreisen, welche in der Horizontalprojection zuerst aus S durch $5\,v\,w$, $4\,x\,y \ldots$ gelegt wurden, und deren Verticalprojectionen die Geraden $5' v' w'$, $4' x' y' \ldots$ sind.

Der Kegel wurde ausserdem durch eine wagrechte Ebene, d. i. durch einen Kreis abgestumpft.

§ 151. Fig. I^a ist das Netz des durch die Hyperbel und den Kreis geschnittenen Kegels. Dasselbe wurde wie bei Fig. II^a, Tafel XXI gezeichnet; die Hyperbel wurde mit ihrem Scheitelpunkte r in den Ausschnitt des Netzes berührend eingelegt u. s. w. Die Hyperbeltangente ($u R$, $u' R'$) in Fig. I wurde ähnlich wie bei der Ellipse in Fig. I, Tafel XXI gefunden. $q R$ ist die horizontale Trace der schneidenden, $b R$ die horizontale Trace der in ($b u S$, $b' u S'$) berührenden Ebene; daher ($u R$, $u' R'$) Punkte, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich angehören; ($u R$, $u' R'$) ist also die Tangente. Macht man $p' R'''$ in Fig. I^a gleich $p R$ in Fig. I und zieht $u' R''$, so ist diese die Tangente an u' und macht man $b R''$ in Fig. I^a gleich $b R$ in Fig. I und zieht $u R''$, so ist letztere die Tangente an den Punkt u des Mantelausschnittes $q w y t r' u x \ldots$; ferner ist noch an die Basiskante $q' p'$ der Hyperbel die Basisfläche des Kegels anzulegen, indem man mit dem Radius $q M$ (oder $p M$) der Fig. I aus q' und p', der Fig. I^a Bögen beschreibt, welche sich in M schneiden und aus M mit dem gleichen Halbmesser den Kreis zeichnet u. s. w.

§ 152. In Fig. II ist der Rotationskegel durch eine Ebene geschnitten, welche parallel einer in ($a S$, $a' S'$) tangirenden Ebene angenommen wurde. Die schneidende Ebene steht also senkrecht zur verticalen Tafel und ist parallel zu ($a S$, $a' S'$), also unter demselben Winkel wie ($a S$, $a' S'$) zur horizontalen Tafel geneigt. $R' R$ bildet deren horizontale Trace, die Schnittfigur ist eine Parabel. Ihre Verticalprojection wurde zuerst bestimmt und ihre horizontale Projection durch die Projicirenden aus $o', n', u', t', q', p' \ldots$ gefunden (vgl. Fig. I, Tafel XXI).

Die Netzbestimmung der Fig. II wurde nicht ausgeführt, da die Aufgabe wesentlich gleich mit den vorhergegangenen wäre. Fig. II^a ist die parallel zur verticalen Tafel umgeklappte Schnittfigur, welche sich hier somit in wahrer Grösse darstellt. Hierbei zeichne man die Symmetrieachse $m''' p'''$ derselben in beliebigem Abstande parallel zur Verticalprojection der Schnittfigur, ziehe aus dieser die Projicirenden $p' p''$, $v' v''$, ($w' w''$), $q' q''$, ($p' p''$) ... und mache $v'' w''$, $q'' p''$, $t'' u'$, $n'' o''$ gleich $v w$, $q p$, $t u$, $n o$ der Horizontalprojection, d. h. man halbire z. B. $n o$ in m'' und trage $m'' o$ oder $m'' n$ von m''' aus nach beiden Seiten der Symmetrieachse an u. s. w.

Eine Tangente an den Punkt (p, p') und p'' der Parabel wurde in bekannter Weise gefunden. $R' n\, m''\, o R$ ist die horizontale Trace der schneidenden, $d R$ die horizontale Trace der in ($S p d$, $S' p' d'$) berührenden

*) Ueber das Weitere siehe § 153.

**) Da hier nur die Kegelfläche mit einer Mantelfläche dargestellt ist, so erhält man auch nur einen Ast oder eine Seite der Hyperbel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ebene u. s. w., und $o''R''$ oder $m'''R''$ in Fig. II^a gleich oR oder $m''R$ in Fig. II.

Sollte, wie in Fig. I, Tafel XXI, die Aufgabe gestellt sein, die Brennpunkte der Hyperbel und Parabel aus den Projectionen abzuleiten, so ist hier die Lösung dieser Aufgabe ganz die gleiche. Man denke sich z. B. in Fig. I wieder die berührende Kugelfläche, welche die Schnittfigur (Hyperbel) in F'' berührt. F'' ist sodann der Brennpunkt. Um den Berührungspunkt F'' zu bestimmen, denke man sich den Kegel mitsammt der Schnittebene gedreht, bis dieselbe in der Verticalprojection sich als eine Senkrechte projicirt, welche hier zufällig mit yy' zusammenfällt, zeichne sodann einen Kreis, welcher $k'S'$, $d'S'$ und die Senkrechte (hier yy') berührt. Von letzterem Berührungspunkte ziehe man die Wagrechte nach rechts, welche sodann auf $a'S'$ den Brennpunkt F'' ergibt.

In Fig. II berührt der Kreis, bezw. die Kugelprojection die Geraden $a'S'$, $g'S'$ und die Schnittfigur $o'n't'u'$..., und zwar letztere in F'', dem Brennpunkte der Parabel u. s. w.

§ 153. Fig. III und IV sind geometrische Constructionen der Parabel und Hyperbel.*) Die Parabel besteht, wie schon gesagt, aus einem einzigen offenen Aste. Ihre Achse Fas (Fig. III) theilt sie in zwei symmetrische oder congruente Hälften. Der Parabelpunkt a, welcher auf der Achse liegt, heisst ihr Scheitelpunkt; ihr Brennpunkt F, welcher ebenfalls auf der Achse liegt, hat vom Scheitel a dieselbe Entfernung wie eine Gerade nh, welche zur Achse senkrecht steht und die Leitlinie (directrix) der Parabel heisst. Die Curve selbst hat die Eigenschaft, dass die Entfernung eines jeden Punktes derselben von dem Brennpunkte gleich ist der Entfernung dieses Punktes von der Leitlinie (z. B. $eF = en$, $fF = fh$ u. s. w.). Daraus ergibt sich für die Construction einer Parabel folgendes Verfahren: Man bestimme zunächst die Achse Fas, und auf derselben a als Scheitelpunkt, sodann entweder zuerst den Brennpunkt F oder zuerst die Leitlinie ausserhalb des Scheitelpunktes ($aF =$ der Entfernung der Leitlinie von a), zeichne sodann beliebige Gerade ed, fc, und gb durch F, rechtwinklig zur Achse, nehme die Entfernungen dieser Geraden von der Leitlinie in den Zirkel und beschreibe mit denselben als Halbmessern aus F Kreisbögen, welche diese Geraden in de, cf, bg schneiden, wodurch $Fe = ne$, $Ff = hf$... geworden sind. Durch die so erhaltenen Punkte zeichne man mit freier Hand die Curve. Die Geraden Fe, en, Ff, fh ... heissen die Fahrstrahlen der Parabel; eine Tangente an irgend einem Punkte, z. B. f, halbirt den Winkel, welchen die Fahrstrahlen an diesem Punkte bilden. (Vergl. § 69, Fig. 33.)

*) Diese hätten eigentlich der Ordnung halber gleich nach den Constructionen der Ellipsen in Tafel VI gebracht werden können. Es wurde jedoch vorgezogen, dieses erst hier zu thun, nachdem der Lernende diese Curven als Kegelschnittlinien bereits erkannt hat, und somit auch sein Interesse für die Eigenschaften dieser Curven grösser ist, als es von Anfang an der Fall gewesen sein würde.

§ 154. Die Hyperbel besteht aus zwei offenen Aesten, welche symmetrisch sich gegenüberliegen. In Fig. IV heisst ab die Hauptachse, M der Mittelpunkt, eine auf der Achsenmitte zu aMb Senkrechte die Nebenachse; FF'' sind die Brennpunkte, ab die Scheitelpunkte der Hyperbel; die Entfernungen der Brennpunkte von den Scheitelpunkten a und b sind gleich. Die Curve selbst hat die Eigenschaft, dass der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes von den beiden Brennpunkten stets gleich der grossen Achse ist ($Fg - gF'' = Fm - mF'' = ab$). Hieraus ergibt sich für die Construction einer Hyperbel folgendes Verfahren: Man bestimme zunächst etwa die Hauptachse ab, sowie die Brennpunkte F, F'', ziehe aus den Brennpunkten F, F'' mit beliebigem Halbmesser, welcher jedoch grösser als ab ist, Bögen in der Nähe des Hyperbelumrisses (z. B. Fg, $Fh = F''f$, $F''e$), trage diesen Halbmesser von einem der Scheitelpunkte, z. B. von b aus, in die Achse nach $b1$, nehme die Strecke $a1$ in den Zirkel und beschreibe damit aus F und F'' weitere Bögen, so ergeben diese auf den zuerst aus F, F'' gezeichneten die Punkte g, h, e, f der Hyperbel. In gleicher Weise bestimmen sich auch die Punkte m, l u. s. w. ($Fm = b2$, $F''m = a2$; daher $Fm - mF'' = b2 - a2 = ab$). Die Geraden Fg, gF'', Fm, mF'', $F''f$, fF u. s. w. heissen Fahrstrahlen. Eine Tangente an einem beliebigen Punkte f halbirt den spitzen Winkel, welcher durch zwei Fahrstrahlen an diesem Punkte gebildet wird. Die Normale fN steht senkrecht zur Tangente.

Eine durch M an die Hyperbel gelegte Tangente berührt dieselbe erst in unendlicher Entfernung und heisst daher eine Asymptote, d. i. nie berührende Linie. Um die Lage der Asymptoten zu bestimmen, beschreibe man um FF'' als Durchmesser einen Kreis, ferner an die Scheitelpunkte a und b die Tangenten parallel der Nebenachse, welche den Kreis in t, u und in r, s schneiden. Zieht man nun durch u, r und t, s Gerade, so sind diese die verlangten Asymptoten.

Hieraus ergibt sich, dass die Hyperbel auch durch die Lage der beiden Asymptoten und durch die grosse Achse aMb bestimmt gewesen wäre. Man hätte in diesem Falle zunächst die Geraden tau, rbs durch a und b gezeichnet, damit u, t, s, r auf den Asymptoten erhalten und die Entfernungen der Brennpunkte F, F'' von M nun gleich Mu oder Mt ... gemacht. Wären ausser den Asymptoten statt der Scheitelpunkte die Brennpunkte F, F'' bestimmt worden, so wäre die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hyperbel, wie leicht ersichtlich, gleichfalls bestimmt und das Resultat dasselbe gewesen.*)

Darstellung der Kugel und ihrer Schnitte.

Tafel XXIII. Fig. I—IV.

§ 155. Die Kugelfläche gehört ebenso wie Kreiscylinder und Kreiskegel zu den Rotationsflächen**), und entsteht, wenn ein Kreis um seinen Durchmesser rotirt. Der Kreis ist also die Erzeugende, der Durchmesser die Drehungsachse. Die verschiedenen aufeinanderfolgenden Lagen, welche der erzeugende Kreis während der Drehung einnehmen kann, heissen die Meridiane, die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Erzeugenden beschrieben werden, Parallelkreise. (Ueber weitere Umdrehungsflächen siehe § 161.) Die orthogonalen Projectionen einer Kugel stellen sich stets als grösste Kugelkreise dar, da die projicirenden Cylinderflächen dieselben nach einem grössten Kreise berühren. Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

§ 156. Fig. I zeigt die beiden Projectionen einer Kugel, welche durch zwei Ebenen geschnitten wird, von welchen die eine senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel, die andere umgekehrt, senkrecht zur horizontalen und parallel zur verticalen Tafel ist. Die Schnitte projiciren sich, da sie je parallel zu einer Tafel sind, in diesen als geometrische Kreise, in den anderen als Gerade. Ein ebener Kugelschnitt ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$), welcher durch die Mitte der Kugel parallel zur horizontalen Tafel gelegt wird, fällt in $a\,b\,c\,d$ mit dem Umfang der Horizontalprojection zusammen, und umgekehrt: ein grösster Kugelschnitt ($a\,e\,c\,f$, $a'\,e'\,c'\,f'$), dessen Lage mit der verticalen Tafel parallel ist, projicirt sich in dieser ebenfalls als Kugelumfang. Angenommen, es sei I ein in der Horizontalprojection zuerst bestimmter Punkt auf der Kugelfläche, so wird man seine Verticalprojection dadurch erhalten, dass man durch I eine, etwa zur verticalen Tafel parallele Hilfsebene legt, deren Schnitt im Aufriss sich als ein geometrischer Kreis projicirt. Zieht man nun aus I die Projicirende hinauf, so schneidet diese den Kreis in zwei Punkten und I' liegt, je nachdem man sich den Punkt auf der untern oder obern Kugelhälfte denkt, oben oder unten in der Kreislinie. Nimmt man, wie in vorliegender Zeichnung, den Punkt auf der obern Kugelhälfte an, so bestimmt sich die Verticalprojection von I in I' oben. Ebenso hätte man I' auch finden können, indem man durch (I, I') die Hilfsebene sich parallel zur horizontalen Tafel gelegt dachte, d. h. aus m mit einem Halbmesser mI einen Kreis beschrieb und diesen in der Verticalprojection verzeichnete; seine Projection ist dann die durch I' gehende wagrechte Gerade u. s. w. (II, II') und (III, III') sind weitere Projectionen zweier Punkte, wobei (II, II') auf dem zur verticalen Tafel parallelen und grössten Kreise oder Meridian und (III, III') auf dem zur horizontalen Tafel parallelen und grössten Kreise (Parallelkreis oder Aequator) liegt.

Eine durch das Kugelcentrum gehende und zu beiden Tafeln senkrechte Ebene schneidet die Kugel nach einem grössten Kreise, dessen Projectionen ($d\,e\,b\,f$, $d'\,e'\,b'\,f'$) sich je als eine Senkrechte zur Projectionsachse darstellen und deren Längen gleich dem Kugeldurchmesser sind.

Die Kreisebenen, deren Projectionen ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$), ($a\,e\,c\,f$, $a'\,e'\,c'\,f'$) und ($e\,d\,f\,b$, $e'\,d'\,f'\,b'$) sind, stehen senkrecht zu einander und schneiden sich je paarweise nach einem Durchmesser.

§ 157. In Fig. II sind zunächst wieder die Projectionen jener senkrecht zu einander stehenden grössten Kreise ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$), ($a\,e\,c\,f$, $a'\,e'\,c'\,f'$) und ($e\,d\,f\,b$, $e'\,d'\,f'\,b'$) bestimmt worden.*)

Man betrachte $e'\,h'\,i'\,g'$ als die zuerst gegebene Verticalprojection eines Kugelschnittes, dessen Lage senkrecht zur verticalen und schief zur horizontalen Tafel ist. Seine Horizontalprojection gestaltet sich zu einer Ellipse $e\,h\,i\,g$, deren grosse Achse $h\,n\,g$ gleich $i'\,n'\,e'$ der Verticalprojection, und deren kleine Achse $i\,n\,e$ mittels der Projicirenden aus i' und e' gefunden wurde.**) Eine aus dem Kugelcentrum gegen die Kreisebene gefällte Senkrechte schneidet die Kreisebene in ihrem Mittelpunkte (n, n'), bildet also ein Mittelloth zu derselben. Sollten auf projectivem Wege für die Horizontalprojection mehrere Curvenpunkte gefunden werden, so brauchte man nur mehrere Hilfsebenen oder Kugelschnitte etwa parallel zur horizontalen Tafel

*) Die schiefe Projection Fig. 48 veranschaulicht die Ableitung der Asymptoten auf projectivem Wege. Denkt man sich nämlich durch den Scheitelpunkt S des Kegels eine zur Hyperbel parallele Ebene, so schneidet diese, wie schon erwähnt, denselben nach den Erzeugenden $I\,II$, $III\,IV$; legt man ferner an diese Erzeugenden tangirende Ebenen (deren horizontale Tracen $I\,R$, $III\,R$ sind), so schneiden letztere die Ebene der Hyperbel nach den als Asymptoten sich darstellenden Geraden $A\,B$, $C\,D$, sowie sich selbst nach der Geraden $S\,M\,R$.

**) Eine Rotationsfläche überhaupt wird erzeugt, indem sich irgend eine Linie als Erzeugende um eine feste Gerade als Achse dreht, und zwar so, dass jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Achse steht. Die Erzeugende heisst dabei in ihren verschiedenen Lagen ein Meridian, und die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Erzeugenden beschrieben werden, heissen Parallelkreise. Die Erzeugenden von Rotationscylinder- und Kegelfläche könnten somit ebenfalls als Meridiane bezeichnet werden; doch ist diese Bezeichnung hierfür nicht üblich.

*) Diese drei grössten Kreise sind bei allen Kugelprojectionen gleich anfänglich zu bestimmen.

**) Diese Ellipse könnte nun auch, nachdem die Achsen gefunden sind, nach der in § 72, Fig. III Tafel VI, angegebenen Methode gezeichnet werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zu zeichnen und die Durchschnitte derselben mit dem schiefen Kugelschnitt aus der verticalen in die horizontale Projection zu tragen, um so eine Anzahl von Curvenpunkten der Ellipse zu erhalten.

Von besonderer Wichtigkeit sind hierbei die Uebergangspunkte der Kreislinie von der oberen zur unteren Kugelhälfte. Solche sind (t, u, t', u'), welche auf dem grössten horizontalen Kreise $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$ liegen, somit in der horizontalen Projection t, u jene Punkte sind, in welchen die Kreisprojection (Ellipse) den Kugelumfang berührt. Ein zweiter Kugelschnitt, dessen Ebene senkrecht zur horizontalen und schief zur verticalen Tafel steht, bildet die gleiche Aufgabe, wie vorhin; man wende nur die Zeichnung und betrachte für einen Augenblick die horizontale Projection als die verticale u. s. w. Der Halbkreis $b\,l''\,p$ ist die geometrische Hälfte dieses Kreises, welcher um den Durchmesser $(b\,p,\ b'\,p')$, also parallel zur horizontalen Tafel gelegt wurde. Die Kugelabschnitte, welche hier links und rechts der schneidenden Ebenen liegen, dachte man sich weggenommen, so dass die Schnittflächen selbst sichtbar werden.*)

Fig. III zeigt die Eintheilung einer Kugel in Meridiankreise, deren Abstände $(a\,b\,c\,d\,\ldots\,a'\,b'\,c'\,d'\,\ldots)$ auf dem grössten Polarkreise gleiche sind, deren Ebenen also der Reihe nach gleiche Winkel zu einander bilden, sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser, dessen Projectionen $(P,\ P'\,P'')$ sind, schneiden und sämmtlich zur horizontalen Tafel senkrecht stehen.

Die Parallelkreise $(n\,1\,3\,5\,\ldots\,n'\,1'\,3'\,5'\ldots)$, $(o\,2\,4\,6\,\ldots\,o'\,2'\,4'\,6'\ldots)$ etc. wurden auf der Kugelfläche in gleichen Abständen $(a'\,n' = n'\,o' = o'\,P' = a'\,v'\,\ldots)$ angenommen und können zugleich als die Hilfskreise für die Ausführung der Meridiane in der Verticalprojection betrachtet werden. Die Eintheilung der Kugel ist dieselbe wie bei einem Erdglobus, indem die Entfernung der Parallelkreise voneinander je 30^0 beträgt und jeder derselben durch die Meridiane in Bögen von je 30^0 zerlegt wird. Der grösste Parallelkreis, dessen Projectionen $(a\,b\,c\,d\,e\,\ldots\,a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,\ldots)$ sind, kann als der Aequator, die Schnittpunkte $(P,\ P'\,P'')$ der Meridiane als die Pole betrachtet werden. Je zwei zur verticalen Tafel symmetrisch liegende Meridiane, deren horizontale Projectionen z. B. $c\,P\,i$, $e\,P\,l$ und $b\,P\,h$, $f\,P\,m$ sind, bilden in der Verticalprojection je eine Ellipse; $a\,n\,o\,P\,q\,r\,\ldots$, dessen Verticalprojection $a'\,n'\,o'\,P'\,q'\,\ldots$ sich als Kugelumriss darstellt, könnte als der Hauptmeridian bezeichnet werden. Die weitere Ausführung ist nach dem Gesagten aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

Sollte an irgend einen Punkt $(T,\ T')$ eines Meridiankreises eine Tangente gelegt werden, so hätte man sich diesen Meridian zuerst um seine Polarachse $(P,\ P'\,P'')$ parallel zur verticalen Tafel gedreht zu denken, so dass Punkt $(T,\ T')$ auf demselben etwa nach $(r,\ r')$ zu liegen kommt. An r' lege man sodann die Kreistangente $r'\,R''$*), fälle aus R'' die Projicirende herab, bis sie die nach rechts verlängerte Gerade $P\,g$ der Horizontalprojection schneidet**), drehe diesen Schnittpunkt um P nach R und errichte in R die Projicirende, so ergibt sich R' als Verticalprojection, und T' mit R' durch eine Gerade verbunden, ist die Verticalprojection der verlangten Tangente.

Da eine Kreistangente in der Verlängerung der Kreisebene liegt, so fällt demnach ihre Horizontalprojection mit der Verlängerung der Kreisebene $l\,P\,T\,e$ der gleichen Projection zusammen. Da ferner alle Meridiankreise sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser, d. i. in der Polarachse schneiden, so müssen auch alle Tangenten, welche die Meridiankreise in den Kreuzungspunkten des Parallelkreises, d. i. in $(n,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots,\ n',\ 1',\ 3',\ 5',\ 7'\ \ldots)$ berühren, einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt in der verlängerten Polarachse haben. Die Verticalprojectionen $R'\,T'$, $R''\,r'$ der Tangenten schneiden sich also, wenn genügend verlängert, oberhalb P' in einem Punkte der Polarachse.

Eine an den Parallelkreis durch den gleichen Punkt $(T,\ T')$ gelegte Tangente $(w\,T,\ w'\,T')$ stellt sich in der Horizontalprojection als Kreistangente $w\,T$ in der Verticalprojection als die Gerade $w'\,T'$ dar, welch letztere, wie aus der Zeichnung ersichtlich, mit der gleichen Projection des Kreises, also mit $n'\,1'\,3'\,5'\,7'\,9'\ldots$ zusammenfällt. Die Geraden $(T\,R,\ T'\,R')$, $(w\,T,\ w'\,T')$ bilden auch Tangenten an den Punkt $(T,\ T')$ der Kugelfläche, und da beide Gerade sich in $(T,\ T')$ schneiden, damit auch zugleich nach § 108 eine die Kugel in $(T,\ T')$ berührende Ebene.***)

§ 158. Die beiden Projectionen Fig. IV zeigen dieselbe Kugeleintheilung, jedoch bei veränderter Lage der Kugel. Die Kugel ist so gedreht worden, dass die gleichen Parallel- und Meridiankreise ihre relative Lage zur verticalen Tafel, wie in Fig. III, beibehalten haben, so dass also die Polarachse $(P\,P'',\ P'\,P''')$ wie in Fig. III, parallel zur verticalen Tafel geblieben, jedoch zur horizontalen unter irgend einem Winkel, z. B. von 45^0, geneigt ist.

In Folge dieser Stellung projiciren sich die Parallel- und Meridiankreise der Verticalprojection Fig. IV genau so, wie in Fig. III†); ihre Horizontalprojectionen er-

*) Aehnliches ist auch bei Fig. I geschehen.

*) R'' ist der Schnittpunkt der Tangente mit der horizontalen Tafel.

**) Diese Verlängerung ist hier nicht angegeben, da sie in den Grundriss der Fig. IV fallen würde.

***) Deren Tracen könnten nach der in § 113 erwähnten Methode unschwer gefunden werden.

†) Die Verticalprojection von Fig. III ist also lediglich in die Lage von Fig. IV zu bringen. Uebrigens hätte man auch ohne Fig. III die Eintheilung der Verticalprojection Fig. IV zeichnen können. Man brauchte hierzu

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

scheinen dagegen mit Ausnahme des Hauptmeridianes ($P\,t\,g\,P''\ldots$, $P'\,t'\,g'\,P'''\ldots$) als Ellipsen. Die Kreuzungspunkte derselben, d. i. der Meridian- und Parallelkreise, könnten (soferne man die Horizontalprojection von Fig. III hierzu benützen will) mittels der Projicirenden aus den entsprechend gleichbenannten Punkten der Horizontalprojection Fig. III und der Verticalprojection Fig. IV gefunden werden. So z. B. würde eine zur Projectionsachse parallele Gerade aus f (Fig. III) und die projicirende Gerade aus f'' (Fig. IV) den Punkt f in der Horizontalprojection der Fig. IV ergeben, u. s. w. Ist jedoch, wie wir annehmen wollen, die Fig. III nicht vorhanden und sollte Fig. IV unabhängig von dieser ausgeführt werden, so wären, nachdem einmal die Verticalprojection von Fig. IV mit den Parallel- und Meridiankreisen gegeben ist (siehe Anmerkung zu § 158), die Horizontalprojectionen derselben auf folgende Weise zu erhalten:

Man trage, nachdem der Hauptmeridian, Polarachse und Kugelumfang in der Horizontalprojection bestimmt sind, die Abschnitte auf dem Durchmesser $a'\,M'\,g'$, nämlich $M'\,c'$, $c'\,b'$, $b'\,a'$ (oder $M'\,e'$, $e'\,f'$, $f'\,g'$) von M in der Horizontalprojection nach beiden Seiten auf den Durchmesser $d\,k$ in $M\,1$, $1\,2$, $2\,k$ und $M\,1''$, $1''\,2''$, $2''\,d''$ an, so dass also $d\,k$ durch $2''$, $1''$, M, 1, 2 gerade so getheilt ist, wie $a'\,M'\,g'$, geometrisch betrachtet, durch die Meridiane; ziehe sodann durch 2, 1, $1''$, $2''$ Parallele zur Projectionsachse, und fälle aus a', g', sowie den hier je paarweise hinter einander liegenden Punkten b', m', c', $l'\ldots$ die Projicirenden, so ergeben sich in der Horizontalprojection a und g auf dem Hauptmeridian, sowie auf den vorher durch 1, $1''$ und 2, $2''$ gezeichneten Geraden die Punkte m und b, l und c, i und $e\ldots$ u. s. w. Diese sind zugleich Hilfspunkte für die Horizontalprojection des Aequators, wie auch Kreuzungspunkte der Meridiane auf demselben.*)

In gleicher Weise konnten die übrigen Punkte der Parallel- und Meridiankreise, z. B. die Horizontalprojection von $n'\,o'\,p'\,q'\,r'\ldots$ gefunden werden. Man mache nämlich auch hier wieder die Entfernungen, welche I, II, m und I'', II'', q von dem Hauptmeridiane $P\,P''$ haben, gleich den Entfernungen $q'\,r'$, $q'\,s'$, $q'\,t'$ (oder $q'\,p'$, $q'\,o'$, $q'\,n'$), ziehe durch II, I, I'', II'' parallele Gerade zur Projectionsachse und aus n', o', p', q', r', s', t'*) die Projicirenden nach abwärts, so ergeben sich auf diese Weise abermals zwölf Punkte, deren vordere Hälfte hier mit n, o, p, q, r, s, t bezeichnet ist u. s. w. Das hier angewendete Verfahren wird erklärlich, wenn man sich die vordere Hälfte des obern Parallelkreises mit seinen darauf liegenden Meridianpunkten (o, p, q, r, s, o', p', q', r', s') um seinen Durchmesser ($n\,t$, $n'\,t'$) parallel zur verticalen Tafel aufgestellt denkt. Hierbei wird man nun finden, dass wenn in der aufgestellten geometrischen Figur $n'\,o''\,p''\,q''\,r''\,s''\,t'$ je zwei gegenüberliegende Punkte o'', s'', p'', r'' durch Sehnen verbunden werden, diese den Halbmesser $q'\,q''$ des aufgestellten Halkkreises in demselben Verhältnisse theilen, wie der Halbmesser $q'\,t'$ (oder $q'\,n'$) durch die Meridiane getheilt wird, dass also $q'\,I'$ gleich $q'\,r'$, $I'\,II$ gleich $r'\,s'$ u. s. w. ist; ebenso sind $o'\,o''$, $s'\,s''$ und $p'\,p''$, $r'\,r''$ gleich $q'\,I'$ und $q'\,II'$. Denkt man sich nun die Strecken $o'\,o''$, $p'\,p''$, $q'\,q''\ldots$ räumlich und perpendiculär über o', p', $q'\ldots$ als die Abstände, welche diese Punkte von dem Kreisdurchmesser ($n\,t$, $n'\,t'$) haben, so sind dieselben als Sehnen betrachtet gemäss ihrer Lage parallel zur horizontalen Tafel und projiciren sich daher in dieser nach ihrer wahren Grösse. Also ist die Entfernung (q, q') von der Ebene des Hauptmeridianes gleich $q'\,q''$, aber auch gleich $q'\,t'$ (oder $q'\,n'$), die Entfernung (p, p') und (r, r')... von derselben gleich $p'\,p''$, $r'\,r''$, aber auch gleich $q'\,s'$ (oder $q'\,o'$) u. s. w.

Diejenigen Parallelkreise, welche je paarweise von gleicher Grösse sind, erscheinen auch in ihren Horizontalprojectionen als congruente Ellipsen.

Darstellung und Entwickelung der Kugel.

Tafel XXIV. Figur I—IV.

§ 159. In Fig. I sind die beiden Projectionen einer Kugel nebst der gleichmässigen Eintheilung in Parallel- und Meridiankreise ähnlich wie in Fig. III, Taf. XXIII gegeben, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Zahl der Parallel- und Meridiankreise um je zwei vermehrt wurde.

---

z. B. nur den Viertelskreis $a'\,A\,B\,P'''$ für einen Moment als Grundriss zu betrachten, denselben in drei gleiche Theile $a'A$, AB, BP''' zu theilen, aus diesen Theilpunkten die Projicirenden $A\,b'$ $B\,c'\ldots$ rechtwinklig gegen den grössten Parallelkreis (Aequator) zu ziehen, um in Fig. IV $d'\,c'$, $c'\,b'$, $b'\,a'$ gleich $d'\,c'$, $c'\,b'$, $b'\,a'$ in Fig. III zu erhalten. Da nun die Parallelkreise sich als Gerade projiciren und dieselben geometrisch betrachtet durch die Ellipsen in demselben Verhältnisse getheilt werden wie der Aequator, so dürfte es nach §§ 39, 40 und 41 nicht schwer sein, auch die weiteren Ellipspunkte auf den Parallelkreisen zu finden. Ist einmal die links von $P'\,P'''$ liegende Halbkugel eingetheilt, so braucht man diese Eintheilung nur auf die andere Seite von $P'\,P'''$ überzutragen u. s. w.

*) Da hier die Polarachse ($P\,P''$, $P'\,P'''$) zur horizontalen Tafel unter 45° geneigt ist, so fällt damit, wie ersichtlich, die Horizontalprojection des Meridiankreises ($P\,d\,P''\,k$, $P'\,d'\,P'''\,k'$) mit derselben Projection des Aequators in eine Ellipse zusammen, die Horizontalprojectionen $P\,d\,P''\,k\ldots$ und $a\,d\,g\,k\ldots$ bilden also eine und dieselbe Ellipse.

*) Die mit o', p', q', r', s' in der Verticalprojection zusammenfallenden und auf der Rückseite der Kugel liegenden Punkte sind hier nicht mehr mit Buchstaben bezeichnet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da die Kugelfläche nach allen Seiten gekrümmt ist, also kein ebenes Flächenelement enthält, so ist ihre Abwicklung auch nur annäherungsweise möglich, indem man dieselbe in eine Anzahl sphärischer Kugelzonen oder Ringe eintheilt, eine solche zwischen zwei Parallelkreisen liegende Kugelzone als aus ebenen Flächenelementen zusammengesetzt, d. i. als eine Kegelfläche betrachtet und dieselbe in ähnlicher Weise wie in § 148, in Fig. II zur Abwicklung bringt, oder indem man sich die Kugelfläche durch die Meridiankreise in sphärische Zweiecke zerlegt und dieselben nebeneinander (wie in Fig. IV), oder um den Pol herum (wie in Fig. III) in eine Ebene ausgebreitet denkt. Hierbei sind diese Zweiecke jedoch als Theile von cylindrischen Flächen zu denken.

Je mehr man auf der Kugelfläche solche Parallel- oder Meridiankreise annimmt, um so genauer wird auch das Netz dem einer Kugelfläche entsprechen.

§ 160. Um das Netz Fig. II zu erhalten, ziehe man durch $i'\,7'$ eine Gerade, bis sie die nach abwärts verlängerte Polarachse (P, $P''\,P'$) in einem Punkte S schneidet*), nehme Si in den Zirkel und beschreibe damit aus einem Punkte S der Fig. II den Bogen $a\,e\,i\,n\,a'$, trage von i aus die wahren Grössen der auf dem Parallelkreise ($a\,b\,c\,d\,e\ldots\,a'\,b'\,c'\,d'\,e'\ldots$) durch die Meridiane entstandenen Abschnitte, z. B. $i\,h$ u. s. w. je achtmal nach beiden Seiten des Punktes i an, mache ferner $i\,r$ in Fig. II gleich $i'\,7'$ in Fig. I, ziehe mit Sr als Radius durch r den Parallelkreis, sowie von a und a' nach S Gerade, bis sie den durch r gehenden Kreis schneiden, so ist damit die zunächst unter ($a\,b\,c\,d\ldots$, $a'\,b'\,c'\,d'\ldots$) liegende Kugelzone als Kegelfläche betrachtet abgewickelt worden. In gleicher Weise ist $12\,r\,12'$ in Fig. II die Abwicklung einer Kegelfläche, deren Basis in Fig. I der Kreis ($12\,7$, $12'\,7'$) und deren Scheitelpunkt S' ist u. s. w. Fig. II ist somit das Netz der unteren Halbkugel.

Um das Netz Fig. III zu erhalten, zeichne man in Fig. III eine Gerade $P\,I$, trage darauf die wahre Breite einer Kugelzone, z. B. $i'\,6'$ oder $i\,h$ aus Fig. I viermal von P aus an und beschreibe durch diese Theilpunkte I, II, $III\ldots$ aus P concentrische Kreise, theile den äussern Kreis in so viel gleiche Theile, als auf der Kugel sphärische Zweiecke angenommen sind, also in sechzehn, ziehe aus diesen Theilpunkten $1, 2, 3, 4, I, 6\ldots$ nach P Gerade und betrachte diese als die Symmetrieachsen der Zweiecke. Von jeder solchen Symmetrieachse aus trage man nach beiden Seiten die halbe Breite der zwischen zwei Meridianen liegenden Abschnitte der Parallelkreise, mache also in Fig. III z. B. $I\,d'$, $I\,e$, $6\,e'$, $6\,f$ u. s. w. gleich $I\,d$, ($I\,e$) in Fig. I, ebenso $II\,r$, $II\,s$, $III\,t$, $III\,u\ldots$ gleich $II\,r$, $II\,s$, $III\,t$, $III\,u\ldots$ in Fig. I u. s. w. und verbinde die Punkte d', r, t, v, P, e, s, u, w, P u. s. w. durch eine stetige Curve*); Fig. III ist dann die Abwicklung einer Kugelhälfte, wobei die Zweiecke, bezw. je eine Hälfte derselben, radial um den Punkt P, d. i. um den Pol gelegt wurden.

In Fig. IV sind dieselben Zweiecke so aneinander gelegt, dass sie sich in dem Hauptparallelkreis, d. i. dem Aequator, berühren; es sind also auch hier die Strecken $I\,II$, $II\,III\ldots$ und $I\,II'$, $II'\,III'\ldots$ gleich $i\,6'$, $6\,5\ldots$ oder $i\,h$, $h\,g\ldots$, und ebenso $I\,d$, $I\,e$, $II\,r$, $II\,s\ldots$ gleich $1\,d$ ($1\,e$), $II\,r$ ($II\,s$) $\ldots$ in Fig. I. Das Netz (Fig. IV) bildet somit zusammengelegt gleichfalls näherungsweise eine Halbkugel.

Darstellung weiterer Rotationsflächen und ihrer Schnitte.

Tafel XXV. Figur I—III[a].

§ 161. Das Ovid oder die Eiform (Fig. I) ist durch die Rotation einer Eilinie um ihre grosse oder Längenachse entstanden. Der Verticalumriss des Körpers oder des Hauptmeridians $P''\,n''\,a'\,n'\,P\ldots$ wurde aus Kreisbögen in gleicher Weise wie Fig. V, Taf. VII zusammengesetzt, und die Projectionen der Parallel- und Meridiankreise ebenso wie bei der Kugel bestimmt. Die aus S' an $n'\,o'\,p'\,q'\ldots$, sowie aus S'' an $n''\,o''\,p''\,q''\ldots$ gezeichneten Geraden bilden Tangenten an die gleichen Punkte der Meridiane (siehe Fig. III, Taf. XXIII).

§ 162. In Fig. II sind die beiden Projectionen einer Ringfläche (Annuloid) dargestellt. Eine solche Ringfläche entsteht, wenn sich ein Kreis**) um eine ausserhalb desselben liegende Gerade dreht (rotirt), wobei die Achse in der verlängerten Kreisebene liegt. Alle durch diese Achse gehenden Ebenen schneiden die Ringfläche nach Meridianen, alle zur Drehungsachse senkrechten Ebenen schneiden die Ringfläche nach Parallelkreisen.

Die Projectionen der Parallelkreise gestalten sich hier wie bei der Kugel als Gerade und Kreise. Die Parallelkreise wurden zuerst etwa in gleichen Abständen

*) Da hier $i'\,7'$ sehr nahe bei einander liegen, so kann schon die kleinste Ungenauigkeit in der Lage von $i'\,7'$ einen Fehler in Bezug auf die Lage eines ersten Punktes S ergeben. Um diesem so viel wie möglich vorzubeugen, zeichne man aus dem Kegelcentrum in möglichst grosser Entfernung einen Viertelsbogen $i''\,7''\,x$, theile denselben ebenso wie den Viertelsbogen $i'\,P'$ in vier gleiche Theile, ziehe durch $1''\,7''$ eine Gerade und parallel dazu die Gerade $i'\,7'$. Da nämlich die Punkte $1', 7'$ grössere Entfernung haben, so ist damit auch die Lage der Geraden genauer bestimmt, als dieses durch zwei sehr nahe liegende Punkte möglich ist. Punkt S fällt hier über die Zeichenfläche hinaus.

*) Die Curven wurden hier nur bis zu dem kleinsten Kreise hin ausgezogen.

**) Statt des Kreises könnte auch ebenso gut eine Ellipse oder sonstige geschlossene Curve als Erzeugende einer Ringfläche genommen werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$1'2'$, $2'3'$, $3'4'$ . . . auf der Ringfläche in der Verticalprojection angenommen; ihre Horizontalprojectionen sind concentrische Kreise, deren Mittelpunkt M ist. Die Meridiane, welche hier in diesem Falle Kreise sind, stellen sich in der Horizontalprojection als Gerade, in der Verticalprojection als Ellipsen dar und werden wie bei der Kugel gefunden.

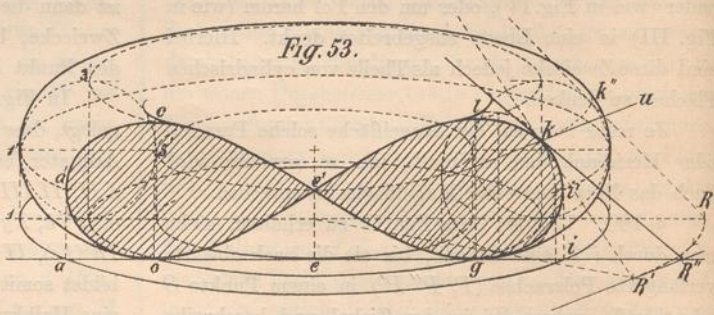
§ 163. Die Netzentwicklung der Ringfläche ist ebenfalls ähnlich wie bei der Kugel.

Fig. II^a zeigt drei solche, von je zwei Meridianen eingeschlossene Flächen in ihrer Abwicklung. Hierbei wurde eine Gerade $v\,w$ in acht gleiche Theile, gleich $1'2'$ oder $2'3'$ . . . getheilt, durch diese Theilpunkte wagrechte Linien gezogen und von der Mittellinie $v\,w$ aus die Grössen $v\,1''$, $v\,2''$ . . . der Fig. II in $v1'$, $v2'$ . . . der Fig. II^a in entsprechend gleicher Ordnung angetragen u. s. w.

Durch die Ringfläche wurde ferner eine Ebene parallel zur verticalen Tafel gelegt, welche sowohl die Ringfläche schneidet, als auch in einem auf der Innenseite liegenden Punkte e, e' berührt. Die Schnittfigur bildet eine Schleife*) (Lemniscate), deren wahre Grösse und Form aus der Verticalprojection $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'$ . . . ersichtlich ist.

§ 164. Sollte an irgend einem Punkte (k, k') der Lemniscate eine Tangente $(k\,R''',\ k\,R^4)$ gezeichnet werden, so denke man sich zunächst an einen durch (k, k') gehenden Meridian eine tangirende Ebene in (k, k'), welche nicht nur den Meridian, sondern auch die Ringfläche in dem gleichen Punkte berühren wird, und deren Tracen $R''\,t$, $t'\,u'$ sind.

Diese Tracen wurden gefunden, indem man sich den Meridian, auf welchem (k, k') liegt, parallel zur verticalen Tafel gedreht dachte, so dass (k, k') nunmehr in der Verticalprojection nach k'' zu liegen kommt, an k'' die Kreistangente zeichnete und deren Schnittpunkt R' auf der horizontalen Tafel nebst Meridian und Tangente in die ursprüngliche Lage $M\,k\,R''$ zurückdrehte,



so dass nun $k\,R''$ die Horizontalprojection dieser Tangente und R'' ein Tracenpunkt in der gleichen Tafel ist. Legt man ferner durch den gleichen Punkt (k, k') eine Tangente an den durch (k, k') gehenden Parallelkreis, welche die verticale Tafel in (u, u') trifft und deren Projectionen $(k\,u,\ k'\,u')$ sind, so bestimmen beide Tangenten die berührende Ebene (siehe § 108), deren horizontale Trace $R''\,t$ parallel zu $k\,u$, und deren verticale Trace $t'\,u'$ ist. (Vergl. Fig. 53.)

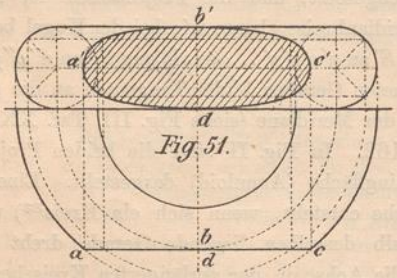
Da nun ferner $a\,e\,i\,R'''$ die horizontale Trace der schneidenden Ebene bildet, Punkt R''' also in beiden Tracen, somit in beiden Ebenen, nämlich der schneidenden und berührenden, liegt, das Gleiche aber auch mit Punkt (k, k') der Fall ist (siehe § 141), so bildet die Schnittkante beider Ebenen die verlangte Tangente $(k\,R'',\ k'\,R^4)$.

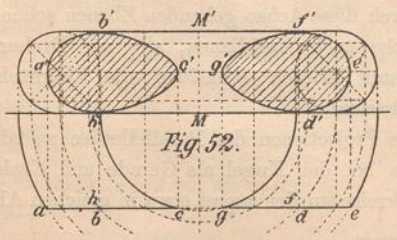
Eine durch (h, h') gehende und zu (k, k') symmetrische Tangente wurde in der Verticalprojection von h' durch S gezeichnet, indem man $e'\,i'\,S$, geometrisch genommen, als die Symmetrieachse beider Tangenten betrachten konnte. Fig. 53 veranschaulicht die hier erläuterte Aufgabe in schräger Projection.

In Fig. III ist eine sog. Einziehung oder Kehle dargestellt. Dieselbe konnte man sich durch Rotation einer nach aussen concaven halben Ellipse $X\,V\,a'$ entstanden denken, wobei $(S, S'\,S'')$ als Rotationsachse auf der convexen Seite der Ellipsfigur, sowie mit derselben in einer Ebene liegend gedacht ist.

Die Parallelkreise wurden auf der Fläche in gleichen Abständen angenommen, ein Hauptmeridian $a'\,V\,X$ der Verticalprojection somit in gleiche Theile $a'\,I$, $I\,II$, $II\,III$ . . . getheilt, und durch diese Theilpunkte die Parallelkreise gelegt. Die Meridiane wurden mit Hilfe

*) Die Schnittfigur kann je nach der Lage der Ebene sehr verschieden sein. Würde z. B. die schneidende Ebene in Fig. II parallel ihrer Lage weiter nach vorn gerückt,





so entstünde eine Figur, welche mehr oder weniger der Fig. 51 ähnlich wäre. Würde dagegen die schneidende Ebene weiter zurückgeschoben, so würde die Schnittfigur aus zwei getrennten und geschlossenen Curven, ähnlich wie in Fig. 52, bestehen.

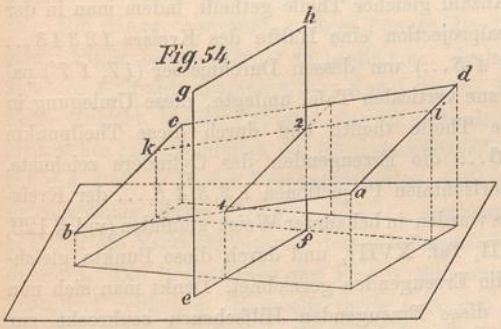
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dieser, nachdem ihre Horizontalprojectionen bestimmt waren, in der Verticalprojection gefunden. Die Geraden $n'S'$, $o'S'$, $p'S'$... bilden Tangenten der Meridiane in den Punkten n', o', p' . . ., deren gemeinschaftlicher Schnittpunkt S' wurde in der Verticalprojection dadurch gefunden, dass man zuerst an n' die Ellipstangente nach der in § 69 angegebenen Methode zeichnete u. s. w.

In Fig. III^a ist das Netz dreier, von je zwei Meridianen begrenzten Flächen gezeichnet. Die Abwicklung ist ähnlich wie bei Fig. II^a. Es ist nämlich $a'a$ in Fig. III^a gleich der gestreckten halben Ellipse X V$^{a'}$, $a'g'$, $a'h'$ gleich $1g$, $1h$ in Fig. III u. s. w.

Schnitte der Körper unter sich oder Durchdringungen.

§ 165. Die Durchdringungen oder gegenseitigen Schnitte von Körpern kommen im Zeichnen sehr häufig vor und bilden daher einen wichtigen Abschnitt desselben. Fast bei allen zusammengesetzten Körper- oder Flächenformen finden Durchdringungen statt. So kann z. B. ein Kreuzgewölbe als Durchdringung zweier Cylinderflächen betrachtet werden; ebenso kommen Durchdringungen bei Holz- und Steinverbindungen etc. vor. Da die Durchschnitte zweier Ebenen stets eine Gerade bilden, so sind die gegenseitigen Schnitte eckiger Körper gebrochene Linien. Die gegenseitigen Schnitte krummer Flächen mit Ebenen oder anderen krummen Flächen sind Curven.



Wenn man von zwei Geraden ab, ik einer begrenzten Ebene $abcd$ die Durchschnittspunkte 1, 2 durch eine andere Ebene $efgh$ gefunden hat, und diese durch eine Gerade verbindet, so ist diese letztere Gerade der Schnitt beider Ebenen (siehe Fig. 54).

Aus dem soeben Gesagten geht hervor, dass es sich theoretisch nur darum handelt, die gegenseitigen Durchschnitte von Linien, welche den Körpern oder den Flächen als Erzeugende oder sonst wie angehören, zu bestimmen. Die Summe dieser Durchschnittspunkte der betreffenden Linien bilden sodann in ihrer Verbindung den gegenseitigen Durchschnitt der Körper oder Flächen.

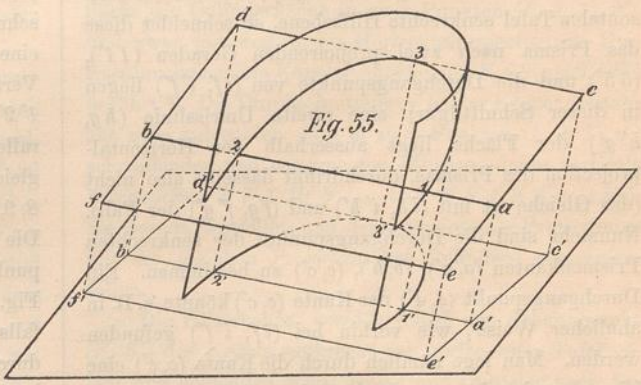
Die Schnittpunkte irgend einer Geraden ab mit einer Fläche F bestimmt man, indem man durch diese Gerade eine Hilfsebene legt, welche die Fläche schneidet und diese Schnittlinie bestimmt. Die Durchschnitte der Geraden und der Schnittlinie, welche durch die Hilfsebene entstanden ist, bilden sodann die Durchgangspunkte $1, 2$ einer Geraden ab durch die gegebene Fläche (siehe Fig. 55).

Hierbei können je nach der Lage der Geraden sich folgende Fälle ergeben:

1. Die Gerade durchschneidet die Schnittfigur in einem oder mehreren Punkten, z. B. in zwei, d. h. sie durchdringt die Fläche (siehe ab in Fig. 55);

2. die Gerade berührt die durch die Hilfsebene erzeugte Schnittfigur in einem Punkte (3), bildet also eine Tangente an die Fläche*);

3. die Schnittfigur wird von der Geraden, durch welche die Hilfsebene gelegt wurde, weder durchschnitten noch berührt, in welchem Falle auch die Gerade die Fläche nicht durchdringt. (Siehe ef in Fig. 55.)



Um also die gegenseitigen Durchschnitte zweier Flächen oder Körper zu bestimmen, denkt man sich ein System von Hilfsebenen durch beide gelegt und die Schnittlinien einer jeden dieser Ebenen mit beiden Flächen oder Körpern construirt. Die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Durchschnittslinien derselben Hilfsebene gehören sodann der gesuchten Durchschnittslinie der beiden sich durchschneidenden Körper oder Flächen an. Werden nun alle auf die angedeutete Weise gefundenen Punkte in gehöriger Ordnung verbunden, so erhält man die verlangte Schnittfigur der sich gegenseitig durchdringenden Flächen oder Körper. Schneiden sich die beiden Schnittlinien derselben Hilfsebene

*) Ist die Schnittlinie, wie z. B. $3'3$ in Fig. 55, eine Gerade, welche mit der sie durchschneidenden Geraden cd eine tangirende Ebene an die Fläche bildet, so ist der Schnittpunkt 3 der Geraden cd mit $3'3$ zugleich der Berührungspunkt der Geraden cd an die Fläche. Das hier Gesagte gilt hauptsächlich für jene Geraden, welche Cylinder- oder Kegelflächen berühren, die betreffenden Erzeugenden also, welche durch den Berührungspunkt gehen, schneiden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nicht, so geht daraus hervor, dass auch die Körper selbst nach dieser Ebene sich nicht schneiden. Und berühren sich die Schnittlinien in einem Punkte, so haben die beiden Körper nach dieser Ebene auch nur einen Berührungspunkt gemeinschaftlich. Die Lage solcher Hilfsebenen wird man je nach der Lage und Form der sich durchdringenden Körper verschieden, doch stets so wählen, dass die Schnittlinie eine möglichst einfache und leicht construirbare wird.

Durchdringung von Prisma und Ebene, von zwei Prismen und zwei Cylindern.

Tafel XXVI. Figur I—III.

§ 166. Fig. I zeigt den Durchschnitt eines fünfkantigen Prismas und einer begrenzten Ebene. Es sollen zunächst die Durchgangspunkte einer der Ebene angehörenden Geraden $(f i, f' i')$ durch das Prisma gefunden werden. Man lege durch $(f i, f' i')$ eine zur horizontalen Tafel senkrechte Hilfsebene, so schneidet diese das Prisma nach zwei projicirenden Geraden $(1\,1')$, $(5\,5')$ und die Durchgangspunkte von $(i f, i' f')$ liegen in dieser Schnittfigur; eine zweite Umrisslinie $(h g, h' g')$ der Fläche liegt ausserhalb der Horizontalprojection des Prismas, durchdringt dasselbe also nicht (das Gleiche ist mit $(i h, i' h')$ und $(f g, f' g')$ der Fall). Nunmehr sind die Durchgangspunkte der senkrechten Prismenkanten (a, a'), (b, b'), (c, c') zu bestimmen. Ein Durchgangspunkt $(4, 4')$ der Kante (c, c') könnte z. B. in ähnlicher Weise, wie vorhin bei $(i f, i' f')$ gefunden werden. Man lege nämlich durch die Kante (c, c') eine Ebene senkrecht zur horizontalen Tafel und etwa parallel zur Hilfsebene, welche vorhin durch $(i f, i' f')$ gelegt wurde, so schneidet diese die ebene Fläche $(i f g h, i' f' g' h')$ nach einer Geraden $(k\,4, k'\,4')$, und der Schnitt der Kante (c, c') mit letzterer bildet den Durchgangspunkt $(4, 4')$ der Prismenkante mit der ebenen Fläche.

Auf diese Weise könnten auch die übrigen Punkte $(3, 3')$, $(2, 2')$ der Durchschnittsfigur gefunden werden. Kürzer jedoch erhält man die Punkte $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$, wenn man sich die senkrechten Flächen des Prismas verlängert oder erweitert denkt und die Schnitte derselben mit der Ebene $(f g h i, f' g' h' i')$ markirt. Die Projectionen dieser Schnitte sind $(5\,n, 5'\,n')$, $(l\,m, l'\,m')$, $(p\,q, p'\,q')$, $(1\,0, 1'\,0')$, und die in der Verticalprojection darauf liegenden Punkte $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ bilden die Durchgangspunkte der Prismenkanten in der gleichen Projection.

§ 167. In Fig. II ist die Durchdringung eines regelmässigen sechskantigen und eines regelmässigen vierkantigen, d. h. quadratischen Prismas dargestellt. Die Durchschnittsfigur besteht aus zwei geschlossenen und gebrochenen Linien $(1\,3\,4\,2\,6\,5,\ 1'\,3'\,4'\,2'\,6'\,5')$ und $12\,8\,10\,11\,9\,7,\ 12'\,8'\,10'\,11'\,9'\,7')$. Der quadratische Normalschnitt $(g h i k,\ g' h' i' k')$ des schief liegenden Prismas wurde in $h g'' k$ zur Hälfte um die Diagonale $(h k, h' k')$ parallel zur horizontalen Tafel gelegt; $h g''$ oder $k g''$ ist also die wahre Grösse einer Quadratseite. Die gegenseitigen Durchschnittspunkte der Prismenkanten wurden wie bei Fig. I mittels zur horizontalen Tafel senkrechter Hilfsebenen gefunden. Diese Hilfsebenen konnten entweder durch die Kanten $(g l, g' l')$, $(i n, i' n')$ gelegt werden oder auch mit den Verlängerungen der Prismenseiten zusammenfallen; letztere Annahme bildet das einfachere Verfahren in diesem Falle. Da bei der gewählten Stellung beider Prismen in der Verticalprojection die rückwärts liegenden Punkte $6', 9', 5', 7'$ der Körperschnitte mit den vorne liegenden $4', 10', 3', 8'$ zusammenfallen, so erscheint jede der beiden getrennten und in Wirklichkeit geschlossenen Durchschnittsfiguren als eine offene, gebrochene Linie.

§ 168. In Fig. III sind die Durchschnitte zweier Kreiscylinder dargestellt. Hierbei wurde der Normalschnitt des schiefliegenden Kreiscylinders zuerst in eine Anzahl gleicher Theile getheilt, indem man in der Verticalprojection eine Hälfte des Kreises $1\,2\,3\,4\,5\ldots$ $1'\,2'\,3'\,4'\,5\ldots$) um dessen Durchmesser $(1\,7, 1'\,7')$ parallel zur verticalen Tafel umlegte, diese Umlegung in gleiche Theile theilte und durch diese Theilpunkte $8, 9, 10\ldots$ die Erzeugenden des Cylinders zeichnete. Die horizontalen Projectionen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ der Kreispunkte wurden in bekannter Weise gefunden (vgl. § 129, Fig. III, Taf. XVII), und durch diese Punkte gleichfalls die Erzeugenden gezeichnet. Denkt man sich nun durch diese Erzeugenden Hilfsebenen senkrecht zur horizontalen Tafel gelegt, so durchschneiden diese den senkrechten Cylinder gleichfalls nach seinen Erzeugenden, und die Schnitte der in einer Hilfsebene und den Cylinderflächen liegenden geraden Erzeugenden gehören der Durchschnittsfigur beider Cylinder an. So schneidet z. B. die Erzeugende $(10\,10'', 10'\,10''')$ den senkrechten Cylinder in zwei Punkten $(10, X, 10'', X')$, die beiden durch $11, 11'$ und $9, 9'$ gehenden Erzeugenden den senkrechten Cylinder in $(11, XI, 11'', XI')$ und $(9, IX, 9'' IX')$ etc. Da nach der gewählten Eintheilung des schief liegenden Cylinders die Erzeugenden je paarweise unter einander, wie hinter einander liegen, so fallen auch in der Horizontalprojection, z. B. $9, 11, 8, 12, 1, 7\ldots$ und in der Verticalprojection $10'', 4'', 9'', 5'', 11'', 3''\ldots$ zusammen. Die Durchschnittsfigur beider Cylinder besteht, wie aus der Zeichnung ersichtlich, aus zwei getrennten, in sich geschlossenen räumlichen Curven, deren Vertical- und Horizontalprojectionen jedoch als eine offene Curve erscheinen (vgl. Fig. II).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Durchdringung von Cylinder und Kegel, und zweier Kegel.

Tafel XXVII. Figur I—III.

§ 169. In Fig. I wird ein senkrechter Kreiskegel von einem wagrecht und parallel zur horizontalen Tafel liegenden Kreiscylinder durchdrungen. Der gegenseitige Schnitt der beiden Körper besteht hier aus zwei getrennten und in sich geschlossenen Raumcurven.*)

Die Lage der die beiden Körper schneidenden Hilfsebenen wurde hier senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel gewählt, dieselben durchschneiden den Kegel somit nach Kreisen, den Cylinder nach Rechtecken, d. i. nach seinen Erzeugenden. Die Achse des Cylinders geht hierbei durch die Achse des Kegels. Die Durchschnittsfigur besteht aus zwei geschlossenen Curven, deren Horizontalprojectionen *1 3 5 7 9 11...*, *2 4 6 8 10 12...* und deren verticale Projectionen als zwei offene Curven *1′ 3′ 5′ 7′ 9′ 11′* und *2′ 4′ 6′ 8′ 10′ 12′...* erscheinen. Die Punkte $(5, 6, 5', 6')$, $(5'', 6'')$ sind die sich am nächsten liegenden Punkte der beiden getrennten Curven.

Um diese, wie auch weitere Punkte der Durchschnittsfigur beider Körper zu bestimmen, denke man sich den Cylinder mitsammt dem Kegel um die Kegelachse gedreht, bis der Cylinder eine zur verticalen Tafel senkrechte Lage einnimmt, der Normalschnitt (*efghik... e′f′g′h′i′k′...*) in der Verticalprojection somit als ein geometrischer Kreis *e″f″g″h″i″k″...* erscheint und zugleich die Verticalprojection des gedrehten Cylinders darstellt. Die Projectionen des Kegels sind dabei unverändert geblieben. Nunmehr theile man den Kreis am besten in die gleichen Theile *e″f″*, *f″g″*, *g″h″*, *h″i″*, *i″k″...*, lege durch die Theilpunkte die Hilfsebenen durch beide Körper, wie schon erwähnt, senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel und construire deren Schnittlinien in der Horizontalprojection, so ergeben sich damit in derselben $1, 3, 5, 7, 9, 11, 9'', 7'', 5'', 3''$, und $2, 4, 6, 8, 10, 12, 10'', 8'', 6'', 4''$ als Punkte der Durchschnittsfigur des Cylinders und Kegels, und diese in die verticale Projection getragen, ergeben die Punkte $1', 3', 7', 9', 11'...$ und $2', 4', 8', 10', 12'...$ der Verticalprojection. Um die einander zunächstliegenden Punkte $(5, 6, 5', 6')$, (sowie $5'', 6''$) der getrennten Curven in beiden Projectionen zu bestimmen, betrachte man zunächst $(aS, a'S')$ und $(cS, c'S')$ als die vorhin mit dem Cylinder und Kegel gedrehten Kegelerzeugenden $(bS, b'S')$ und $(dS, d'S')$; fälle gegen diese aus M die Senkrechten Mn, Mo (also Mn senkrecht zu $a'S'$, und Mo senkrecht zu $c'S'$), so sind n und o Punkte der Cylinderfläche, und die durch n und o gehenden Erzeugenden derselben diejenigen, welche wenn in ihre ursprüngliche Lage zurückgedreht, die geringste Entfernung von den Kegelerzeugenden (bS, $b'S'$), und (dS, $d'S'$) haben. Legt man daher durch no eine Hilfsebene parallel mit den übrigen durch Cylinder und Kegel, und zeichnet deren Schnittlinien in der horizontalen Projection, so ergeben sich hierdurch die verlangten Punkte $5, 6$ $(5'', 6'')$ in derselben, und durch Errichten der Projicirenden aus 5 und 6 die Verticalprojectionen $5'$ und $6'$.

§ 170. In Fig. II ist die Durchdringung von Kreiscylinder und Kreiskegel dargestellt, wobei der Kreiscylinder senkrecht zur horizontalen Tafel steht und die Achse des Kreiskegels durch die Achse des Cylinders geht und eine zur horizontalen wie verticalen Tafel parallele Lage hat. Der Kreiskegel wurde zuerst in der Horizontalprojection so bestimmt, dass die Kegelfläche die Cylinderfläche in zwei Punkten $(1, 2, 1', 2')$, und zwar mit den in der Horizontalprojection als Umrisse erscheinenden Kegelerzeugenden $(eS, e'S')$, $(iS, i'S')$ berührt.*) Die Durchschnittsfigur beider Körper besteht aus zwei getrennten, sich in zwei Punkten $(1, 2, 1', 2')$ schneidenden und congruenten Ellipsen, deren verticale Projectionen *3′ 7′ 1′ 10′ 5′...* und *4′ 8′ 1′ 9′ 6′...* sich als Gerade darstellen und deren horizontale Projectionen mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfallen.

Die Hilfsebenen wurden durch den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels senkrecht zur horizontalen Tafel gelegt und schneiden somit Kegel und Cylinder nach Erzeugenden.

Die Kegelerzeugenden, deren Durchgangspunkte auf dem Cylinder in bekannter Weise gefunden sind, wurden auf dem Kegel in gleichen Abständen angenommen, indem man die vordere Hälfte des Kegelkreises, nämlich ($cdefg$, $c'd'e'f'g'$) um den Durchmesser (cg, $c'g'$) desselben parallel zur verticalen Tafel nach $c'd''e''f''g'$ legte, sodann darauf die Eintheilung bestimmte und den Halbkreis mitsammt den Theilpunkten d'', e'', f'' wieder in die ursprüngliche Lage zurückdrehte, wodurch sich $c', d', e', f', g'...$ der Verticalprojection, und cd gleich $d'd''$ u. s. w. ergab (siehe § 129, Fig. III, Tafel XVII). Aus (d, e, f, g, h . . .) und (d', e', f', g', h' ...) wurden sodann die Kegelerzeugenden nach (S, S') gezogen und deren Durchgangspunkte auf dem Cylinder bestimmt u. s. w.

§ 171. Fig. III zeigt die Durchdringung zweier Kreiskegel, wovon der eine senkrecht zur horizontalen Tafel steht, der andere so liegt, dass seine Achse

*) Dieser Schnitt kann natürlich je nach dem Durchmesser des Cylinders oder Kegels, oder auch je nach der gegenseitigen Lage der beiden Körper sehr verschieden sein und könnte z. B. auch aus einer einzigen geschlossenen Curve bestehen, sofern der Cylinder nach einer Seite über den Kegel herausgeht, d. h. nicht mit allen seinen Erzeugenden den Kegel durchdringt.

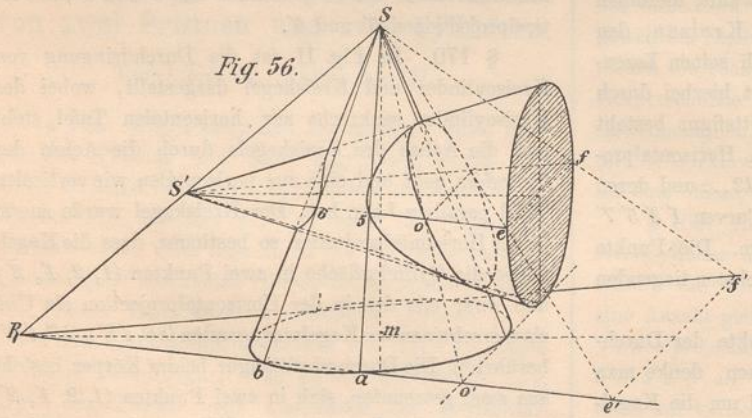
*) S fällt hier zufällig in die Horizontalprojection S des Kegels der Fig. I.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

parallel zu beiden Tafeln ist und die Achse des ersten Kegels durchschneidet. Die Hilfsebenen wurden durch die Scheitelpunkte der beiden Kegel gelegt, schneiden somit beide nach Erzeugenden (vgl. § 149, Fig. 48).

Man theile zunächst die Basis des horizontal liegenden Kegels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. acht (die Projectionen dieser Theilpunkte sind [c, d, e, f, g, h . . . c', d', e', f', g', h' . . .], und wurden wie bei Fig. II gefunden), ziehe sodann aus diesen Theilpunkten die Erzeugenden nach (S''', S''), und ferner durch (S, S''', S', S'') eine Gerade ($S\,S'''\,R$, $S'\,S''\,R'$); in letzterer schneiden sich nun sämmtliche Hilfsebenen, welche durch die Scheitelpunkte der beiden Kegel gelegt werden, und (R, R') ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der horizontalen Tafel.

Fig. 56.



Jede durch eine Gerade ($S\,S'''$, $S'\,S''$) gelegte Hilfsebene schneidet beide Kegel nach Erzeugenden (vergl. Fig. 56), und die Trace einer solchen Hilfsebene geht durch (R, R'), dem Schnittpunkte der Geraden ($S\,S'''$, $S'\,S''$) mit der horizontalen Tafel.

Zeichnet man z. B. in Fig. 56 aus S etwa durch e eine Gerade und verbindet deren Schnittpunkt e' in der horizontalen Tafel mit dem Schnittpunkte R der Geraden, $S\,S'$ in derselben Tafel, so bildet $e'R$ die horizontale Trace*) einer durch S und die Erzeugende $e\,S'$ gelegten Hilfsebene, welche auch den senkrechten Kegel nach zwei geraden Erzeugenden $a\,S$, $b\,S$ schneidet; $e\,S'$, $a\,S$, $b\,S$ liegen nunmehr sowohl in der Hilfsebene wie auf den Kegelflächen, und die Punkte $5\,6$ sind daher Durchgangspunkte der Geraden $e\,S'$ durch den senkrechten Kegel.

In dieser Weise hätte man auch in Fig. III die Durchgangspunkte der einzelnen Erzeugenden ($c\,S'''$, $c'\,S''$), ($d\,S'''$, $d'\,S''$ . . .) finden können. Da hier jedoch des mangelnden Raumes halber die Schnittpunkte der aus (S, S') durch (c, c'), (d, d'), (e, e') . . . gezeichneten Geraden nicht markirt werden können, indem dieselben zu weit nach rechts fallen würden; so wurde in Fig. III folgendes Verfahren gewählt:

Man legte an die Erzeugende ($S\,b$, $S'\,b'$) eine tangirende Ebene*), welche den horizontal liegenden Kegel nach einer Ellipse durchschnitt, deren Verticalprojection $1\,o'\,n\,p'\,3'$ als eine Gerade erscheint und deren horizontale Projection $1\,o\,n\,p$ . . . in bekannter Weise gefunden wurde. $o'''\,p'''\,b\,o''\,o^4$ ist die horizontale Trace dieser berührenden und zugleich schneidenden Ebene. Sollen nunmehr die Durchgangspunkte irgend einer Erzeugenden, z. B. ($d\,S'''$, $d'\,S''$) durch den senkrechten Kegel gefunden werden, so ziehe man durch den Punkt o (welcher ja ebenfalls der Erzeugenden [$d\,S'''\,d'\,S''$] angehört) aus S eine Gerade $S\,o\,o'''$ (deren Verticalprojection $S'\,o'\,o^4$ mit der gleichen Projection der Ebene $1'\,o'\,n'\,p'\,3'$ zusammenfällt), verbinde o''' mit R, ziehe aus den Schnittpunkten q, s die Erzeugenden $q\,S$, $s\,S$, so schneiden diese $d\,o\,S'''$ in 7 und 8; errichtet man aus 7 und 8 die Projicirenden, so ergeben diese in der Verticalprojection auf $d'\,S''$ die gleichen Punkte in $7'$ und $8'$. $o'''\,q\,s\,R$ ist hier die horizontale Trace einer aus (S, S') durch ($d\,S'''$, $d'\,S''$) gelegten Hilfsebene, welche den senkrechten Kegel nach Erzeugenden geschnitten hat, deren Horizontalprojectionen $q\,S$, $s\,S$ sind. In gleicher Weise sind auch die Punkte 9, 10, $7''$, $8''$, $9''$, $10''$, sowie deren Verticalprojectionen, welche paarweise hintereinander liegen**), gefunden worden. Die Durchgangspunkte der Erzeugenden ($c\,S'''$, $c'\,S''$) und ($g\,S'''$, $g'\,S''$), nämlich (1, $1'$), (2, $2'$), (3, $3'$), (4, $4'$) konnten hier ohne Weiteres bestimmt werden, da die betreffenden Erzeugenden mit ($a\,S$, $a'\,S'$) und ($b\,S$, $b'\,S'$) schon in einer zur verticalen Tafel parallelen und durch die Scheitelpunkte gehenden Ebene liegen. Die Durchgangspunkte der Erzeugenden ($e\,S'''$, $e'\,S''$) und ($i\,S'''$, $i'\,S''$) konnten, da ihre Lage eine wagrechte ist, auch mittels einer wagrechten Hilfsebene, welche den senkrechten Kegel nach dem Kreise $n\,5\,6\,l$ . . ., $n'\,5'\,6'\,l'$ . . .)

*) Diese hätte man auch gefunden, wenn man statt durch e, durch einen beliebigen Punkt o derselben Erzeugenden, aus S' die Gerade gezeichnet und deren Schnittpunkt o' in der horizontalen Tafel mit R verbunden hätte.

*) Die Ebene muss nicht nothwendig eine tangirende an die senkrechte Kegelfläche sein, sondern könnte unter beliebigem Neigungswinkel zur horizontalen Tafel angenommen werden, soferne sie nur den horizontal liegenden Kegel durchschneidet. Durch die Annahme der Ebene, wie in Fig. III, wurden jedoch überflüssige Constructionslinien vermieden.

**) Die Verticalprojectionen der Punkte $7, 7''$, $8, 8''$, $9, 9''$ . . . fallen nämlich, wie aus der Zeichnung ersichtlich, mit $7'$ und $8'$ und $9'$ . . . zusammen, so dass die in Wirklichkeit aus zwei geschlossenen Curven bestehende Durchschnittsfigur der beiden Kegel in der Verticalprojection aus zwei offenen Curven besteht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schneidet, gefunden werden. $(5, 6, 5'6')$, $(5'', 6'', 5'6')$ sind deren Durchgangspunkte in den beiden Projectionen.

Durchdringung von Prisma und Kugel, Pyramide und Kugel, Cylinder und Kugel.

Tafel XXVIII. Figur I—III.

§ 172. In Fig. I ist die Durchdringung einer Kugel durch ein regelmässiges sechskantiges Prisma dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse des Prismas, die Hilfsebenen sind senkrecht zur horizontalen Tafel und mit den Seiten des Prismas zusammenfallend angenommen, ihre Schnitte mit der Kugel sind Kreise, deren Horizontalprojection Gerade und deren Verticalprojection entsprechend der Stellung beider Körper Kreise und Ellipsen bilden, welche je paarweise hintereinander liegen, somit je in eine Projection zusammenfallen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 173. In Fig. II ist die Durchdringung einer Kugel und eines senkrechten Kreiscylinders dargestellt. Die Hilfsebenen durch beide Körper wurden parallel zur verticalen Tafel angenommen und durchschneiden daher den Cylinder nach geraden Erzeugenden, die Kugel nach Kreisen, deren Verticalprojectionen sich in wahrer Grösse darstellen. Besondere Aufmerksamkeit erfordern in der Verticalprojection die auf den Umrissen des Cylinders und der Kugel liegenden Punkte der Körperdurchschnitte, z. B. $5'$ und $7'$ u. s. w. Die Durchschnitte beider Körper bilden, wie aus der Verticalprojection ersichtlich, zwei in sich geschlossene Curven, deren Horizontalprojection mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt.

§ 174. In Fig. III ist die Durchdringung von Kugel und regelmässiger Pyramide dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse der sechsseitigen Pyramide. Die Durchgangspunkte der Pyramidenkanten liegen daher in gleichen Abständen von der horizontalen Tafel, d. i. je auf einem wagrechten Kugelkreise.

Hat man daher die Durchgangspunkte einer Pyramidenkante, z. B. $(aS, a'S')$ in $(1, 1')$, $(7, 7')$ gefunden und legt durch $(1, 1')$, $(7, 7')$ eine wagrechte Hilfsebene, so schneidet letztere sämmtliche Durchgangspunkte $1', 7', 2', 8', 3', 9' \ldots$ der Kanten $(aS, a'S')$, $(bS, b'S') \ldots$ in der Verticalprojection ab. Die Punkte $(1, 1')$ und $(7, 7')$ konnten aber ohne Weiteres bestimmt werden, da $(aS, a'S')$ mit dem Hauptmeridian $(o\,7\,10p \ldots o'\,7'\,10'p' \ldots)$ schon in einer zur verticalen Tafel parallelen Hilfsebene liegt. Da übrigens alle durch die Kanten $(bS, b'S')$, $(eS, e'S')$ und $(cS, c'S')$, $(fS, f'S')$ zur horizontalen Tafel senkrecht gelegten Hilfsebenen die Kugel nach einem grössten Kreise durchschneiden, so würden die Schnittlinien dieser Ebenen mit den beiden Körpern, falls man sie um die Pyramidenachse parallel zur verticalen Tafel drehte, mit $(aS, a'S')$, $(dS, d'S')$ und dem Hauptmeridian $(o\,7\,10p \ldots o'\,7\,10'p' \ldots)$ zusammenfallen und damit auch alle gedrehten Durchgangspunkte nach $(1, 7, 1', 7')$ u. s. w. zu liegen kommen.

Um ausser den Durchgangspunkten der Pyramidenkanten auch noch Zwischenpunkte, wie z. B. (v, w, v', w') u. s. w., zu finden, denke man sich beide Körper durch eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene in der Richtung $g\,v\,w\,S\,k$ durchschnitten, zeichne die Verticalprojection $g'S'$, $k'S'$ der hierdurch auf der Pyramide entstandenen Schnittlinie, drehe die Schnittlinie um die Pyramidenachse, bezw. um das Kugelcentrum parallel zur verticalen Tafel nach $(g''S, g'''S')$, markire in der Verticalprojection die Durchschnitte der Geraden $g'''S'$ mit dem Hauptmeridian (d. i. mit dem gleichfalls gedrehten grössten Kugelkreise) und lege durch diese Schnittpunkte v''' und w''' wagrechte Kreise*), so liegen auf diesen die Zwischenpunkte v' und $w' \ldots$ Zieht man noch die auf den Pyramidenseiten liegenden Geraden $(hS, h'S')$, $(iS, i'S')$, $(kS, k'S') \ldots$,**) so schneiden letztere auf den durch v''' und w''' gelegten wagrechten Kreisen weitere Zwischenpunkte ab. Die Horizontalprojectionen dieser Kreise und Punkte wurden sodann aus der Verticalprojection abgeleitet.

Durchdringung von Cylinder und Ringfläche, Kegel und Kugel.

Tafel XXIX. Figur I—II^a.

§ 175. In Fig. I wird ein Wulstring von einem senkrechten Kreiscylinder durchdrungen. Die Hilfsebenen wurden hier parallel zur horizontalen Tafel angenommen, durchschneiden also den Ring nach Kreisen, deren verticale Projectionen als Gerade und deren horizontale Projectionen als geometrische Kreise in wahrer Grösse sich darstellen. Der Cylinder wird durch diese Hilfsebenen gleichfalls nach Kreisen, und zwar von gleicher Grösse geschnitten, deren Horizontalprojectionen mit der gleichen Projection des Cylinders, also mit $a\,1\,y\,x\,b \ldots$ zusammenfallen.

Die Durchschnittsfigur beider Körper bildet eine einzige, in sich geschlossene Raumcurve, deren Horizontalprojection $1\,2\,t\,u\,3\,4\,5\,6 \ldots$ mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt und deren Verticalprojection als eine geschlossene Curve $1't'3'5'v'9'w' \ldots$ erscheint. Besondere Beachtung erfordern die Punkte $(3, 4, 3', 4')$ und (b, b'', b''') derselben, welche in der Verticalprojection auf dem Cylinderumriss, und ebenso

*) Diese Kreise berühren die Mittellinien der Pyramidenseiten, liegen also innerhalb der Pyramide.

**) Die Punkte (g, g'), (h, h'), (i, i'), $(k, k') \ldots$ wurden je auf der Mitte einer Basisseite angenommen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

die Punkte $(5, 6, 5', 6')$, $(7, 8, 7', 8')$, welche in der Verticalprojection auf der Umrisslinie des Ringes liegen, also als Uebergangspunkte der Durchschnittslinie beider Körper von der Vorderseite auf die Rückseite derselben sich darstellen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung zu ersehen.

§ 176. In Fig. II ist die Durchdringung von Kegel und Kugel dargestellt, wobei das Kugelcentrum (C, C') ausser der Kegelachse angenommen ist. Die Durchschnittslinie beider Körper, welche hier aus zwei getrennten und geschlossenen Raumcurven ($2\ 6\ 14\ 4 \ldots$, $2'\ 6'\ 14'\ 4' \ldots$) ($1\ 5\ 9\ 3\ 13 \ldots$, $1'\ 5'\ 9'\ 3'\ 13' \ldots$) besteht, konnte im Allgemeinen dadurch gefunden werden, dass man durch beide Körper Hilfsebenen legte, welche zur horizontalen Tafel parallel sind, somit Kegel und Kugel nach Kreisen durchschneiden, deren Verticalprojectionen als zur Projectionsachse parallele Gerade, und deren Horizontalprojectionen als geometrische Kreise in wahrer Grösse erscheinen.

Die Schnittpunkte je zweier solcher in einer Hilfsebene liegenden Kegel- und Kugelkreise ergeben sodann in der Horizontalprojection zuerst Punkte, welche der Durchschnittslinie beider Körper angehören (siehe § 165).

Obwohl nun mittels solcher Hilfsebenen eine beliebige Anzahl von Punkten gefunden werden könnte, welche der Durchschnittsfigur beider Körper angehören, so ist es doch wichtig, ausser diesen im Allgemeinen zufälligen Punkten auch jene zu bestimmen, welche in der Verticalprojection als Uebergangspunkte auf den Umrissen des Kegels und der Kugel liegen. Solche sind $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$ und $(10, 10')$, $(12, 12')$, $(11, 11')$, $(13, 13')$; die ersten vier liegen in der Verticalprojection auf dem Umrisse des Kegels, die zweiten vier eben daselbst auf dem Umrisse der Kugel.

Ferner ist es von Vortheil, die beiden einander am nächsten liegenden Punkte $(5, 5')$, $(6, 6')$ und die beiden entferntesten Punkte $(7, 7')$, $(8, 8')$ der beiden getrennten Curven der Durchschnittsfigur zu bestimmen.

Um nun zunächst die Punkte $(5, 5')$, $(6, 6')$, $(7, 7')$, $(8, 8')$ zu erhalten, lege man durch das Kugelcentrum (C, C') und den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene, welche nun den Kegel nach den Erzeugenden $(c\,S, c'\,S')$, $(d\,S, d'\,S')$ und die Kugel nach einem grössten Kreise schneidet, dessen Verticalprojection, wenn ausgeführt, sich als Ellipse darstellen würde. Die Horizontalprojection dieses Durchschnittes (d. i. die Gerade $c\,d$ mit den daraufliegenden Punkten c, S, C, d) drehe man parallel zur verticalen Tafel in die Lage von $c''\,S''$, $C''\,d''$, zeichne in c''', S''', d''', C''' die verticale Projection dieser vier Punkte, verbinde C''' mit S''' und d''' mit S''', und beschreibe um C''' einen grössten Kugelkreis, welcher sodann die Erzeugenden $c'''\,S'''$, $d'''\,S'''$ der Fig. II^a in $5'''$, $6'''$ und $7'''$, $8'''$ schneidet. Zeichnet man nun aus $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ die Projicirenden parallel mit der Projectionsachse, so werden hierdurch auf den Erzeugenden $c'\,S'$, $d'\,S'$ der Verticalprojection Fig. II die Punkte $5', 6', 7', 8'$ abgeschnitten*), und sonach aus diesen mittelst der Projicirenden die Horizontalprojectionen derselben in $5, 6$ und $7, 8$ bestimmt. Genauer noch erhält man diese Horizontalprojectionen, wenn man aus $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ die Projicirenden nach abwärts zieht und deren Schnittpunkte auf $c''\,S''$, $d''\,S''$, nämlich $5''$, $6''$, $7''$, $8''$ mit $c''\,S''\,d''$ wieder in die ursprüngliche Lage zurückdreht, wodurch sich gleichfalls die Horizontalprojectionen $5, 6, 7, 8$ auf $c\,S$, $d\,S$ ergaben.

Um die Uebergangspunkte $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$ zu bestimmen, lege man durch den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels eine zur verticalen Tafel parallele Ebene, welche den Kegel nach den Erzeugenden $(a\,S, a'\,S')$, $(b\,S, b'\,S')$, und die Kugel nach einem Kreise ($1\ 2\ 4\ 3$, $1'\ 2'\ 4'\ 3'$) schneidet, so dass sich also die verlangten Uebergangspunkte zuerst in der Verticalprojection in $1', 2', 3', 4'$ ergaben, wonach ihre Horizontalprojectionen $1, 2, 3, 4$ in bekannter Weise gefunden wurden.

Nach den bisherigen Constructionen ergaben sich in der Horizontalprojection die Punkte $1, 5, 3, 7$ und $2, 6, 4, 8$, welche je der untern und obern geschlossenen Curve, d. i. der Schnittfigur beider Körper, angehören. Weitere Punkte, wie z. B. $(9, 9')$, $(14, 14')$, konnten, wie schon erwähnt, dadurch gefunden werden, dass man parallel zur horizontalen Tafel Hilfsebenen durch beide Körper legte und die gemeinschaftlichen Punkte der hierdurch erzeugten Schnittlinien als Punkte der Durchschnittsfigur beider Körper bestimmte.

Zeichnet man durch die so erhaltenen Punkte zuerst in der horizontalen Projection die Curven $1\ 5\ 9\ 3\ 7 \ldots$ und $2\ 6\ 14\ 4\ 8 \ldots$ mit freier Hand, so schneiden diese in der gleichen Projection den Hauptmeridian der Kugel in den vier Punkten $10, 12, 11, 13$, und deren Verticalprojectionen $10', 12', 11', 13'$ sind die vorhin erwähnten Uebergangspunkte auf der Verticalprojection des Kugelumrisses.

Verbindet man nun schliessslich $1', 5', 9', 3', 13', 7', 10'$, und $2', 6', 14'$**), $4', 11', 8', 12'$ durch je eine stetige Curve, so ist damit die Aufgabe vollendet.

---

*) Wie aus dem ganzen Verfahren leicht ersichtlich, ist Fig. II$_a$ die Verticalprojection des parallel zur verticalen Tafel gedrehten Schnittes ($c\,S\,C\,d$, $c'\,S'\,C'\,d'$), in welchem durch Zeichnen des grössten Kreises dessen Schnittpunkte $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ bestimmt und der ganze Schnitt sodann wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht wurde. Die Projicirenden $5''\,5'$, $6''\,6' \ldots$ sind also nichts anderes als Verticalprojectionen der Kreisbögen $5''\,5$, $6''\,6 \ldots$ u. s. w.

**) Punkt $14'$ ist hier unrichtig markirt und soll innerhalb der Projicirenden aus 14 und auf der Geraden $n'''\,m'''\,f'\,e'$ liegen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anwendung der Durchdringungen bei architektonischen Formen.

Tafel XXX. Figur I—V.

§ 177. Die in Fig. I bis IV dargestellten gothischen Postamente, sowie Fig. V, welche den Schnitt einer Kugel und einer Pyramide (siehe Fig. III, Taf. XXVIII) als Abschluss eines Pfostens darstellt, zeigen die praktische Verwerthung und Anwendung der bis jetzt erörterten Durchdringungsbeispiele, und bieten die Constructionen der Fig. I bis V nichts wesentlich Neues; ihre Ausführung dürfte daher auch ohne weitere Beschreibung lediglich aus der Zeichnung selbst ersichtlich sein.

Darstellung gewundener Linien auf Rotationskörpern.

Tafel XXXI. Figur I—IV.

§ 178. Gewundene Linien kann man sich im Allgemeinen dadurch entstanden denken, dass ein Punkt auf der Oberfläche eines Rotationskörpers sich um die Achse derselben dreht (oder sich um den Körper herumwindet) und dabei nach einer bestimmten Richtung hin fortschreitet. Die Bewegung des Punktes ist also eine aus Drehung und Fortschritt zusammengesetzte, ähnlich wie dieses auch bei der Spirale (§ 83, Fig. I, Taf. VIII) der Fall war; nur mit dem Unterschiede, dass dort diese Bewegung in einer Ebene stattfand, während die gewundene Linie auf einer krummen Fläche liegt, mithin eine Raumcurve ist. Ebene Curven, wie z. B. der Kreis (siehe daselbst), konnten sich verkürzt oder unverkürzt, also auch in wahrer Grösse darstellen; eine Raumcurve wird sich aber stets als eine verkürzte Curve projiciren. Bei ebenen Curven konnte ferner eine projicirende Fläche auch eine Ebene sein und die Projectionen der Curve in einer oder auch beiden Tafeln eine Gerade darstellen (siehe § 127, Fig. I und II, Taf. XVII). Bei Raumcurven werden jedoch die projicirenden Flächen stets cylindrisch*) sein; mithin kann die Curve in keiner ihrer Projectionen unverkürzt oder als Gerade sich darstellen.

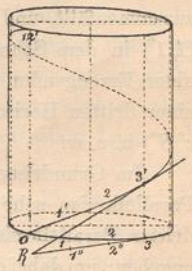
§ 179. In Fig. I ist eine cylindrische Spirale oder Schraubenlinie dargestellt. Dieselbe entsteht, wenn eine Cylinder Erzeugende um die Achse (m, $m'm''$) rotirt, ein auf dieser Erzeugenden liegender Punkt auf derselben fortschreitet, und dabei das Verhältniss der drehenden zur fortschreitenden Bewegung stets gleich bleibt, d. i. wenn der Punkt während der Drehung in gleicher Geschwindigkeit auf der Geraden fortschreitet. Die Schraubenlinie liegt stets auf einer Rotationscylinderfläche, und aus der Entstehung derselben geht hervor, dass sie in allen ihren Theilen gleiche Krümmung hat, mithin jeder ihrer Theile in Bezug auf die Krümmung congruent ist.*)

Die Entfernung, welche ein Punkt während einer vollständigen Umdrehung auf der Geraden zurückgelegt hat, heisst die Gangweite oder Ganghöhe der Schraubenlinie. In Fig. I ist also $0'12'$ eine erste, $12'24'$ eine zweite Ganghöhe, und $0'1'2'3'4'5'\ldots12'$ heisst ein Umgang. Die ganze hier dargestellte Linie hat also zweieinhalb Umgänge. Aus dem eben Gesagten ergibt sich weiter, dass die Gestalt einer Schraubenlinie durch das Verhältniss der Gangweite oder Ganghöhe zum Umfang bestimmt ist. Alle Schraubenlinien, deren Ganghöhe zum Umfang sich gleich verhalten, sind ähnliche Linien.

Die Construction der Schraubenlinie ist aus Fig. I leicht ersichtlich. Man theile zuerst die Horizontalprojection des Cylinders in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf, ziehe hierdurch die Projicirenden, bestimme eine Ganghöhe, etwa gleich $0'—12'$, $12'—24'$ u. s. w., theile jede in die gleiche Anzahl Theile wie die Horizontalprojection, also in zwölf, zeichne in diese die Kreisprojection als wagrechte Gerade, markire von $(0, 0')$ anfangend nach rechts die Punkte $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')\ldots(12, 12')$ u. s. w., und verbinde dieselben durch eine stetige Curve.**) Die Horizontalprojection $0\,1\,2\,3\,4\ldots12$ fällt hierbei, wie ersichtlich, mit der gleichen Projection des Cylinders zusammen.

§ 180. Die Construction der Tangenten an irgend einem Punkte der Schraubenlinie ist ähnlich wie bei der Spirale (siehe § 85, Fig. I, Taf. VIII). Sollte z. B. an den Punkt $(2, 2')$ derselben eine Tangente gezeichnet werden, so denke man sich in $(2, 2')$ der Cylinderfläche eine tangirende Ebene, deren horizontale Trace $2R$, und wobei die Strecke $2R$ gleich dem gestreckten Bogen $2\,1\,0$ ist (vergl. Fig. 57); R' ist die verticale Projection des Tracenpunktes R. Zieht man nun von $2'$ durch R', so ist diese die verlangte Tangente in $(2, 2')$; deren horizontale Projection $2R$ fällt dabei mit der Trace der berührenden Ebene zusammen. In ähnlicher Weise konnte in dem über $(2, 2')$ liegenden Punkte $(14, 14')$ die Tangente gefunden werden. Man brauchte dabei nur die durch R'' gehende horizontale Hilfslinie als eine Projectionsachse zu betrachten. Ebenso wurde auch

Fig. 57.



*) Soferne die Projicirenden parallel sind, wie dieses bei der orthogonalen Projection der Fall ist.

*) Hieraus erklärt sich auch ihre Anwendung in der Mechanik.

**) Da hier der Cylinder als Körper gedacht ist, so wurden dem entsprechend die rückwärts liegenden Curventheile, wie $7'\,8'\,9'\,10'\,11'$, $19'\,20'$ . . . als nicht sichtbar punktirt. Dasselbe gilt auch von den übrigen Figuren dieser Tafel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

eine Tangente ($c\,e$, $c'\,e'$) gefunden, indem man $9'\,g'\,e'$ für einen Moment als Projectionsachse betrachtete, die Strecke $c\,e$ in der Horizontalprojection gleich dem Bogen $5\,6$ machte, aus e die Projicirende $e\,e'$ zog und durch $c'\,e'$ die Tangente zeichnete u. s. w.*)

Eine Tangente in (d, d'), deren Horizontalprojection $d\,f$ ist, hat in der Verticalprojection ($d'\,f'$) symmetrische Lage zu $c'\,e'$ und f' fällt in derselben mit e zusammen, da die beiden Punkte ($e\,f$, $e'\,f'$) hintereinander liegen.

§ 181. In Fig. II ist eine conische Schraubenlinie oder Kegelspirale dargestellt. Dieselbe entsteht in ähnlicher Weise wie vorhin die cylindrische Schraubenlinie, indem ein Punkt auf einer Kegelerzeugenden um die Achse rotirt und dabei auf der Erzeugenden gegen den Scheitelpunkt (S, S') fortschreitet. Ist dieses Fortschreiten ein stetiges, d. h. ist die Geschwindigkeit der fortschreitenden zur drehenden Bewegung stets dieselbe, so entsteht die gewöhnliche Kegelspirale, deren horizontale Projection sich als eine archimedische Spirale darstellt.**) Ihre Construction ist daher eine sehr einfache. Sollte nämlich von einem Punkte (a, a') nach rechts herum die Kegelspirale gezeichnet werden, so theile man den Basiskreis des Kegels in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf, ziehe aus diesen Theilpunkten (a, a'), (b, b'), (c, c') . . . die Erzeugenden ($a\,S$, $a'\,S'$), ($b\,S$, $b'\,S'$) . . .; bestimme ferner die Anzahl der Ganghöhen oder Umgänge, hier z. B. zweieinhalb, theile jede Ganghöhe in ebenso viele Theile als den Basiskreis, also hier zwölf, lege durch diese horizontale Hilfslinien, d. i. Kreise, deren Horizontalprojectionen sich als concentrische Kreise darstellen, und markire die Punkte (1, $1'$), (2, $2'$), (3, $3'$), (4, $4'$) . . . in den beiden Projectionen. So liegt z. B. (a, a') auf dem Schnitte einer ersten Horizontalen, welche hier mit der Projectionsachse zusammenfällt, und einer Erzeugenden (a, S, $a'\,S'$)***), (1, $1'$) in dem Schnitte einer zweiten Horizontalen und einer Erzeugenden ($b\,S$, $b'\,S'$), (2, $2'$) in dem Schnitte einer dritten Horizontalen und einer Erzeugenden ($c\,S$, $c'\,S'$) u. s. w.

Im Grundrisse wurde, da die Projectionen dieser Parallelkreise sehr nahe zusammenfallen, nur je ein dritter Parallelkreis von der Basis aus gerechnet angegeben; um dabei dennoch die Zwischenpunkte $1, 2 \ldots\ldots$ zu erhalten, konnte ähnlich wie bei § 84, Fig. I, Taf. VIII verfahren werden.

*) Letztere Construction wurde hier auf einer zweiten mit $0\,1\,2\,3 \ldots 0'\,1'\,2'\,3' \ldots$ parallel laufenden Schraubenlinie ($a\,b\,c\,d \ldots a'\,b'\,c'\,d'$) ausgeführt.

**) Thatsächlich ist die Entstehung einer Cylinder- oder Kegelspirale wie auch der archimedischen Spirale das Ergebniss der aus Drehung und Fortschritt zusammengesetzten Bewegung eines Punktes; verschieden sind hierbei nur die Flächen, auf welchen diese Bewegung stattfindet.

***) d. i. in dem Schnittpunkte eines ersten Kreises mit einer ersten Erzeugenden.

Die Tangente ($3\,R$, $3'\,R'$) wurde gefunden, indem man (3, $3'$) als Berührungspunkt auf der Erzeugenden ($d\,S$, $d'\,S'$) zunächst bestimmte, durch (3, $3'$) eine tangirende Ebene an die Kegelfläche legte und in der horizontalen Projection auf der nach links gezeichneten Trace $d\,R$ die Strecke $d\,R$ gleich der Länge des Kreisbogens $d\,c\,b\,a$ machte, R nach R' projicirte und durch $3'\,R'$, wie auch durch $3\,R$ die Projectionen der Tangente zeichnete. Eine zweite Tangente ($15\,R''$, $15'\,R'''$), deren Berührungspunkt (15, $15'$) ebenfalls auf der Erzeugenden ($d\,S$, $d'\,S'$) liegt, wurde in gleicher Weise bestimmt, indem man die durch $12'\,I$ gelegte horizontale Ebene als eine horizontale Tafel betrachtete und damit das gleiche Verfahren von vorhin wiederholte (vgl. Fig. 58).

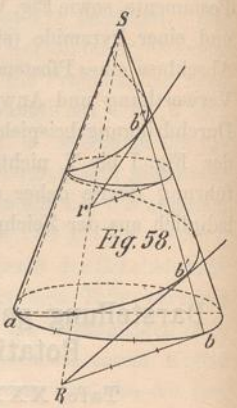


Fig. 58.

§ 182. In Fig. III ist eine Einziehung oder Kehle in der Verticalprojection zuerst gegeben. Der Umriss ($A\,B\,C \ldots A'\,B'\,C' \ldots$) derselben wurde hier durch Kreisbögen aus den Punkten I, II, III und I', II', III' gezeichnet (siehe §§ 55 und 78). Der Grundriss eines grössten Kreises $a\,b'\,c'\,d' \ldots$ ist hier wegen Raummangel statt unter der Projectionsachse über derselben zur Hälfte gezeichnet und in die gleichen Theile $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$, $d\,e \ldots$ getheilt worden. Zieht man nun aus diesen Theilpunkten b, c, d, e . . . senkrecht gegen $a\,n$, so erhält man ebenso, als wenn der Grundriss unter der Achse liegen würde, die Verticalprojectionen b', c', d', $e' \ldots$ der Theilpunkte.*) Sind diese gefunden, so theile man z. B. die Höhe der Kehle in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. vier, ziehe aus den Theilpunkten I'', II'', $III'' \ldots$ Horizontale (welche, soweit sie innerhalb der Kehle liegen, als Kreisprojectionen zu betrachten sind), und theile eine jede derselben in dem gleichen Verhältniss, wie $a\,n$ durch die Punkte b', c', d', e', f' . . . getheilt ist. Durch diese Theilpunkte ziehe man alsdann die Meridiane $b'\,2$, $c'\,3$, $d'\,4$ . . .; die einzelnen Hilfspunkte der gewundenen Linien liegen alsdann auf den Schnittpunkten der Meridiane mit den Parallelkreisen, welche durch n', I', II', III', IV'' gehen.

Um Hilfspunkte für die Meridiane, z. B. 2, 3, 4, 5, 6 . . . zu erhalten, braucht man nur aus a durch 1 und aus n durch 13 die Geraden $a\,1\,S''$, $n\,13\,S''$, sowie aus b', c', d', e', $f' \ldots\ldots$ nach S'' zu ziehen, um die Punkte 2, 3, 4, 5, 6 . . . zu erhalten, u. s. w.

Statt die Höhe der Kehle wie hier z. B. in gleiche Theile zu theilen, hätte man ebenso gut einen Umriss

*) Es ist ein in der Praxis häufiger Fall, dass man den Grundriss über der Achse oder auch, ohne dieselbe überhaupt zu markiren, in den Aufriss hineinzeichnet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$a\ C\ B\ A$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile bringen können. Je nach der Zahl und Art der Eintheilung wird natürlich auch die Form und Lage der gewundenen Linien verschieden sein.

§ 183. In Fig. IV sind zwei um eine Wulst- oder Ringfläche gewundene Linien dargestellt. Die Aufgabe ist ähnlich wie bei Fig. I, wenn man sich einen Cylinder oder ein Rohr kreisförmig gebogen denkt.

Angenommen, man wollte mit dem Zeichnen dieser Linien bei (a, a') beginnen und es sollte eine solche von (a, a') ausgehende und von der andern Seite her dahin zurückkehrende Linie etwa sechs Umgänge haben, d. i. sich sechsmal um die Ringfläche gleichmässig herumwinden, so theile man die Horizontalprojection zunächst in so viele gleiche Abschnitte, als man Umgänge haben will, z. B. sechs*), bestimme ferner auf dem Ringe eine beliebige Anzahl von Parallelkreisen, z. B. acht, deren Abstände auf der Fläche gleich sind und deren Eintheilung bei $A', B', C', D' \ldots$ gleich wie in Fig. II, Tafel XXV bestimmt wurde. Theilt man nun im Grundrisse eine jede Gangweite auf dem Ringe in ebenso viele gleiche Abschnitte, als man Parallel- oder Hilfskreise auf dem Ringe angenommen hat, also in acht, und zieht durch diese Theilpunkte nach dem Punkte m Gerade, so sind die Geraden $a1 \ldots 5e \ldots ig \ldots$ Horizontalprojectionen der auf dem Ringe liegenden Meridiane**), und die Schnitte solcher Meridiane mit den vorhin gezeichneten Parallelkreisen, nämlich $a, b, c, d, e, f, g, h \ldots$ sind Punkte, durch welche die in a beginnende gewundene Linie gezeichnet werden kann.

Eine von 1 aus zu zeichnende Linie geht durch die Punkte $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots$ Ist auf solche Weise die Horizontalprojection vollendet, so ergeben sich die Verticalprojectionen $a', b', c', d', e', f', g', h' \ldots$, sowie $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8' \ldots$ der einzelnen Punkte, welche sämmtlich auf den durch $(A\,B\,C\,D \ldots A'\,B'\,C'\,D' \ldots)$ gehenden Parallelkreisen liegen, in bekannter Weise. Diese Punkte verbinde man sodann durch eine stetige Curve. In Fig. IV sind ferner im Grundrisse von den Punkten a, b, c, d, e aus nach rechts und links gleiche Breiten ax, ay, bv, bw, ct, cu u. s. w. auf die Parallelkreise angetragen und die Punkte $x, v, t, r \ldots$ und $y, w, u, s \ldots$ verbunden worden; damit ist dann ein Theil eines Bandes oder Streifens bestimmt, welcher sich um den Ring herum windet und dessen Verticalprojection wieder wie vorhin die Mittellinie gefunden wurde. Solche Bänder kommen z. B. als Verzierungen an Rundstäben öfters vor. Ein Beispiel der Anwendung zeigt später Fig. IV, Tafel XXXVIII.

*) Da hier nur die vordere Hälfte des Ringes dargestellt ist, so wurde derselbe aussen auf dem grössten Kreise zunächst in drei gleiche Theile getheilt, diese halbirt, eine jede solche Hälfte in je vier gleiche Theile eingetheilt und aus diesen Theilpunkten nach m gezogen.

**) In der Verticalprojection sind ausser den als Kreise sich darstellenden Meridianen nur fünf Meridiane angegeben und die übrigen Verticalprojectionen weggelassen worden, da sie für die Bestimmung der gewundenen Linie nicht nothwendig sind, indem deren Punkte auch auf den Parallelkreisen liegen und somit durch die Projicirenden aus den entsprechenden Punkten des Grundrisses gefunden werden konnten.

Darstellung windischer Flächen.

Tafel XXXII. Figur I—III.

§ 184. Unter einer windischen (windschiefen) Fläche versteht man im Allgemeinen eine solche, in welcher die geraden Erzeugenden paarweise aufeinander folgend nicht in einer Ebene liegen, also kein ebenes Flächenelement bilden.

Je nach dem Gesetze, nach welchem sich die gerade Erzeugende bewegt, oder auch nach der Form und Lage derjenigen Linien, auf welchen die Erzeugende fortgleitet, können windische Flächen sehr verschieden sein, und gibt es daher sehr viele Gattungen oder Arten solcher Flächen, von welchen hier nur einige der bekanntesten erwähnt werden sollen.

1. Eine windschiefe Fläche entsteht, wenn sich eine Gerade als Erzeugende über zwei, nicht in einer und derselben Ebene liegende Linien als Leitenden so bewegt, dass die Erzeugende stets mit einer Ebene (Richtungsebene) parallel bleibt (siehe Fig. I), oder

2. wenn eine gerade Erzeugende über drei Linien als Leitenden, welche paarweise nicht in einer Ebene liegen, sich derart fortbewegt, dass sie dieselben in jeder ihrer Lagen schneidet, d. i. auf ihnen liegt (siehe Fig. II).

Im ersten Falle können die Leitlinien sowohl krumme als auch gerade sein; im zweiten Falle ist unter allen Umständen eine windische Fläche möglich, wenn die Leitenden drei Gerade sind; sind es aber krumme Linien, so hängt es von der Gestalt, Lage und Ausdehnung derselben ab, ob mit ihnen als Leitlinien überhaupt eine gesetzmässige krumme Fläche möglich ist oder nicht. Sind die im ersten Falle erwähnten Leitlinien Gerade, so entsteht eine sog. windschiefe Ebene, wie solche ein jedes verzogene Reissbrett oder aufgespannter Rahmen veranschaulicht. Die Fläche heisst alsdann auch das windische oder hyperbolische Paraboloid, weil ihre Schnitte durch Ebenen Hyperbeln oder Parabeln sind. Im zweiten Falle entsteht die gleiche windische Fläche, wenn die Leitenden Gerade sind.

3. Zu dieser Art der windschiefen Flächen gehört auch das sog. Drehungshyperboloid mit einem Mantel*),

*) Dasselbe entsteht auch durch Drehung einer Hyperbel um ihre Nebenachse (vergl. § 154, Fig. IV, Tafel XXII), während durch Drehung einer Hyperbel

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

bei welchem die Erzeugende eine zur Drehungsachse windschiefe Gerade ist, d. h. dieselbe weder schneidet noch parallel zu derselben ist, mit ihr somit kein ebenes Flächenelement bildet (siehe Fig. III). Dasselbe entsteht, indem eine gerade Erzeugende um die Achse rotirt und dabei zu dieser stets die gleiche ursprüngliche Lage einnimmt, so dass also jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Achse ist.

§ 185. In Fig. I ist ein windisches Paraboloid und dessen Schnitt mit einer zur horizontalen Tafel senkrechten Ebene ($efgh$, $e'f'g'h'$) zur Darstellung gebracht. Die beiden Geraden (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$) sind als die Leitlinien, und eine erste gerade Erzeugende (ac, $a'c'$) ihrer Lage nach in der Horizontalprojection ac zuerst bestimmt.

Denkt man sich durch ac eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene, so kann diese als die Richtungsebene betrachtet werden, zu welcher parallel sämmtliche Erzeugenden, also auch ihre Horizontalprojectionen liegen müssen. *1 6, 2 7, 3 8...* sind die Horizontalprojectionen solcher Erzeugenden.

Man theile daher die Geraden ab und cd von a und c aus in je eine Anzahl gleicher Theile, verbinde diese Theilpunkte durch Gerade, bestimme die Verticalprojectionen derselben auf den Leitlinien und verbinde die Punkte, wie c', a', $1', 6'$, $2', 7'$ ... der Ordnung nach, so sind die beiden Projectionen des windischen Paraboloides gefunden. Die Schnittpunkte der einzelnen Erzeugenden mit der Fläche ($efgh$, $e'f'g'h'$) ergeben in ihrer Verbindung die Schnittlinie (ki, $k'i'$) der windischen und ebenen Fläche.

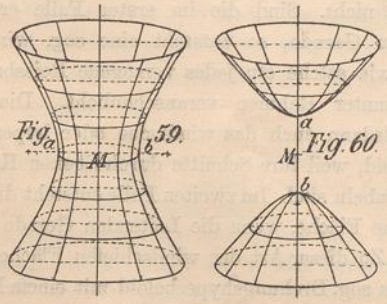
§ 186. In Fig. II ist dieselbe Fläche dargestellt, wenn drei Gerade (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$), (ef, $e'f'$), welche paarweise nicht parallel, als Leitlinien gegeben sind. Hierbei wurde eine der Geraden, z. B. (ef, $e'f'$) senkrecht zur horizontalen Tafel angenommen.*)

Denkt man sich nun durch die Gerade (ef, $e'f'$) eine Anzahl von Ebenen senkrecht zur horizontalen Tafel, so schneiden letztere die Leitlinien (cd, $c'd'$) und ($a\,b$, $a'\,b'$) in zwei Punkten. Solche Schnittpunkte sind z. B. $b, 5$, $b', 5'$ ... $a, 10$, $a', 10'$, und die Geraden, welche durch solche Schnittpunkte gelegt werden, gehen auch durch die Gerade (ef, $e'f'$), da sie mit dieser in je einer durch (ef, $e'f'$) gehenden Ebene liegen.

Man theile daher etwa die Horizontalprojection ab einer schiefen Leitlinie in eine Anzahl gleicher Theile, ziehe aus diesen Theilpunkten durch die als Punkt sich darstellende Senkrechte (also durch ef), bestimme Punkte, wie b, 4, 3..., ebenso die Punkte 5, 6, 7... in ihrer Verticalprojection auf den Leitlinien $a'b'$, $c'd'$, und ver-

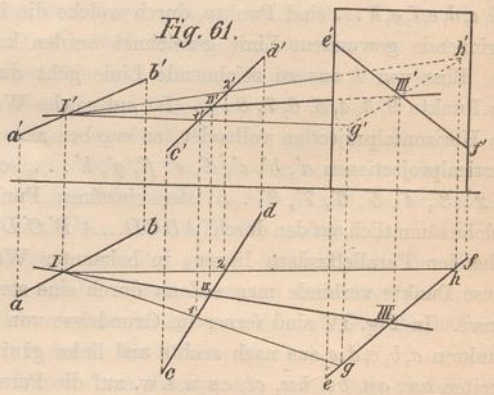
---

um ihre Hauptachse das Rotationshyperboloid mit zwei Mantelflächen oder zwei Netzen entsteht. Fig. 59 zeigt



das Hyperboloid mit einem Netze, wobei die verschiedenen Stellungen eines Hyperbelastes als Meridiane eingezeichnet sind. Fig. 60 zeigt das Hyperboloid mit zwei Netzen.

*) Die Lösung der Aufgabe ist dadurch bedeutend einfacher, als wenn alle drei Leitlinien zu beiden Tafeln schiefe Stellung haben, da in letzterem Falle, um die Lage einer jeden Erzeugenden bestimmen zu können, eine Reihe von Hilfsconstructionen nöthig wären. Um übrigens den Fall nicht unerwähnt zu lassen, denke man sich in Fig. 61 die drei Geraden (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$), (ef, $e'f'$) als Leitlinien und ferner auf (ab, $a'b'$) einen Punkt (I, I') beliebig angenommen. Soll nun durch den Punkt (I, I') eine Erzeugende gelegt werden, welche auch auf den beiden andern liegt, d. i. die beiden andern schneidet, so



lege man durch (I, I') und einen beliebigen Punkt ($1, 1'$) einer zweiten Leitlinie, z. B. ($c\,d$, $c'\,d'$), eine Gerade und ebenso aus (I, I') eine weitere Gerade durch einen beliebigen Punkt ($2, 2'$) derselben Leitlinie; die Geraden ($I\,1$, $I'\,1'$), ($I\,2$, $I'\,2'$) liegen sodann in einer Ebene (siehe § 108). Denkt man sich nun ferner durch (e, f, $e'\,f'$) eine Hilfsebene senkrecht zur horizontalen Tafel, so durchschneidet, wenn genügend verlängert, ($I\,1$, $I'\,1'$) diese Hilfsebene in einem Punkte (g, g') und ($I\,2$, $I'\,2'$) dieselbe in (h, h'); $g'\,h'$ bildet in der Verticalprojection den Schnitt beider Ebenen. Da nun ($f\,e$, $f'\,e'$) und (gh, $g'\,h'$) in einer Ebene liegen, so gehört der Schnittpunkt (III, III') sowohl der Geraden (ef, $e'\,f'$), als auch der Ebene ($h\,I\,g$, $h'\,I'\,g'$) an; zieht man daher von (I, I') nach (III, III') die Gerade, so schneidet diese in (II, II') auch (cd, $c'\,d'$), weil letztere ebenfalls in der Ebene ($g\,I\,h$, $g'\,I'\,h'$) liegt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

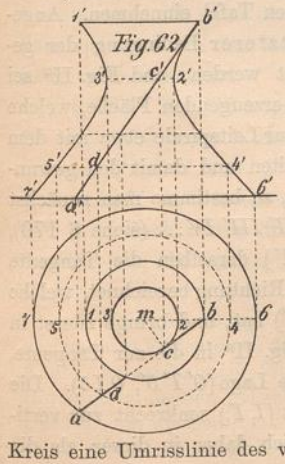
binde dieselben in gleicher Ordnung durch Gerade, so sind die beiden Projectionen des windischen Paraboloides gefunden. Auf der linken Seite wurde diese Fläche durch eine Ebene ($A\,B\,III$, $A'\,B'\,II'\,I'$) begrenzt. Ferner bildet der kleine Bogen, dessen Verticalprojection $i'\,k'$ ist, den Schnitt der windischen Fläche mit der verticalen Tafel.

§ 187. In Fig. III wurde bei der Darstellung des Drehungshyperboloides zunächst die Achse (AB, $A'B'$) und sodann die Lage ($a\,1$, $a'\,1'$) einer ersten Erzeugenden bestimmt; da während der Drehung dieser Geraden jeder Punkt derselben einen Kreis um die Achse beschreibt*), so liegen auch die Endpunkte ($a, 1$, $a', 1'$) je in einem Kreise, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind, und $(a, b, c, d, e \ldots a', b', c', d', e') \ldots$, sowie $(1, 2, 3, 4 \ldots 1', 2', 3', 4') \ldots$ sind deren Projectionen. Theilt man nun den Basiskreis von a aus in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. 24, ebenso den zweiten Kreis von 1 aus in dieselbe Anzahl gleicher Theile und verbindet a mit 1, b mit 2, c mit 3 u. s. w., so ist damit die Horizontalprojection dieser windischen Fläche bestimmt. Die Verticalprojection ergibt sich auf bekannte Weise mittels der Projicirenden aus $a, b, c, d \ldots$ und $1, 2, 3, 4 \ldots$

Damit die Ausführung möglichst einfach werde, ist der Fusspunkt (a, a') einer ersten Erzeugenden so gewählt, dass derselbe auf einer Geraden $n\,A\,a$ und je zwei weitere Fusspunkte, wie z. B. b, y und $c, x \ldots$, in ihrer Verticalprojection in b', y' und c', x' zusammenfallen. Ebenso wurde der obere Endpunkt ($1, 1'$) der ersten Erzeugenden derart angenommen, dass 1, 7 und 2, $6 \ldots$ in je einer Projicirenden liegen, $1'$, $7'$ und $2'$, $6' \ldots$ der Verticalprojection somit wieder zusammenfallen. Die rückwärtsliegenden, also unsichtbaren Theile der Erzeugenden wurden punktirt. Dasselbe gilt auch von Fig. I und II.

---

*) Daraus ergibt sich für die Ausführung der beiden Projectionen noch ein zweites und kürzeres Verfahren. Man braucht nämlich nur eine Reihe solcher Kreise, welche von Punkten (a, a'), (b, b'), $(c, c') \ldots$ der Erzeugenden beschrieben werden, in den beiden Projectionen zu bestimmen (siehe Fig. 62) und an die Verticalprojectionen dieser Kreise die Umrisslinien $1'\,3'\,5'\,7'$ und $b'\,2'\,4'\,6'$ zu zeichnen. In der Horizontalprojection bildet ausser dem untern und obersten auch der die Gerade $a\,b$ in c berührende Kreis eine Umrisslinie des windischen Hyperboloides.



Darstellung der geraden und schiefen Schraubenfläche und eines gewundenen Körpers.

Tafel XXXIII. Figur I—III.

§ 188. Fig. I und II sind Darstellungen von Schraubenflächen. Eine Schraubenfläche entsteht, wenn eine gerade Erzeugende über eine Schraubenlinie oder Cylinderspirale sich derart bewegt, dass die Erzeugende die Achse der Spirale unter constantem Winkel schneidet. Ist dieser Winkel ein rechter, d. h. steht die Erzeugende in allen ihren Lagen, welche sie während der Bewegung einnimmt, stets senkrecht gegen die Achse, so entsteht eine sog. gerade Schrauben- oder Wendelfläche (siehe Fig. I); schneidet hingegen die Erzeugende die Achse stets unter einem constanten (gleichen) schiefen Winkel, so entsteht die schiefe Schraubenfläche (siehe Fig. II). Die Schraubenfläche ist bestimmt, wenn die Leitspirale oder Schraubenlinie, die Achse und die Lage einer Erzeugenden gegen die Achse gegeben sind. Man beschreibe daher mit ma als Radius einen Kreis oder auch, wie in Fig. I, nur die vordere Hälfte desselben, theile denselben in eine Anzahl gleicher Theile, sodann theile man auch die angenommene Ganghöhe az' in ebenso viele gleiche Theile, als solche auf dem ganzen Kreise angenommen wurden, ziehe durch diese horizontale Gerade und aus den Theilpunkten der Horizontalprojection die Projicirenden, so ergeben sich die Punkte $a', b', c', d', e' \ldots$ der Leitlinie, welche sodann durch eine stetige Curve zu verbinden sind. Nimmt man als Achse statt einer Geraden einen Cylinder an (wie in Fig. I) und zeichnet man die verschiedenen Lagen der Erzeugenden nur bis zu ihren Durchgangspunkten auf der Cylinderfläche, so entsteht auf derselben durch Verbindung der Durchgangspunkte eine zweite, mehr gestreckte Schraubenlinie $1'\,g'\,2' \ldots$ In Fig. I wurde ausserdem noch eine mittlere, auf der Schraubenfläche liegende Linie angegeben.

§ 189. Die Aufgabe bei Fig. II ist ähnlich wie bei Fig. I. Der Unterschied besteht nur darin, dass eine erste Erzeugende $a\,1$ schief gegen die Achse angenommen ist. Da hier $a\,1$ so gewählt wurde, dass 1 auf den Schnitt der Achse mit der dritten Horizontalen (von unten an gerechnet) fällt, so sind hier des weiteren nur noch b' mit 2, c' mit 3, d' mit 4, e' mit 5, f' mit 6, g' mit 7 u. s. w. zu verbinden, wobei die Durchgangspunkte dieser einzelnen Geraden durch den als körperliche Achse angenommenen Cylinder in ihrer Verbindung eine zweite auf dem Cylinder liegende und mehr gestreckte Schraubenlinie ergeben.

§ 190. In Fig. III ist ein gewundener Körper dargestellt, wie er ähnlich bei einem Treppengeländer vorkommt. Der Körper entsteht, wenn eine Flächenfigur wie $a'\,a''\,a'''\,b''\,c' \ldots$ um eine Achse (M, M')

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

rotirt und dabei mit dieser Achse stets in einer Ebene liegt, d. i. zur horizontalen Tafel senkrecht steht. Die Horizontalprojectionen der verschiedenen Stellungen sind Gerade, wie z. B. $a\,e$ oder $f\,o\ldots$, die Verticalprojectionen der verschiedenen Stellungen sind aus den Horizontalprojectionen abgeleitet, und die Höhen der Flächenfiguren sind in allen Stellungen der Verticalprojection stets gleich. Da jeder Punkt einer solchen erzeugenden Flächenfigur eine Schraubenlinie um die Achse (M, M') beschreibt, so ergibt sich, nachdem zuerst die Fläche in ihren verschiedenen Lagen gezeichnet ist, durch Verbindung ihrer Ecken u. s. w. in entsprechender Ordnung der Umriss der Verticalprojection. Das Weitere ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

Darstellung gewundener Körper.

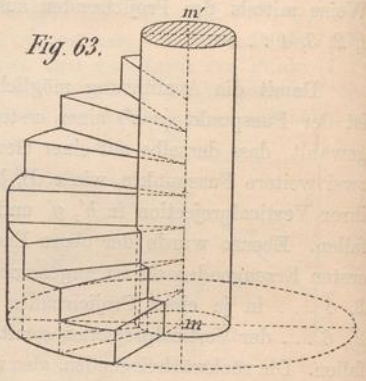
Tafel XXXIV. Figur I—III.

§ 191. In Fig. I ist ein Stück eines gewundenen Säulenschaftes mit Kannelirungen dargestellt. Dazu wurde die vordere Hälfte eines regulären Achteckes gezeichnet, dessen Seiten durch einspringende Kreisbögen ersetzt sind. Denkt man sich nun dieses Bogenachteck mit seinem in der Achse $(M, M'\,M'')$ liegenden Mittelpunkte um dieselbe, d. i. um sich selbst so gedreht, dass die Achtecksebene stets senkrecht zur Achse steht und dabei nach aufwärts schreitet, so entsteht der gewundene Säulenschaft, wie ihn Fig. I zeigt.*)

Angenommen, es wäre die Strecke $0\,VI$ gleich einer Viertels-Ganghöhe, d. h. die Achtecksfläche habe während des Fortschreitens von 0 bis VI eine Viertelsdrehung gemacht, so wird dabei eine Ecke $(0, 0')$ den Weg $0'\,1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'$, eine Ecke 3 den Weg $3''\,4''\,5''\,6''\,7''\,8''\,9''\ldots$ u. s. w. zurückgelegt haben. Um nun die Hilfspunkte $0', 1', 2', 3'\ldots$ und $3'', 4'', 5'', 6''\ldots$ u. s. w. zu bestimmen, theile man in der Horizontalprojection die Viertelskreise $0\,6$, $6\,12$ und ebenso die Ganghöhe $0\,VI$ in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in je sechs, ziehe aus den Theilpunkten $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ldots$ Senkrechte und aus $0, I, II, III, IV\ldots$ Horizontale, so liegen auf deren Schnittpunkten die verlangten Curvenpunkte $0', 1', 2'\ldots, 3'', 4'', 5''\ldots, 6''', 7''', 8'''$ u. s. w., welche, wenn in gehöriger Ordnung von links nach rechts wie $0', 1', 2', 3'\ldots$ verbunden, die gewundenen Kanten ergeben. Der Säulenschaft ruht hier ferner auf einer kegelförmigen Basisfläche, und die gewundenen Kanten haben ihre Fusspunkte auf derselben in $0', 3'', 6'''\ldots$ Die Verticalprojectionen des Schnittes der gewundenen Hohlkehlen auf der Kegelfläche, wie z. B. $3''\,x'\,a'\,6'''$ einen solchen darstellt, wurden gefunden, indem man in der Horizontalprojection tangirend an die einspringenden Bögen einen Kreis $a\,d\,g\ldots$ beschrieb und dessen Verticalprojection auf der Kegelfläche bestimmte. Zieht man nun aus den Punkten, wie $a, d, g, \ldots$ die Senkrechten, so schneiden diese auf der durch a' gehenden Horizontalen (d. i. der Kreisprojection) die verlangten Punkte der Kehlenvertiefungen ab. Weitere Zwischenpunkte, wie z. B. (x, x') konnten ebenfalls durch Annahme eines weiteren Hilfskreises auf der Kegelfläche gefunden werden. Derselbe wurde hier durch x in der Horizontalprojection so beschrieben, dass er die einspringenden Bögen $3\,a\,6$, $6\,d\,9\ldots$ schneidet; auf seiner Verticalprojection liegt nun x' u. s. w. Eine Linie $(a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots, a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f')\ldots$ zieht sich längs der tiefsten Stelle in einer der Hohlkehlen hinauf; ihre Projection wurde dadurch bestimmt, dass man den Viertelskreis $a\,g$ gleichfalls in sechs gleiche Theile $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ theilte, aus diesen Theilpunkten Senkrechte zog und oben auf den wagrechten aus $0, I, II, III\ldots$ die Punkte $a', b', c', d', e'\ldots$ markirte, sowie letztere durch eine hier punktirte Curve verband.

§ 192. In Fig. II ist ein Stück einer sog. Treppenwange oder Treppenspindel dargestellt, wie solche als Träger der Stufen auf der inneren oder Achsenseite einer Wendeltreppe vorkommen kann. (Im einfachsten Falle ist die Spindel einer Wendeltreppe ein gerader Cylinder, s. Fig. 63.)

Fig. 63.



Eine solche Spindel könnte nun nach der in Fig. III, Tafel XXXIII angeführten Methode gezeichnet werden, oder die erzeugende Fläche konnte, statt senkrecht zur horizontalen Tafel, auch normal zur Leitspirale, d. i. senkrecht zu derselben stehen und dabei stets gleiche Lage zur horizontalen Tafel einnehmen. Angenommen, es solle nach letzterer Bedingung der gewundene Körper gezeichnet werden, und Fig. II^a sei die geometrische Form der erzeugenden Fläche, welche in stets normaler Stellung zur Leitspirale etwa mit dem Punkte 3 auf dieser fortgleiten und damit den gewundenen Körper erzeugen soll, so bestimme man zunächst die Leitlinie $III''\,II''\,I'\,II'\,III'\,IV\ldots$ (siehe § 179), lege an einen Punkt (I, I') derselben die Tangente $(I\,R, I'\,R')$, welche also die Richtung bezeichnet, welche die Schraubenlinie bei (I, I') hat, und bringe zuerst in Punkt (I, I') die Fläche Fig. II^a in die zur Tangente, also auch zur Curve normale Lage $(0'\,I'\,5', 0\,I\,5)$. Die Fläche steht nun in Punkt (I, I') senkrecht zur verticalen Tafel und projicirt sich daher in dieser als die

*) Diese Art der Erzeugung wird meistens nur dann angewendet, wenn die Ganghöhe im Verhältniss zum Umfange sehr gross ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Gerade $0'\,I'\,5'$. Man zeichne daher in I' eine Normale zur Tangente, trage auf diese von I' aus die Theile $3\,2$, $2\,1$, $1\,0$ aus Fig. I^a in $3'\,2'$, $2'\,1'$, $1'\,0'$, und ebenso $3\,4$, $4\,5$ aus Fig. I^a in $3'\,4'$, $4'\,5'$ der Verticalprojection über, ziehe ferner aus den Punkten $0', 1', 2', 3', [(3, 3')$ fällt mit (I, I') zusammen$]$ $4', 5'$ die Projicirenden herab, und trage von der Geraden $0\,I\,5$ die Breiten $0\,a$, $0\,b \ldots 5\,c$, $5\,d$ der Fig. II^a nach beiden Seiten in $0\,a$, $0\,b \ldots 5\,c$, $5\,d$ der Fig. II in entsprechender Ordnung an, wodurch sich dann in der Horizontalprojection die Lage einer ersten, normal zur Curve liegenden Fläche ergeben hat.

Da nun während der Fortbewegung die Fläche zur horizontalen Tafel stets die gleiche Stellung einnehmen wird, so bleiben die Horizontalprojectionen ihrer verschiedenen Lagen gleich; die Profile bei $II'', I, II \ldots$ sind also congruent.*) Was die Ausführung derselben in der Verticalprojection betrifft, so sind die verschiedenen Höhenabstände der einzelnen Profilpunkte [wie z. B. $(a''', b'''$, $a^4, b^4)$, $(e, f, e'\,f')$, $(g, h, g'\,h')$ u. s. w.] von den auf der Leitspirale liegenden Punkten $(II', I, II \ldots II''', I', II' \ldots)$ bei allen Lagen der Profilsflächen gleich, so dass z. B. der Höhenabstand der Punkte a^4, b^4 oder der Horizontalen $a^4\,b^4$ von II' gleich dem Höhenabstand a' (b') von I', d. i. gleich $3''\,a'$ (b') und ebenso die Höhenabstände wie $e'\,f'$, $g'\,h'$, $i'\,k' \ldots$ von II' gleich $3''\,1''$, $3''\,2''$, $3''\,4'' \ldots$ sind u. s. w. Sind auf solche Weise die durch (III', III'''), (II'', II'''), (I, I'), (II, II'), (III, III') gehenden Flächen in ihrer Verticalprojection bestimmt, so finden sich die übrigen durch IV', V', VI', $VII' \ldots$ gehenden Flächenlagen sehr einfach dadurch, dass man die durch III''', I', II' gehenden Symmetrieachsen der Flächenfiguren nach aufwärts bis zur Horizontalen $4\,S''\,S'\,III'$ verlängert, und aus IV', V', $VI' \ldots$ nach $6'$, S', S'' die Geraden $IV'\,6'$, $V'\,S'$ $VI'\,S'' \ldots$ zieht. Die Schnittprofile können von diesen Symmetrieachsen aus völlig gleich den schon vorhandenen, jedoch in entgegengesetzter Lage gezeichnet werden. Das mit $0'\,I'\,5'$ als Mittellinie gezeichnete Profil $a''\,b''\,c''\,d''$ ist als die zur verticalen Tafel parallele Umlegung der Flächenprojection $a'\,b' \ldots c'\,d'$ zu betrachten und ist ganz dieselbe Figur wie Fig. II^a, so dass man also von dem Zeichnen der Fig. II^a Umgang hätte nehmen können.

§ 193. Fig. III zeigt ein Stück einer gewundenen Säule, welche dadurch entstanden ist, dass sich ein gegebenes Profil $I\,II\,III\,IV\,3'''\,V \ldots$, welches mit der Achse $(M, M'\,M'')$ in einer Ebene liegt, um diese Achse von links nach rechts dreht und dabei nach aufwärts fortschreitet; die Erzeugung ist also ähnlich wie bei Fig. III, Taf. XXXIII, da auch hier die Ebene des Profiles in allen ihren verschiedenen Lagen zur Drehachse stets senkrecht zur horizontalen Tafel bleibt. Man zeichne zuerst die Achse $(M, M'\,M'')$, bestimme sodann etwa $a'\,i'$ oder $0\,8$ als eine Ganghöhe und in der Horizontalprojection $a\,b\,c\,d\,e$ als den halben Umfang einer Leitspirale; $(a\,b\,c\,d\,e \ldots a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots)$ sind sodann die Projectionen derselben. Nunmehr zeichne man innerhalb der Ganghöhe $a'\,i'$ das Profil $II\,III\,IV \ldots XII$*), denke sich dasselbe nach rechts um die Achse gedreht, bis dessen Ebene (deren Horizontalprojection $c\,M$) senkrecht zur verticalen Tafel ist und daher in dieser als eine mit der Achse zusammenfallende Gerade erscheint, wobei dann ein Punkt II des Profiles während des Fortschreitens nach B und ein Punkt a' nach c' zu liegen kommt. Trägt man nun die Grössen $B''\,C''$, $C''\,D''$, $D''\,E'' \ldots$ auf der Senkrechten $M'\,M''$ von B aus in gleicher Ordnung nach abwärts und aufwärts entsprechend oft an, so ergeben sich auf derselben für die Contur der Säule eine Reihe von Hilfspunkten. Ferner sind während einer halben Drehung die Punkte II' und a' nach 4 und e' und mit ihnen auch das ganze Profil hinaufgerückt, so dass dasselbe auf der rechten Seite nunmehr dem linksseitigen gerade gegenüberliegt, wodurch sich auch rechts weitere Punkte für das Zeichnen der Conturen ergeben, u. s. w. Verbindet man nun die Eckpunkte der verschiedenen Profilstellungen, so erhält man zunächst die Projectionen der gewundenen Plättchen, welche in einer Cylinderfläche liegen und deren Horizontalprojection $a\,b\,c\,d \ldots$ ist; zieht man auch noch berührend an die halbkreisförmigen convexen Theile der verschiedenen Profilstellungen eine stetige Curve, so erhält man damit die Umrisse der Wulste, und diese im Vereine mit den vorhin gezeichneten bandförmigen Plättchen vollenden die Verticalprojection, wobei wie

*) Durch die Ecken derselben u. s. w. sind auch die horizontalen Projectionen der als Kreise sich darstellenden Kanten zu zeichnen; in Fig. II sind die durch a und b der Horizontalprojection gehenden Linien desshalb nicht angegeben, um die Deutlichkeit der Schnittfiguren daselbst nicht zu beeinträchtigen.

*) Da während eines Umganges der den Wulst erzeugende Halbkreis I II III nach XI XII $XIII$ zu liegen kommt, so muss demgemäss ein angenommener zweiter Halbkreis VI VII $VIII$ in der Mitte zwischen den beiden erstgenannten liegen, und nach diesen richtet sich dann auch die übrige Eintheilung der Plättchen und Hohlkehlen u. s. w.; bei entsprechend grösserer Ganghöhe hätte man natürlich zwischen derselben die Gliederung des Profiles auch öfter wiederholen können. Die Eintheilung ist im Allgemeinen eine beliebige, und ist von dieser, wie leicht erklärlich, die Form der gewundenen Säule abhängig. Ferner sei noch bemerkt, dass, obwohl die Entstehung der Fig. III streng genommen nicht ganz correct, d. i. nicht gleich der Entstehung etwa einer hölzernen Säule auf der Drehbank ist, obiges Verfahren dennoch für das Zeichnen oder Entwerfen einer solchen hinlänglich ist. Bei der Erzeugung auf der Drehbank würde z. B. das hier in einer Cylinderfläche liegende gewundene Plättchen einer windischen Fläche angehören, deren Krümmung an der betreffenden Stelle indess so gering ist, dass sie für die Ausführung der Zeichnung kaum in Betracht kommen kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

aus der Zeichnung ersichtlich, die Umrisse dieser Wulste einen Theil der Plättchen verdecken.

Die Linien $1''\,2''\,3''\,4''\ldots$ und $1'''\,2'''\,3'''\,4'''\ldots$ ziehen sich längs der tiefsten Stelle der Hohlkehle, d. h. in der Mitte derselben hinauf, und soll damit angedeutet sein, in welcher Weise sich eine an dieser Stelle eingedrehte Ritze oder kleine Vertiefung darstellen würde.

In der Horizontalprojection ist die durch den gelben Ton abgegrenzte Flächenfigur der Schnitt der gewundenen Säule mit der horizontalen Tafel. Statt, wie anfänglich erklärt wurde, die Ganghöhe $a'i'$ zuerst und dann die Eintheilung des Profiles auf der linken Seite zu bestimmen, hätte man ebenso gut das Profil zuerst zeichnen und nachträglich eine Grösse $a'i'$ als die Ganghöhe bestimmen können.

In Fig. III ist ferner der Normalschnitt $ABCDE$ des Wulstes, Plättchens und der halben Hohlkehle eingezeichnet. Man lege hierzu in (c, c') eine Tangente an die Leitspirale (siehe § 180, Fig. I, Taf. XXXI) errichte über dem Punkte R' eine Senkrechte, zeichne sodann die zur Tangente $c'R'$ rechtwinklige Gerade $ABCDE$, ziehe aus $III, IV, 3'''$ Horizontale und aus $B'', C'', D''\ldots$ Parallele mit der Tangente $R'c'$, und mache BB' gleich $a'II$ u. s. w., so ist $AB'CDE'$ der parallel zur verticalen Tafel um die Normale AC umgeklappte Normalschnitt. Die Aufgabe hätte aber auch umgekehrt gestellt werden können, d. h. man hätte gleich anfänglich, nachdem die Leitspirale gegeben war, die Tangente $(cR, c'R')$ und die Normale $Ac'C$, sowie den umgelegten Normalschnitt, jedoch nur von A bis D bestimmen und aus den Punkten A, c', C, D die zur Tangente parallelen Geraden $DD'', CC''\ldots$ bis zu einer in R' errichteten Senkrechten ziehen können.

Damit waren dann in B'', C'', D'' die Höhen der einzelnen Profilstheile und durch $c'B'$ die Ausladung des Wulstes bestimmt. Um also das zur horizontalen Tafel senkrechte Profil von I bis IV aus dem Normalschnitt $AB'CD$ abzuleiten, brauchte man nur aus $D''C''\ldots$ Horizontale zu ziehen, welche auf der Senkrechten aus a' die Punkte $IV\,III\ldots$ ergaben, ferner $a'II$ gleich $c'B'$ zu machen und durch IV, III, II, I das Profil zu zeichnen. Ist nun $I\,II\,III\,IV$ auf solche Weise bestimmt worden, so muss dieselbe Linienfigur in $XXI\,XII\ldots$ sich wiederholen. Daraus erhellt, dass die Höhe $IV\,V$ einer Hohlkehle in diesem Falle nicht vorausbestimmt werden kann, sondern von der angenommenen Grösse des Wulstes und Plättchens abhängig ist.

Darstellung einer körperlichen Volute.

Tafel XXXV. Figur I—IV.

§ 194. Eine körperliche Volute, wie sie Fig. I darstellt, wird zum Theil durch eine Wendelfläche, zum Theil durch eine spiralförmige Cylinderfläche begrenzt; als Leitlinie dient eine räumliche Schneckenspirale.*) Denkt man sich auf dieser:

1. eine gerade Erzeugende $(aa'', a'a''')$ (Fig. I) so fortbewegt, dass sie stets senkrecht zu einer durch den Mittelpunkt (O, O') des Schneckenauges gehenden Achse ist, so entsteht die Wendelfläche (vgl. § 188, Fig. I, Tafel XXXIII). Denkt man sich:

2) durch die Leitspirale eine zweite Erzeugende von (a, a') aus so fortbewegt, dass sie stets parallel mit der durch (O, O') gehenden Achse ist, so entsteht hierdurch die spiralförmige Cylinderfläche, deren Erzeugende von (e, e') angefangen zunächst diejenige verticale Ebene oder Wandfläche schneiden, von welcher aus die Leitspirale bei (a, a') ihren Anfang genommen (d. i. eine Ebene, welche hier mit der verticalen Tafel parallel und deren Horizontalprojection AF ist), sodann aber von (i, i') in ihrer weiteren Aufeinanderfolge nach links die Wendelfläche nach einer zweiten Spirale durchschneiden, deren Horizontalprojection in Fig. I $ab''c''e''g''i\ldots$ ist.

Daraus ergibt sich für die Construction einer solchen Volute folgendes Verfahren:

Man zeichne in der Verticalprojection (Fig. I) zuerst eine geometrische Schneckenlinie $a'b'c'd'\ldots$ etwa nach der in § 86 (Fig. II, Tafel VIII) angegebenen Methode**), betrachte dieselbe als die Verticalprojection einer räumlichen Spirale und bestimme deren Horizontalprojection $abcdefghi\ldots$ etwa nach folgender Methode: Man trage die wahre Länge der Curve $a'b'c'd'e'\ldots$ auf eine gegebene Gerade ap in Fig. IV von a nach rechts auf, d. h. man strecke die Curve. Die Entfernungen $ab, bc, cd\ldots$ in Fig. IV sind also gleich den Bogenlängen $a'b', b'c', c'd'\ldots$ in Fig. I. In den so erhaltenen Theilpunkten $a, b, c, d, e, f, g\ldots$ errichte man Senkrechte und bestimme am Ende rechts die Grösse pp' gleich der räumlichen Entfernung, welche ein letzter Punkt (p, p') in Fig. I von der Wandfläche AF haben soll (pp' in Fig. IV gleich ap in Fig. I), sodann verbinde man a mit p' durch eine stetig ansteigende Linie, welche sich bei p' etwas verflacht***),

*) Die Linie hat Aehnlichkeit mit der in Fig. II, Tafel XXXI dargestellten Kegelspirale.

**) Es wurde hier die Gerade aV in fünf gleiche Theile getheilt u. s. w., aus IV nach S gezogen und der Abschnitt $p'O'$ als Radius des Schneckenauges angenommen. Die Schneckenspirale hat von a' bis zu dem Punkte p', d. i. bis zum Auge, somit zwei Umgänge, und für jeden Umgang sind acht Hilfspunkte in bekannter Weise gefunden worden.

***) Man ziehe z. B. von a bis k' eine Gerade und verbinde k' mit p' durch eine von k' ohne Bruch oder Ecke sich fortsetzende Curve, welche sich bei p' horizontal verflacht, also pp' unter rechtem oder doch nahezu rechtem Winkel trifft. Hierbei sei noch bemerkt, dass die zwischen $n'o'$ und $o'p'$ auf den Geraden $5O', 7O'$ liegenden Punkte in Fig. I übergangen und daher auch

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

trage nunmehr die zwischen den beiden Linien (d. i. der Scala) ap, ap' liegenden Strecken bb', cc', dd' . . . in gleicher Reihenfolge von der zur verticalen Tafel parallelen Ebene, d. i. von der Geraden AF heraus, so dass die Entfernungen der Punkte $b, c, d, e, f, g, \ldots$ von der Geraden AF gleich den Strecken bb', cc', dd', ee', ff', $gg' \ldots$ in Fig. IV sind. Die so erhaltenen Punkte a, b, c, d, e, f, g . . . durch eine Curve verbunden ergeben im Grundrisse die verlangte Leitspirale, deren letzter oder äusserster Punkt (p, p') sich dem Auge der Volute anschliesst. Zieht man ferner aus sämmtlichen Punkten $a, b, c, d, e \ldots$ die Erzeugenden aa'', bb'', cc'', $ee'' \ldots$ der Wendelfläche, sowie aus den Punkten i, k, l . . . die Erzeugenden der Cylinderfläche, und zwar letztere senkrecht zur Ebene AF, so schneiden sich diese in $a'', b'', c'' \ldots$ und die Verbindung von a'', b'', c'' . . . ergibt die zweite auf der Wendelfläche liegende Spirale $a''b''c''e''g'' \ldots$ u. s. w. In der Verticalprojection erscheinen, wie aus der Zeichnung ersichtlich, die Projectionen der Cylindererzeugenden, wie z. B. ia'', kb'', lc'' . . . in $i'a'''$, $k'b'''$, $l'c'''$ . . . als Punkte, stehen also senkrecht zur verticalen Tafel.

Eine zweite Horizontalprojection der Volute, welche hier unterhalb der ersten gezeichnet ist, zeigt eine andere Methode, nach welcher die Leitlinie u. s. w. bestimmt werden konnte. Statt nämlich hierzu eine Hilfszeichnung wie Fig. IV zu benützen, wurde die gesammte Ausladung ap der Volute in so viel gleiche Theile getheilt, als man für die Leitspirale Hilfspunkte in der Verticalprojection angenommen hat, z. B. sechzehn*); sodann wurden aus den Punkten $a', b', c', d', e' \ldots$ der Verticalprojection die Projicirenden gezogen und auf den durch die Theilpunkte $1, 2, 3$ . . . zur Ebene $A''F''$ gezeichneten Parallelen die Punkte a, b, c, d, e . . . der Horizontalprojection markirt. (Vergl. Figur II, Tafel XXXI.)

§ 195. In Fig. II ist dieselbe Volute in verkürzter Vorderansicht, d. h. so dargestellt, dass die Erzeugenden der Cylinderfläche parallel zu beiden Tafeln, also unverkürzt erscheinen. Die Entfernungen der Punkte, wie z. B. b, c, d, e, f, g . . . von der Geraden $A'E'$ (d. i. von der jetzt senkrecht zu beiden Tafeln stehenden Wandfläche) sind wieder gleich den zwischen der Scala (Fig. IV) liegenden Strecken bb', cc', dd', ee', ff', $gg' \ldots$, und die Erzeugenden aa'', cc'', $ee'' \ldots$ der Wendelfläche sind parallel der Geraden, d. h. der Ebene $A'E'$. Die Horizontalprojection der Volute, welche hier nicht weiter ausgeführt ist, würde gleich der ersten (obern) in Fig. I sein.

§ 196. In Fig. III ist dieselbe Volute in schräger Stellung zur verticalen Tafel gezeichnet. Man bringe zu diesem Zwecke die erste Horizontalprojection aus Fig. I in die Lage der Horizontalprojection von Fig. III, errichte über sämmtlichen Punkten $a, b, c, d, e, f, g \ldots$, sowie $a'', c'', e'' \ldots$ die Senkrechten und ziehe aus den Punkten $a', b', c', d', e' \ldots$, sowie $a''', b''', c''' \ldots$ der Verticalprojection Fig. I die Horizontalen, so ergeben sich hierdurch die Punkte $a', b', c', d', e' \ldots$, sowie $a''', c''', e''' \ldots$ der Verticalprojection Fig. III. Von der Volute ist hierbei nur die vordere Hälfte gezeichnet und der Körper nach rückwärts gegen eine Wand anstossend gedacht. Das Weitere ist aus Fig. I, II und III unschwer zu ersehen.

Darstellung verzierter Gefäss- und Säulenformen.*)

Tafel XXXVI. Figur I—III.

§ 197. Bei dem Beispiele Fig. I ist zuerst ein Theil des Netzes der kegelförmigen Gefässfläche in bekannter Weise nebenan gezeichnet und darauf das Ornament mit den nöthigen Hilfslinien angegeben worden. Die Uebertragung in die Verticalprojection der Fig. I dürfte nach dem bisher Gesagten keine Schwierigkeiten mehr bieten.

§ 198. Fig. II zeigt das Detail einer durch Kannelirungen und einem einfachen Perlstab gezierten profilirten Säule, wie solche z. B. an Möbeln und Geräthen vorkommen kann.

Bei der achteckigen, durch Pyramidenflächen begrenzten Gefässform (Fig. III) sind diese Flächen durch geradlinige Figuren oder Felder decorirt. Die Eintheilung wurde zuerst auf der hier nach links und parallel zur verticalen Tafel umgelegten geometrischen Fläche vorgenommen. Bei der Uebertragung dieser Felder in die Projection konnten z. B. die kleinen Strecken de, df auf dem mittleren Felde gleich $d''e'', d''f''$ u. s. w. gemacht werden. Für das Auftragen der Felder auf den sich verkürzenden Flächen links und rechts erweist sich die Anwendung eines Winkeldreieckes oder Winkelmassstabes (siehe § 41) als sehr praktisch.

Man mache z. B. eine Senkrechte $1\,2$ (Fig. III^a) gleich einer verkürzten Horizontalkante der Pyramidenseite, etwa gleich $3'4'$, ziehe durch 2 in Fig. III^a etwa

in der Scala Fig. IV nicht weiter markirt wurden. Dieselben würden in Fig. IV zwischen $(no, n'o')$ und $(op, o'p')$ liegen.

*) In der Zeichnung wurden statt sechzehn nur acht Theile angegeben und die Projectionen der Punkte wie $b, d, f, h, k \ldots$ schätzungsweise je in der Mitte zweier aus A'' und $1, 1$ und $2 \ldots$ gezogener Horizontalen, sowie innerhalb der betr. Projicirenden aus $b', d', f', h', k' \ldots$ angenommen. Es ist dieses lediglich der Vereinfachung halber und um Linien zu ersparen geschehen.

*) Dieselben sind hier aus leicht begreiflichen Gründen nur in ihren primitivsten Hauptformen gezeichnet, ebenso sind auch die ornamentalen Formen möglichst einfach gewählt worden. Handelt es sich hierbei ja nicht um eine stilistische Durchführung, sondern lediglich darum, die gehörige Uebung im Auftragen ornamentaler Linienformen zu erlangen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nach links eine Horizontale *2 3*, vorerst von unbestimmter Länge, nehme die Grösse einer unverkürzten, gleichliegenden Seite, also *2′3′* aus Fig. III in den Zirkel und beschreibe damit aus *1* der Fig. III[a] einen Bogen, welcher die vorhin durch *2* gezeichnete Horizontale in einem Punkte *3* schneidet. Damit ist der Winkelmassstab oder das Reductionsdreieck zum Gebrauche fertig. Um nun von einer Mittellinie *a′h′* z. B. die Entfernungen der Punkte *e′* und *f′* von *d′* zu bestimmen, entnehme man deren wahre Grösse *d″e″* oder *d″f″*, trage diese in Fig. III[a] von *3* nach *d*, schliesse den Zirkel so weit, bis ein aus *d* gezeichneter Bogen die Horizontale *2 3* in *e* berührt, und trage *d e* von *d′* in Fig. III nach rechts und links an. In gleicher Weise konnten auch die übrigen verkürzten Breiten auf den Flächen rechts und links gefunden werden, ohne dass es nöthig war, die Felder zuerst in den Grundriss einzuzeichnen und aus diesem den Aufriss abzuleiten.

Darstellung verzierter Säulenschäfte und einer achteckigen Vase.

Tafel XXXVII. Figur I—III.

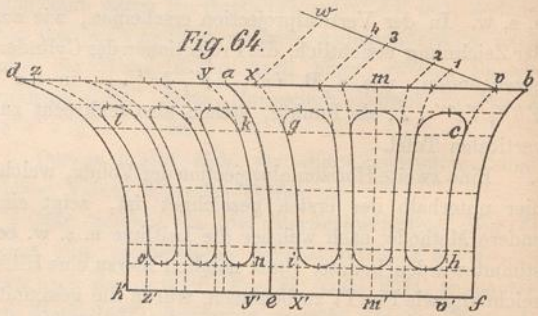
§ 199. Fig. I zeigt einen durch gewundene, bandförmige Flächen und durch Blätter gezierten Säulenfuss. Die Ausführung ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

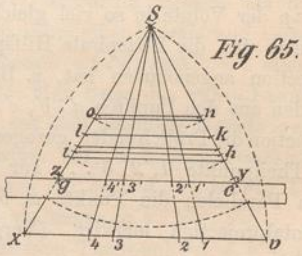
In Fig. II ist zunächst auf der cylindrischen Fläche über der Horizontalen *3″2″1″*... ein Netz von kleinen Quadraten bestimmt worden, deren Projectionen auf derselben nach der rechten und linken Seite des Cylinders hin immer schmäler werden und deren Höhen gleich bleiben. Auf dem mittleren Theil der linken Säulenhälfte, also innerhalb des als Rechteck erscheinenden Cylindertheils *1′2″2‴m″* wurde die Hälfte eines Ornamentes eingezeichnet, welches sich links von der Senkrechten *2″2‴*, sowie auf der rechten Säulenhälfte wiederholen soll. Mittels des auf die Cylinderfläche angegebenen Netzwerkes ist die Ausführung bethätigt worden. Dieses Verfahren wird hauptsächlich auch dann angewendet, wenn es sich um die projective Uebertragung eines beliebigen, sich nicht wiederholenden Ornamentes handelt, welches etwa auf einer abgewickelten Cylinderfläche zuerst gezeichnet sein könnte.

§ 200. In Fig. III ist eine achteckige Vase dargestellt, deren unterer Theil kannelirt und deren Hals durch ornamentale Linienformen decorirt ist. Die Ausführung der Kannelirungen ist aus der Zeichnung ersichtlich, das Auftragen des Ornamentes auf der untern Partie des Halses konnte, nachdem ein Mittelfeld zuerst gezeichnet war, auf die sich verkürzenden Seitenflächen mittels des Reductionsdreieckes Fig. III[a] nach der im § 198 angegebenen Methode bewerkstelligt werden.

So ist z. B. das aus den Strecken *5″6″* und *6″7″* gebildete rechtwinklige Dreieck Fig. III[a] das zu diesem Zwecke verwendbare Reductionsdreieck, in welchem z. B. *p 1* gleich *p 1* in Fig. III und *p′1′*, *p′2′* in derselben Figur gleich *1 1′* in Fig. III[a] ist, u. s. w.

Was die Ausführung der obern Partie betrifft, so hätte man damit etwa in folgender Weise verfahren können: Man zeichne zunächst von *v* und *x* längs der Körperkanten *a′ e′* und *b′ f′* Linien in gleichen Abständen von diesen Kanten, zeichne sodann an *v* anstossend eine beliebige Gerade *v w*, bestimme auf derselben das alternirende Verhältniss der Flächenfiguren und deren Zwischenräume, ziehe von *w* nach *x* eine Gerade und aus den übrigen Theilpunkten die Parallelen zu dieser, so ist damit *v x* in demselben Verhältniss getheilt wie *v w*. Nun zeichne man mit *v x* als Seite in Fig. III[b] ein gleichseitiges Dreieck *v x S*, trage etwa mittels eines Papierstreifens die Theilung von *v x* nach





v x in Fig. III[b] über und ziehe aus den letztern Theilpunkten Gerade nach *S*. Das gleichseitige Dreieck mit den darinliegenden Geraden bildet sodann eine Art Scala, aus welcher die horizontalen Breiten und Zwischenräume der länglich runden Felder u. s. w. entnommen werden können.

In Fig. 64 soll noch weiter gezeigt werden, wie diese Scala zu benützen ist. Hat man nämlich die Linien *v v′* und *x x′* in gleichen Abständen von den Kanten *b f* und *a e*, sowie die an sich gleichen, aber sich verkürzenden Breiten, wie *a y*, *e y′*, *d z*, *h z′* (letztere in Fig. III mit Hilfe der Fig. III[a]), bestimmt, sowie das gleichseitige Dreieck *v x S* (Fig. 65) mit den Geraden *1S*, *2S*... gezeichnet (*v x* in Fig. 65 gleich *v x* in Fig. 64), so nehme man z. B. eine Strecke *c g* aus Fig. 64 in den Zirkel, beschreibe damit aus *S* in Fig. 65 einen Bogen, verbinde dessen Schnittpunkte *c* und *g* durch eine Gerade, lege an diese Gerade einen Papierstreifen, markire darauf die Theilpunkte *1′*, *2′*,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$3'$, $4'$, welche durch die Geraden aus 1, 2, 3, 4 auf derselben abgeschnitten wurden, und trage diese mittels des Papierstreifens nach cg in Fig. 64 über. In gleicher Weise wurden auch auf den horizontalen Strecken ih, yz, kl, no die Zwischenpunkte gefunden. Man nehme z. B. ih aus Fig. 64 in den Zirkel, beschreibe damit aus S in Fig. 65 den Bogen hi, verbinde h, i durch eine Gerade und trage die zwischen h, i in Fig. 65 liegenden Theile mittels des Papierstreifens wieder zwischen hi in Fig. 64 ein u. s. w.

Darstellung weiterer architektonischer Details.

Tafel XXXVIII. Figur I—IV.

§ 201. Fig. I zeigt eine verzierte karniesartige Rundform, welche etwa als Fragment eines Kandelabers oder dgl. betrachtet werden kann. Die Ausführung ist aus der Zeichnung ersichtlich. In Fig. I^a ist der äussere Theil der Schnittfigur nebenan dargestellt, nach welcher eine durch die Achse (m, $m'm''$) gelegte und zur verticalen Tafel parallele Ebene den Körper durchschneidet.

§ 202. In Fig. II ist ein durch gewundene Linien verzierter, pinienförmiger Knopf dargestellt, dessen Umriss in der Verticalprojection hier zum grössten Theil aus Kreisbögen besteht, deren Mittelpunkte I, II und I', II' sind.*) Die Hilfspunkte der gewundenen Linien liegen in den Schnittpunkten der Meridiane mit den durch (0, 1, 2, 3, 4 . . ., $0'$, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ . . .) gehenden Parallelkreisen, und die Abstände dieser Parallelkreise auf der Oberfläche des Knopfes wurden durch Eintheilung des Umrisses in die gleichen Theile $0'1'$, $1'2'$, $2'3'$ . . . bestimmt. Die Hilfspunkte für die Meridiane, welche auf der durch Schuppen verzierten Hohlkehle liegen, konnten, nachdem einmal ein erster horizontaler Kreis (AB, $A'B'$) eingetheilt war, auf den Projectionen $C'n'D'$ und $Ep'F$ der Hilfskreise mittels der Proportionalwinkel aSb und aSc (Fig. II^a) gefunden werden. Man mache z. B. in Fig. II^a Sa gleich $m'A'$ oder $m'B'$, beschreibe mit dieser Grösse aus S einen Bogen ab, trage auf diesen Bogen $C'n'$ oder nD' als Sehne in ab auf und ziehe Sb. Zeichnet man nun mit den Halbmessern gleich den Abständen der einzelnen Theilpunkte von m' in Fig. II^a Bögen aus S und trägt die Entfernungen der auf den beiden Schenkeln Sa, Sb liegenden Schnittpunkte dieser Bögen in entsprechender Ordnung von n' in Fig. II nach rechts und links an, so erhält man hierdurch auf $C'D'$ die verlangten Hilfspunkte, durch welche die Meridiane gehen. In gleicher Weise wurde auch EF getheilt, indem man Ep' oder $p'F$ von a in Fig. II^a nach c als Sehne aufgetragen und S mit c durch eine Gerade verbunden hat. Die zwischen den Schenkeln aS, cS liegenden Entfernungen der Bogenschnittpunkte, d. i. die betr. Bogensehnen, von p' nach rechts und links angetragen, ergeben die Theilpunkte auf der Kreisprojection EF. Mittels der Fig. II^a wurde somit $C'D'$ und EF in demselben Verhältniss getheilt wie $A'B'$ (vergl. § 40, Fig. III und III^b, Tafel III).

Andere Constructionsmethoden, nach welchen man die Theilung gleichfalls erhalten hätte, sind schon früher erwähnt worden.

§ 203. In Fig. III ist ein Bandgeflecht auf cylindrischer Fläche dargestellt. Die Eintheilung wurde zuerst im Grundrisse bestimmt, sonach im Aufrisse $m''a''$, $m''b''$ und $m''c''$, $m''d''$ gleich ae, af und ac, ad des Grundrisses gemacht u. s. w.

§ 204. Fig. IV ist ein durch Band und Blätter verzierter Wulst oder Rundstab. Die Projectionen des um den Wulst herumgewundenen Bandes wurden nach dem bereits in § 183, Fig. IV, Tafel XXXI, erwähnten Verfahren gefunden. Die Curve ($1\,2\,3\,4\,5 \ldots 1'\,2'\,3'\,4'\,5' \ldots$) ist die Mittellinie des Bandes, dessen Breite von dieser Mittellinie aus, und zwar in der Horizontalprojection zuerst bestimmt wurde.

Um die Blätter zeichnen zu können, wurde zunächst ein Netz von Linien auf der Oberfläche des Wulstes bestimmt, welches zum Theil aus gewundenen Hilfslinien, zum Theil aus Parallelkreisen in gleichen Abständen besteht. In Fig. 66 soll die Art der in Fig. IV gewählten Eintheilung mit Hinweglassung des Bandes genauer erörtert werden. Man theile zuerst, nachdem die beiden Projectionen des Rundstabes gegeben sind, in der Horizontalprojection den Viertelskreis $3c$ in vier gleiche Theile, einen jeden solchen Bogentheil, wie $3I$, III . . ., in acht gleiche Theile und ziehe aus jedem dieser Theilpunkte Gerade nach m, welche nun als die Horizontalprojectionen ebenso vieler Meridiane zu betrachten sind; ferner theile man im Aufrisse den Halbkreis $a'e'$ in vier gleiche Theile und lege durch diese Theilpunkte a', b', c', d' die Parallelkreise, deren Projectionen ($a1$, $a'1'$), ($b2$, $b'2'$), ($c3$, $c'3'$) . . . sind.*) Verbindet man nunmehr im Grundrisse etwa von f angefangen die Schnittpunkte der bis jetzt erwähnten Meridiane und Parallelkreise in ihrer Reihenfolge von links nach rechts und von unten nach oben, wie z. B. f, g, h, — $iklno$, — $pqrst$ . . ., und bestimmt deren Verticalprojectionen f', g', h', — i', k', l', n', o',

*) Der untere gegen den kleinen Wulst zu liegende Theil des Umrisses wurde hier aus freier Hand an die Kreisbögen anschliessend gezeichnet.

*) Der besseren Unterscheidung halber wurden diese Parallelkreise in Fig. 66 durch fein ausgezogene Linien, die übrigen, später zu zeichnenden durch punktirte Linien dargestellt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

— p', q', r', s', t' u. s. w., welche auf den durch (a, a'), (b, b'), (c, c') ... gehenden Parallelkreisen liegen, so sind diese die verlangten gewundenen Hilfslinien, zwischen welchen die Blätter der Reihe nach liegen. Um ferner Hilfslinien für die Blätterbreiten zu erhalten, theile man nachträglich auch noch die zwischen $(a\,a')$, $(b\,b')$, (b, b'), (c, c') . . . liegenden Zonen oder Streifen etwa in drei gleiche Theile*) und lege durch diese Theilpunkte gleichfalls Parallelkreise, so ist damit das Linienschema

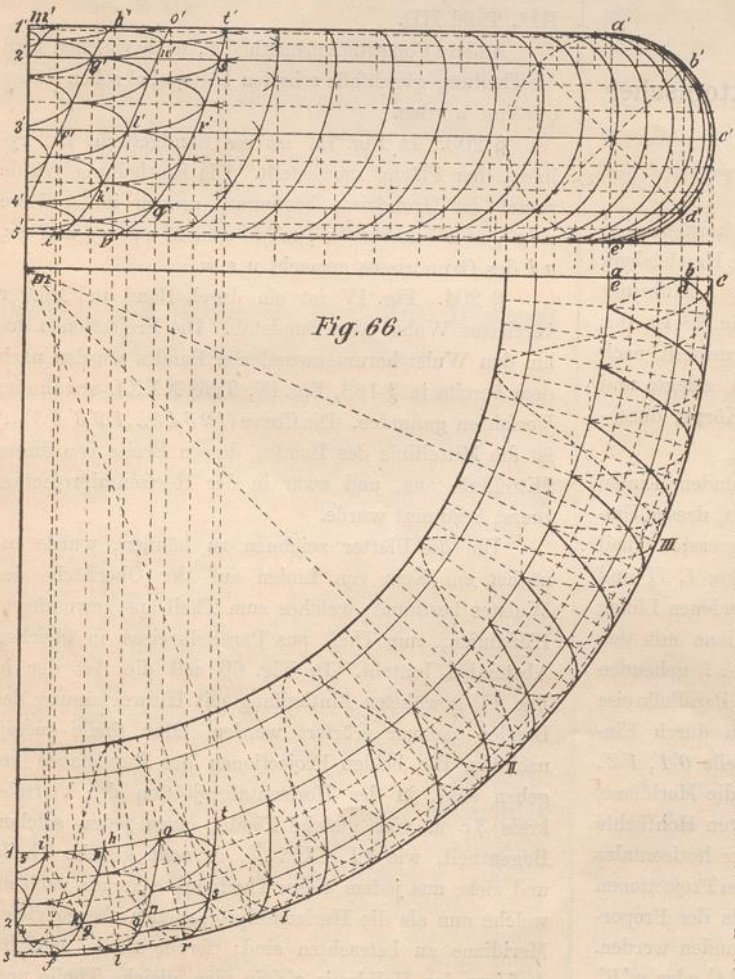


Fig. 66.

oder Netz, in welches die Blätter eingezeichnet werden, vollendet. Aus dem soeben Gesagten erhellt auch, dass die Blätter in der Nähe des Kreises $(a\,1,\ a'\,1')$ und $(e\,5,\ e'\,5')$ kürzer als aussen in der Nähe des Kreises $(c\,3,\ c'\,3')$ sind, sowie dass zu beiden Seiten des nachträglich darüber gelegten gleichbreiten Bandes noch Theile der darunterliegenden Blätterreihen sichtbar werden, und zwar umsomehr, je näher die Blätter dem Kreise $(c\,3,\ c'\,3')$ liegen.

*) Statt drei hätte man ebenso gut, falls die Blätter schmäler oder breiter sein sollten, mehr oder weniger Theile annehmen können.

Darstellung wulstförmiger Ausladungen an verschiedenen Körpern.

Tafel XXXIX. Figur I—III.

§ 205. Fig. I zeigt eine durch Wulste etc. decorirte Gefässform. Hierbei bestimme man zunächst durch Eintheilung des Grundrisses die Anzahl, wie auch die grösste Ausladung der Wulste, und zeichne im Aufrisse den Längendurchschnitt $(a'\,b'\,c'\,d'\,g'\,f'\,e',\ a\,b\,c\,d\,g\,f\,e)$ eines solchen; dieser Durchschnitt, bezw. die normale Ausladung oder Dicke nimmt nach unten in demselben Verhältniss wie dessen Breite ab. Man findet daher, wenn die Umrisslinie $a'\,b'\,c'\,d'$ . . . des Körpers, an welchem die Wulste anliegen, gegeben ist, die zweite Linie $a'\,e'\,f'\,g'$ hinlänglich genau, indem man eine zuerst angenommene grösste Ausladung $(b\,e,\ b'\,e')$ im Grundrisse etwa von a nach e'' trägt, und aus e'' nach M zieht; $a\,M$, $e''\,M$ bildet nun die Scala für die abnehmende Dicke der Wulste. Man ziehe nun in einem beliebig gewählten Punkte (c, c') eine Normale zur Curve $b'\,c'\,d'$, sowie aus c' eine Senkrechte herab, und trage den zwischen der Scala liegenden Abschnitt $c\,f''$ von c' aus in $c'\,f'$ an, ebenso mache man $d'\,g'$ gleich $d\,g''$ u. s. w., und verbinde $a'\,e'\,f'\,g'$ durch eine Curve, deren Verlängerung nach unten gegen ein cylindrisches Plättchen aufstosst. Denkt man sich nun den Körper nebst den Wulsten von Hilfsflächen*) durchschnitten, und die hierdurch erzeugten Schnittfiguren in beiden Projectionen eingezeichnet, so bilden die Curven, welche die Schnitte berühren, die Umrisse der Wulste. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung ersichtlich.

§ 206. In Fig. II ist die Darstellung sogenannter Buckel auf einer karniesförmigen Rotationsfläche veranschaulicht. Die constructive Ausführung ist ähnlich wie bei Fig. I, indem man auch hier zuerst durch entsprechende Eintheilung des Grundrisses die Anzahl der Buckeln, sodann den mittleren Längendurchschnitt $(a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'\,h'\,i',\ a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i)$ eines solchen seiner

*) Die durch $b'\,e'$ etc. gezeichnete Gerade $b'\,e'\,1'$ betrachte man als Verticalprojection einer horizontalen Hilfsebene, welche die Wulste nach Bögen durchschneidet, deren Horizontalprojectionen $e\,h$, $h\,i\,k$, $k\,l\,m$ . . . sind. Die nach aufwärts bis zur Körperachse verlängerte Gerade $f'\,c'\,S'$ betrachte man als Erzeugende einer kegelförmigen Hilfsfläche, welche die Wulste nach Bögen durchschneidet, deren Projectionen $(p\,q\,r,\ p'\,q'\,r')$ . . . sind u. s. w.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Form nach, ebenso die normalen Durchschnitte, deren Lage zuerst im Aufrisse durch die Geraden $b'h'$, $c'g'$, $d'f'$ . . . angenommen wurde, auch im Grundriss bestimmte und in ihren verschiedenen Lagen wiederholt in beiden Projectionen einzeichnete. Mit Hilfe dieser Schnitte wurden sodann die Umrisse der einzelnen Buckeln gezeichnet. Derartige Formen kommen oft bei getriebenen Gefässen, spätgothischen Pocalen u. dgl. vor.

§ 207. Fig. III zeigt die Construction von Wulsten oder sogenannten Pfeifen an einem Truhenbrett. Die Ausladungen stossen oben gegen eine schräge, unten gegen eine senkrechte Fläche an. Die durch (a, a'), (b, b') und (c, c') angenommenen horizontalen Hilfsebenen schneiden die Pfeifen nach ähnlichen Schnittfiguren, deren Horizontalprojectionen Bögen, wie $q\,r\,s$, $t\,u\,v$, $w\,x\,y$ . . . sind. Man bestimme zunächst durch die Curve $(a'\,b'\,c', a\,b\,c)$ etc. die Körperform, an welcher die Pfeifen anliegen sollen, sowie die grösste Ausladung derselben bei $(a'\,d', a\,d)$, ziehe aus d' die kleine Senkrechte $d'\,0'$, ferner aus $0'$ eine Wagrechte, und theile letztere, wie auch deren Grundriss entsprechend ein.*) Nun zeichne man zuerst die Horizontalprojection der Pfeifen, deren anliegende Kanten hier als Gerade erscheinen, welche einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt S haben; aus dieser Projection ergibt sich sodann die nach unten zu abnehmende Dicke, und um dieselbe im Aufriss bei $a'\,b'\,c'$ zu erhalten, trage man die angenommene grösste Ausladung $a'\,d'$ nach $i\,n$, ziehe aus i und n Gerade nach S, ferner aus k und l parallel zu $i\,n$, und mache die horizontalen Abstände der Punkte e' und f' von der Kernlinie $a'\,b'\,c'$, d. h. $b'\,e'$, $c'\,f'$ gleich den in der Scala liegenden Abschnitten $k\,o$, $l\,p$ etc. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung zu ersehen.

Darstellung von Rundbögen, und Eintheilung eines kuppelförmigen Nischengewölbes in Meridiane.

Tafel XL. Figur I—III.

§ 208. Fig. I zeigt einen Rundbogen in schräger Stellung zur verticalen Tafel. Die Verticalprojection des Bogens mit den darin angedeuteten Steinfugen wurde in folgender Weise ausgeführt:

Man bestimme etwa zuerst $a'\,M'\,b'$ als den verkürzten Durchmesser und $M'\,c'$ als den unverkürzten Halbmesser des Rundbogens $a'\,c'\,b'$. Um nun direct die Hilfspunkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ . . . $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ . . . sowohl für den Bogen, als auch gleichzeitig für die Steinfugen zu erhalten, beschreibe man aus M' mit dem Radius $M'\,c'$ einen Viertelskreis $c'\,b''$, betrachte diesen als den zur verticalen Projectionstafel parallel gedrehten Viertelsbogen $c'\,b'$ und bestimme auf $c'\,b''$ die geometrische Theilung $c', 1, 2, 3, 4$ . . . der Steinfugen, ziehe aus 1, 2, 3, 4 . . . die Wagrechten vorerst unbestimmt lang, sodann zeichne man in Fig. I^a eine Strecke $S\,a$ gleich $M'\,c'$ in Fig. I, beschreibe mit dieser Grösse als Radius aus S einen Bogen, trage den verkürzten Halbmesser $M'\,a'$ oder $M'\,b'$ auf diesen als Sehne von a nach b, und verbinde S mit b durch eine Gerade. Nun nehme man die Strecken $I1$, $II2$, $III3$ . . . aus Fig. I in den Zirkel, beschreibe damit aus S der Fig. I^a Bögen, trage $n\,o$, $l\,m$, $i\,k$ . . . als Sehnen in Fig. I von I nach $1'$ und $1''$, von II nach $2'$ und $2''$, von III nach $3'$ und $3''$ . . . an und verbinde die Punkte a', $6'$, $5'$, $4'$, $3'$, $2'$, $1'$, c', $1''$ . . . durch eine stetige Curve (Ellipse), ziehe ferner aus $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ . . . Gerade nach M', welche nunmehr die Richtungen der Steinfugen angeben. Um Hilfspunkte für eine zweite Kreisprojection $B'\,f\,g'\,f'\,C'$ zu erhalten, ziehe man in den ersten Kreis, z. B. $c'\,e$, $e\,a'$, und aus einem auf $M'\,c'$ beliebig gewählten Punkte g' parallel mit $c'\,e$ die Gerade $g'\,f$, aus Punkt f parallel mit $e\,a'$ die Gerade $f\,B$ u. s. w. (vgl. § 135, Fig. III, Taf. XVIII).

Ein weiterer Bogen $F'\,d'$ ist congruent mit $C'\,f'\,g'$ . . ., so dass also die auf der Laibung oder innern Bogenfläche liegenden Steinfugen sich in gleicher Länge darstellen.

Sollte nun nachträglich die Lage bestimmt werden, welche der Bogen zu einer verticalen Projectionsebene einnimmt, so wähle man hierzu auf $c'\,M'$ oder deren Verlängerungen einen beliebigen Punkt M, betrachte diesen als die Horizontalprojection von M, errichte ferner in b' eine Senkrechte, nehme $M'\,c'$, d. i. den unverkürzten Bogenhalbmesser in den Zirkel, und schneide aus M durch einen kleinen Bogen den Punkt b auf der Senkrechten aus b' ab; $M\,b$ ist somit gleich $M'\,c'$, also gleich der wahren Grösse des Bogenhalbmessers, und eine Gerade $b\,c\,a$*) ist als die Horizontalprojection des Bogenkreises $a'\,c'\,b'$, und die zu $a\,c\,b$ rechtwinklige Gerade $c\,d$ ist als die wahre Grösse der Laibung oder Bogentiefe zu betrachten. $A\,B$, $C\,D\,E\,F$ sind die horizontalen Durchschnitte der Bogenpfeiler, wobei die Horizontalprojection $a\,c\,b$ des Bogenkreises, sowie $c\,d$ bestimmend für die Lage derselben war, indem $A\,B$, $C\,D$, $E\,F$ parallel mit $a\,c\,b$, und $C\,F$, $D\,E$ . . . parallel mit $c\,d$ liegen müssen, sonst aber innerhalb der durch A, B und C, D, E, F gehenden Senkrechten beliebig, d. i. höher oder tiefer eingezeichnet werden konnten.**)

*) Hier wurden dreizehn gleiche Theile angenommen und die Breiten der Wulste gleich zwei Theilen, die Breite der Zwischenräume gleich einem solchen Theile bestimmt; selbstverständlich kann dieses Theilverhältniss nach Belieben geändert werden.

*) c fällt hier mit M zusammen, da c senkrecht über M liegt.

**) Wie aus Fig. I ersichtlich, ist hier die Horizontalprojection in die Verticalprojection eingezeichnet, ohne dass eine Projectionsachse hier weiter angegeben ist. Dieser Fall kommt in der Praxis, z. B. bei Werkzeich-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Statt die Verkürzung des Bogens in der Verticalprojection zuerst anzunehmen, hätte man natürlich auch umgekehrt zuerst die Horizontalprojection, d. i. die Lage des Bogens zur verticalen Projectionsebene, sowie die Pfeilerdurchschnitte u. s. w. bestimmen können; an der Ausführung der Zeichnung würde durch letztere Annahme nichts geändert.

§ 209. Fig. II zeigt die Darstellung eines verkürzten Rundbogens mit Angabe eines einfachen Gesimsprofiles in radial verschiedenen Lagen. Sind einmal die verschiedenen Projectionen eines Profiles wie in Fig. II gezeichnet, so entsteht durch Verbindung der entsprechenden gleichen Eckpunkte das Rundgesimse.

Angenommen, es wäre aMb als horizontal liegender verkürzter Bogendurchmesser oder als die sog. Spannweite, Mc als unverkürzter Bogenhalbmesser oder als die Bogenhöhe bestimmt, und es sollen die Gesimsprofile in gleichen Entfernungen von einander gezeichnet werden, so besteht die erste Aufgabe darin, die in Wirklichkeit gleich entfernt liegenden Punkte a, d, e, c, f ... direct zu bestimmen. Dieses könnte nun nach der in Fig. I erwähnten Methode oder auch auf folgende Weise geschehen:

Man beschreibe um ab als Durchmesser einen Halbkreis, etwa nach oben, theile denselben in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. sechs, ziehe durch die Theilpunkte 1, 2, 3, 4, 5 Senkrechte zu ab, ferner aus den auf dem Durchmesser ab liegenden Schnittpunkten $1'$, $2'$ dieser Senkrechten parallel mit einer zuerst gezeichneten Geraden ac, so ergeben sich auf Mc die Schnittpunkte $1''$, $2''$, und die Höhe Mc ist hierdurch in demselben Verhältniss getheilt, wie der verkürzte Halbmesser Ma durch die Punkte $1'$, $2'$ getheilt ist; zieht man nun aus $1''$, $2''$ Parallele mit ab, so schneiden letztere auf den durch 1, 2, 4, 5 gezeichneten Senkrechten die Punkte d, e, f, g der verticalen Kreisprojection ab, und aus diesen ziehe man sodann die Geraden dM, $e'M$ ...; ferner errichte man etwa in b eine Senkrechte, schneide darauf mit dem Halbmesser Mc aus M den Punkt b' ab und verbinde M mit b', so kann Mb' wieder als die Horizontalprojection des Viertelsbogens cb betrachtet werden (vgl. Mb in Fig. I). In M wurde sodann eine Rechtwinklige Mh gezeichnet, und auf dieser konnte nunmehr die geometrische Grösse Mh der Gesimsausladung bestimmt werden. Da die Ebene des Gesimsprofiles im Grundrisse Mh sich als eine Gerade darstellt, so denke man sich, um das Profil selbst geometrisch bestimmen zu können, diese Ebene um Mh parallel zur horizontalen Tafel gedreht und darin das Profil A nach seiner wahren Grösse und Form gezeichnet. Ml ist hier also die Höhe, Mh die horizontale Ausladung des Profiles; in der Verticalprojection bleiben die Höhe und die einzelnen Abschnitte ci', ik ... desselben gleich Mi, ik ... des Grundrisses unverkürzt, während die Profilsfläche, weil schief zur verticalen Tafel, sich in dieser ihrer Breite nach in ch' verkürzt. Die Ableitung des Aufrisses $h'ci'k'l'$ der senkrecht stehenden Profilsfläche aus dem Grundrisse ist aus Fig. II unschwer zu ersehen.

Die horizontale Breite oder Ausladung des Profiles bleibt im Aufriss in allen Lagen stets unverändert, so dass z. B. die Grössen fk'', gm'', ei'' ... gleich ch' sind u. s. w. Die Verkürzungen, wie fn, go, bp ... sind jedoch wie ersichtlich ungleich; dieselben, sowie die zwischen den verkürzten Strecken, wie ci', $i'k'$, $k'l'$ ..., liegenden Abschnitte wurden gefunden, indem man zuerst die Sehnen cf, fg, gb ... und die zu diesen Parallelen aus i', k', l' u. s. w. zog. Das Weitere ist aus der Zeichnung zu ersehen.*)

§ 210. In Fig. III ist die obere sphärische Fläche einer Nische in Meridiane getheilt. Ein bestimmtes architektonisches Beispiel der Anwendung zeigt die Muschel in Fig. II, Taf. XLIII, wozu Fig. III dieser Tafel gewissermassen als vorbereitende Aufgabe gelten mag. Die Aufgabe konnte nach drei verschiedenen Constructionsmethoden gelöst werden.

Man betrachte erstens in Fig. III das um ab als grossen Durchmesser gezeichnete halbe Oval aMb als den Grundriss einer in eine Mauer einspringenden oder vertieften Nische**); ferner die Gerade acb als die Horizontalprojection eines Halbkreises, dessen Ebene vorn in der senkrechten Mauerfläche liegt. Diesen Halbkreis denke man sich nun um seinen Durchmesser ab parallel zur horizontalen Tafel in $ac'b$ umgelegt und betrachte diese Umlegung als eine erste Verticalprojection des Halbkreises und dessen Durchmesser ab zugleich als eine Projectionsachse; ferner ziehe man parallel mit ab die Geraden hlo, psv, wxy, betrachte diese ebenfalls als horizontale Projectionen von Halb-

---

nungen sehr oft vor, da die Zeichenfläche nicht immer so gross ist, um Grund- und Aufriss getrennt darzustellen; auch ist es nicht nothwendig, dass man den Grundriss ebenso wie den Aufriss stets vollständig ausführt; derselbe wird vielmehr der Kürze halber oft nur durch wenige Linien angedeutet. So sind z. B. auch in Fig. I die Geraden acb und cd wie leicht ersichtlich, nicht der vollendete Grundriss des Rundbogens, sondern acb ist lediglich der Grundriss des ersten Kreises, dessen Aufriss $a'c'b'$ ist, und durch cd gleich CF und DE ist lediglich die wahre Tiefe der cylindrischen Bogenfläche angedeutet.

*) Die durch die Ecken des Profiles gehenden Umrisse des Rundgesimses wurden hier nicht ausgezogen, weil dadurch die Deutlichkeit der bisherigen Constructionen beeinträchtigt würde; dafür sind in Fig. I und II, Tafel XLI zwei Beispiele dieser Art zur Ausführung gebracht.

**) Das halbe Oval wurde hier aus den Kreisbögen ap, pv, vb, deren Mittelpunkte II, I, III sind, zusammengesetzt (siehe Tafel VII).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

kreisen und bestimme ihre ersten Verticalprojectionen in $h'l'o'$, $p's'v'$, $w'x'y'$ der Fig. III^a; theile sodann den Halbkreis $ac'b$ in eine Anzahl gleicher Theile, hier z. B. sechs, und ziehe aus diesen Theilpunkten d', e', c', f', g' Gerade nach M', so sind diese als die ersten Verticalprojectionen der Meridiane und d', i', q' . . ., $e', k', r' \ldots$, $c', l', s' \ldots$, $f', m', t' \ldots$ als die Schnittpunkte derselben mit den Parallelkreisen $h'l'o'$, $p's'v' \ldots$ zu betrachten. Die Grundrisse $diq \ldots ekr \ldots cls$ u. s. w. der betreffenden Meridiane werden gefunden, indem man aus d', i', q', e', k', r' u. s. w. die projicirenden Geraden $d'd$, $i'i$, $q'q$, $e'e$, $k'k \ldots$ zieht, deren Schnittpunkte mit den betreffenden Horizontalprojectionen der Parallelkreise markirt und die so erhaltenen Punkte in entsprechender Ordnung durch Curven verbindet. Sind auf diese Weise die Horizontalprojectionen $diqM$, $ekrM$ u. s. w. der Meridiane gefunden, so wird die zweite Verticalprojection über $a''M''b''$*) dadurch gefunden, dass man über den Punkten $d, i, q \ldots e, k, r \ldots c, l, s \ldots$ die projicirenden Geraden errichtet und auf diesen die Abstände, welche die betreffenden Punkte in der ersten Verticalprojection Fig. III^a von der zugleich als Projectionsachse gedachten Geraden ab haben, in entsprechender Ordnung von der Geraden $a''b''$ aus nach aufwärts anträgt. So sind z. B. die Höhenabstände der Punkte d'' und g'' von der Geraden $a''b''$ also $4d''$ und $7g''$ gleich den Strecken dd' und gg', ebenso die Höhen $5e''$, $6f''$ gleich den Strecken ee' und ff', $8i''$, $9n''$ gleich den Strecken $8'i''$ und $9'n'$ in Fig. III^a u. s. w.

Die Verticalprojection der Meridiane in Fig. III ist also mit Hilfe des Grundrisses und der ersten Verticalprojection Fig. III^a bestimmt worden.

§ 211. Ein zweites Verfahren, um die Meridiane in Fig. III zu erhalten, wäre folgendes:

Man zeichne wie zuvor den Grundriss aMb, bestimme in demselben die Geraden acb, hlo, psv, wxy als die Horizontalprojectionen von Halbkreisen, ziehe den sich als Gerade darstellenden Meridian cM, zeichne nebenan in Fig. III^b über der Verlängerung von $b''M''a''$ aus einem Punkte M''' mit den aus dem Grundrisse entnommenen Halbmessern ca, lh, sp, xw Viertelskreise, theile den äussern Viertelskreis in drei gleiche Theile und ziehe aus den Theilpunkten d''', e''', c''' Gerade nach M''', so kann nun Fig. III^b als ein Aufriss in gerader Ansicht betrachtet werden, in welchem die in parallelen Ebenen liegenden Hilfskreise in wahrer Grösse, d. i. nach Kreisen, und die Meridiane als Gerade sich darstellen (vgl. Fig. 67).

Nun ziehe man aus den Punkten d''', e''', c''', i''', k''', l''' . . . horizontale Gerade, nehme die Entfernungen $1''d'''$, $3''i'''$, $5''q''' \ldots$ aus Fig. III^b in den Zirkel und trage sie von c nach d und g, von l nach i und n, von s nach q und u . . . in den Grundriss über, ebenso sind im Grundrisse die Entfernungen ce, cf, lk, $lm \ldots$ gleich den Strecken $2''e'''$, $4''k''' \ldots$ in Fig. III^b u. s. w. Die Horizontalprojectionen der Meridianpunkte sind also mittels der Hilfsprojection Fig. III^b bestimmt worden.

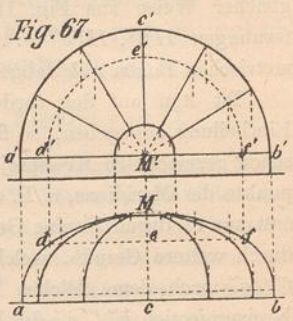


Fig. 67.

Zieht man nun aus den Punkten d, e, c, f, g, b, h, i, k, l, m . . ., sowie aus den gleichbenannten Punkten der Hilfsprojection Fig. III^b**) die Projicirenden, so ergeben sich hierdurch die Schnittpunkte d'', e'', c'', f'', g'', b'', h'', i'', k'', l'', $m'' \ldots$ der Meridiane mit den Parallelkreisen in bekannter Weise, z. B. die Senkrechten aus d und g, und eine Wagrechte aus d''' schneiden sich in den Punkten d'' und g'', die Senkrechten aus i und n und eine Wagrechte aus i''' in i'' und n'' u. s. w. Durch die so gefundenen Hilfspunkte $d'', i'', q'' \ldots$, $e'', k'', r'' \ldots$, c'', l'', s'' u. s. w. zeichne man nun die Meridiane.**)

§ 212. Eine dritte, mehr praktische Methode für die Bestimmung der Meridiane ist folgende:

Man zeichne wie bisher zuerst den Grundriss aMb mit den horizontalen Projectionen acb, hlo, psv, wxy der Parallelkreise, ziehe die Gerade cM, welche die Kreisprojectionen acb, $hlo \ldots$ in den Punkten c, l, s, x schneidet, errichte über c, l, s, x, M Senkrechte und mache die Entfernungen der Punkte c'', l'', s'', $x'' \ldots$ von der Geraden $a''M''b''$ gleich den Halbmessern ca, lh, sp, xw, bestimme sodann die Verticalprojectionen der Punkte a, h, p, w, M, y . . . (welche sämmtlich auf der Geraden $a''M''b''$, als der Verticalprojection des Schnittes aMb, liegen) in a'', h'', p'', w'', M'', $y'' \ldots$, so sind damit (a'', c'', b''), (h'', l'', o''), (p'', s'', v''), (w'', x'', y'') Scheitelpunkte der als Ellipsen sich projicirenden Parallelkreise, und dieselben können nun nach einer der schon früher erwähnten Methoden, etwa mittels des Papierstreifens, construirt werden. Ebenso kann ein durch die Punkte c'', l'', s'', x'', M'' gehender Meridian ohne Weiteres durch die schon vorhandenen Punkte gezeichnet werden. Um auf dem vordersten und grössten Parallelkreise $a'c''b'$ die Punkte d'', e'',

*) Die Horizontale $a''M''b''$ ist eine Verticalprojection von aMb, wobei man das Schnittprofil oder den Grundriss $(aMb, a''M''b'')$ sich etwa in der horizontalen Projectionstafel liegend und somit $a''M''b''$ zugleich als Projectionsachse denken kann.

*) In Fig. III$_b$ ist nur die linke Hälfte des Aufrisses gezeichnet, wesshalb die rechts liegenden Punkte nicht angegeben werden konnten. Das Zeichnen der rechten Seite in Fig. III^b war desshalb nicht nöthig, weil bei der symmetrischen Theilung in beiden Hälften immer je zwei Punkte, wie z. B. e'' und f'', k'' und $m'' \ldots$ in gleicher Höhe liegen.

**) Die Meridiane sind sowohl in Wirklichkeit, als auch in ihren Projectionen elliptische Bögen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

f'', g'' genau zu erhalten, verfahre man etwa wie bei Fig. I dieser Tafel, indem man den entsprechend eingetheilten Viertelskreis $a'''c'''$ in Fig. III^b als Hilfsfigur benützt, also aus d''', e''' derselben Horizontale zieht und die Entfernungen der Punkte d'', e'', f'', g'' von dem in Fig. III durch c'' gehenden senkrechten Halbmesser mittels eines Proportionalwinkels*) in gleicher Weise aus Fig. III ableitet, wie die Entfernungen $II\,2''$, $III\,3''$ ... in Fig. I aus dem geometrischen Bogen $c'\,b''$ abgeleitet wurden.

Ist nun auf der vordersten Kreisprojection die Eintheilung angegeben, so findet man auf den übrigen schon gezeichneten Kreisprojectionen die weitern Hilfspunkte der Meridiane, z. B. m'', n'' ..., indem man zuerst aus c'' durch l'' eine Gerade bis S zieht, sodann durch weitere Gerade, welche man aus den Punkten f'', g'' nach dem gleichen Punkte S zieht, auf der Kreisprojection $h''\,l''\,o''$ die Punkte m'', n'' abschneidet. Zieht man ferner durch m'' und n'' Wagrechte nach links und trägt die Entfernungen, welche m'' und n'' von der durch l'' gehenden Senkrechten haben, von letzterer nach links an, so erhält man damit die in gleicher Höhe mit m'', n'' liegenden Punkte k'' und i''. In derselben Weise zeichne man, um die Punkte q'', r'', t'', u'' zu erhalten, aus c'' durch s'' eine Gerade $c''s''S'$, ziehe aus den Punkten f'', g'' gleichfalls Gerade nach S', so schneiden diese auf der Kreisprojection $p''\,s''\,v''$ die Punkte t'', u'' ab, und die Entfernungen der Punkte t'' und u'' von der durch s'' gehenden Senkrechten können von dieser aus wieder nach links getragen werden, wodurch sich r'' und q'' ergeben haben u. s. w. Die weitere Ausführung ist nach dem bisher Gesagten aus der Zeichnung leicht zu ersehen.

Fassen wir das bisher über diese Aufgabe Gesagte noch kurz zusammen, so war zur Herstellung des Aufrisses Fig. III nach dem ersten Verfahren der vollständige Grundriss und zur Herstellung desselben, sowie des eigentlichen Aufrisses Fig. III die Hilfsprojection Fig. III^a, für das zweite Verfahren der vollständige Grundriss, sowie zum Einzeichnen der Meridiane in denselben, wie auch in den Aufriss, die Hilfsprojection Fig. III^b nöthig, während zum Zeichnen der gleichen Aufgabe nach dem dritten abgekürzten Verfahren von der Horizontalprojection nur der Umriss $a\,M\,b$, sowie die in denselben eingezeichneten Kreisprojectionen $a\,c\,b$, $h\,l\,o$, $p\,s\,v$... und der eingetheilte Viertelskreis $a'''\,d'''\,e'''\,c'''$ Fig. III^b nothwendig waren. Jede einzelne der in diesem Beispiele behandelten Constructionsmethoden genügt, um die anfänglich gestellte Aufgabe zu lösen.**)

*) Derselbe ist hier nicht gezeichnet worden.

**) Es dürfte sich für den Lernenden empfehlen, die Aufgabe dreimal nach je einer der angegebenen drei Constructionsmethoden auszuführen. In Tafel XL sind dieselben, um das wiederholte Zeichnen desselben Beispieles zu vermeiden, zusammengezogen worden.

Darstellung kreisrunder Bogengesimse.

Tafel XLI. Figur I und II.

§ 213. In Fig. I sei die Verticalprojection $a'\,M'\,b'$ als der verkürzte Durchmesser, M' als der Mittelpunkt und $M'\,c'$ als der senkrecht stehende, mithin unverkürzte Halbmesser eines grössten, an der Mauerfläche anliegenden Bogenhalbkreises, d. i. einer Gesimskante, zuerst gegeben. Um die Hilfspunkte $1', 2', 3', 4'$ ... $1'', 2'', 3'', 4''$ ... für die Kreisprojection, wie auch für die Schnittprofile eines Rundgesimses zu erhalten, zeichne man aus M' mit dem Radius $M'c'$ einen Viertelsbogen $c'\,b''$, welcher nunmehr als die um den senkrechten Halbmesser $M\,c'$ zur verticalen Tafel parallel gedrehte Bogenhälfte $c'\,b'$ betrachtet werden kann. Diesen Viertelskreis theile man sodann in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in sechs, ziehe aus den Theilpunkten $1, 2, 3, 4, 5$ die wagrechten Projicirenden, bestimme in diesen die Projectionen $1', 1'', 2', 2'', 3', 3''$ ... mittels des Proportionalwinkels Fig. I^b (siehe § 208, Fig. I, Taf. XL) und ziehe aus den Punkten $1', 2', 3'$ ... $1'', 2'', 3''$ ... Gerade nach M'. Nun errichte man in b' eine Senkrechte, bis diese den Viertelsbogen $c'\,b''$ in b schneidet und ziehe $M'\,b$, so kann $M'\,b$ wieder als die horizontale Projection des Viertelkreises $c'\,b'$ betrachtet werden (vgl. § 108, Fig. I, Taf. XL).

Auf einer durch M' gehenden rechtwinkligen Geraden zu $M\,b$ ist das Durchschnittsprofil des Rundgesimses in wahrer Grösse angegeben und dessen verkürzte Horizontalausladung $c'\,d'$ mittels der projicirenden Senkrechten aus $c\,d$ bestimmt worden. Die weitere Ausführung ist bereits in Fig. II, Taf. XL, erwähnt. Die radialen Verkürzungen sind hier, wie ersichtlich, aus der zur verticalen Tafel parallel gedachten Projection des Rundgesimses, bezw. aus den Schnittprojectionen $1\,1'''$, $2\,2'''$, $3\,3'''$ ... abgeleitet worden.

In Fig. I^a ist derselbe Bogen in senkrechter Stellung zur verticalen Tafel gezeichnet und von einer zur verticalen Tafel parallelen Ebene in der Mitte durchschnitten. Die Kreise oder Kanten des Rundgesimses stellen sich somit als senkrechte Gerade dar.

Die abgetonten Flächen $A\,B$..., $C\,D\,E$ zeigen die horizontalen Durchschnitte des Bogens unmittelbar über dem Pfeilergesimse, die punktirten Linien $F\,G\,H$ u. s. w. die Horizontalprojectionen der Pfeilergesimse.

Statt, wie bis jetzt erklärt wurde, die Verkürzung $a'\,M'\,b'$ eines horizontalen Kreisdurchmessers vorher zu bestimmen, wird man auch häufig etwa die Hälfte des Rundbogens mit Angabe seiner Profilslagen $1\,1'''$, $2\,2'''$, $3\,3'''$ ... über $M'\,b''$ in gerader Ansicht, sodann die Projection Fig. I^a mit dem in wahrer Grösse sich darstellenden Schnitt entwerfen und erst dann aus beiden die verkürzte Projection Fig. I ableiten, indem man hierbei in der Regel zuerst die Lage des Bogens in der Horizontalprojection, hier z. B. durch

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$M'b$ in Fig. I bestimmt. Durch Fällen der Senkrechten aus b wird sodann die Verkürzung eines Kreishalbmessers Mb' erhalten u. s. w. In der Projection Fig. I^a ist nur die Hälfte der Bogenlaibung oder Bogentiefe, also DM in Fig. I^a gleich Dm in Fig. I gezeichnet worden.

§ 214. Die Aufgabe in Fig. II ist gleich der in Fig. II, Taf. XL, indem hier zunächst wieder $a'c'b'$ als die Verticalprojection eines grössten an der Mauer anliegenden Kreises, d. i. einer Gesimskante nebst den darauf liegenden Hilfspunkten $1'', 1''', 2'', 2'''$, ebenso wie dort angenommen wurde.

Fig. II^a zeigt das Gesimsprofil in wahrer Grösse. Durch Uebertragen der Breite cd und der darin enthaltenen kleineren Abschnitte nach cd in Fig. I, sowie durch Errichten der projicirenden Senkrechten aus c, d und den dazwischen liegenden Theilpunkten ergeben sich in der Verticalprojection die verkürzten Abstände der einzelnen Profilsecken von der Mauerfläche. Trägt man ferner die Höhe ce des Profiles Fig. I^a nebst den dazwischen liegenden Höhenabschnitten nach $c'e'$ in Fig. I über und zieht aus den auf $c'e'$ liegenden Punkten horizontale Gerade, so ergeben sich durch letztere auf den vorher gezeichneten Projicirenden aus $c, d \ldots$ die Eckpunkte des Profiles.

Die Construction der verschiedenen radialen Lagen, welche die Schnittprofile hier einnehmen, ist bereits in Fig. II, Taf. XL erörtert; afg, hbi sind die in wahrer Grösse in den Aufriss eingezeichneten Gesimsschnitte, bezw. Grundrisse, wobei die Geraden ag, bi etc. derselben mit der Geraden cb, d. i. dem Grundrisse des Bogens $c'b'$ parallel zu zeichnen sind. Ferner sind af, bh, und ebenso ik als wahre Bogentiefe parallel mit $M'd$, d. i. rechtwinklig zu ag oder bi zu zeichnen.

Darstellung eines durchbrochenen Giebels.

Tafel XLII. Figur I und II.

§ 215. In Fig. I sind Grund- und Aufriss zur Hälfte in gerader Ansicht, d. h. in paralleler Stellung zur verticalen Tafel, und der Grundriss hierbei so gezeichnet worden, wie Fig. I von unten gesehen sich darstellt.

Fig. II zeigt denselben Giebel bei schräger Stellung zur verticalen Projectionstafel. Man bringe also den Grundriss Fig. I in die schräge Lage der Fig. II, errichte aus den entsprechenden Punkten $A, B, G, J \ldots$ die Senkrechten, sowie aus den Punkten $A', B', G', J' \ldots$ des Aufrisses der Fig. I die wagrechten Projicirenden u. s. w., so ergibt sich der Aufriss von Fig. II. Die links liegende Hälfte $ABCD$ des Grundrisses in Fig. II stellt eine Daruntersicht, die rechts liegende Hälfte $CEFD$ eine Ansicht von oben, oder eine Daraufsicht dar. Mittels der aus dem Durchschnitt bei $a'b'$ in Fig. I abgeleiteten Schnitte bei $a''b''$ und $a'''b'''$ in Fig. II ergaben sich Hilfspunkte für das Zeichnen der Bogenkanten $G'b''B, H'b'''E'$ u. s. w.

Darstellung eines ausgezackten Rundbogens und einer Nische mit muschelförmigem Gewölbeabschluss.

Tafel XLIII. Figur I und II.

§ 216. Fig. I zeigt einen durch kleinere Bögen ausgezackten Rundbogen. Die Verkürzung AB des horizontalen Durchmessers eines äussern Bogenkreises ABC wurde wie bei Fig. I, Taf. XL beliebig angenommen, und dessen Hälfte CB in CB' parallel zur verticalen Projectionstafel gedreht. Innerhalb des geometrischen Viertelskreises CB' wurden sodann die kleinern Bogenhalbkreise, d. i. die Form der Zacken, wie z. B. $cdefg \ldots$, geometrisch angegeben.

Man theile zunächst den Viertelskreis CB' z. B. in acht gleiche Theile, trage von den Theilpunkten $1\,3\,5 \ldots$ nach beiden Seiten die gleichen Grössen $1i$, $1k$, $3l$, $3m \ldots$ an, ziehe aus den Punkten $1, 2, 3, 4 \ldots i, k, l, m \ldots$ Gerade nach M und zeichne die Kreisbögen $erdsc \ldots$ berührend in die Sectoren wie $Mpq \ldots$ ein. Zieht man ferner Gerade wie pC', $qC' \ldots$ und durch deren Schnittpunkte mit den Zackenbögen, wie z. B. rs, aus M einen weiteren Kreisbogen srt, so sind damit die Scheitelpunkte G, t, h der verkürzten Hilfskreise uGv, wtx, yhz bestimmt. Die Projectionen $i'M$, $i''M$, $k'M, k''M$, $2'M$, $2''M \ldots$ der radialen Geraden, sowie die Bögen uGv, wtx, yhz sind in bekannter Weise gefunden worden, wobei Fig. I^a als Winkelmassstab zum Auftragen der Grössen wie $IV4'$, $IV4''$, Nn', Nn'', Oo', $Oo'' \ldots$ benützt wurde (vgl. § 198, Fig. III^a, Taf. XXXVI). Zeichnet man schliesslich innerhalb der verkürzten Hilfskreise die Geraden, wie z. B. $p'C''$, $q'C'$, $p''C'''$, $q''C'' \ldots$, so schneiden letztere den Hilfskreis wtx in Punkten, wie $r', s', r'', s'' \ldots$; durch die wie $e', r', d', s', c' \ldots$ liegenden Punkte können die verkürzten Halbkreise der Zacken gezeichnet werden. Die Laibung der Bögen erscheint überall gleich, d. h. Kanten wie $c''c'''$, $e''e'''$, $f''f''' \ldots$ haben gleiche Länge. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung ersichtlich.

§ 217. Die Construction der Muschel in Fig. II wurde nach der in § 212, Fig. III, Taf. XL angegebenen Methode ausgeführt.

Die Muschel ist eine ziemlich flache, und die in M' zusammenlaufenden Rippen oder Gräte derselben liegen in einer Gewölbfläche, deren Grundriss $IdfM$ elliptisch ist; eine zweite elliptische Curve aO deutet den Kern oder die Mauer und aI die hohlkehlenartigen Vertiefungen auf der Vorderseite, MO die gleichen Vertiefungen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

rückwärts und zwar an der Stelle an, wo die Rippen auf der cylindrischen Nabe aufstossen.*)

Die ersten Bögen $a' b' c'$, $I' II' III'$, sowie die Auszackung der Muschel auf der Vorderseite wurden in gleicher Weise wie bei Fig. I bestimmt.

Um Hilfspunkte für die Rippen oder Gräte zu finden, zeichne man die Verticalprojectionen der Parallelkreise, deren Horizontalprojectionen in de, fg... zur Hälfte gegeben wurden, ziehe sodann aus II' durch den Höhenpunkt e' eines ersten Hilfskreises (d. i. durch den Scheitelpunkt e' der Ellipse) eine Gerade, bis sie in S die nach links verlängerte Horizontale $III'\,I'$ schneidet, und ziehe aus den übrigen Eckpunkten der in der vordern senkrechten Kreisfläche $I'\,II'\,III'$ liegenden Rippen ebenfalls Gerade nach S, so schneiden diese auf der Kreisprojection $d'\,e'\,d'$ Punkte, wie z. B. $1'', 2'', 3'', 4''$ ... ab. Da jedoch, insbesondere bei $1'', 2''$ und $3'', 4''$, auf diese Weise schon bei geringer Ungenauigkeit des Bogens $d'\,e'\,d''$ leicht Fehler entstehen können, indem die nach S gehenden Geraden an der betreffenden Stelle keine vollständig sicheren Schnittpunkte ergeben, so ziehe man der Controle halber von $1'$ und $2'$, $3'$ und $4'$ die radialen Geraden nach m, und mit diesen parallel aus dem Mittelpunkte m' der zweiten Kreisprojection $d'\,e'\,d''$ die Geraden $m'\,1''$, $m'\,2''$, $m'\,3''$, $m'\,4''$ ..., so sind die Schnitte der letzteren mit den vorhin aus den vordern Eckpunkten der Rippen nach S gezeichneten Geraden ebenfalls die verlangten Hilfspunkte $1'', 2'', 3'', 4''$ ... In gleicher Weise wurden weitere Hilfspunkte auf der Kreisprojection $f'\,g'\,f''$ gefunden, indem man z. B. aus II' durch g' die Gerade $II'\,g'\,S'$, und aus den übrigen, vorn liegenden Eckpunkten der Rippen nach dem gleichen Punkte S' zog u. s. w. Im Uebrigen siehe § 212, Fig. III, Taf. XL.

Darstellung von Gewölbflächen und deren Eintheilung in Felder etc.

Tafel XLIV. Fig. I und II.

§ 218. Fig. I zeigt die Construction eines Kugel- oder sog. Kappengewölbes, in dessen Seitenbögen Cassetten angegeben sind, und dessen kugelförmige Fläche oben in Felder eingetheilt wurde.

Das in gerader Ansicht dargestellte Gewölbe ist hier durch eine zur verticalen Tafel parallele Ebene in der Mitte durchschnitten und nur dessen rückwärts liegende Hälfte gezeichnet worden. Das Gewölbe entsteht, wenn etwa wie hier, eine halbkugelförmige Fläche durch zwei cylindrische Flächen, oder sog. Tonnengewölbe durchschnitten wird. In Fig. I sind ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$) die Projectionen dieser Kugelfläche.*) Die Hälfte des Grundrisses ist hierbei als von unten nach oben gesehen gezeichnet; die weitere Ausführung dieses Beispieles ist aus Fig. I unschwer zu ersehen.

§ 219. In Fig. II ist ein nach vorn offenes polygonales Kuppelgewölbe dargestellt, dessen Grundform ein halbes reguläres Achteck ist. Das Gewölbe ist somit durch cylindrische, nach oben zu schmäler werdende Flächen, wie z. B. ($c\,III\,f$, $c'\,III'\,f$) u. s. w. begrenzt; ($m\,n\,o\,III$, $m'\,n'\,o'\,III'$), ($i\,k\,l\,III$, $i'\,k'\,l'\,III'$) etc. sind Mittellinien dieser Flächen; deren Eintheilung in bestimmte Felder oder Flächenfiguren wird dadurch bewerkstelligt, dass man zuerst eines dieser Felder abwickelt, d. h. das Netz davon nebenan in Fig. II^a, sodann in demselben das Flächenmuster geometrisch bestimmt und aus dieser Figur die Verticalprojection ableitet. Hierzu kann wieder mit Vortheil der Proportionalwinkel Fig. II^b verwerthet werden (vgl. § 198, Fig. III, Taf. XXXVI und § 200, Fig. III, Taf. XXXVII).

Man trage zunächst, nachdem die Projectionen der Kanten ($c\,d\,e\,III$, $c'\,d'\,e'\,III'$)... und der Mittellinien ($i\,k\,l\,III$, $i'\,k'\,l'\,III'$)... gezeichnet sind, die Länge eines Viertelsbogens z. B. $a'\,I'\,II'\,III'$ auf eine Gerade nebenan in Fig. II^a in $c\,I\,II\,III$ auf**), so dass also $c\,III$ oder $m\,III'$ in Fig. II^a gleich der rectificirten Länge $a'\,III'$ oder $b'\,III'$ in Fig. I ist (siehe § 67 und Bemerkung). Ferner entnehme man aus der Verticalprojection***) der Fig. I die Breiten $m'\,c'$, $m'\,f'$, $n'\,d'$, $n'\,g'$ ... und trage sie von der Mittellinie der Fig. II^a nach links und rechts in $m\,c$, $m\,f$, $n\,d$, $n\,g$... an, so ergibt sich durch Verbindung der Punkte c, d, e, III und f, g, h, III' das Netz einer cylindrischen Gewölbfläche. In dieser Abwicklung bestimme man das Flächenmuster geometrisch, nehme sodann die Strecken, wie z. B. $m\,1$, $1\,2$, $2\,v$, $v\,y$ u. s. w. in den Zirkel, trage sie nach Fig. I auf den Viertelsbogen $b'\,III'$ in gleicher Ordnung über (vgl. Bemerkung zu § 67) und ziehe aus diesen Punkten die horizontalen Linien, so liegen auf letzteren die Verticalprojectionen der in Fig. II^a geometrisch bestimmten Punkte t, u, v, w, x, z, y u. s. w. Die Breiten $s\,t$, $s\,u$, $v\,w$, $y\,z$ ... etc. auf der mittlern Fläche des Gewölbes in

*) Die Vertiefungen der Hohlkehlen sind natürlich rückwärts entsprechend den abnehmenden Breiten geringer als auf der Vorderseite, weshalb im Grundrisse die Curve $a\,o$ von der Curve $I\,d\,f\,M$ auf der vordern Seite bei $I\,a$ einen grössern Abstand hat als bei $M\,O$.

*) Die Gewölbfläche kann je nach der Gestalt der Grundform oder der Seitenbögen auch eine elliptische sein. Dieses wäre z. B. der Fall, wenn die Grundform statt wie hier ein Quadrat, etwa ein Rechteck, und demnach zwei der Seitenbögen elliptisch wären u. s. w.

**) Dass man diese Grössen direct auf eine Mittellinie $m\,III'$ auftragen kann ist klar, und ist hier die Gerade $c\,III$ nur der grössern Deutlichkeit nebenan errichtet worden; der Genauigkeit halber nehme man die Zirkelöffnungen kleiner, etwa nur halb oder viertel so gross wie $a'\,I'$ u. s. w.

***) Diese Breiten könnten auch aus der Horizontalprojection entnommen werden; so sind z. B. die Breiten $c\,f$, $d\,g$ ... gleich $c'\,f'$, $d'\,g'$ u. s. w.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. II stellen sich ebenso wie in Fig. II^a nach ihrer wahren Grösse dar, während dieselben Breiten in den Feldern links und rechts verkürzt erscheinen.

Zur Bestimmung dieser Verkürzungen zeichne man den Proportionswinkel Fig. II^b, indem man hierzu Sa in Fig. II^b gleich $a'c'$ in Fig. II macht, in a eine rechtwinklige zu Sa zeichnet und mit der unverkürzten Grösse $c'f'$ Fig. II oder II^a aus S der Fig. II^b einen Bogen beschreibt, welcher die Gerade ac in c schneidet. Sa verhält sich damit zu Sc, wie in Fig. II $a'c'$ zur wahren Grösse $c'f'$, und Fig. II^b ist der für das Antragen der Verkürzungen verwendbare Proportionalmassstab (vgl. Fig. III, Taf. XXXVI etc.).

Um also die Grössen, wie z. B. st, su, vw, vx, yz..., aus Fig. II^a ihrer Verkürzung nach etwa auf der linken Seitenfläche in Fig. I zu bestimmen, nehme man aus Fig. II^a st in den Zirkel, trage diese Grösse in Fig. II^b von c nach *1*, schliesse den Zirkel, bis ein Bogen aus *1* die Horizontale ac in *2* berührt und trage die Strecke *1 2* in Fig. II von der Mittellinie $s'k'l'III$ in entsprechender Ordnung, d. i. von s' nach t' und u' an. In gleicher Weise sind die Strecken $c3$, $c5$ in Fig. II^b gleich vw, yz in Fig. II^a, und $v'w'$, $v'x'$ in Fig. II gleich *3 4*, die Strecke $y'z'$ gleich *5 6* in Fig. II^b u. s. w. gemacht worden.

Im Grundrisse, welcher ebenso wie bei Fig. I eine Ansicht der Kuppel von unten darstellt, sind die Eintheilungen der Flächen nicht ausgeführt.

Die schiefwinklige (klinogonale) Projection (Parallelperspective).

§ 220. Wie schon Eingangs dieses Theiles erwähnt wurde (siehe §§ 91, 93 und 96), entsteht eine schiefwinklige Projection, wenn die von einem Körper ausgehenden Projectionsstrahlen wie bei der orthogonalen Projection unter sich parallel, jedoch schief gegen die Projectionsebene einfallen. Der Vorzug dieser Projectionsart gegenüber der orthogonalen besteht, wie ebenfalls schon früher erwähnt (siehe § 93), in der grösseren Bildlichkeit des Gegenstandes, ohne dass dabei die Vortheile der orthogonalen Projectionsart verloren gehen.

Da zu der orthogonalen Darstellung eines Gegenstandes zum mindesten zwei Projectionen erforderlich sind, um seine Beschaffenheit zu bestimmen, und dabei in solchen Projectionen gewisse Flächen und Curven sich zu Geraden verkürzen, wird es einem mit den Regeln der Projectionslehre nicht vertrauten Beschauer oft schwer, aus solchen Projectionen sich sofort eine in jeder Beziehung klare Vorstellung über die Form des Gegenstandes zu verschaffen. Diesem könnte nun allerdings durch Fertigung einer zweiten, perspectivischen Zeichnung abgeholfen werden, wie es denn auch häufig der Fall ist, dass neben den Grund- und Aufrissen zur bessern Veranschaulichung eine perspectivische Zeichnung verlangt wird; allein weit vortheilhafter und kürzer ist es in vielen Fällen, wenn man den beiden gestellten Anforderungen durch eine einzige Darstellung gleichzeitig gerecht werden, d. h. wenn man eine Zeichnung herstellen kann, welche sowohl die Vortheile der orthogonalen Projection, wie auch jene der perspectivischen Darstellungsart vereinigt.

Dieser dritten Anforderung, welche in Bezug auf die graphische Darstellung eines Gegenstandes gestellt werden kann, entspricht nun allerdings zunächst auch eine gewöhnliche orthogonale Projection dadurch, dass man den Gegenstand in eine entsprechend gedrehte oder geneigte Lage zu einer der beiden Projectionsebenen bringt. So könnte z. B. die Darstellung des Säulenstückes in Fig. II^a, Taf. XVIII schon als ein solcher Versuch betrachtet werden, nämlich durch entsprechende Neigung des Körpers nicht nur die verticalen, sondern auch die horizontalen Flächen desselben in einer Darstellung zu veranschaulichen. Indess eignet sich dieses Verfahren wegen der damit verbundenen zeitraubenden Hilfsconstructionen nur wenig für unsern Zweck, weshalb dasselbe auch nur dann angewendet wird, wenn der Gegenstand ohnehin eine zur Tafel geneigte Lage einnehmen soll.

Unsere Aufgabe verlangt dagegen eine Zeichnungsmethode, nach welcher man auf die kürzeste Art, direct und ohne viele Hilfsconstructionen Bilder herstellen kann, welche die oben erwähnten Eigenschaften besitzen, also neben der bessern Uebersichtlichkeit auch das unmittelbare Entnehmen der Grössen etc. gestatten. Solche Bilder heissen wegen ihrer Aehnlichkeit mit den centralperspectivischen und zur Unterscheidung von diesen auch parallelperspectivische Bilder, weil ihre Entstehung eine Folge des Parallelismus der projicirenden Geraden ist. In diesem Sinne erklärt sich auch die für diese Projectionsart ebenfalls angewendete Bezeichnung Parallelperspective.

§ 221. Betrachtet man die schon in Fig. II, Tafel IX veranschaulichte Entstehung eines parallelperspectivischen Bildes, so ist daraus ersichtlich, dass:

1. die Projectionen gleich langer und paralleler Geraden unter sich ebenfalls gleich lang und parallel sind;

2. Gerade, welche zur Projectionsebene parallel sind, sich in derselben nach ihrer wahren Grösse projiciren; und

3. die Projectionen von Geraden, welche zur Projectionsebene geneigt sind, um so kürzer erscheinen, je grösser ihr Neigungswinkel zu derselben ist.*)

*) Bei der schiefwinkligen Projection tritt allerdings auch der Fall ein, dass Linien, welche zur Tafel

Dieses vorausgesetzt, können wir nun zur weitern Erklärung und Begründung dieser Projectionsart übergehen.

§ 222. Bei der Construction schiefer Projectionen nimmt man in der Regel, wie bei der orthogonalen Projection, zwei zu einander senkrechte Ebenen oder Tafeln an, wobei man die horizontale Tafel als die Grundebene, auf welcher der zu projicirende Gegenstand liegt, und die verticale Tafel als die Projectionsebene (Bildfläche), auf welche projicirt wird, betrachtet. Die Schnittkante beider Tafeln heisst die Grundlinie oder Projectionsachse. Denkt man sich nun einen Punkt A^0 (Fig. 68) in der Grundebene liegend, so dass also A^0, A' die beiden orthogonalen Projectionen desselben sind (siehe § 101), und zieht man von A^0 die schief projicirende Gerade $A^0(A)$ gegen die unter der Projectionsachse liegende Projectionstafel, so ist der Schnittpunkt (A) der Projicirenden mit dieser Tafel die schiefe Projection des Punktes A^0. Die Lage der schief Projicirenden fällt, von oben gesehen, mit der Geraden $A^0 a$ zusammen, so dass also $A^0 a$ als Horizontalprojection des Projectionsstrahles $A^0(A)$ zu betrachten ist (vgl. § 96, Fig. II, Tafel IX). Bis jetzt ist der Vorgang räumlich, wie in Fig. I, Tafel X, ausgeführt, um aber denselben in einer Ebene, d. i. der Zeichnungsfläche darzustellen, wurde die Grundebene mit dem darinliegenden Punkt A^0 etwa nach abwärts umgelegt, so dass dieselbe mit der verticalen Projectionsebene zusammenfällt und damit A^0 nach A zu liegen kommt. Die Geraden $A^0 a$ und $A^0(A)$ projiciren sich sodann nach $A a$ und $A'(A)$ in die Tafel $Q R II' I'$, welche zugleich als die vorhin mit dem Punkte A^0 umgelegte Grundebene zu betrachten ist. Denkt man sich nun diese Tafel $Q R II' I'$ in gerader Ansicht, so dass sie mit der Zeichenfläche identisch ist, so sind in Fig. 69 A, A' die orthogonalen Projectionen; (A) ist die aus den orthogonalen Projectionen abgeleitete schiefe Projection eines in der Grundebene liegenden Punktes A^0, und $A a$, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden. (Vergl. $A a$, $A'(A)$ in Fig. 69 mit $A a$, $A'(A)$ in Fig. 68.) Denkt man sich nun ferner in Fig. 68 von A^0 aus zwei Gerade $A^0 Q$ und $A^0 R$ gezeichnet, welche in der Grundebene und deren Endpunkte Q und R in der Projectionsachse liegen, so sind diese Endpunkte Q und R zugleich orthogonale wie klinogonale (schiefe) Projectionen, und (A) mit Q und R verbunden ist die schiefwinklige Projection der beiden Geraden $A^0 Q$, $A^0 R$ oder, was dasselbe ist, des Winkels $R A^0 Q$. Denkt man sich ferner in A^0 eine Senkrechte $A^0 z$ zur Grundebene, so ist, wie aus Fig. 68 ersichtlich, deren schiefe Projection $(A) z'$ senkrecht zur Projectionsachse oder Grundlinie $Q R$, und ihre schiefe Projection erscheint in wahrer Länge, da $A^0 z$ parallel zur Projectionsebene ist. Nimmt man ferner die beiden Geraden $A^0 Q$, $A^0 R$ als rechtwinklig zu einander an, so können die drei Geraden $A^0 Q$, $A^0 R$, $A^0 z$ als die Schnittkanten (Coordinatenachsen oder Coordinaten*) dreier zu einander senkrechter Ebenen (Coordinatenebenen) betrachtet werden. A^0 ist der Anfangspunkt dieser Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben, und die von (A) ausgehenden schiefen Projectionen der Coordinaten wollen wir als das Achsenkreuz bezeichnen. Ist einmal die schiefe Projection der Coordinatenachsen, d. i. das Achsenkreuz gezeichnet, so sind auch die übrigen Kanten eines Körpers, von welchen z. B. (A) eine Ecke sein könnte, ihrer Lage nach bestimmt, da nach § 93 parallele und gleichlange Gerade auch in ihren schiefen Projectionen parallel und unter sich gleich lang bleiben.

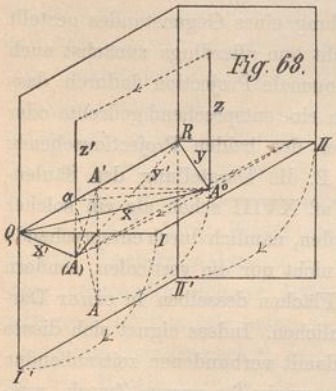


Fig. 68.

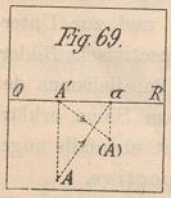


Fig. 69.

Weitere Ausführung der schiefwinkligen Projectionsart.

Tafel XLV. Figur I—IX.

§ 223. In Fig. I sind die Geraden $A Q$, $A R$ die Orthogonalprojectionen zweier in der umgelegten Grundebene rechtwinklig zu einander liegenden Coordinaten, A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten und (A) die schiefe Projection desselben, wobei $A a$, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden sind. Da nun die Punkte Q und R in der Projectionsachse liegen, so sind sie zugleich auch ihre eigenen schiefen Projectionen, und die Geraden $(A) Q$, $(A) R$ sind schiefe Projectionen der Coordinaten $A Q$, $A R$. Eine dritte Coordinate, welche zu den beiden gegebenen $A Q$, $A R$ senkrecht steht, und welche wir hier mit $A z$ bezeichnen wollen, ver-

geneigt sind, in derselben nach ihrer wahren Grösse, ja sogar grösser erscheinen können; doch wird man eine Darstellungsart wie letztere nach Möglichkeit vermeiden, da solche Bilder unschön und stets mehr oder weniger Verzerrungen sind.

*) d. h. zugeordnete, zu einander senkrecht stehende Linien. Die durch je zwei Coordinaten gelegten Ebenen stehen senkrecht zu einander, oder umgekehrt, drei senkrecht zu einander stehende Ebenen schneiden sich in den Coordinatenachsen, und diese bilden die Schnittkanten (Achsen) der Ebenen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

kürzt sich, da sie senkrecht zu der von AQ, AR gebildeten Coordinatenebene steht, in ihrer orthogonalen Projection bei Az zu einem Punkte, und ihre schiefe Projection erscheint als eine über (A) errichtete Senkrechte zur Projectionsachse. $(A)Q$, $(A)R$, $(A)z'$ bilden nunmehr das Achsenkreuz oder die schiefe Projection der Coordinatenachsen. Der Kürze halber soll in Zukunft jede der durch das Achsenkreuz bestimmten Richtungen nur durch einen Buchstaben, und zwar die Richtung $(A)Q$ mit x', $(A)R$ mit y' und $(A)z'$ mit z' bezeichnet werden; ferner soll die Orthogonalprojection der Coordinaten: orthogonaler Grundriss, die schiefe Projection dagegen da, wo kein Missverständniss zu befürchten ist, kurzweg Grundriss genannt werden.

§ 224. Das Achsenkreuz $x'y'z'$ kann innerhalb bestimmter Grenzen beliebig angenommen werden.*) Hätte man z. B. den Anfangspunkt (A) des Achsenkreuzes, ebenso die Richtungen x', y', z', sowie die Grundlinie (Projectionsachse QR) beliebig gegeben, so hätte sich ebenso gut nachträglich der orthogonale Grundriss dadurch bestimmen lassen, dass man um QR als Durchmesser einen Halbkreis beschrieb, auf demselben den Punkt A beliebig bestimmte**) und von A eine Senkrechte gegen die Grundlinie zeichnete, wodurch sich die orthogonale Verticalprojection A' ergab. Zieht man ferner aus (A) eine Senkrechte $(A)a$ bis zur Projectionsachse, sowie die Geraden Aa, $A'(A)$, so sind die beiden letzteren die orthogonalen Projectionen jener schief projicirenden Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

In Fig. I betrachte man ferner die Senkrechte RA'' als einen Seitenriss (dritte Projection) der Grundebene, A'' als eine dritte orthogonale Seitenprojection des Anfangspunktes und $A''a''$ als den Seitenriss der schief projicirenden Geraden (vgl. Fig. 68). Die Lage $A''a''$ konnte, nachdem das Achsenkreuz gegeben, nachträglich dadurch bestimmt werden, dass man $(A)A'''$ parallel der Grundlinie zog und die Strecke Ra'' gleich RA''' machte.

§ 225. Es erübrigt nun noch anzuführen, auf welche Weise die modificirten, d. i. verkürzten oder veränderten Längen des Achsenkreuzes gemessen werden, oder auf welche Weise man einzelne, z. B. an sich gleiche, in x' und y' sich aber ungleich verkürzende Strecken auftragen kann. Da nämlich alle mit der Richtung x' parallel laufende Linien sich in dem Verhältniss wie $(A)Q : AQ$ [sprich $(A)Q$ zu AQ] oder $x' : x$ verkürzen, und ebenso das Verkürzungsverhältniss aller mit y' gleichlaufenden Geraden gleich $(A)R : AR$ (d. h. $y' : y$) ist, so braucht man nur mit den Strecken AQ, $(A)Q$, sowie AR, $(A)R$ sogenannte Proportional- oder Winkelmassstäbe herzustellen, aus welchen dann die aufzutragenden Grössen in ihren Reductionen entnommen werden können.

In Fig. I^b sind solche Winkelmassstäbe gezeichnet. Man mache hierbei auf einer Geraden Sa die Strecke Sa gleich AR in Fig. I, beschreibe mit dieser Grösse als Radius aus S einen Bogen, trage auf diesen die verkürzte Strecke $(A)R$ als Sehne in ab auf und verbinde S mit b durch eine Gerade, so ist aSb der für die Verkürzungen y' benützbare Winkelmassstab. In gleicher Weise wurde auch der Winkelmassstab für die Verkürzungen x' gefunden. Man trage nämlich auf einen Schenkel Sb des schon vorhandenen Winkels*) Sc gleich AQ in Fig. I auf, beschreibe mit dieser Grösse als Radius aus S einen Bogen, trage auf diesen die Strecke $(A)Q$ von c aus in cd als Sehne auf und verbinde S mit d durch eine Gerade, so verhält sich also in beiden Winkeln $Sa : ab = AR : (A)R$ und $Sc : cd = AQ : (A)R$. Für die mit z' parallelen Richtungen ist ein Reductionsmassstab nicht nöthig, da auf diesen alle Masse in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden können.

Angenommen, es sei in Fig. I^a a ein beliebiger Punkt, aus welchem parallel mit x', y' und z' die Coordinaten gezeichnet wurden, und es wäre eine erste Coordinate z' (also die Senkrechte in a) als wahre Grösse einer Würfelkante bestimmt, so beschreibe man mit dieser als Radius aus S in Fig. I^b einen Bogen efg durch beide Winkel y und x, nehme die Abstände der Punkte ef, fg in den Zirkel, trage sie in Fig. I^a von a nach b und von a nach c an, ziehe aus c eine Parallele zu ab und aus b eine Parallele zu ac, so ergibt sich d als vierter Punkt des horizontalen Quadrates. Errichtet man nun über c, d, b Senkrechte von gleicher Höhe wie über a und verbindet deren obere Endpunkte in entsprechender Ordnung, so ist die schiefe Projection des Würfels vollendet. Zieht man in der Basisfläche $abcd$ des Würfels eine Diagonale ad, so hat diese gleiche Richtung mit einer in Fig. I gezeichneten Geraden $(A)d'$, welche auch hier als die schiefe Projection der Halbirungslinie des Winkels $Q(A)R$ zu betrachten ist; dieselbe hätte man auch durch Halbiren des

---

*) Der Winkel $Q(A)R$ kann zwar beliebig, soll aber stets stumpf angenommen werden, da sonst Zerrbilder entstehen. Auch thut man gut, den Punkt (A) seitlich nicht allzu weit von der Geraden AA' anzunehmen.

**) Der Winkel QAR wird dabei stets ein rechter sein, gleichviel wo A auf dem Halbkreise angenommen wird, da er über dem Durchmesser desselben liegt (siehe § 56, Fig. 31).

*) Die Winkelmassstäbe könnten zwar auch getrennt gezeichnet werden, doch bietet ihr Aneinanderlegen den Vortheil, dass die Verkürzungen an sich gleicher Grössen durch einen Bogen aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt gefunden sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Winkels QAR, d. i. der orthogonalen Projection erhalten können.*)

§ 226. Projiciren sich drei an sich gleiche Grössen, wie z. B. die Würfelkanten in Fig. I^a, als ungleiche Grössen, so heisst eine derartige schiefe Projection eine trimetrische**); eine schiefe Projection, bei welcher zwei Richtungen sich gleichartig verkürzen oder auch in wahrer Grösse erscheinen, heisst eine dimetrische***); eine schiefe Projection, bei welcher endlich alle drei Richtungen unverkürzt erscheinen, heisst eine isometrische Projection.†)

§ 227. In Fig. II ist x, y, z der orthogonale Grundriss der Coordinatenachsen so gegeben, dass x parallel zur Projectionsachse, also auch parallel zur Projectionsebene, und y senkrecht zu derselben steht. Die Coordinate z steht in allen Fällen immer parallel zur Projections-, also senkrecht zur Grundebene und erscheint somit in letzterer stets als ein Punkt.

A, A' sind die Orthogonalprojectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben, Aa, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden und x', y', z' sonach das Achsenkreuz.

Der Punkt (A) konnte beliebig angenommen werden, und die von (A) ausgehende Coordinate x' ist parallel zur Projectionsebene und erscheint daher wie z' unverkürzt. Das Verkürzungsverhältniss aller Geraden, welche mit y' parallel sind, ist gleich $y' : y$. Um daher auf einem Würfel Fig. II^a, dessen Kanten mit dem Achsenkreuz parallel sind, die verkürzte Seite zu bestimmen, zeichne man in Fig. II^b eine Gerade Sa, mache Sa gleich AA' in Fig. II, beschreibe aus S einen Bogen ab, trage darauf von a, $(A)A'$ als Sehne in ab auf und ziehe Sb. Beschreibt man nun mit der Länge einer Würfelkante (Richtung $x' = z'$ gleich der wahren Grösse) aus S einen Bogen in den Winkel aSb und trägt dessen Sehne auf die mit y' parallelen Richtungen in Fig. II^a an u. s. w., so ist damit der Würfel bestimmt.

Diese Darstellung ist eine dimetrische, da hier nur zwei verschiedene Grössen, nämlich die wahren, x' und z', und die verkürzte der Richtungen, y', in Betracht kommen.

Da bei dieser Darstellung gewisse Flächen des Würfels parallel mit der Projectionsebene sind, so wollen wir die Stellung des Würfels in Fig. II^a von der in Fig. I^a dadurch unterscheiden, dass wir erstere als Parallelstellung oder gerade Ansicht, letztere als schräge Stellung oder schräge Ansicht bezeichnen.

Der Körper in Fig. I^a bietet dabei eine Daraufsicht von links, d. h. der Beschauer ist links oben in unendlicher Entfernung zu denken.*) Aehnliches gilt auch von Fig. II und II^a, welche eine Daraufsicht von der rechten Seite darstellen, weil die schiefe Projection (A) des Anfangspunktes der Coordinaten in Fig. II links von A, A' liegt.

§ 228. In Fig. III sind A, A' die beiden orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben u. s. w., und (A) wurde hier innerhalb der Senkrechten AA' angenommen; daraus erhellt, dass der schief projicirende Strahl nunmehr ohne seitliche Abweichung von oben einfällt, also in einer Ebene liegt, welche selbst senkrecht zur Projectionsebene steht (vgl. Fig. 70). Ferner ergibt sich hierdurch, dass in Fig. III die beiden Längen $Q(A)$, $(A)R$ des Achsenkreuzes sich zu einander ebenso verhalten, wie die orthogonalen Horizontalprojectionen QA, AR, und ebenso wie deren orthogonale Verticalprojectionen QA', $A'R$, d. h. dass die Strecken $Q(A) : (A)R = QA : AR = QA' : A'R$, oder $= x' : y' = x : y = QA' : AR$, also gleich proportionirt sind. Hierbei konnte Punkt (A), sowie x', y', z' als Achsenkreuz zuerst beliebig gegeben und mittels einer Senkrechten durch (A) auf dem um QR als Durchmesser beschriebenen Halbkreise, A sowie A' auf der Projectionsachse nachträglich bestimmt werden. Der Grundriss $(A)Dg$ einer Halbirungslinie des Winkels $Q(A)R$ wurde durch Halbiren des orthogonalen Grundrisses, d. i. des Winkels QAR gefunden. Eine Halbi-

*) Da die Halbirungslinie des Winkels QAR die Projectionsachse in d' schneidet, d' aber seine eigene schiefe Projection ist, so ist offenbar auch $(A)d'$ die schiefe Projection der Halbirungslinie. Ferner sei hier noch bemerkt, dass, wenn nöthig, auch für die Verkürzung dieser Halbirungslinie ein Reductionsmassstab (wie überhaupt für jede Richtung), hier z. B. aus den Strecken Ad', $(A)d'$ in gleicher Weise wie vorhin für die Verkürzungen x' und y', gezeichnet werden könnte.

**) d. h. eine durch drei verschiedene Massstäbe zu messende Projection.

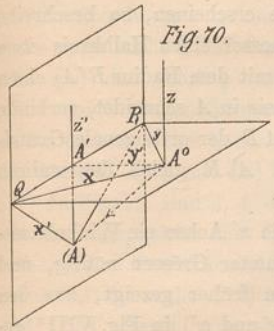
***) d. h. eine durch zwei verschiedene Massstäbe zu messende Projection.

†) Darunter versteht man eine Projection, bei welcher alle drei Richtungen mit einem Massstab gemessen werden können. Bei der schiefen Projection erscheinen, wie wir später sehen werden, die drei Richtungen der Coordinaten in ihrer wahren Grösse; es gibt jedoch auch eine orthogonale Projectionsart, welche ebenfalls als isometrisch bezeichnet wird und bei der sich alle drei Richtungen in einem bestimmten, jedoch gleichartigem Verhältniss verkürzen, bei welcher daher ebenfalls nur ein Massstab zum Auftragen der Grössen nöthig ist.

*) Da nach optischen Gesetzen ein Beschauer den Körper aus unendlicher Entfernung natürlich nicht mehr sehen könnte, so bezieht sich dieser Ausdruck nicht auf das physische Sehen, sondern ist nur in dem Sinne zu verstehen, dass die projicirenden Strahlen unter sich parallel, also aus einem unendlich oder sehr weit entfernt liegenden Punkte kommen und von links oben schief gegen die Bildfläche einfallen. Dieser unendlich entfernt liegende Vereinigungspunkt der Projicirenden ist hier als das Auge des Beschauers gedacht.

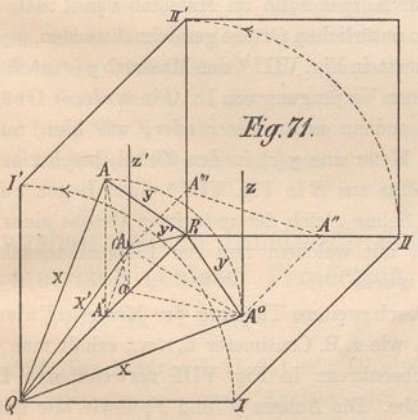
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

rungslinie wie $(A)\,Dg$ wollen wir fernerhin als Diagonale bezeichnen.*) Die Constructionen der Winkelmassstäbe sind in der schon früher erwähnten Weise auszuführen. Es sind also in Fig. III^b wieder $S\,a$ gleich $A\,Q$, und $a\,b$ als Sehne gleich $(A)\,Q$ in Fig. III; ebenso $S\,d$ gleich $A\,R$, und $d\,e$ als Sehne gleich $(A)\,R$ in Fig. III.



In Fig. III^a ist eine Platte mit quadratischer Grundfläche mittels der Massstäbe x und y gezeichnet. Die Grösse einer Quadratseite ist gleich $S\,c$ in Fig. III^b angenommen und damit aus S ein Bogen beschrieben worden u. s. w.

§ 229. Fig. IV zeigt dieselbe Aufgabe wie Fig. I, nur mit dem Unterschiede, dass hier der schief projicirende Strahl von der Grundebene nach aufwärts gegen eine über der Projectionsachse aufgestellte Projectionsebene fällt (vgl. Fig. 71), und wobei man sich

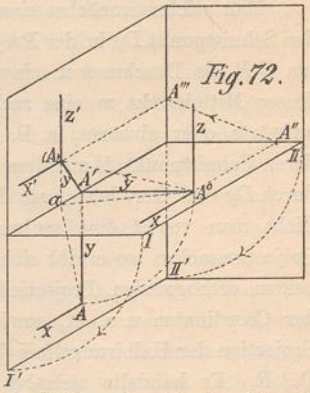


die Grundebene mit dem darin enthaltenen orthogonalen Grundriss ebenfalls um QR nach aufwärts in die Projectionsebene geklappt dachte, so dass also in Fig. IV A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, $A\,a$, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden sind, und (A) die schiefe Projection dieses Punktes und damit x', y', z' das Achsenkreuz ist. Die Projection ist ebenso wie Fig. I und III eine trimetrische.

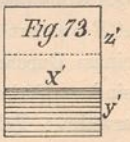
Fig. IV^a zeigt eine parallel mit diesem Achsensystem gezeichnete quadratische Platte und bietet eine Daruntersicht von links. Die wahre Grösse einer Quadratseite ist gleich $S\,e$ in Fig. IV^b. Die Construction der Winkelmassstäbe, sowie das Antragen der reducirten Grössen für die Richtungen x' und y' des Achsenkreuzes geschieht auf die bereits wiederholt erklärte Weise ($S\,a = A\,R$, $a\,b$ als Sehne $= (A)\,R$ u. s. w.).

§ 230. In Fig. V ist die gleiche Aufgabe wie bei Fig. II wiederholt, nur mit dem Unterschiede, dass hier der schief projicirende Strahl des Anfangspunktes der Coordinaten von der Grundebene aus von rechts nach links aufwärts geht und die Grundebene mit dem darinliegenden orthogonalen Grundriss nicht in die Projectionstafel über der Achse, wie bei Fig. IV, sondern nach abwärts geklappt wurde*), so dass sie mit dieser eine Ebene bildet (vgl. Fig. 72 mit Fig. V).

Fig. V^a zeigt einen Würfel in dieser Projection, dessen Verkürzungen y' mittels des Winkels $a\,S\,b$ bestimmt sind. ($S\,a$ gleich $A\,A'$, $a\,b$ als Sehne gleich $(A)\,A$.) Die Projection ist gleich Fig. II^a eine dimetrische in Parallelstellung zur Projectionsebene, und erscheint als eine Daruntersicht von rechts.



§ 231. In Fig. VI sind A, A' die beiden orthogonalen Projectionen, (A) die schiefe Projection eines in der Grundebene liegenden Punktes. Da (A) in der nach aufwärts verlängerten Senkrechten $A\,A'$ liegt, so folgt daraus, dass der schief projicirende Strahl ohne seitliche Abweichung von unten nach aufwärts gegen die Projectionsebene einfällt.

A'' ist ein Seitenriss des Punktes, und $A''\,A'''$ ein Seitenriss oder eine dritte orthogonale Seitenprojection der schief projicirenden Geraden u. s. w. (Vgl. $A''\,A'''$ in Fig. 72.) Die Coordinatenachsen x, y oder das Achsenkreuz könnten nun nachträglich in schräger oder gerader Ansicht beliebig bestimmt werden. Wäre Letzteres der Fall gewesen, so würde ein Würfel, dessen Kanten mit diesem Achsenkreuz parallel sind, sich so darstellen, dass die z' Achse mit der y' Achse in eine Senkrechte fällt und damit gewisse Flächen sich als Gerade projiciren (siehe Fig. 73). Man wird daher eine solche dimetrische Dar-

*) Und zwar deshalb, weil eine derartige Halbirungslinie bei den Constructionen von Flächen und Körpern häufig als Diagonale vorkommt.

*) Es ändert wie leicht ersichtlich, an der Sache selbst nichts, ob man die Grundebene mit dem darin liegenden orthogonalen Grundriss nach aufwärts oder nach abwärts um die Projectionsachse dreht; es kann bald das eine, bald das andere geschehen, je nachdem es der Raum oder sonstige Rücksichten gestatten. So ist z. B. bei Fig. I, II, III, V, VI, VIII, IX diese Grundebene u. s. w. um die Projectionsachse oder Grundlinie nach abwärts, bei Fig. IV und VII nach aufwärts gedreht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

stellungsart bei der geraden Ansicht rechtwinkliger Körper wegen des ungünstigen Bildes nicht wählen. Dagegen eignet sie sich, wie wir später sehen werden, sehr gut für die Darstellung runder Formen, sowie für die Darstellung rechtwinkliger Körper bei schräger Ansicht, von welchen schon Fig. III[a] ein Beispiel, jedoch mit Daraufsicht, zeigt.

§ 232. In Fig. VII ist zuerst x', y', z' als das Achsenkreuz, sowie $a\,b\,c\,d$ beliebig als schiefe Projection oder Grundriss eines Quadrates gegeben, und es sollen aus dieser Annahme nachträglich die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten gefunden werden.

Man zeichne zunächst eine Diagonale $b\,d$, markire den Schnittpunkt Dg in der Projectionsachse, beschreibe um $Q\,R$ als Durchmesser einen Kreis und ziehe aus dessen Mittelpunkt m eine rechtwinklige Gerade nach aufwärts oder abwärts, z. B. nach abwärts, markire deren Schnittpunkt E auf dem Kreise und ziehe aus E durch Dg eine Gerade, bis sie den Kreis in A schneidet. Zieht man von A eine senkrechte Gerade gegen die Projectionsachse, so ergibt sich A', und A, A' sind die beiden orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten u. s. w., sowie $A\,Dg$ die orthogonale Projection der Halbirungslinie (Diagonalen) des Winkels $Q\,A\,R$. Es handelte sich bei dieser Aufgabe darum, dem orthogonalen Grundriss innerhalb des Halbkreises eine solche Lage zu geben, dass eine von A nach Dg gezeichnete Gerade den Winkel der beiden Coordinaten x und y halbirte. Die Lösung dieser Aufgabe beruht hier auf dem geometrischen Satz: dass der über einem Bogen stehende Peripheriewinkel halb so gross ist als der über dem gleichen Bogen stehende Centriwinkel (siehe § 56, Fig. 29). Demgemäss wurde in Fig. VII in $Q\,m\,E$ der rechte Winkel gezeichnet und über dem Viertelsbogen $Q\,E$ von E durch Dg bis A gezogen, sowie A mit Q durch eine Gerade verbunden. Damit ist Winkel $Q\,A\,E$ als Peripheriewinkel gleich 45^0, und eine Gerade $A\,R$ ergänzt denselben zu einem Rechten, da alle über einem Durchmesser stehenden Peripheriewinkel Rechte sind. Hierbei tritt nun der in Anmerkung zu § 221 erwähnte Fall ein, dass die schiefe Projection $(A)\,R$ einer Geraden $A\,R$, statt verkürzt zu erscheinen, sich vergrössert. Es ist dieses stets dann der Fall, wenn die schief projicirenden Strahlen zu sehr von der Seite, von oben oder von unten einfallen oder wenn, mit andern Worten, der Winkel, den die schief projicirenden Strahlen mit der Projectionsebene bilden, zu klein wird. Eine solche Darstellungsweise ist, obwohl theoretisch richtig, doch stets nach Möglichkeit zu vermeiden, da solche Bilder immer mehr oder weniger unnatürlich und verzerrt erscheinen.*)

*) Eine solche Verzerrung hätte auch hier leicht dadurch vermieden werden können, dass man die Quadratseite $b\,a$ grösser angenommen oder den Anfangspunkt des Achsenkreuzes mehr nach rechts gelegt hätte u. s. w. Doch wurde hier absichtlich die Zeichnung so ausgeführt, um auch auf diesen Fall aufmerksam zu machen, d. h. um zu zeigen, dass die schiefe Projection einer Geraden nicht nur verkürzt oder in wahrer Länge, sondern auch grösser oder länger erscheinen kann.

§ 233. Fig. VIII zeigt die dimetrische schräge Darstellung eines Körpers, wobei die z' und y' Achse sich unverkürzt projiciren; das Achsenkreuz x', y', z' konnte hierbei beliebig gewählt werden. Soll nun y' gleich z' in wahrer Grösse erscheinen, so beschreibe man über $Q\,R$ als Durchmesser einen Halbkreis etwa nach abwärts, ferner aus R mit dem Radius $R(A)$ einen Bogen, welcher den Halbkreis in A schneidet, verbinde A mit Q und R, so ist $Q\,A\,R$ der orthogonale Grundriss der Coordinaten und $(A)\,R$ gleich der wahren Grösse $A\,R$.*)

Es ist somit nur für die x' Achse ein Winkelmassstab zum Auftragen bestimmter Grössen nöthig, und wurde derselbe, wie schon früher gezeigt, aus den Strecken $A\,Q$, $(A)\,Q$ (d. i. x und x') in Fig. VIII[a] gebildet. ($S\,a = A\,Q$, $a\,b$ als Sehne $= (A)\,Q$.)

§ 234. An diesem Beispiele soll nun auch die Anwendung von Längenmassstäben für das Auftragen bestimmter Längeneinheiten gezeigt werden.

Angenommen, es solle der Körper in Fig. VIII eine Höhe von 30 cm und eine Länge und Breite von je 50 cm haben, die Grundfläche also ein Quadrat sein, und der Körper solle im Massstab von 1 : 10, also in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse gezeichnet werden, so zeichne man zuerst in Fig. VIII[b] den Massstab $y\,(z)$ nach der angegebenen Verjüngung von 1 : 10 in wahrer Grösse**), nehme sodann einen Meter oder, wie hier, nur einen halben Meter aus $y\,(z)$ in den Zirkel, beschreibe damit als Radius aus S in Fig. VIII[a] einen Bogen $c\,d$, so ist $c\,d$ als Sehne gleich der reducirten Grösse eines halben Meters, mit welchem nun der Längenmassstab x gefertigt wurde.

Darch weitere Theilung der Meter in Unterabtheilungen, wie z. B. Centimeter u. s. w., erhält man die für das Achsenkreuz in Fig. VIII verwendbaren Längenmassstäbe. Die Achsen y' und z', sowie alle mit ihnen parallelen Geraden können nun mittels des Massstabes $y\,(z)$, die Achse x' mittels des Massstabes x gemessen werden.

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass man in ähnlicher Weise auch für die Figuren I bis VII derartige Längenmassstäbe hätte zeichnen können.

§ 235. Fig. IX ist eine isometrisch schiefe Pro-

*) Eine weitere, dimetrisch schiefe Projection, bei welcher die x' und y' Achsen sich gleichartig verkürzen, soll später noch erwähnt werden.

**) Da diese Blätter in zwei Dritttheil der auszuführenden Grösse gezeichnet sind, so ist hier z. B. statt eines ganzen Decimeters nur $^2/_3$ eines solchen genommen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

jection, bei welcher jede Gerade des Achsenkreuzes sich nach ihrer wahren Länge projicirt. Da bei der Parallelstellung des Körpers die x' Achse, ebenso wie die z' Achse, ohnedies in ihrer wahren Grösse erscheint, und die Coordinate y demnach senkrecht zur Projectionsebene steht (siehe § 227, Fig. II dieser Tafel), so braucht man nur eine Achse y' oder $(A)\,A'$ gleich $A\,A'$, d. i. gleich der Orthogonalprojection dieser Coordinatenachse zu bestimmen, wobei es gleichgiltig ist, welchen Winkel die Gerade $(A)\,A'$ mit der Projectionsachse bildet.*)

In Fig. IX sind A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, $A\,a$, $A'\,(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden, (A) die schiefe Projection des Coordinatenpunktes und $(A)\,a'$ gleich $(A)\,c$ gleich $(A)\,A'$ [oder $(A)\,b$] das Achsenkreuz, welches hier zugleich die Kanten eines hohlen Körpers mit quadratischen Grund- und Seitenflächen bildet.

Obwohl die bisher erörterten Aufgaben im Wesentlichen Alles enthalten, was zur Darstellung einer schiefen Projection nothwendig ist, so gehört doch die Anführung von Beispielen, welche das bisher Gesagte noch weiter illustriren, mit zu den unerlässlichen Bedingungen, um auch die für diese Projectionsart erforderliche Fertigkeit und Uebung zu erlangen. Solche Uebungsbeispiele bieten die Blätter XLVI bis XLIX, wobei in Blatt XLIX noch zwei weitere, bisher nicht erwähnte Projectionsarten mit inbegriffen sind.

Uebungsbeispiele in dimetrisch und trimetrisch schiefer Projection.

Tafel XLVI. Figur I—VII.

§ 236. Die Figuren I, II, III und IV sind dimetrische Projectionen in gerader Ansicht oder Parallelstellung zur Projectionsebene (vgl. § 227, Fig. II und II^a). Ihre Grundflächen u. s. w. sind quadratisch und ihre Ausführung bedarf wohl kaum einer weitern Erklärung. Bemerkt sei hier nur, dass in Fig. II zum Zwecke der Achtecksconstruction der 45° Winkel Fig II^a als Hilfsfigur derart benützt wurde, dass man, um in das Quadrat $e\,f\,g\,h$ den Grundriss eines regulären Achteckes einzeichnen zu können, eine Strecke $n\,e$ oder $n\,f$ der Fig. II in Fig. II^a von S nach h' trug, aus h' eine Senkrechte $h'\,o'$ gegen den andern Schenkel fällte und die so erhaltene Strecke $S\,o'$ in Fig. II von n aus in $n\,o$, $n\,p$ übertrug. Zieht man nun aus o und p Parallele mit $f\,g$, d. h. mit einer Richtung y' des Achsenkreuzes, so schneiden diese die Diagonalen $e\,g$, $f\,h$ in vier Punkten, und zieht man durch diese Schnittpunkte die Parallelen zu den Diagonalen, so bilden erstere vier Achtecksseiten; die übrigen vier Achtecksseiten fallen mit den Quadratseiten zusammen (vgl. § 47, Fig, III, Taf. IV).

In Fig. III ist der durch Pyramidenflächen etc. begrenzte Körper aus dem zur Projectionsebene parallelen Schnitt abgeleitet, dessen rechte Hälfte hier mit $i\,h\,g\,f\,e\,S$ bezeichnet ist.

In Fig. IV sind, nachdem die Höhe des Cylinders sowie die Durchmesser $k\,i$, $k'\,i'$ der Cylinderkreise bestimmt waren, zunächst durch k, i Parallele zu $b\,c$ gezeichnet worden, und diese ergaben auf den Diagonalen $a\,c$, $b\,d$ des ersten Quadrates $a\,b\,c\,d$ die Punkte $e\,f\,g\,h$ eines zweiten, in welches ein Achteck ebenso wie bei Fig. II mittels der Hilfsfigur IV^a, und in dieses der Basiskreis des Cylinders einbeschrieben wurde. In gleicher Weise ward auch der obere in dem Quadrat $o\,p\,q\,r$ u. s. w. eingeschlossene Kreis gefunden. Die Projection eines dritten innern concentrischen Kreises wurde nach der in § 133 erörterten Methode gefunden. Wie leicht ersichtlich musste, falls dies nothwendig wird, für jede der Figuren ein eigener Winkel- oder Längenmassstab gefertigt werden, da die Verkürzungen der mit einer y'-Achse parallel laufenden Geraden u. s. w. hier bei jeder Figur anders gewählt sind. Der Massstab für die Verkürzungen y' ist hier übrigens dadurch vollständig bestimmt, als man in jeder der Figuren eine Kante $b\,c$ als in Wirklichkeit gleich einer Kante $a\,b$ angenommen hat.

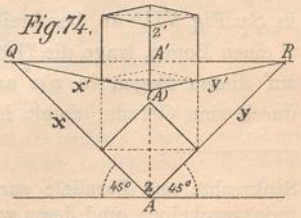
Aus den Seiten $a\,b$, $b\,c$ könnte also je ein Winkelmassstab für die betreffende Figur hergestellt werden (vgl. Fig. II, Taf. XLV).

§ 237. In Fig. V sind die orthogonalen Projectionen eines Sockelgesimses u. s. w. und in Fig. VI dessen dimetrisch schräge Darstellung gefertigt worden, wobei wie aus der Zeichnung Fig. VI ersichtlich, die Richtung x des Achsenkreuzes gleich z unverkürzt erscheint*) (vgl. § 233, Fig. VIII, Taf. XLV).

*) Ist dieser Winkel wie in Fig. IX gleich 45°, so nennt man die isometrisch schiefe Projection auch Cavalierperspective, eine Benennung, die vielfach in ältern Werken vorkommt und ihren Ursprung aus der Benennung und Darstellung gewisser Festungstheile hat. Das Wort „Cavalier" bedeutet dabei ein erhöhtes Werk in den Bastionen einer Festung. Eine weitere, isometrisch schiefe Projectionsart, welche in § 248, Fig. V und VI, Tafel XLIX ausgeführt ist, heisst aus ähnlichen Gründen auch Militärperspective (siehe daselbst).

*) Ausser dieser dimetrisch schrägen Darstellung gibt es noch eine zweite, bei welcher die x' und y' Achsen sich gleichartig verkürzen, und wobei die Stellung eines nach diesem letzteren Achsensystem gezeichneten Körpers, z. B. Würfels, eine zur Projectionsebene symmetrische wäre, d. h. der Würfel hat eine sog. Uebereckstellung, wobei die schiefen Projectionen der in den horizontalen Quadratflächen liegenden Diagonalen als

Fig. 74.



Man bestimme zunächst den Winkel $Q(A)R$, den zwei Achsen x und y miteinander bilden sollen, zeichne an beliebiger Stelle eine Wagrechte QR, beschreibe über QR als Durchmesser einen Halbkreis, etwa nach abwärts, und beschreibe, da x sich nicht verkürzen soll, aus Q mit dem Radius $Q(A)$ einen Bogen, bis dieser den Halbkreis in A, d. i. in einer Orthogonalprojection dieses Punktes schneidet. Die Strecke $Q(A)$ ist damit gleich QA, gleich der wahren Grösse.

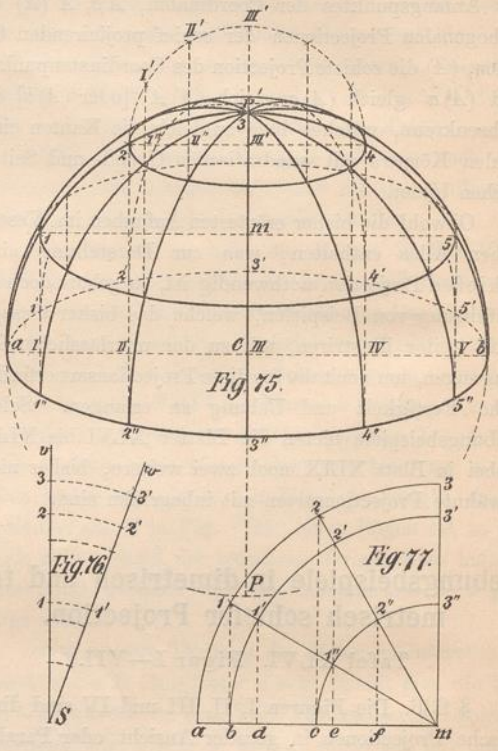
Auf die mit x parallelen Richtungen können nun die entsprechenden, aus Fig. V entnommenen Grössen direct aufgetragen werden. Als Winkelmassstab für die Verkürzungen y kann auch ein Dreieck wie Fig. VI^a dienen.

Man mache dabei $a'r'$ gleich $(A)R$, zeichne in r' eine rechtwinklige $r'S$ zu $a'r'$, nehme die Grösse AR aus Fig. VI in den Zirkel und beschreibe damit als Radius aus a' einen Bogen, welcher $r'S$ in S schneidet. Es verhält sich demnach $a'r' : a'S$ gleich $(A)R : AR$. Um daher mittels dieses Massstabes Grössen wie z. B. bc, de . . . aus Fig. V nach bc, de . . . in Fig. VI zu übertragen, verfahre man nach der schon in § 41, Fig. IV^a, Taf. III angegebenen Methode. Die Richtung der Diagonalen bs, cs', ds'' . . . wurden parallel mit $(A)Dg$ gezeichnet und Dg wurde durch Halbiren des Winkels bei A erhalten. (Vergl. Fig. I, III, VIII, Taf. XLV.)

§ 238. Fig. VII ist eine trimetrisch schiefe Projection, wobei die schief projicirende Gerade ohne seitliche Abweichung von oben gegen die Projectionsebene einfällt (vgl. § 228, Fig. III, Taf. XLV). Die schiefen Projectionen der Meridian- und Parallelkreise einer Kugel, welche auf einer quadratischen Platte ruht, wurden bestimmt, indem man zuerst über P eine Senkrechte PP' als Polarachse und Kugeldurchmesser bestimmte und um diesen einen geometrischen Kreis $P'bPa$ als den zur Projectionsebene parallelen Hauptmeridian zeichnete. Theilt man nun den Halbkreis $aP'b$ z. B. in sechs gleiche Theile und zieht aus diesen Theilpunkten Senkrechte gegen einen Durchmesser ab, so ist damit der grösste durch ab gehende Parallelkreis (Aequator) entsprechend eingetheilt. Um die Verkürzung dieser Kreise, bezw. Ellipsen zu bestimmen, construire man in Fig. VII^a mit den aus Fig. VII entnommenen Strecken Aa, $(A)a$ einen Winkelmassstab. Man trage nämlich die Strecke Aa aus Fig. VII auf eine Gerade in Sv Fig. VII^a an, beschreibe mit Sv als Radius aus S einen Bogen, trage die Grösse $(A)a$ von v als Sehne auf diesen Bogen in vw an und verbinde S mit w durch eine Gerade; damit ist dann in Fig. VII^a der Massstab für alle mit $(A)a$ parallelen Geraden, man könnte sagen, der Massstab für die Verkürzungen v gefunden.

Die weitere Construction der Parallel- und Meridiankreise könnte z. B. nach der in Fig. 75 näher angegebenen Weise ausgeführt werden.

§ 239. Man theile etwa die obere Hälfte $aP'b$ des gegebenen Hauptmeridians in sechs gleiche Theile, fälle von diesen Theilpunkten $1, 2, 3$ . . . die Senkrechten $1I$, $2II$, $3III$*), $4IV$, $5V$, nehme die Strecken $I1$, $II2$ . . . in den Zirkel, beschreibe damit aus dem Scheitel-



punkte S des auf die schon erwähnte Weise gefundenen Winkelmassstabes in Fig. 76 die Bögen $1'1'$, $2'2'$, $3'3'$, und trage die Sehnen dieser Bögen in Fig. 75 von den Punkten I, II, III . . . in $I1', I1''$, $II2'$, $II2''$ u. s. w. an (vgl. § 70, Fig. I, Taf. VI), so sind damit für den grössten durch ab gehenden Parallelkreis die Punkte $1', 2', 3', 4'$ . . ., durch welche gleichzeitig auch die Meridiane gehen, bestimmt.

In ähnlicher Weise hätte man auch für die übrigen Parallelkreise solche Punkte bestimmen können, indem man z. B. über $m'2$ als Halbmesser den Viertelskreis $2III'$ zeichnete, denselben in drei gleiche Theile theilte und aus diesen ebenfalls die Senkrechten gegen den Halbmesser $m'2$ des betreffenden Kreises fällte, mit den Entfernungen der Punkte I', II', III' von dem

---

Senkrechte und Parallele zur Projectionsachse (Grundlinie) erscheinen, und deren wirkliche Lagen somit ebenfalls senkrecht und parallel zur Projectionsebene sind (vergl. Fig. 74).

*) $3III$ fällt mit der schon vorhandenen Polarachse PP' zusammen; ebenso Punkt III mit dem Centrum C der Kugel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Halbmesser Bögen aus S in den Winkel Fig. 76 beschrieb, und deren Sehnengrössen wieder in entsprechender Ordnung von dem Halbmesser $m'2$ nach unten und oben, d. i. von $I'', II'', m' \ldots$ antrug. Um in der Zeichnung nicht allzuviel Constructionslinien zu erhalten, könnte ein Bogen $2\,III'$ auch als Hilfsfigur nebenan in Fig. 77 gezeichnet und wie vorhin verfahren werden; also $c\,3''$ in Fig. 77 ist der gleiche Bogen und statt der Grössen $I''\,I'$, $II''\,II' \ldots$, reducire man die gleichen Grössen $e\,1''$, $f\,2''$, $m\,3''$ der Hilfsfigur etc.

In Fig. 77 wurde auch der Bogen $b\,1'\,2'\,3'$, dessen Radius $m\,b$ gleich $m\,1$ aus Fig. 75 entnommen ist, als Hilfsfigur gezeichnet, und damit ebenso wie vorhin verfahren, also mit $d\,1'$, $e\,2' \ldots$ aus Fig. 77 in den Winkel $v\,S\,w$ Bögen gezeichnet und deren Sehnen zu beiden Seiten von $1\,m$ in Fig. 75 angetragen. Bei einiger Uebung im Zeichnen von Ellipsen ist auch folgendes Verfahren sehr praktisch. Man bestimme, nachdem der grösste Parallelkreis $a\,1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,b\,5'' \ldots$ gezeichnet ist, etwa mittels des Winkelmassstabes Fig. 76 die Verkürzungen der kleinen Ellipsachsen, indem man mit $m\,1$, $m'\,2$ der Fig. 75 aus S Bögen beschreibt, deren Sehnen als halbe kleine Ellipsachsen in entsprechender Ordnung von m und m' aus anträgt, und sodann die Ellipsen in bekannter Weise zeichnet. Um nun auf den bereits gezeichneten Projectionen der Parallelkreise (Ellipsen) nachträglich Punkte für die Meridiankreise zu erhalten, nehme man einen Papierstreifen, markire darauf die Abschnitte $a\,I$, $I\,II$, $II\,III$ des Halbmessers $C\,a$ und verschiebe den Papierstreifen so, dass z. B. Punkt a nach 1 und Punkt III auf der Senkrechten $P'\,P$ zu liegen kommt, markire auf der Zeichenfläche die Punkte I und II des Papierstreifens und ziehe aus diesen Senkrechte, welche sodann auf derjenigen Ellipse, deren grosser Durchmesser $1\,m\,5$ ist, die verlangten Punkte abschneiden. Dasselbe Verfahren wiederhole man mit dem gleichen Papierstreifen auch bei der Ellipse, deren grosse Achse $2\,m'\,4$ ist, d. h. man lege den Papierstreifen so, dass a nach 2, und III wieder auf die Gerade $P\,P'$ zu liegen kommt u. s. w. Die Constructionen sind hier nur auf der linken Seite ausgeführt, und es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass, wenn einmal eine Seite construirt, die einzelnen Hilfspunkte für die Kreisprojectionen auf der anderen Seite leicht durch Hinübercopiren erhalten werden.

Uebungsbeispiele in trimetrischer schräger Ansicht.

Tafel XLVII. Figur I—IV.

§ 240. In Fig. I sind die orthogonalen Projectionen eines Troges im Massstabe von 1 : 25 gezeichnet (siehe Anmerkung zu § 14) und es soll nach diesen eine trimetrisch schräge Projection Fig. II und zwar vergrössert, z. B. im Massstab von 1 : 10 gefertigt werden. Man bestimme zunächst das Achsenkreuz x, y, z, oder da z ja immer senkrecht bleibt, den Winkel, welchen die Achsen x und y bilden sollen, z. B. den Winkel $a\,b\,c$ in Fig. II.*) Um unnöthige Constructionslinien in Fig. II zu vermeiden, zeichne man nebenan in Fig. II^a x parallel $b\,a$, y parallel $b\,c$, ziehe an beliebiger Stelle eine Wagrechte $Q\,R$, beschreibe über dieser als Durchmesser einen Halbkreis, z. B. darüber, bestimme A auf dem Kreise senkrecht über dem Anfangspunkte des Achsenkreuzes**) und ziehe $A\,Q$, $A\,R$ (vgl. § 228 Fig. III, Taf. XLV), halbire den Winkel $Q\,A\,R$ und verbinde den Schnittpunkt D (Diagonalpunkt) mit dem Anfangspunkte (A) des Achsenkreuzes. Nun zeichne man die für die Verkürzungen x und y nöthigen Winkelmassstäbe Fig. II^b und Fig. II^c, und ebenso in $z\,(w)$ einen unverkürzten Längenmassstab im Verhältniss von 1 : 10 (d. i. 10 cm = 1 M.), bestimme mittels der Winkelmassstäbe Fig. II^b und Fig. II^c die Reductionen der Längenmassstäbe x und y, d. h. man nehme etwa einen halben Meter aus $z\,(w)$ in den Zirkel, beschreibe damit aus S in Fig. II^b einen Bogen $m\,l$, so ist dessen Sehne gleich der reducirten Länge eines halben Meters, mit welcher nunmehr auf der Geraden bei x der Massstab hergestellt wurde. Das Gleiche gilt auch für die Herstellung des reducirten Längenmassstabes bei y (vgl. Fig. VIII, VIII^a, VIII^b, Taf. XLV).

Damit sind nun alle Vorbereitungen getroffen, um die nach dem gleichen Achsensystem dargestellten Beispiele Fig. II, III und IV zur Ausführung zu bringen. Das Beispiel in Fig. II könnte hierbei mittels der Längenmassstäbe $z\,(w)$, x und y gezeichnet werden, indem man die Längenmasse der einzelnen Kanten in Fig. I mittels des darunter gezeichneten Massstabes misst, die betr. Masseinheiten aus den Massstäben der Fig. II entnimmt und in entsprechender Ordnung in Fig. II aufträgt; z. B. die halbe Länge einer obersten, äusseren Kante beträgt hier 80 cm, die ganze also 160 cm, welche, da die Länge sich auf die Richtung y bezieht, demgemäss auch aus dem Massstabe y zu entnehmen, und von z aus hier nach rechts anzutragen ist. Eine von z ausgehende Kante x hat die Länge von 80 cm, welche demgemäss mit dem Massstabe x zu messen ist u. s. w.

---

*) Der Winkel, den eine Achse x mit einer Wagrechten $(A)w$, z. B. mit der Lage der Reissschiene bildet, wurde hier gleich 30°, der Winkel, den eine Achse y mit dieser bildet, gleich 15° angenommen.

**) Diese Projectionsart ergibt die besten Bilder und eignet sich sowohl für die Darstellung eckiger als auch insbesondere runder Formen am meisten. Ihre Anwendung ist nur dann nicht rathsam, wenn es sich um das Zeichnen rechtwinkliger Körper in Parallelstellung oder gerader Ansicht handelt, da in diesem Falle gewisse Flächen sich zu geraden Linien verkürzen (siehe Fig. 73).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Alle senkrechten, sowie alle mit QR in Fig. II^a parallelen Kanten und Linien werden mit dem unverkürzten Massstabe $z\,(w)$ gemessen, da ihre Lage parallel zur Projectionsebene ist.

Da ferner wie schon erwähnt, auch die Beispiele Fig. III und IV nach dem gleichen Achsensystem gezeichnet sind, so folgt daraus, dass auch die darin vorkommenden, von links nach rechts ansteigenden Diagonalen oder Winkelhalbirungslinien mit $(A)\,D$ in Fig. II^a parallel sind. Wie die Richtungen weiterer Diagonalen gefunden werden, ist aus der Zeichnung, z. B. bei Fig. III, unschwer zu ersehen. Für die Darstellungen in Fig. III und IV sind keine bestimmten Masseinheiten angenommen worden.

§ 241. Es erübrigt nun noch, auf ein Verfahren aufmerksam zu machen, nach welchem sich das Zeichnen der Kreisprojectionen bei den cylindrischen Theilen der Fig. III und IV wesentlich vereinfacht.

Angenommen, es soll in Fig. III innerhalb des Quadrates *1 2 3 4* der Basiskreis *5 7 6 8* eines Cylinders gezeichnet werden, so könnte dies erstens nach der schon früher erwähnten Methode (siehe Fig. IV, Taf. XLVI) geschehen, indem man eine Strecke *1 7* auf den Schenkel eines 45° Winkels in *S a* Fig. III^a aufträgt, von *a* rechtwinklig gegen den andern Schenkel zieht, die dadurch abgeschnittene Strecke *S b* von *7* nach rechts und links auf die Gerade *1 2* in Fig. III anträgt, und aus diesen Punkten Parallele zu *1 4* oder *2 3* zieht, welche auf den Diagonalen *1 3*, *2 4* Punkte des Kreises ergeben; zieht man ferner parallel mit den Diagonalen Gerade durch diese Punkte, so bilden diese Tangenten des Kreises, welcher somit durch acht Punkte und ebenso viele Tangenten hinlänglich genau bestimmt ist. Eine durch *m* mit QR in Fig. II^a gezogene Parallele ergibt hierbei den wahren Durchmesser des Kreises als grosse Ellipsachse, zu welcher, wie bekannt, die kleine senkrecht steht und in diesem Falle daher, wie aus der Zeichnung ersichtlich, mit den Richtungen *z* parallel erscheint.

Man hätte dabei also die weiter oben liegende zweite Kreisprojection mittels ihrer grossen und kleinen Ellipsachsen *e f*, *g h* in bekannter Weise bestimmen können, oder man beachte zweitens für die in Fig. IV vorkommenden Kreisprojectionen folgendes Verfahren: Man zeichne, nachdem die Achse *m m′* des runden Körpers gegeben ist, z. B. *e m f* parallel mit QR in Fig. II^a als den wahren Durchmesser des Cylinders. Soll nun entsprechend dem gewählten Achsensystem*) die Verkürzung eines zweiten, zum ersten rechtwinkligen Durchmessers, d. i. die kleine Ellipsachse direct bestimmt werden, so ist vor allem ein für diese Verkürzung brauchbarer Massstab zu fertigen. Man entnehme zu diesem Zwecke aus Fig. II^a die Strecke $v\,A$, trage sie in Fig. IV^a auf eine Gerade in $S\,v'$ an, und beschreibe mit $S\,v'$ als Radius aus S einen Bogen $v'\,e$, mache dessen Sehne gleich $(A)\,v$ in Fig. II^a, und ziehe aus S durch e den zweiten Schenkel des Winkels $v'\,S\,e$, so ist dieser der verlangte Winkelmassstab für die Verkürzungen v, d. i. für alle Geraden, welche zur Projectionsebene senkrecht stehen und deren schiefe Projectionen nach dem hier gewählten Achsensystem mit der Richtung der z Achse parallel erscheinen.*)

Um die Verkürzungen der Kreishalbmesser $m'\,h$, $m'\,g$, d. i. die halben kleinen Ellipsachsen zu erhalten, nehme man die wahre Grösse $m'\,e$ oder $m'\,f$ eines Halbmessers in den Zirkel, beschreibe damit aus S in Fig. IV^a einen Bogen**) und trage dessen Sehne von m' nach h und g in Fig. IV an; damit ist dann die Kreisprojection bzw. Ellipse durch ihre Achsen bestimmt, und ihre weitere Ausführung kann nach der schon öfter erwähnten Methode bewerkstelligt werden. Weitere Kreisprojectionen konnten auf die gleiche Weise gezeichnet werden; übrigens sind in Fig. IV alle Kreisprojectionen mit Ausnahme des oberen Gesimskreises congruente Figuren. Die Eintheilung der cylindrischen Fläche unterhalb dem Gesimse wurde hier von der Senkrechten aus *2* (welche die Pyramidenkante in Punkt *3* schneidet) begonnen, so dass die Verlängerung von *2 3* nach aufwärts zugleich eine Theillinie des Cylinders bildet. Um von hier aus die Theilung gleichartig fortzusetzen, zeichne man um den Durchmesser *5′ 5″* einen Halbkreis, etwa nach abwärts***), theile dessen Hälfte, d. i. den Viertelskreis *1″ 5′*, z. B. in vier gleiche Theile†), trage alsdann einen solchen Theil von *2′* aus nach links auf den Halbkreis in *2′ 3′*, *3′ 4′*, *4′ 5′* ..., sowie nach rechts in *2 1″*, *1″ 2″*, *2″ 3″* ... wiederholt an und ziehe durch diese Theilpunkte die Senkrechten u. s. w.

Weitere Beispiele in trimetrisch und dimetrisch schiefer Projection.

Tafel XLVIII. Figur I—V.

§ 242. In Fig. I ist ein Kreuzgewölbe dargestellt. Hierbei wurde zuerst das Quadrat *1 2 3 4* mit den Dia-

*) Nur bei diesem Achsensystem, d. h. wenn die schiefe Projection des Anfangspunktes (A) mit den orthogonalen Projectionen A, A' in einer Senkrechten liegt, wird die grosse Achse als Wagrechte und die kleine Achse als Senkrechte erscheinen; in allen anderen Fällen trifft dieses nicht zu.

*) $A\,v$ (Fig. IIa) ist dabei die Orthogonalprojection einer solchen Geraden, und ihre schiefe Projection $(A)\,v$ fällt mit der Richtung der orthogonalen Projection zusammen, da der schief projicirende Strahl hier ohne seitliche Abweichung gegen die Projectionsebene einfällt (vgl. § 228, Fig. III, Tafel XLV).

**) Dieser Bogen u. s. w. ist hier nicht angegeben.

***) d. h. man klappe den vorderen Theil der betreffenden Kreisprojection nach abwärts parallel zur Projectionsebene.

†) Diese Theilung ist hier nicht markirt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gonalen *13*, *24* bestimmt, sodann an beliebiger Stelle die Wagrechte QR gezeichnet, um QR als Durchmesser ein Kreis beschrieben, aus dessen Mittelpunkt M' die Senkrechte $M'E$, sowie aus E durch den Schnittpunkt D der Diagonalen *13* mit der Grundlinie QR die Gerade EDA gezeichnet, welche nun nachträglich die orthogonale Projection des Coordinatenpunktes A, sowie in AQ, AR die wahren Längen der verkürzten Strecken $(A)Q$, $(A)R$ des Achsenkreuzes ergab (vergl. § 232, Fig. VII, Tafel XLV). Nun construire man die Winkelmassstäbe Fig. I^a und I^b; man mache also in Fig. I^a die Strecke Sa gleich $R(A)$, ziehe aa' und schneide durch einen Bogen, dessen Radius gleich RA in Fig. I aus S auf der Wagrechten aa' den Punkt a' ab. Es verhält sich also in Fig. I^a $Sa : Sa'$ gleich $R(A) : RA$ in Fig. I. In gleicher Weise wurde auch der Winkelmassstab Fig. I^b gezeichnet; d. h. es ist auch hier wieder Sa, Sa' in Fig. I^b gleich $Q(A)$, QA in Fig. I. Für die Genauigkeit der Ausführung wäre es noch besser, jede Strecke, wie z. B. hier angegeben ist, doppelt zu nehmen und damit das Dreieck Sbb' statt Saa' zu bilden.

Soll ferner die Höhe $m''i$ oder $a1$ u. s. w. eines Halbkreises oder Rundbogens, dessen Durchmesser ab gleich einer gegebenen Quadratseite *12* ist, bestimmt werden, so ist zunächst die wahre Grösse einer Strecke am'' oder $1i$ zu finden und diese sodann von *1**) aus nach abwärts in $1a$ anzutragen; man nehme hierzu die Hälfte von *12*, d. i. $1i$ in den Zirkel, trage diese Grösse in Fig. I^a von S nach b, ziehe aus b parallel mit aa', so ergibt sich auf der Geraden Sa', Sb' als die wahre Grösse des Halbmessers, welche nunmehr von *1* nach a in Fig. I übertragen wird. Zeichnet man von a aus das Quadrat $abcd$, so liegen nunmehr in den Vierecken $a12b$, $a14d$ . . . die Rundbögen $aeifb$, $agohd$ . . .; zur Bestimmung der Hilfspunkte ef und gh wurde der 45° Winkel Fig. I^c benützt.

Man trage z. B. $m'o$ in die Fig. I^c von S nach n, ziehe no, trage die Strecke So aus Fig. I^c von m' in $m'n'$, $n's'$ zweimal auf und ziehe durch n' parallel mit ad, sowie aus *1* und *4* nach m', so ergeben sich in gh zwei Hilfspunkte für den Bogen. Zieht man noch $s'g$, $s'h$, so sind letztere die Tangenten an diesen Punkten; ebenso wurden auch die übrigen, über ab, bc, cd liegenden Rundbogen bestimmt. Denkt man sich durch je zwei gegenüberliegende Bogen die Cylindererzeugenden, so schneiden sich diese Cylinderflächen nach den über den Diagonalen ac, bd liegenden elliptischen Bögen aSc und bSd; die Höhe mS dieser Bögen ist gleich der Höhe der übrigen. Sollten z. B. für einen solchen, etwa für den Bogen bSd, Hilfspunkte h' und l, sowie die Tangenten an diesen Punkten gefunden werden, so verfahre man wie vorhin, d. h. man mache mn''', $n'''s$ gleich $m'n'$, $n's'$, ziehe durch n''' parallel mit einer Diagonalen bmd, zeichne ferner $2m$, $4m$, so ergibt sich h' und l, und die aus s durch h' und l gezeichneten Geraden sind Bogentangenten an diesen Punkten u. s. w. Die Geraden $a'b'$, $a'd'$ wurden nachträglich gezeichnet.

§ 243. Der in Fig. II dargestellte Thurm zeigt ein Beispiel der Anwendung. Die Richtungen der Achsen sind mit denen in Fig. I parallel; statt der Winkel sind hier Längenmassstäbe angewendet. Der Thurm ist quadratisch und im Massstabe von 1 : 50 gezeichnet. Die Kanten y und x haben z. B. je eine Länge von ca. 4,500 m. Die Gerade z ist der unverkürzte Massstab für alle Senkrechten; die Längenmassstäbe y und x wurden mittels der Figuren I^a, I^b gefunden. $a'c$ und $b'c$ in Fig. I^a und I^b sind gleich einem Meter aus z, und cd in Fig. I^a gleich 01 in y, sowie cd in Fig. I^b gleich 01 in x u. s. w. Die weitere Ausführung der Fig. II ist aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

§ 244. Fig. III zeigt ein Capitäl mit Deckplatte (Abacus). Ein erster, oberster Kreis wurde, nachdem das Durchschnittsprofil $ABCD$ gegeben war, in bekannter Weise mit acht Punkten und Tangenten bestimmt (vgl. Fig. III, Tafel XLVII), und liegt in dem Quadrat *1234*. Die weiteren durch das Profil gehenden Kreise wurden mit Hilfe der grossen und kleinen Ellipsachsen gezeichnet. Um deren Lage zu bestimmen, beschreibe man aus M etwa durch e einen Bogen, welcher die Ellipse bezw. Kreisprojection in einem zweiten Punkte f schneidet, ziehe Mf, halbire den Winkel eMf, so ist gMh die grosse Achse. Zieht man nun durch M senkrecht zu gh, so ergibt sich in ki die kleine Achse (vergl. § 77, Fig. VI, Tafel VI). Alle übrigen Ellipsen haben nun gleiche Achsenverhältnisse, können somit durch das zweite Profil $ghml$ in bekannter Weise gezeichnet werden (vergl. Fig. III, Tafel XIX). Ein bestimmter Massstab für die Ausführung dieses Beispieles ist hier nicht angenommen worden.

§ 245. Fig. IV zeigt ein Gesimsstück, dessen geometrisches Schnittprofil A ist, in gerader dimetrischer Darstellung und bietet wie die übrigen Beispiele eine Daruntersicht. Fig. IV^a ist der Winkelmassstab für etwa herauszumessende oder hineinzutragende Grössen. Derselbe ist jedoch für die Ausführung des Gesimses nicht nothwendig. Die Construction des Winkels ist bekannt; es ist nämlich wieder ab gleich he, ac gleich hi oder ef, da $fehi$ als ein Quadrat, oder fbh als Halbirungslinie des Winkels efi angenommen wurde.

§ 246. In Fig. V ist die Vase und deren Sockel in dimetrisch schiefer Projection bei schräg symmetrischer Stellung zur Projectionsebene, d. i. so gezeichnet, dass sich die x und y Achsen gleichartig verkürzen (siehe Anmerkung zu § 237).

*) Punkt *1* ist hier mit dem Anfangspunkte (A) des Achsenkreuzes identisch.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

AQ gleich AR sind die wahren Grössen der Verkürzungen $(A)Q$, $(A)R$ und mittels der Grössen $(A)R$, AR wurde der Winkelmassstab Fig. V^a construirt (Sa, Sa' in Fig. V^a = $(A)Q$, AQ oder $(A)R$, AR in Fig. V). Das zur Projectionsebene parallele Durchschnittsprofil $eaghbf$ der Vase konnte geometrisch und in wahrer Grösse gezeichnet werden.

Die Kreisprojectionen bzw. Ellipsen wurden mittels ihrer Achsen in bekannter Weise bestimmt (vergl. Fig. II^a Taf. XVIII und Fig. III Tafel XIX etc.).

Um das Achsenverhältniss einer ersten Ellipse, z. B. $abcd$ zu bestimmen, brauchte man nur aus a und b Parallele mit $(A)Q$ zu ziehen, wodurch sich in cd die kleine Ellipsachse ergeben hatte. Ein unterster, auf der quadratischen Platte liegender Kreis, dessen Durchmesser gh ist, wurde berührend an die Quadratseiten $(A)Q$, $(A)R$ angenommen und der Durchmesser gh dadurch gefunden, dass man aus A' als Mittelpunkt einen Halbkreis berührend an die orthogonalen Projectionen AQ, AR dieser Quadratseiten zeichnete. Die weitere Ausführung und Eintheilung der Vase ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich (vergl. Fig. VII und IV in Tafel XLVI und XLVII). Dass man hier ebenso wie bei Fig. VII, Tafel XLVI, die Verkürzungen mc, md u. s. w. mittels eines Winkelmassstabes hätte bestimmen können, braucht wohl kaum mehr erwähnt zu werden; derselbe wäre aus der Strecke $A'(A)$ als der verkürzten und aus der Strecke $A'Q$ oder $A'R$ als der unverkürzten zu fertigen.

Uebungsbeispiele in isometrischer Projection.

Tafel XLIX. Figur I—VI.

§ 247. Die Figuren I und II sind in isometrisch schiefer Projection und in Parallelstellung zur Projectionsebene gezeichnet (vgl. § 235, Fig. IX, Tafel XLV). Fig. I^a zeigt, in welcher Weise nachträglich die orthogonalen Projectionen Aa, $A'(A)$ des schief projicirenden Strahles gefunden werden konnten. Ist nämlich $(A)A'$ als die unverkürzte Projection der y Achse angenommen, so ist $A'A$ gleich $(A)A'$ als die orthogonale Projection der y Achse anzunehmen und die orthogonale Lage der projicirenden Geraden aA und $(A)A'$ damit bestimmt. In Fig. II sind Hilfspunkte für die Kreise und Kreisbögen wieder mittels der Hilfsfigur II^a gefunden worden; die Aufgabe ist im Uebrigen gleich der in Fig. IV Tafel XLVI.

Wie aus den beiden gewählten Beispielen ersichtlich, ist die Darstellung von Gegenständen in dieser Projectionsart wohl sehr bequem, ergibt aber besonders in ihrer Anwendung auf runde Formen immer mehr oder weniger verzerrte und unnatürlich aussehende Bilder. So scheint z. B. in Fig. I auf den ersten Blick eine Kante gi u. s. w. grösser zu sein als ab, obwohl sie thatsächlich mit dieser gleiche Länge hat. Das Auge ist eben gewöhnt, schrägliegende Kanten, welche sich vom Beschauer aus entfernen, stets verkürzt zu sehen.

§ 248. Die Figuren V und VI sind isometrisch schiefe Projectionen mit unverändertem Grundriss, d. h. die Grundrisse können wie bei der orthogonalen Projection, nach ihrer geometrischen Form gezeichnet und dabei die darüber stehenden Höhenkanten u. s. w. ebenfalls unverkürzt und nach ihrer wahren Grösse aufgetragen werden. In Fig. V ist die Entstehung dieser isometrischen Projectionsart*) veranschaulicht. Hierbei sind zunächst die beiden orthogonalen Projectionen eines einfachen Körpers, sodann eine Gerade $b''a'g''$ als horizontale und verticale Projection der Bildfläche (Tafel) gegeben. Zeichnet man nun von allen Ecken des Körpers die Projicirende unter einem Winkel von 45° gegen die Bildfläche, und zwar so, dass die Ebenen dieser Winkel senkrecht zu beiden Tafeln sind, die Horizontalprojectionen der projicirenden Strahlen somit als Senkrechte zur Bildfläche $a'b''$ sich darstellen, so ergibt die schiefe Projection z. B. der rechtwinkligen Grundfläche ($abcd$, $a'b'c'd'$) in $a^1b^1c^1d^1$ wieder das gleiche geometrische Rechteck wie $abcd$; da ferner die Höhenkanten, wie z. B. (bf, $b'f'$), (cg, $c'g'$) u. s. w. parallel der Bildfläche oder Projectionsebene sind, so ergeben sich auch ihre schiefen Projectionen wieder in wahrer Länge (vgl. § 221), also a^1e''' gleich $a'e'$, b^1f''' gleich $b'f'$ u. s. w.).

Die Treppe in Fig. VI zeigt ein Beispiel der Anwendung. Der Grundriss $abcdefghik$ . . . ist zuerst bestimmt und darüber sind die einzelnen Kanten, wie z. B. bb', cc', dq, $1po$ u. s. w., nach ihren wahren Grössen errichtet worden. Da sich, wie schon erwähnt, alle horizontal liegenden Flächenfiguren nach ihrer wahren Form und Grösse projiciren, so können vorkommende Kreise oder Kreisbögen hier mit dem Zirkel gezeichnet werden.

§ 249. Die Figuren III und IV sind ebenfalls isometrische Projectionen; doch sind diese von den bisher genannten insoferne zu unterscheiden, als ihre Entstehung nicht das Ergebniss schief projicirender Geraden, sondern das einer bestimmten Lage ist, welche der Körper zur Projectionsebene einnimmt und wobei die Projicirenden stets senkrecht gegen die Projectionsebene einfallen, so dass also die Figuren III und IV als gewöhnliche Orthogonalprojectionen zu betrachten

*) Dieselbe wird besonders in älteren Werken auch Militärperspective genannt. Diese Bezeichnung hat zwar keine wissenschaftliche Berechtigung, und ist nur dadurch zu motiviren, dass Befestigungswerke häufig in dieser Projectionsart dargestellt wurden, wie sich denn auch dieselbe noch am besten für die Darstellung von Gebäuden auf Situationsplänen, Stadtplänen u. s. w. eignet; auch die Bezeichnung Vogelperspective wird öfter dafür angewendet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

sind, bei denen sich nach vorne geneigte Kanten als Senkrechte projiciren (vgl. hiermit Fig. II^a, Tafel XVIII).

So betrachte man z. B. in Fig. III $A(e), b(f), c(g), d(h)$ als den orthogonalen Grundriss eines über Eck stehenden Würfels, dessen Basisfläche $A\,b\,c\,d$ in der Grundebene liegt und dessen Kanten $A\,e$, $b\,f$, $c\,g$, $d\,h$ somit als Punkte erscheinen, $Q\,R$ als die Projectionsachse und $R\,1$ als eine zur Grund- und Projectionsebene senkrechte dritte Tafel. Denkt man sich nun den Würfel gegen diese dritte Tafel projicirt, diese Tafel sodann um ihre horizontale Trace $R\,1$ nach rechts in die Zeichenfläche umgeklappt und die darin enthaltene Würfelprojection erhoben oder so gedreht, bis eine Würfeldiagonale $e'\,c'$, d. i. eine durch den Würfel gehende und zwei Ecken verbindende Gerade senkrecht zur Projectionsachse $R\,1$ der dritten Tafel steht. So stellt nun $A'\,e'\,b'\,f'\,d'\,h'\,c'\,g'$ einen Seitenriss dar, aus welchem in Verbindung mit dem orthogonalen Grundriss $Abcd\ldots$ die Projection $(A)\,b''\,c\,d''\,e''\ldots$ abgeleitet wurde.*) Dachte man sich dabei die horizontale Tafel aus ihrer mit der verticalen Tafel in eine Ebene zusammenfallenden Lage mit dem darin liegenden Würfel um die Projectionsachse, und zwar um einen Winkel, welcher gleich dem Winkel $1\,R\,A'$ der Seitenprojection ist, erhoben, so werden diejenigen Kanten, welche sich in $A\,e$, $b\,c\ldots$ noch als Punkte projicirten, nun gleichfalls als Kanten, und zwar als Senkrechte zur Projectionsachse $Q\,R$ sich darstellen, und $(A)\,b''\,c\,d''\,e''\,f''\ldots$ ist als die orthogonale Projection des mit der Grundfläche erhobenen Würfels zu betrachten. Eine Diagonale $e''\,c$ des Würfels steht hierbei senkrecht zur verticalen Projectionsebene und projicirt sich somit in $e''\,c$ als ein Punkt. In dieser Lage erscheint die Projection eines Würfels als ein reguläres Sechseck, und die Kanten $e''\,(A)$, $e''\,h''$, $e''\,f''$, sowie auch die übrigen parallelen Würfelkanten sind damit unter gleichen Winkeln gegen die Projectionsebene geneigt und verkürzen sich daher gleichartig;**) eine Diagonale $f''\,h''$, sowie auch diejenigen, welche die Punkte $(A)\,f''$ und $(A)\,h''$ verbinden würden, bleiben hierbei unverkürzt, da sie mit der Projectionsebene parallel sind. $(A)\,Q$, $(A)\,R$, $(A)\,g$ kann nun hier ebenfalls als das Achsenkreuz, d. h. als die orthogonale Projection der Coordinaten bezeichnet werden. Die Coordinaten verkürzen sich hierbei im Verhältniss wie $(A)\,R : A\,R$, oder ungefähr wie 9 : 11.

Man zeichne daher, um den Reductions- oder Winkelmassstab zu erhalten, in Fig. IV^a $S\,a$ gleich $(A)\,R$ in Fig. III, ziehe in a eine Rechtwinklige zu $S\,a$, und beschreibe mit der Grösse $A\,R$ der Fig. III aus S einen Bogen, welcher die Gerade $a\,b$ in b schneidet, so ist das Dreieck $S\,a\,b$ der verlangte Winkelmassstab, mit welchem bestimmte wahre Grössen in ihrer Reduction gefunden und in Fig. IV aufgetragen, oder auch die Verkürzungen in Fig. IV nach ihrer wahren Grösse ermittelt werden können. Soll z. B. die wahre Länge einer Kante $a'\,b'$ in Fig. IV gleich $b\,1$ in Fig. IV^a sein, so trage man diese gedachte Grösse von b nach 1, setze den Zirkel in 1 ein und trage die reducirte Strecke $1\,2$ in $a'\,b'$ auf. Sollte umgekehrt von einer schon vorhandenen Kante $a'\,b'$ in Fig. IV die wahre Grösse nachträglich gefunden werden, so trage man $a'\,b'$ aus Fig. IV nach $S\,c$ in Fig. IV^a, ziehe aus c parallel zu $a\,b$, so ist die Strecke $S\,d$ gleich der wahren Grösse der Kante $a'\,b'$ in Fig. IV.

Soll eine Zeichnung nach bestimmten Massen, z. B. in dem Verhältniss wie 1 : 25 ausgeführt werden, so wären 4 cm = 1 Meter in den Zirkel zu nehmen, mittels des Winkelmassstabes zu reduciren und damit der Längenmassstab zu fertigen. Eine Kante $a'\,b'$ hat hier z. B. eine Länge von 95 cm, wenn man sich das Beispiel Fig. IV im Massstabe von 1 : 25 gezeichnet denkt.

Ein Cylinderdurchmesser $i\,h$ oder $i'\,h'$ in Fig. IV stellt sich in wahrer Grösse dar. Es müsste also für das Auftragen bestimmter Masseinheiten auf Linien, welche mit $i\,h$ parallele Richtungen haben, der unverkürzte Massstab von 1 : 25 benützt werden.*) Ein zweiter Cylinderdurchmesser $l\,k$ oder $l'\,k'$, oder die Richtung einer zweiten Diagonalen $a'\,c'$ des Quadrates $a'\,b'\,c'\,d'$ fällt mit der Richtung der senkrechten Kanten zusammen, und für ihre Abkürzung könnte ebenfalls, wenn nöthig, ein Winkelmassstab u. s. w., z. B. mit $a'\,c'$ als verkürzter und $b'\,d'$ als unverkürzter Grösse in bekannter Weise gefertigt werden.

Ein jeder durch zwei Coordinaten gebildete Winkel ist gleich 120°, und die Winkel, welche zwei Coordinaten $(A)\,b''$, $(A)\,d''$ (siehe Fig. III) zu einer mit der Projectionsachse $Q\,R$ parallelen Geraden bilden, sind je gleich 30°. Ein Beispiel wie Fig. IV kann also auf

---

*) Betrachtet man für einen Augenblick $R\,1$ als eine horizontal liegende Projectionsachse, indem man das Blatt entsprechend wendet, die links und rechts davon liegende Zeichenfläche als die horizontale und verticale Projectionstafel, so kann $A'\,b'\,c'\,d'\,e'\ldots$ statt als Seitenriss auch als ein Aufriss und $(A)\,b''\,c\,d''\,e''\ldots$ demgemäss als ein Grundriss betrachtet werden. Das hier Gesagte gilt übrigens von allen Orthogonalprojectionen, bei denen sich stets der Grundriss mit dem Aufriss, und umgekehrt durch entsprechende Drehung des Blattes verwechseln lässt, d. h. ein Grundriss kann ebenso gut als ein Aufriss, und umgekehrt ein Aufriss als ein Grundriss betrachtet werden, ohne dass damit an der Lage des Körpers gegen die Projectionstafeln etwas geändert wird.

**) Daraus erhellt, dass bei der orthogonal-isometrischen Projection auch die als senkrecht erscheinenden Kanten sich ebenso wie die beiden andern Richtungen verkürzen, somit keine der Coordinaten nach ihrer wahren Grösse sich darstellt.

*) Derselbe ist hier nicht ausgeführt. Der Massstab unterhalb Fig. IV ist der mittels Fig. IV^a reducirte Massstab = 1 : 25.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dem Reissbrett mit Hilfe der Reissschiene und des sog. 30°- bzw. 60°-Winkels ausgeführt werden.

Die centrale Projection (Polarperspective.*)

Tafel L. Figur I—II .

§ 250. In Fig. I sind die orthogonalen Projectionen ($a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$, $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\ldots$) des Körpers, ferner der Bildfläche ($P\,P'$, $P''\,P'''$) und des Auges (O, O') gegeben. ($b\,O$, $c\,O$, $d\,O\ldots$, $b'\,O'$, $c'\,O'$, $d'\,O'\ldots$) sind die projicirenden Strahlen, deren Durchschnitte mit der Bildfläche das perspectivische Bild auf derselben ergeben. Diese Bildfläche mit der daraufliegenden Projection ist in Fig. I^a in die Zeichenfläche gelegt; um das perspectivische Bild Fig. I^a zu erhalten, trage man in derselben auf eine Horizontale $A'\,d$, welche in der Verlängerung der Projectionsachse liegt, die auf der horizontalen Tafelprojection $P\,P'$ erhaltenen Punkte b'', e'', a, f'', c'', g'', d in gleicher Ordnung auf $A'\,d$ der Fig. I^a in b, e, a, f, c, g, d über, errichte in diesen Punkten Senkrechte und ziehe aus den Punkten h', b''', c''', g''' ... wagrechte Linien, so ergibt sich durch entsprechende Verbindung der hierdurch in Fig. I^a erhaltenen Schnittpunkte das perspectivische Bild; z. B. die Senkrechte aus b und die Wagrechte aus dem Punkte b''' der Verticalprojection ergibt Punkt b', die Geraden aus c und c''' ergeben den Punkt c', die Geraden aus e und e''' den Punkt e' u. s. w. Der unten liegende Körpertheil ist in Parallelstellung zur Bildfläche, der obere Theil in sog. Uebereckstellung gezeichnet, und eine Fläche des untern, sowie eine Kante ($h\,m$, $h'\,m'$) des oberen Körpertheiles liegen in der Bildfläche, fallen also mit ihren Centralprojectionen zusammen und erscheinen daher auch in Fig. I^a in wahrer Grösse.

Alle zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, wie z. B. ($a\,b$, $a'\,b'$), ($d\,c$, $d'\,c'$) haben in ihren centralen Projectionen einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt A (Fluchtpunkt), welcher zugleich diejenige Stelle auf der Bildfläche bezeichnet, welcher gegenüber das Auge sich befindet, und welcher daher Augenpunkt genannt wird.

In Fig. II sind ebenfalls die orthogonalen Projectionen eines Körpers, ferner der Bildfläche ($P\,P'$, $P''\,P'''$) und des Auges (O, O') gegeben; der Körper ist in Parallelstellung zu den Projectionstafeln gezeichnet und die für die centrale Projection bestimmte Bildfläche sodann in schräger Lage und durch eine Kante ($a\,e$, $a'\,e'$) angenommen worden, so dass also die Kante ($a\,e$, $a'\,e'$) wieder mit ihrer centralen Projection zusammenfällt und daher bei $a\,e$ in Fig. II^a sich nach der wahren Grösse darstellt. Die Durchschnittspunkte der projicirenden Strahlen ($b\,O$, $b'\,O'$), ($c\,O$, $c'\,O'$), ($d\,O$, $d'\,O'$)... mit der Bildfläche sind (b'', b'''), (c'', c'''), (d'', d''')... etc.

In Fig. II^a wurde die Bildfläche in die Zeichenfläche gelegt. Man trage hierbei auf eine Grundlinie $B\,C$, welche in der Verlängerung der Projectionsachse liegt*), die auf $P\,P'$ liegenden Punkte b'', k'', a, i'', l'', c'', m'', d in gleicher Ordnung auf, errichte in Fig. II^a über b, k, a, i, l, c, m, d Senkrechte und zeichne aus den Punkten a', b''', c''', d''' ... die projicirenden Wagrechten, so ergeben sich in a', b', c', d', e', f' ... die centralen Projectionen der Körperecken, und durch entsprechende Verbindung derselben das polarperspectivische Bild des Körpers.

Fig. I^a unterscheidet sich nun von Fig. II^a dadurch, dass bei ersterer der untere Theil des Körpers in sog. gerader Ansicht, bei letzterer aber der Körper in schräger Ansicht dargestellt ist. In ersterem Falle sind gewisse, in Wirklichkeit horizontal liegende Kanten, wie z. B. $a\,d$, $b'\,c'$ u. s. w., geometrisch parallel miteinander; in letzterem convergiren alle nach zwei Fluchtpunkten, von welchen der eine F noch innerhalb der Zeichnung, während der andere rechts ausserhalb des Rahmens derselben liegt.

---

*) Obwohl die Perspective eine selbstständige Wissenschaft bildet, so kann doch immerhin die Ableitung einer perspectivischen Zeichnung aus den orthogonalen Projectionen, wie dies in Blatt L ausgeführt ist, als zur Projectionslehre gehörig betrachtet werden.

*) Diese Grundlinie müsste nicht nothwendig mit der Verlängerung der Projectionsachse zusammenfallen, sondern kann beliebig gewählt werden; nur hätte man, falls $B\,C$ nicht in der Verlängerung, sondern höher oder tiefer liegt, die Entfernungen der Punkte von der Grundlinie, wie z. B. $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$, $a\,e'$, $b\,f'$ u. s. w. in Fig. II, gleich den Entfernungen der Durchschnittspunkte von der Projectionsachse zu machen. Das letztere Verfahren wäre namentlich dann unvermeidlich, wenn die perspectivische Zeichnung auf einem zweiten separaten Blatt auszuführen ist.

Druck des Textes von Julius Klinkhardt in Leipzig.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Empfehlenswerthe Vorlagewerke aus dem Verlage von WILHELM EFFENBERGER in Stuttgart.

Bereits in 1200 Schulen in Gebrauch.

Prof. H. Kolb u. E. Högg, Vorbilder für das Ornamentenzeichnen. Eine Sammlung kunstgewerblicher Vorbilder für das Freihand- und Fachzeichnen an **gewerbl. Fortbildungsschulen. 30** farbige Tafeln. In eleg. Mappe. Preis **14** Mark.

Das Werk will einem längst zu Tage getretenen Bedürfnis entsprechen, indem es, — **im engsten Anschluss an die bewährten grösseren Vorlagewerke von Prof. E. Herdtle, Deschner etc.** — und in streng stilistischer Form, sowie klarer, korrekter Zeichnung, den Schüler in das **Zeichnen für die Praxis** einführt. Amtlich empfohlen durch die Königl. Württemb. Kommiss. für gewerbl. Fortbild.-Schulen und amtlich für sämmtl. gewerbl. Schulen Württembergs, Schlesiens und des Grossherzogth. Hessen angeschaft, wurden diese neuen Vorlagen auch bereits in den massgebendsten Fachblättern aufs Wärmste empfohlen.

Zeitschr. f. gewerbl. Unterricht. „In wirklich künstlerischer Vollendung bringt uns Blatt für Blatt neue brauchbare Vorbilder; wir möchten keines missen."

Zeitschr. d. Münch. Kunstgew.-Vereins. 1884. Nr. 5/6. „Wir begrüssen mit grosser Genugthuung das vorliegende Werk, welches sich die Aufgabe gestellt hat, in der Litteratur eine fühlbare Lücke auszufüllen. Dasselbe schliesst sich an das bekannte grosse Vorlagenwerk von Professor Ed. Herdtle an, dessen Entwicklungsgang durch dasselbe in sehr glücklicher und zweckentsprechender Weise weitergeführt wird. Die beiden Schöpfer des Werkes erweisen sich als hervorragende Pädagogen, wie auch als tüchtige Praktiker."

Zeichenhalle. — „Gewerbliche zeichnerische Fortbildung ist heute die richtige Parole, welche den schaffenden Kunstgewerbtreibenden auf Bahnen lenken muss, die ihm früher weitab lagen. Das rasche Emporblühen des Fortbildungs- und Fachschulwesens giebt lebhaft Zeugniss von dem kraftvollen Ringen des Handwerks und der Kunstindustrie, Versäumtes einzuholen. Hier knüpft das vorliegende Werk an, indem es, elementares zeichnerisches Können voraussetzend, dem Schüler die verschiedensten Vorbilder bietet, welche dem Formenkreise seines eigenen Gewerbes näher liegen."

Bresl. Gewerbeblatt 1883. No. 11: „Die beiden Herausgeber sind durch ihre amtliche Stellung als Kgl. Inspectoren des Zeichenunterrichts an den württembergischen Schulen mit den Bedürfnissen besonders der Fortbildungsschulen vollkommen vertraut und daher ist auch das vorliegende Werk so ausserordentlich zweckentsprechend. Wir sind der Ansicht, dass es in keiner Fortbildungsschule fehlen dürfte und empfehlen es auf das Angelegentlichste."

Zeitschr. für das österr. Realschulwesen. 1883. Nr. 11. „Unter den neuesten nicht seltenen Versuchen, gute Vorlagenwerke fürs Zeichnen zu schaffen, verdient wohl das genannte Werk entschieden einen Ehrenplatz!"

Prof. Ed. Herdtle's, Schule des Musterzeichnens f. Mädchen-, Frauenarbeits- und gewerbl. Fortbildungsschulen. Herausgegeben im Auftrage der Kgl. Württ. Kommission f. gewerbl. Fortbildungsschulen und unter Mitwirkung von Prof. **A. Biermann** u. Prof. **H. Kolb. 52** Tafeln mit Textheft. **Dritte** Aufl. **20** Mark (Separat-Ausgaben: I.—III. Abteilung. 36 Tafeln. Für Volksschulen. 10 Mark. — Kolb's Kolorierschule. 12 Farbdruckb. 9 Mark. — Gnant's Supplement: Technische Ausführung der Muster. 3 ½ Mark.)

Die „Schule des Musterzeichnens" reiht sich den zahlreichen früheren Arbeiten Herdtle's würdig an. Ihre Gesamtanlage lässt erkennen, dass eine organische Verbindung des Zeichnens mit der **weiblichen Handarbeit** ins Auge gefasst wird. Was sie besonders als ein durchaus zweckmässiges, ungemein praktisches Lehrmittel kennzeichnet, das ist, neben der Reichhaltigkeit an mustergültigen Formen, ihre streng pädagogische Anlage. Nachstehend folgen von den ca. 40 Empfehlungen nur einige:

Zeichenhalle. „Allen in dem Werke enthaltenen Aufgaben ist der überaus feine Geschmack eingeprägt, welchen wir in Herdtles Werken überall so hoch schätzen gelernt haben; dasselbe ist auch von Kolbs Koloriertafeln zu sagen."

Zeitschr. f. weibliche Bildung. „Alles, was man von einer vorzügl. Zeichenmethode nach den allerneuesten Forderungen wünschen mag, ist in dem vorliegenden Werke enthalten. — Für den Handarbeitsunterricht werden diese Vorlagen von epochemachender Bedeutung werden."

Zeitschr. des Vereins deutscher Zeichenlehrer. „Mit grosser Spannung erwarteten wir das neue Werk Herdtle's; wir erwarteten viel, sehr viel, aber unsere Erwartungen sind übertroffen!"

Schweizer. Schularchiv. „Ein höchst gediegenes Werk, das in keiner Mädchenschule fehlen sollte! — Die Ausstattung entspricht dem gediegenen Inhalt und verdienen Verleger wie Verfasser für diese schöne Gabe unsern besten Dank!"

Mittheilungen des Oesterr. Museums. 1880. Nr. 182. „Das hinterlassene Werk Herdtle's ist von der Verlagshandlung ganz besonders sorgfältig ausgestattet, um das Andenken des Verfassers zu ehren. Und wahrlich, die Württemberger haben alle Ursache, die Erinnerung an diesen Mann aufrecht zu erhalten! Unter den württemb. Zeichenlehrern nahm Herdtle die erste Stelle ein! Wie alle Werke Herdtle's wird auch dieses bald Eingang finden, welches wir unsern Lehrern nur bestens empfehlen können."

Herdtle, Prof. Ed., Stilisierte Blumen aus allen Kunstepochen. **114** Vorbilder für Gewerbtreibende, sowie für das Freihand- u. Musterzeichnen 21 Tafeln in Royal-Format mit Text. **Zweite** Aufl. In eleg. Mappe. **7** ½ ℳ ord.

Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Zeichenlehrer. „Dieses prachtvolle Werk des hochberühmten, leider zu früh verstorb. Verfassers, empfehlen wir nicht allein den Fachzeichnern und den Fachschulen, sondern auch den wissenschaftlichen Lehranstalten angelegentlichst."

Schweiz. Gew.-Ztg. „Mit feinem Verständniss sind im vorliegenden Werk die wirklich der Natur abgelauschten Motive nach den verschiedenen Kunstepochen geordnet und bilden so eine unschätzbare Fundgrube für viele Industrien, sowie für den Unterricht in Fachschulen."

Kunst u. Gewerbe. „Herdtle's „Stilisirte Blumen" sind in Bezug auf Auswahl des Stoffes, sowie Schönheit der Zeichnung und des Drucks eine musterhafte Publikation, die bald ein beliebter Freund aller Zeichenlehrer und ein sicherer Führer der lernenden Jugend werden wird."

Wieck's Gewerbezeitung. „Herdtle's „Stilisirte Blumen" zählen zu dem Besten, was er geschaffen und sind allen gewerbl. Fortbildungs- und Zeichenschulen nicht warm genug zur Anschaffung zu empfehlen."

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Empfehlenswerthe Vorlagewerke aus dem Verlage von WILHELM EFFENBERGER in Stuttgart.

In dritter Auflage erschien und ist bereits in über 1500 Schulen im Gebrauch:

Prof. H. KOLB's

25 Wandtafeln f. d. elementare Freihandzeichnen

an gewerbl. Fortbildungs-, Volks-, Bürger-, Real- und Töchterschulen, sowie Gymnasien.

Herausgegeben mit Gutheissen der Kgl. Württ. Kommission f. gewerbl. Fortbildungsschulen.

Nebst illustriertem Textheft, enthaltend 4 Tafeln mit 24 Abbildungen.

Preis: 10 Mark. In Mappe 12 Mark. Auf Papptafeln gezogen 21½ Mark (exkl. Fracht).

(Format der Wandtafeln 61/82 Centimeter.)

Die Kolb'schen Wandtafeln wollten einem Bedürfniss entsprechen, da der **Massenunterricht** im ornamentalen Freihandzeichnen in neuester Zeit allerorten immer mehr und mehr zur richtigen Würdigung und Anerkennung gelangt, wie er auch in allen Fachorganen auf das dringendste anempfohlen wird, während es andrerseits an den, diesem Zweck vollständig entsprechenden Lehrmitteln seither mangelte.

Dass der Herausgeber das Richtige mit diesen neuen Vorlagen getroffen hat, beweist wohl am besten das rasche Erscheinen **dreier** Auflagen; ausserdem aber mögen von den über **30** günstigen Beurteilungen dieses

auf Anregung und unter Prüfung und Gutheissung seitens der kgl. württembergischen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen

herausgegebenen, amtlich von sämtlichen kgl. Württ. Oberschulbehörden empfohlenen und in **allen** Württ. Schulen bereits eingeführten praktischen Lehrmittels nachstehend mehrere zum Abdruck gelangen:

Bayr. Lehrerztg. 1886.: „Empfehlende Worte noch beizufügen, dürfte bei diesem Werke überflüssig sein, da früher erschienene Lehrmittel für den Zeichenunterricht, welche von der kgl. württ. Kommission f. gew. Fortbildungsschulen gutgeheissen wurden, überall Anklang gefunden haben und sich rasch Aufnahme verschafften."

Zeitschr. d. Vereins deutscher Zeichenlehrer. 1885. Nr. 11: „Bessere Wandtafeln können wir uns f. d. Volksschule und für Quinta u. Quarta d. höh. Schulen gar nicht wünschen! Sie sind von grossem Format, die Figuren mit starker Kontur gezeichnet, geschmackvoll, mit pädagog. Verständnis, gewählt u. vortrefflich, auf angenehm getöntem Papier, ausgeführt. Dabei ist der Preis ein so ausserordentlich mässiger, dass auch kleinere Schulen die Tafeln anschaffen können. Es ist eine grosse Freude für uns, in all dem Wust, der für den Zeichenunterricht hervorgebracht wird, auch einmal einem tadellosen Werk zu begegnen! Wir empfehlen diese Tafeln auf das Dringendste."

Monatsbl. f. d. Zeichenunterr. an Volksschulen: „Die Tafeln sind geschmackvoll, mit künstlerischem und pädagog. Verständnis gewählt und vortrefflich auf angenehm getöntem Papier ausgeführt. Es sind mir bessere Vorhängetafeln nicht bekannt."

Zeitschr. f. gewerbl. Unterricht. 1886. Nr. 6: „Eine der wichtigsten Aufgaben des elementaren Freihandzeichen-Unterrichts besteht in der systematischen Entwickelung des Pflanzenornaments; es bildet die Grundlage eines feiner empfundenen Geschmacks und führt uns gewissermassen in den Formenschatz der Natur ein. Dieses Ziel verfolgt der Herausgeber in der glücklichsten Weise in seinen vorliegenden 25, für den Massenunterricht bestimmten Wandtafeln, indem er hierzu neben einfachen, stilisierten Blattformen, wie vorzugsweise das Epheu-, Eichen- und Weinblatt etc. verwendet. Was Ebenmass der Formen und Sicherheit der Linienführung betrifft, kann sich kein deutsches Wandtafelwerk ihm zur Seite stellen."

Blätter f. Bayr. Realschulwesen. 1886. Nr. 1: „Nachdem die früheren Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehrmittel für den Zeichenunterricht, welche von der kgl. württ. Kommission für gewerbl. Fortbildungsschulen veranlasst oder gutgeheissen wurden, wohl allenthalben Anklang gefunden haben, und kaum eine technische Mittelschule in Bayern zu finden sein dürfte, welche nicht mindestens einige dieser Werke kennt und in Verwendung hat, so werden neben der Erwähnung der Approbation durch die genannte Kommission und der Erinnerung daran, dass der Verfasser auch der Herausgeber der bekannten „Vollbilder f. d. Ornamentenzeichnen" und der „Kolorierschule" ist, alle weiteren empfehlenden Worte überflüssig sein."

Zeitschr. d. Vereins österr. Zeichenl. 1886. N. 6: „Dass Prof. Kolb zum Entwurf dieses Lehrmittels gerade die passende Persönlichkeit ist, hat er durch seine früheren Publikationen bewiesen und mit der vorliegenden neuerdings bestätigt. — Sein neues Lehrmittel gehört unstreitig zu den besten f. den Massenunterricht, wenn es nicht überhaupt das vorzüglichste aller bisher in Deutschland erschienenen Wandtafelwerke genannt zu werden verdient. Die Auswahl des Stoffes entspricht ganz den Schulen, für welche es gehört, die Darstellung lässt nichts zu wünschen übrig und die Ausstattung gereicht der Verlagsfirma zur Ehre; in Anbetracht dieser Eigenschaften erscheint der Preis geradezu verschwindend. Alles in allem präsentirt sich das Werk ebenso vorteilhaft, als es gediegen angelegt ist und bleibt für die Schule nur die grösste Verbreitung dieser Wandtafeln — welche übrigens bereits eingetreten sein soll — zu wünschen."

Westdeutsches Gewerbebl. 1885. Nr. 11: „Es ist wohl sicher anzunehmen, dass unter den heutigen elementaren Vorlagenwerken keines vorhanden, welches den Bedingungen eines guten Vorlagenwerkes für den Massen-Zeichenunterricht so entspricht, wie das vorliegende."

Amtlich empfohlen von nachstehenden hohen Behörden:

Grossherzogl. Bad. Oberschulrat.
Kgl. Preuss. Prov.-Schulkolleg. f. Schleswig-Holstein.
Kgl. Sächs. Kultministerium.
Oberschulrat für Elsass-Lothringen.
Kgl. Württ. Evang. Konsistorium.
Kgl. Württ. Kathol. Kirchenrat.
Kgl. Württ. Kommission f. d. gew. Fortbildungsschulen.
Kgl. Württ. Kultminist.-Abteil. f. Gelehrten- u. Realschulen.
Grossh. Mecklenb. Ministerium (Schwerin).
Grossh. Luxemb. Generaldirektion.
Herzogl. Anhalt. Regierung.
Kgl. Holländ. Reichs-Normalzeichenschule.
Kgl. Rumän. Minister. f. Kultus u. öffentl. Unterricht.

Zu beziehen durch jede gute Buchhandlung des In- und Auslandes.

(1 Probetafel des Werkes nebst ausführlichem Prospekt wird gratis geliefert.)

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

SR-Media -
Sortimentsbuchbinderei
46519 Alpen
Tel.(02802) 800 111
Ral-RG 495
Einband säurefrei - 01.11.2008

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

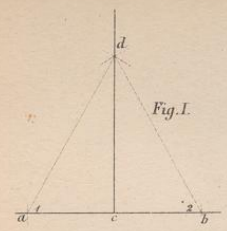


Fig. I.

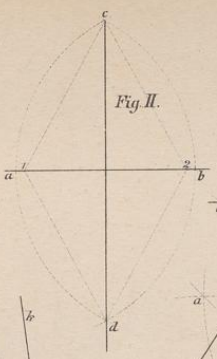


Fig. II.

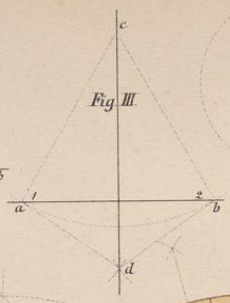


Fig. III.

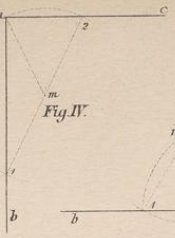


Fig. IV.

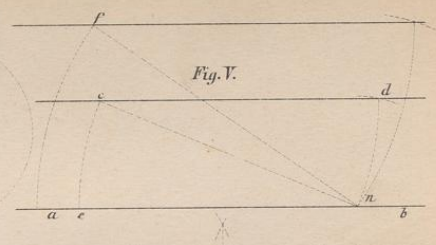


Fig. V.

Fig. VI.

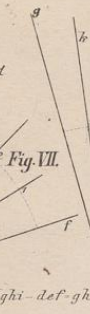


Fig. VII.

Fig. VIII.

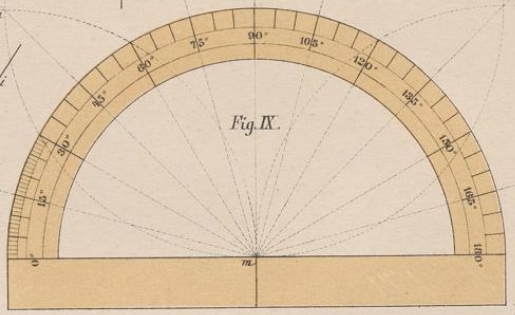


Fig. IX.

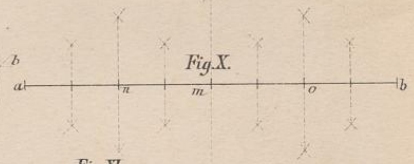


Fig. X.

Fig. XI.

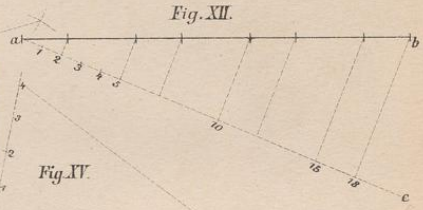


Fig. XII.

Fig. XV.

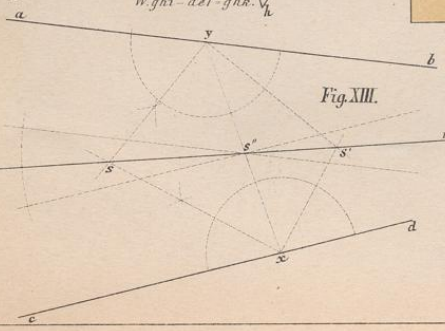


Fig. XIII.

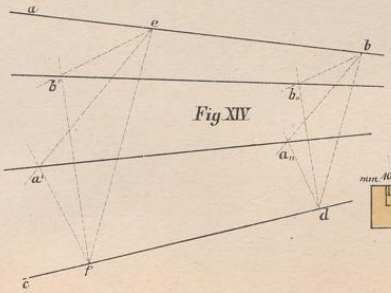


Fig. XIV.

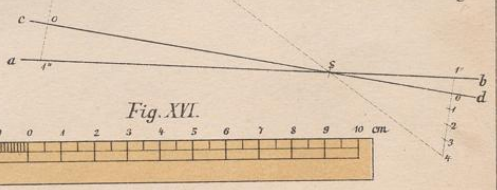


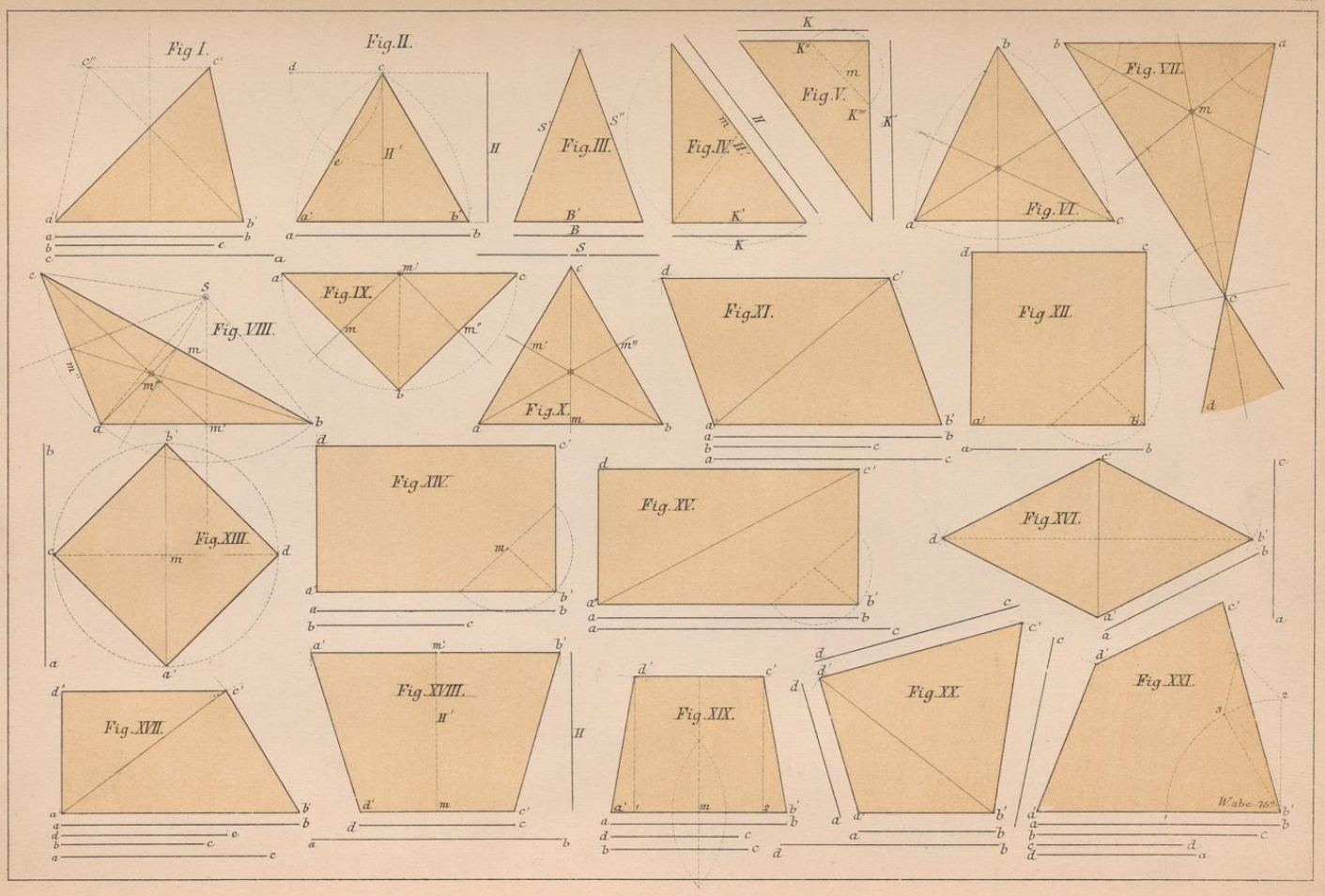
Fig. XVI.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn
27

06
TPA
1453

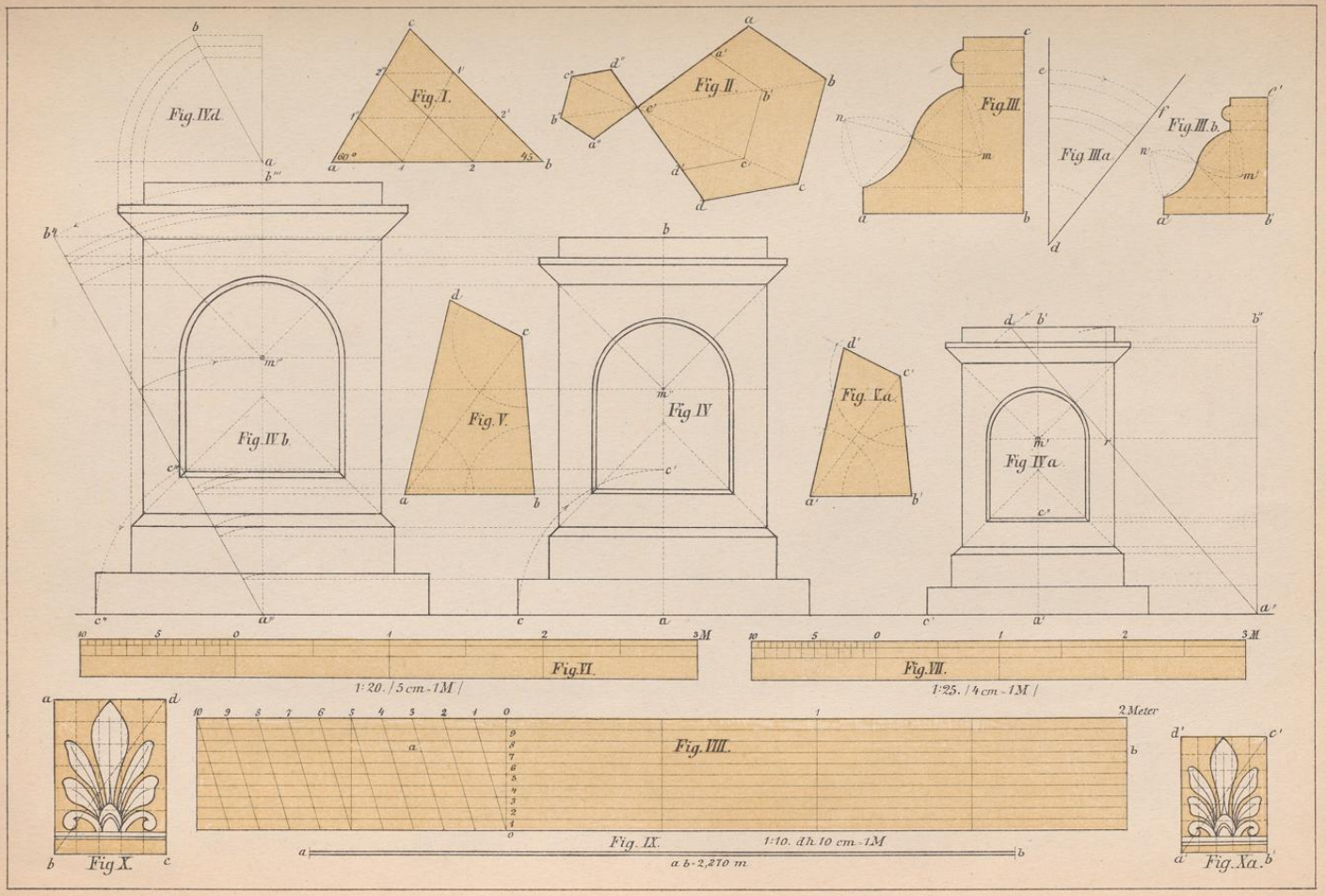
EK 1511
K AIV/K5



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06
TPA
1453
Universitätsbibliothek Paderborn
27
ΕΚ 1511
ΚΑΤΙΚΣ

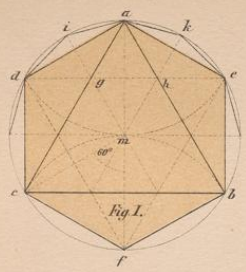
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

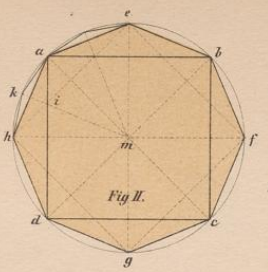


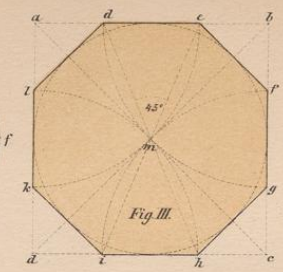
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

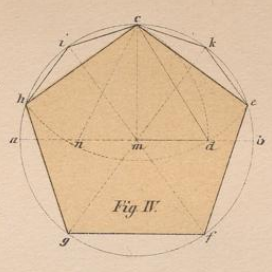
06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 15M
KA IV / K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN









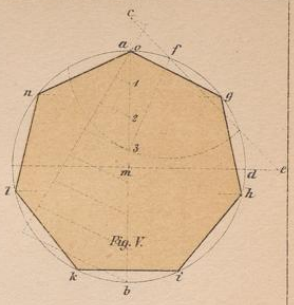
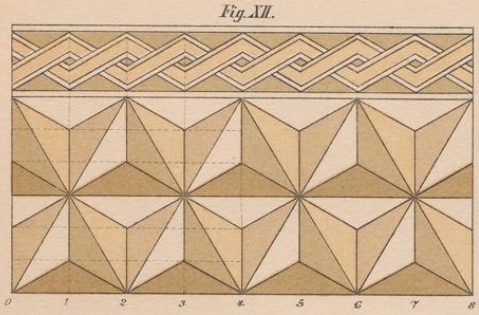


Fig. XII.



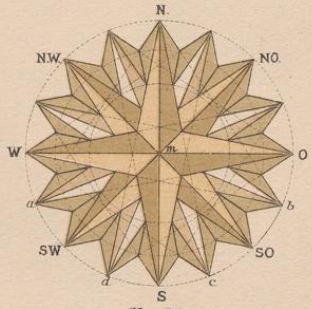
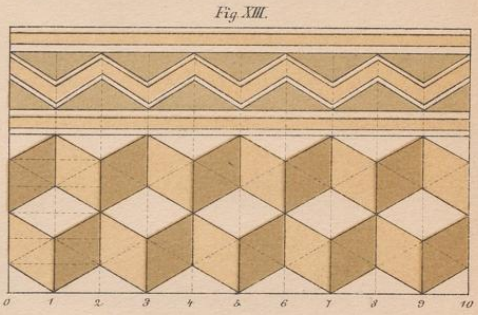
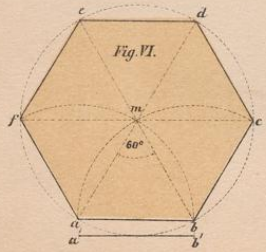
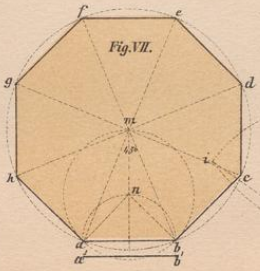


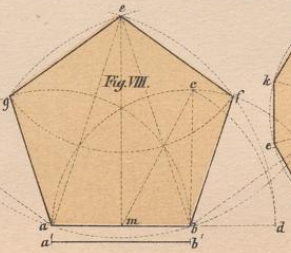
Fig. XI.

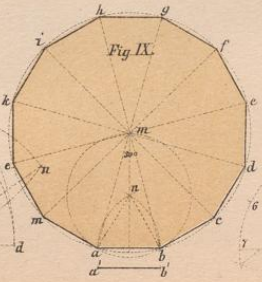
Fig. XIII.

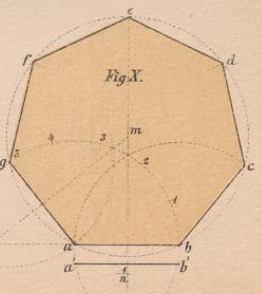










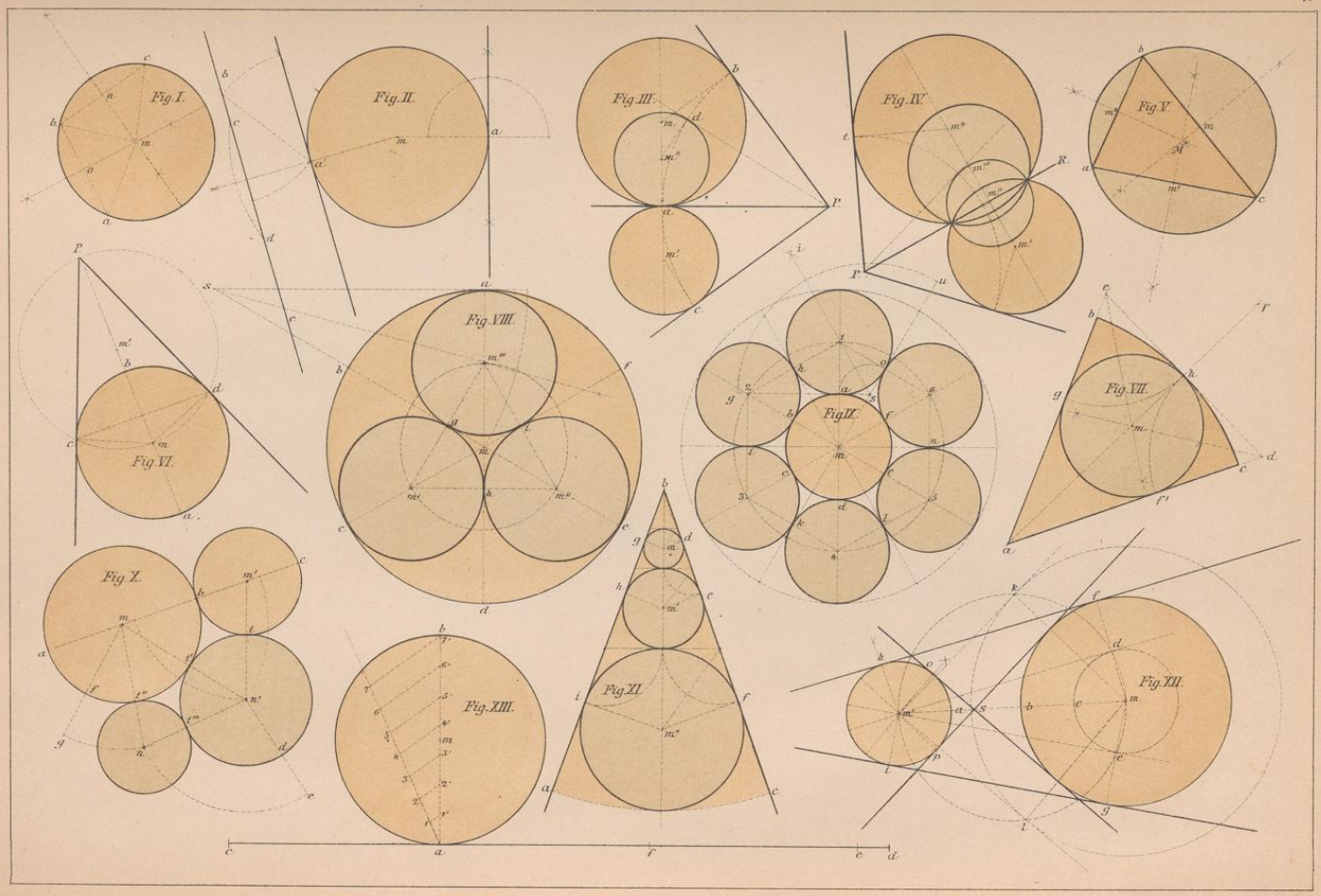


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV 1K5

06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

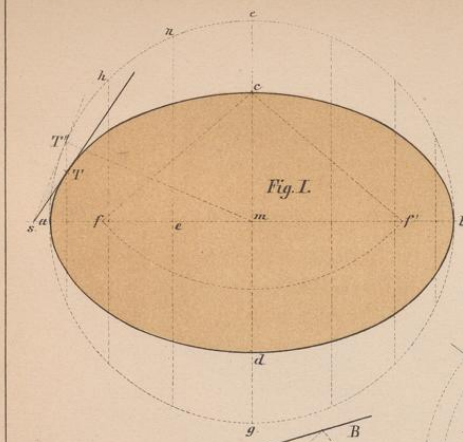


Fig. I.

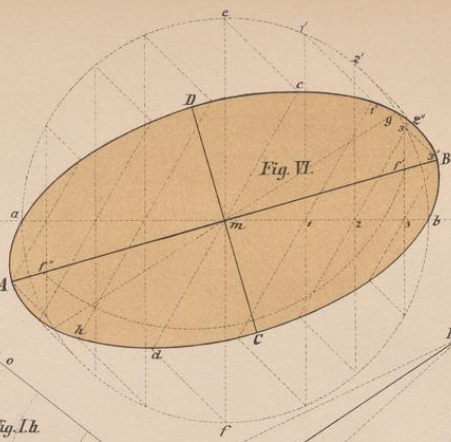


Fig. VI.

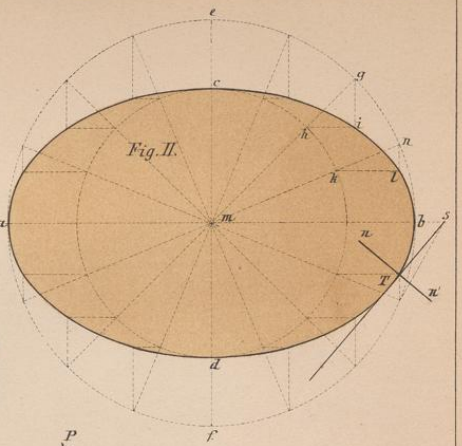


Fig. II.

Fig. I.b.

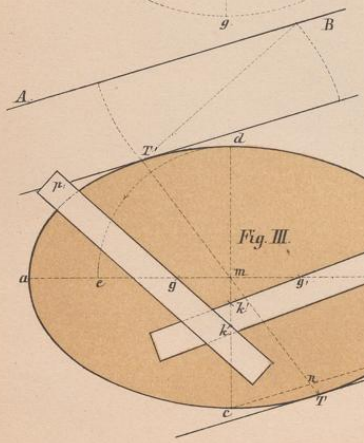


Fig. III.

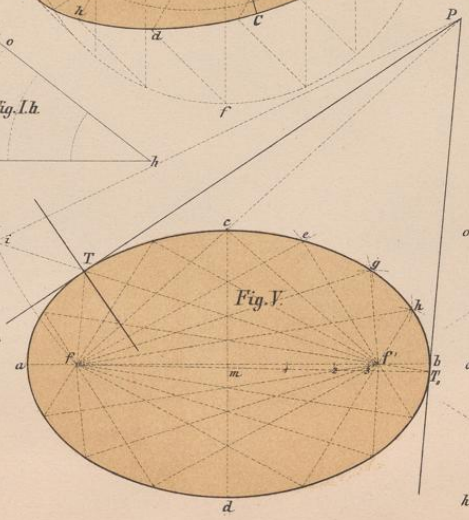


Fig. V.

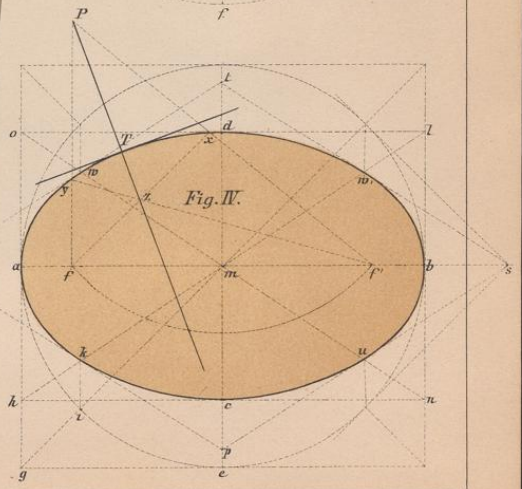
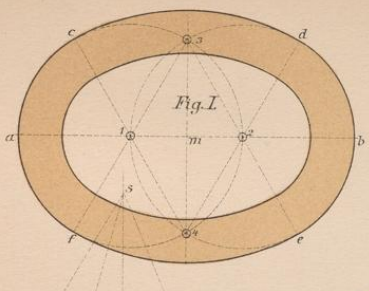
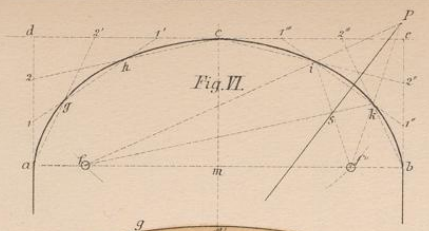


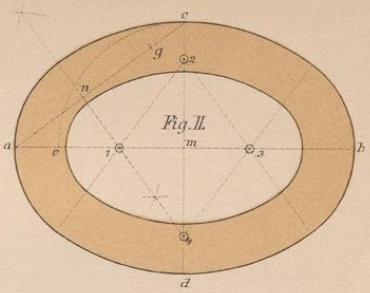
Fig. IV.

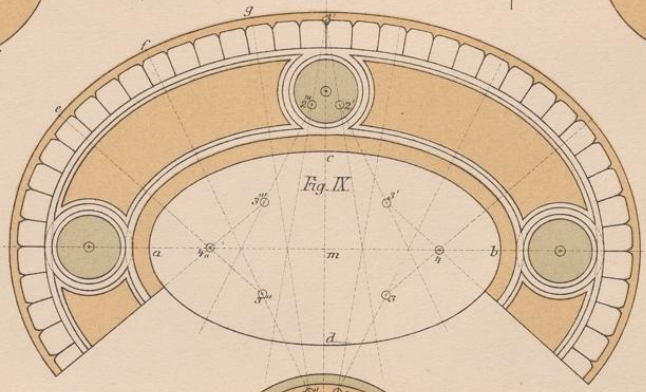
06 TP7 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV / K5

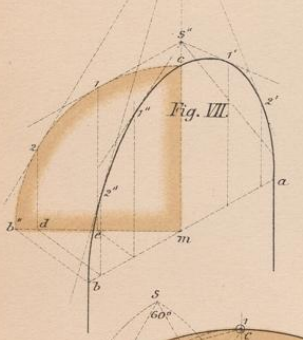
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

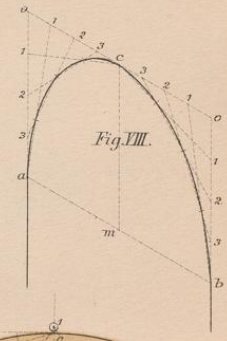


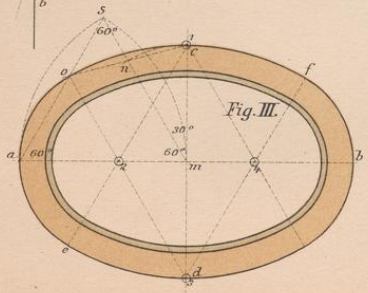


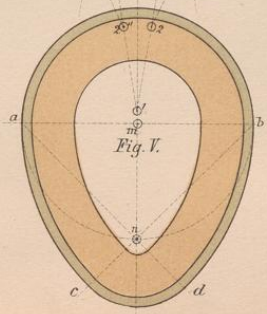


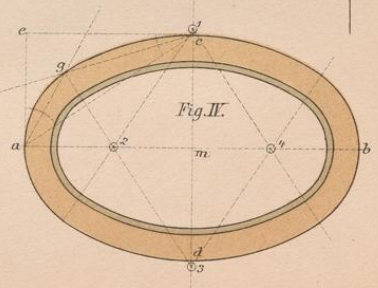






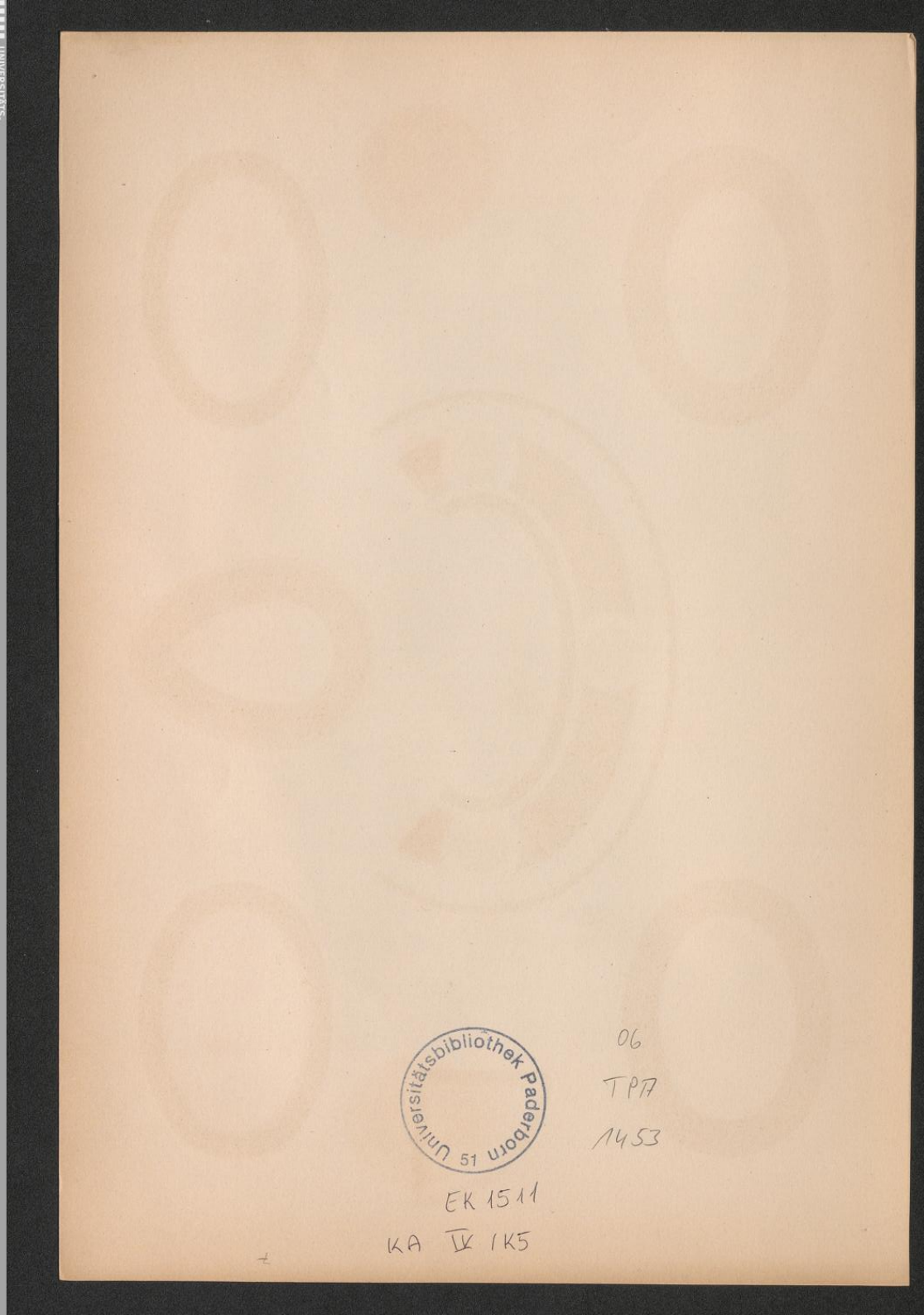






UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



Universitätsbibliothek Paderborn 51

06
TPT
1453

EK 1511
KA IV 1K5

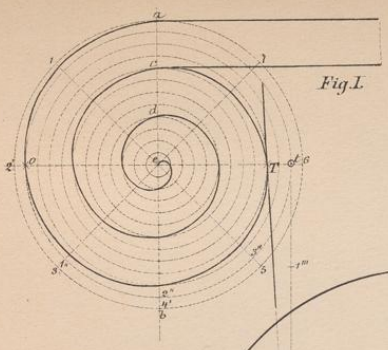


Fig.I.

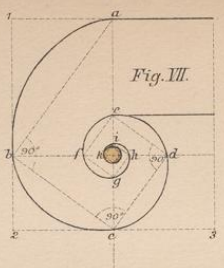


Fig.VII.

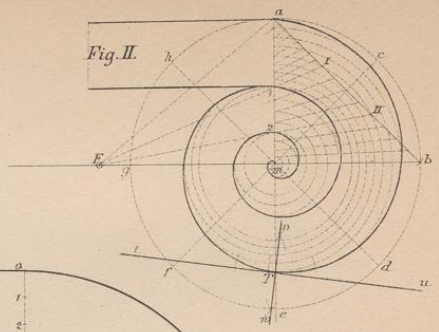


Fig.II.

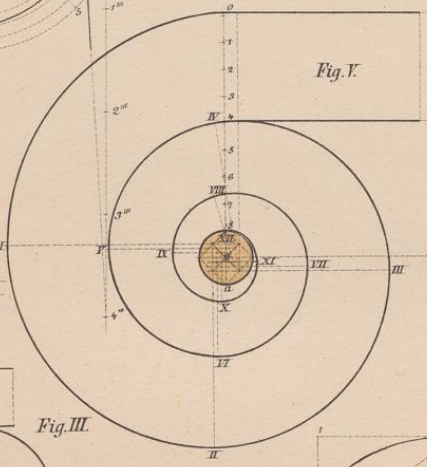


Fig.V.

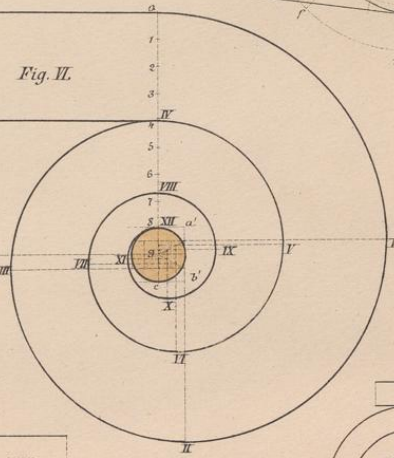


Fig.VI.

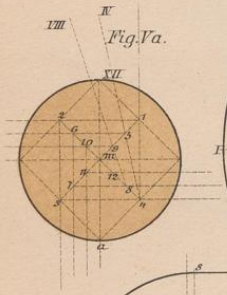


Fig.Va.

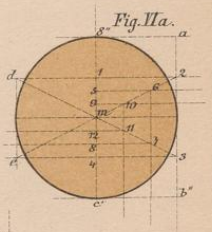


Fig.IIa.

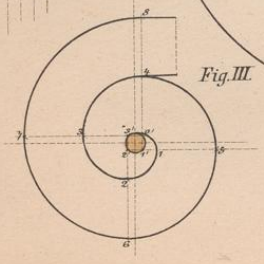


Fig.III.

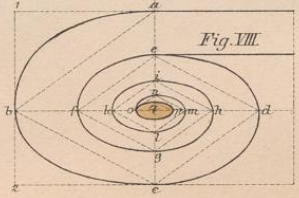


Fig.VIII.

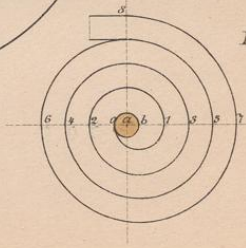


Fig.IV.

06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 1K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. IV.

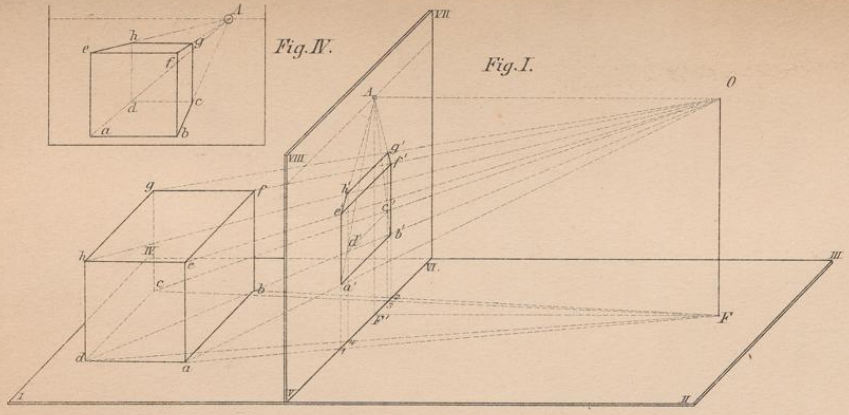


Fig. I.

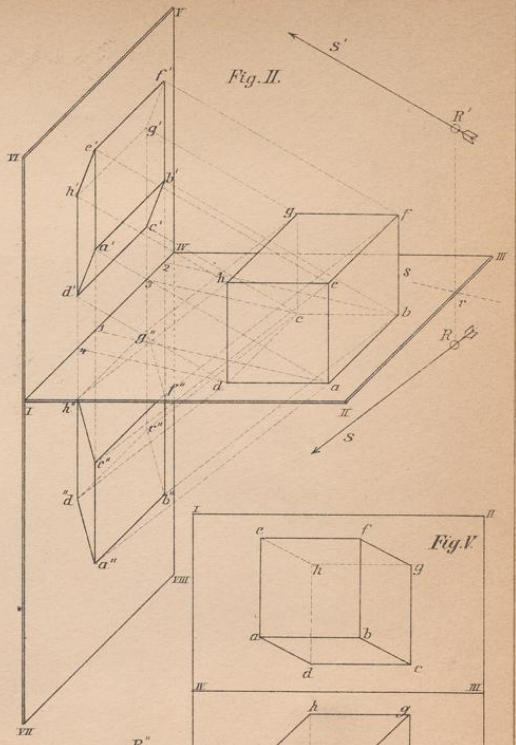


Fig. II.

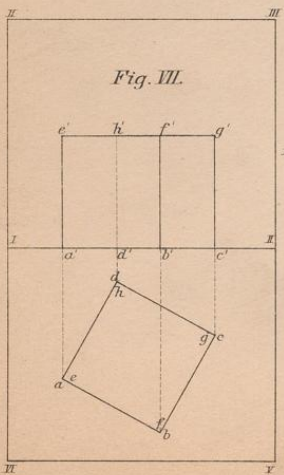


Fig. VII.

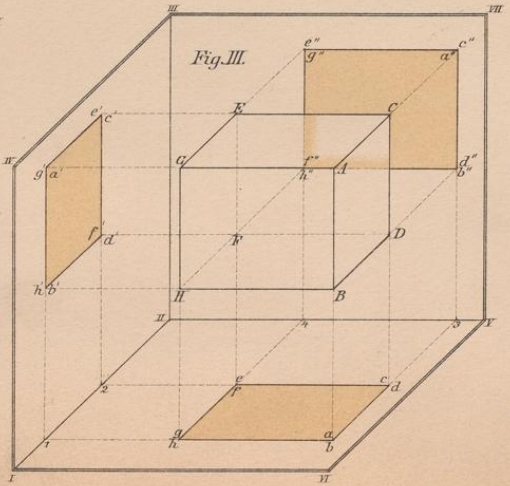


Fig. III.

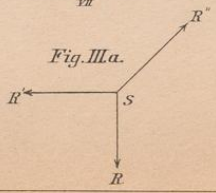


Fig. III.a.

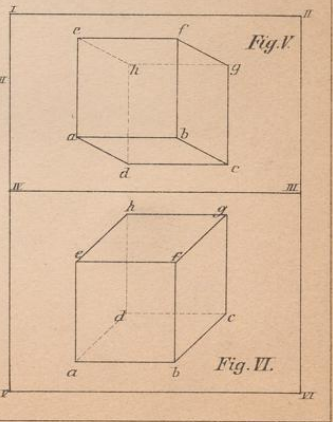
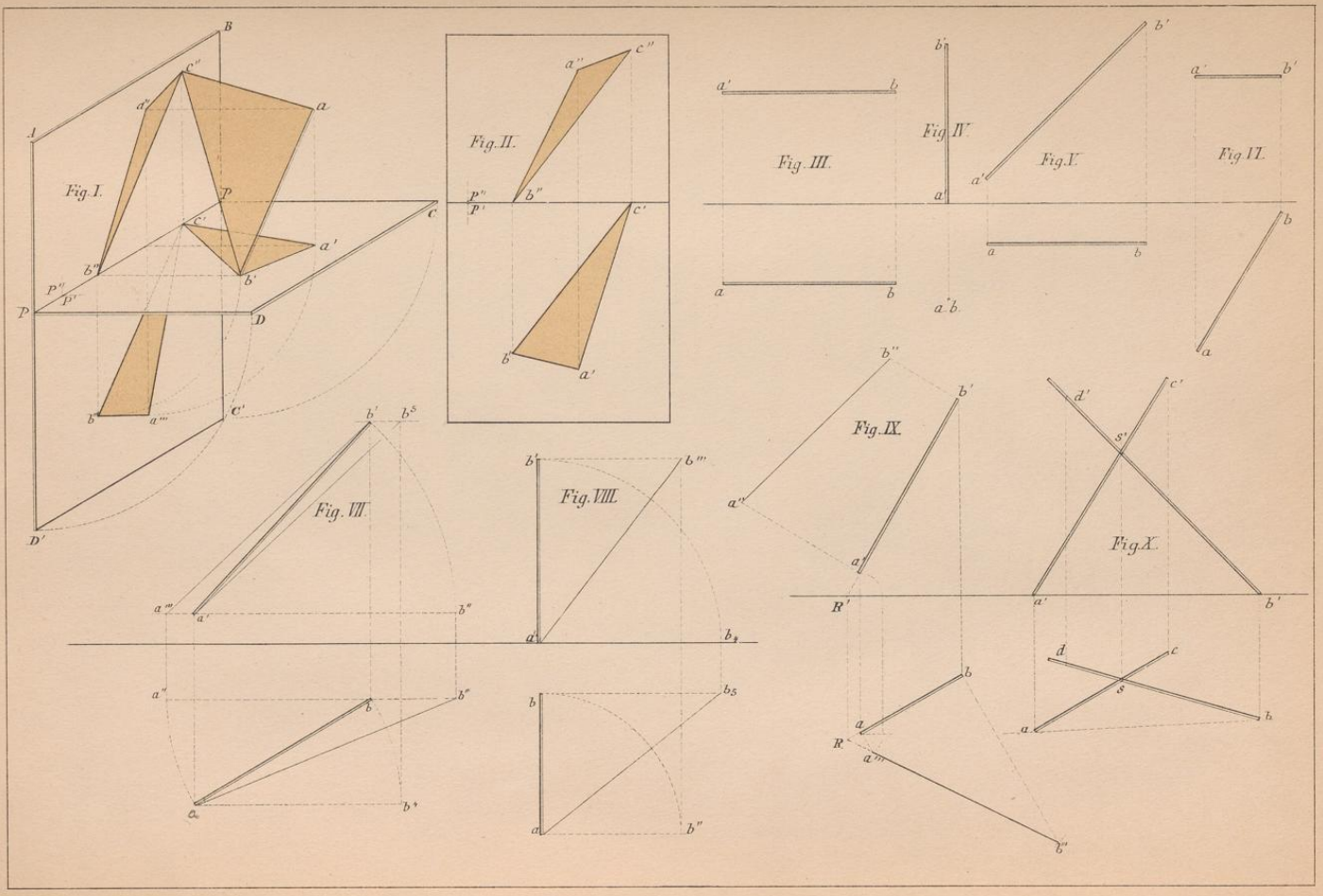


Fig. V.

Fig. VI.

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 1145



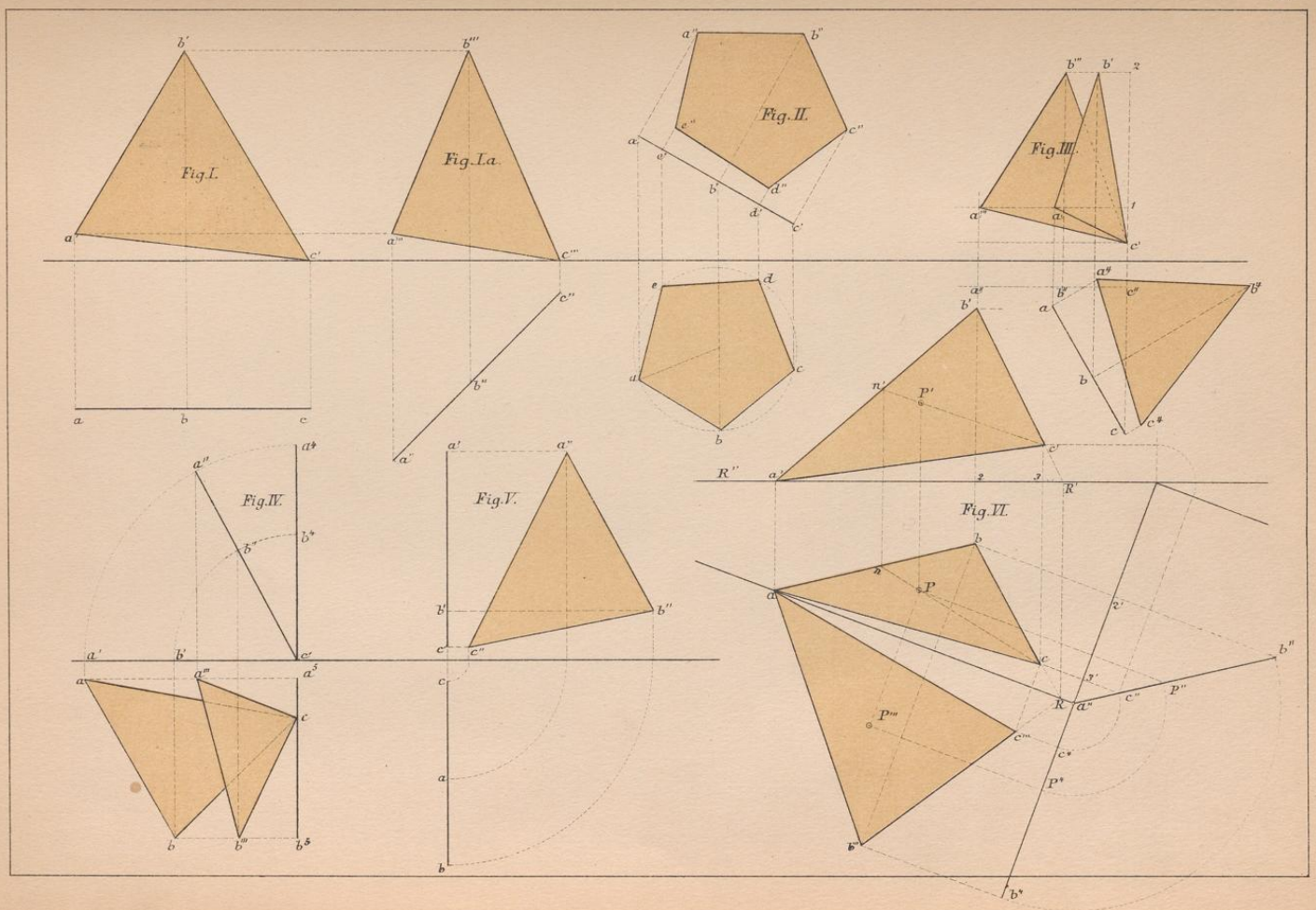
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV 1K5

06
TPA
1453



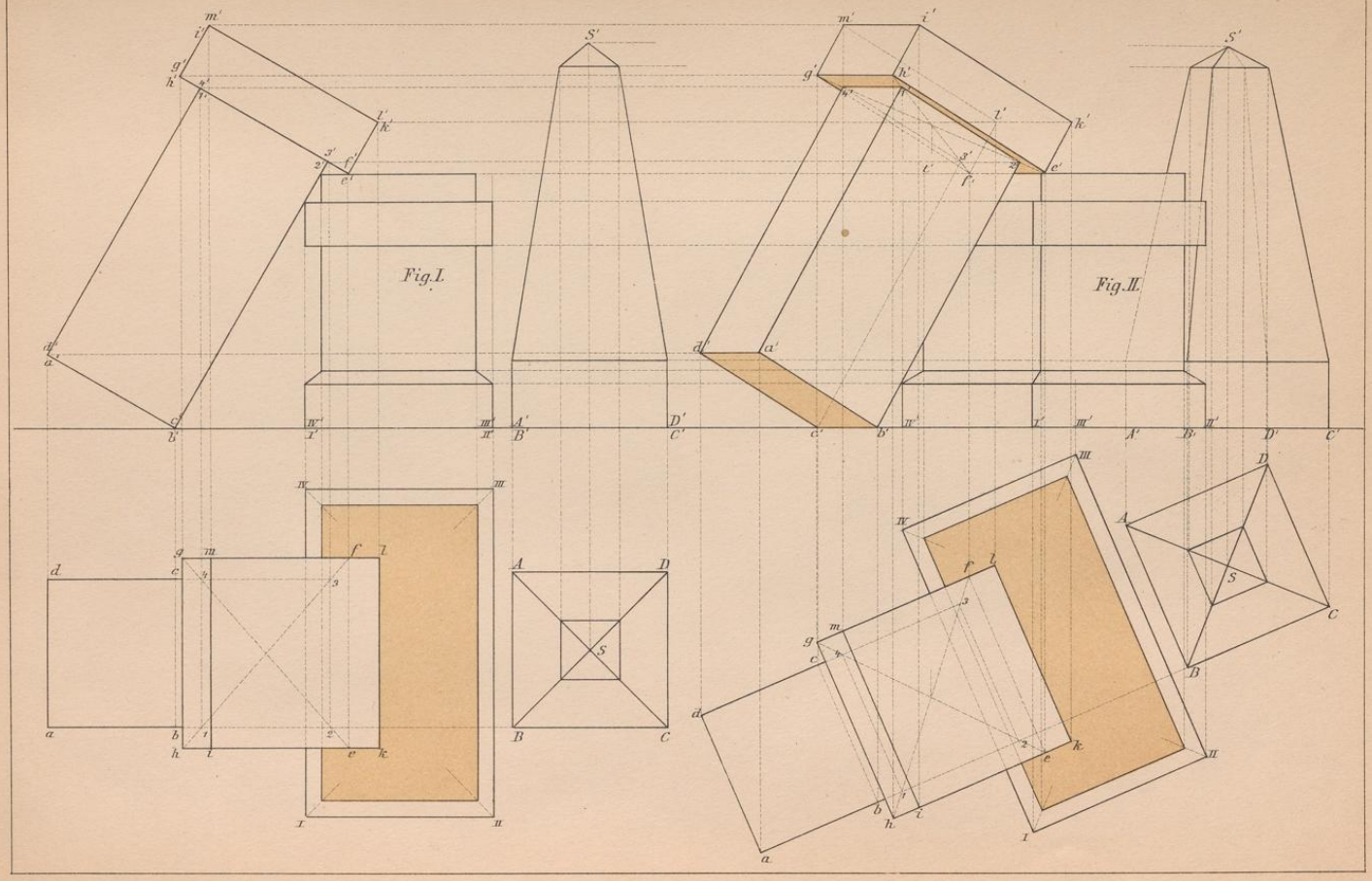
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV / K5

06
TPA
1453



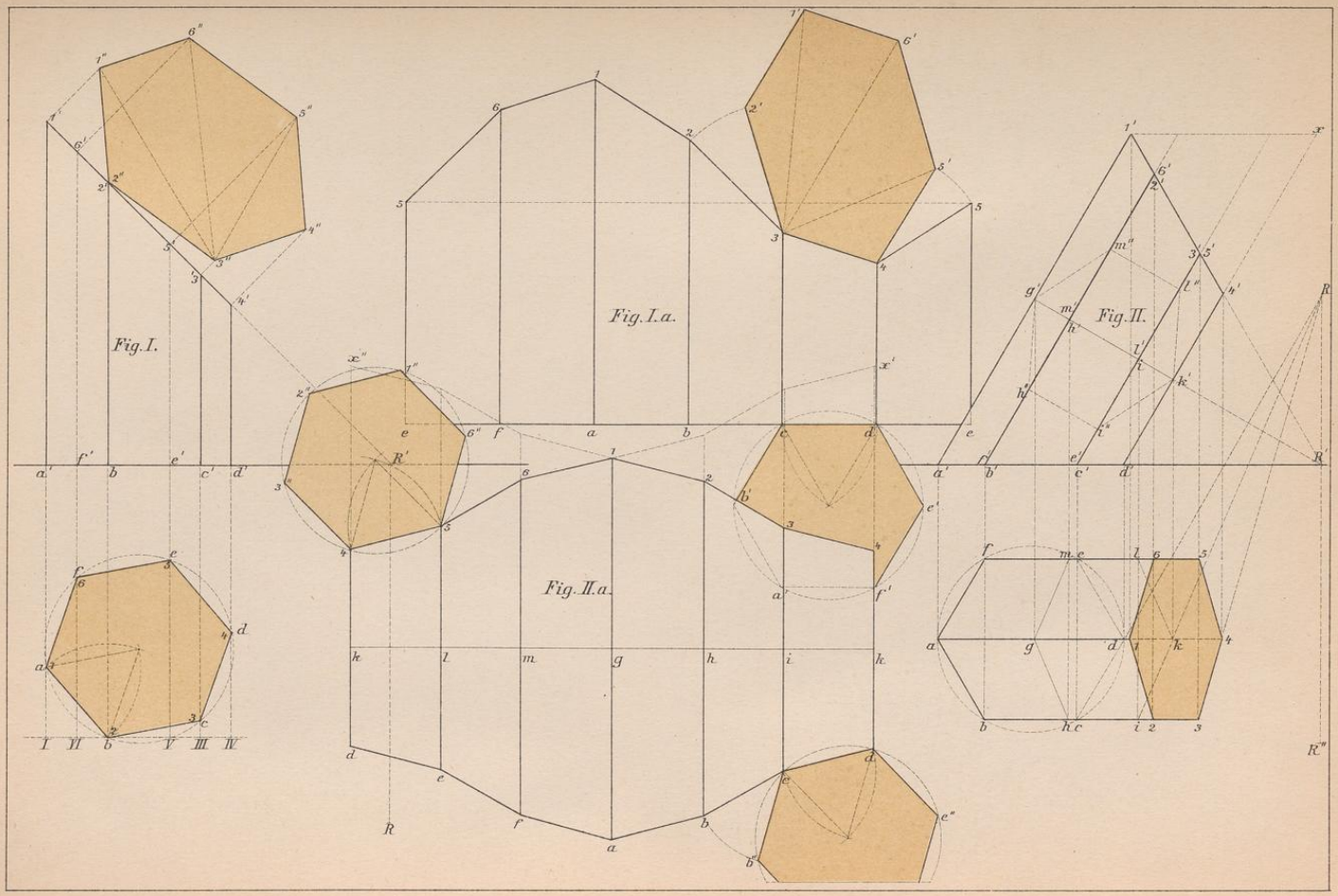
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

06
TPA
1453

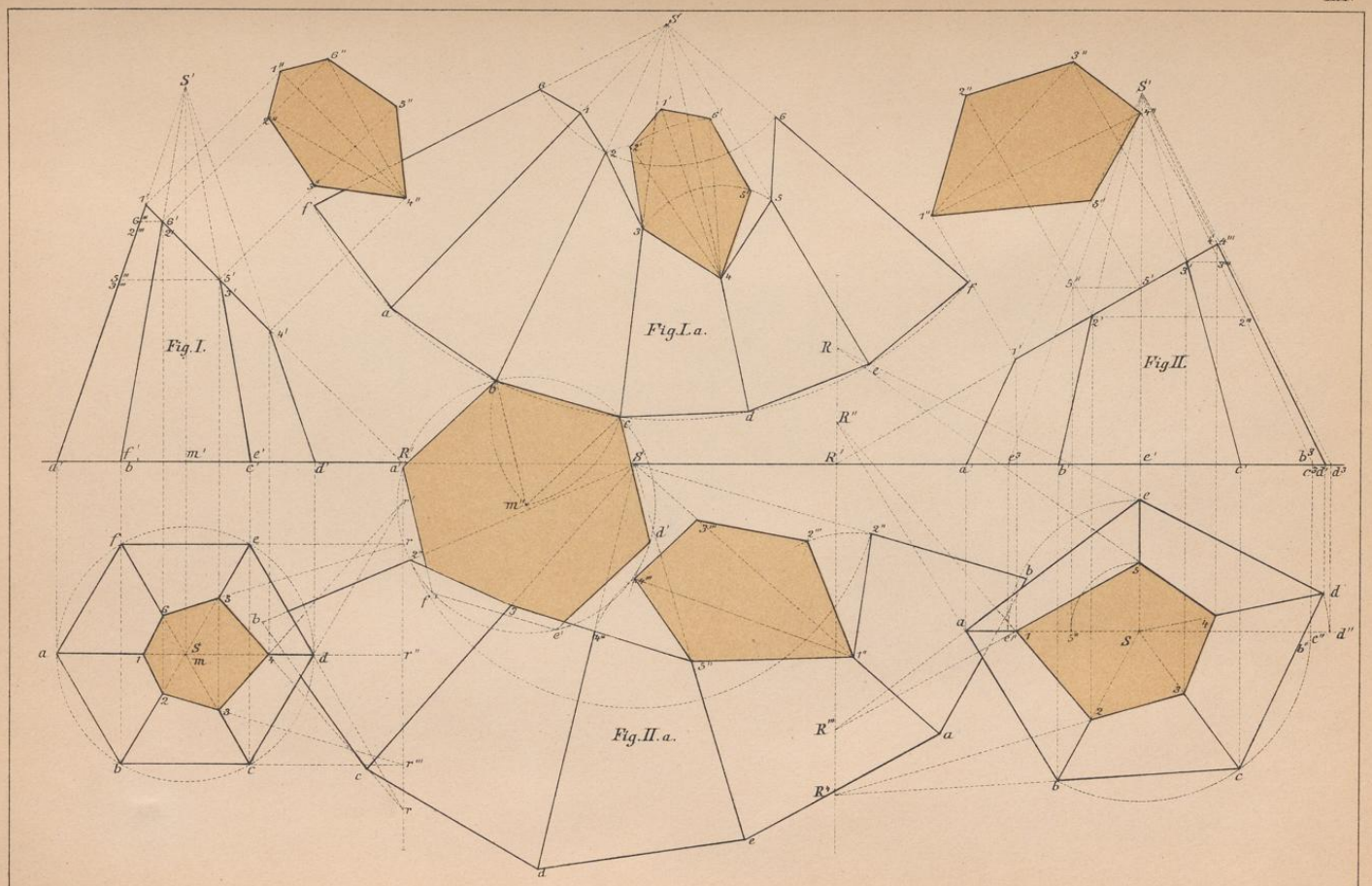
EK 1511
KA IV 1K5



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06
TPA
1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



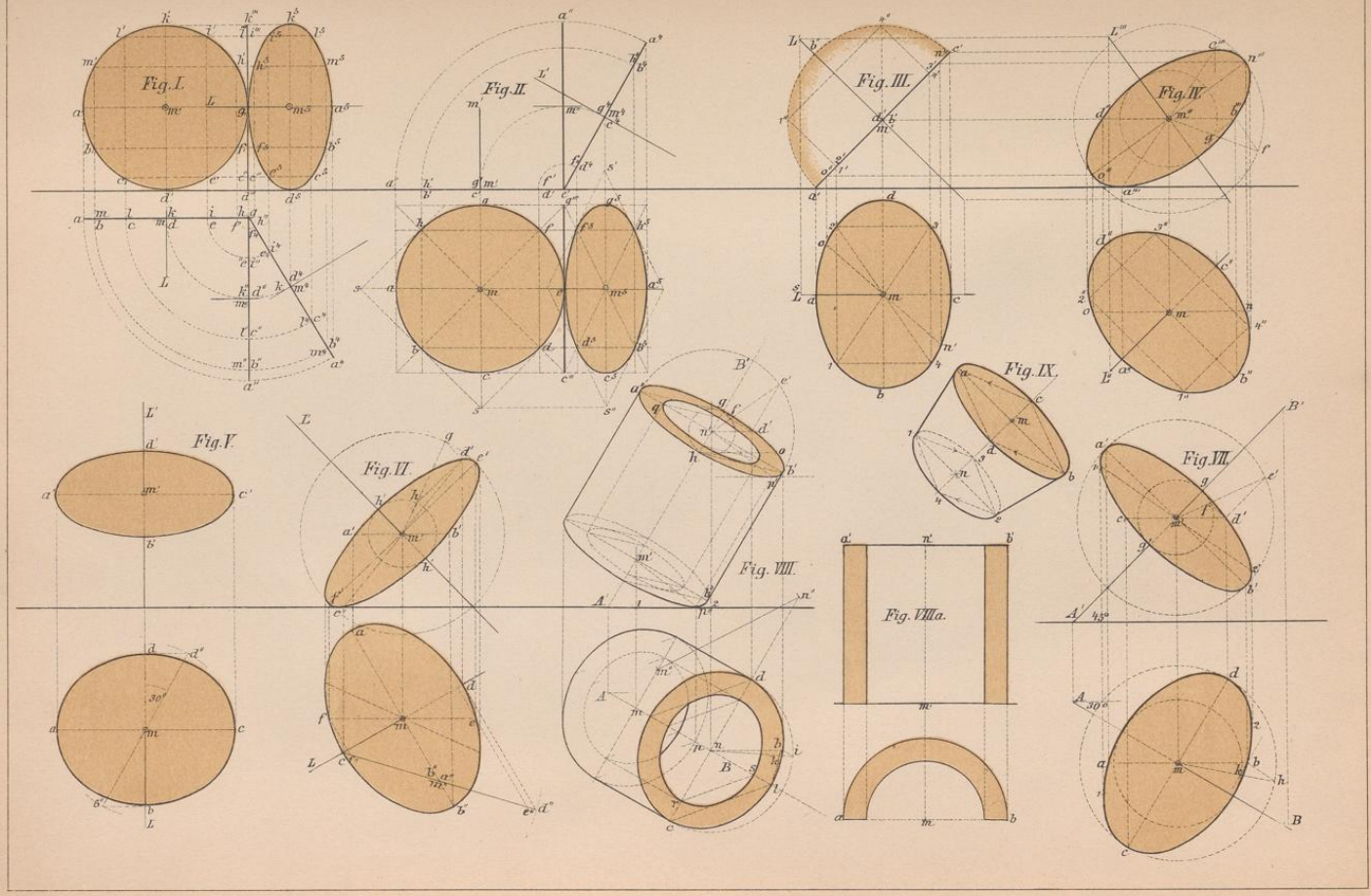
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

06
TPA
1453

EK 1511
KA IV 1K5



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn
06
TPA
1453
EK 1511
KA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

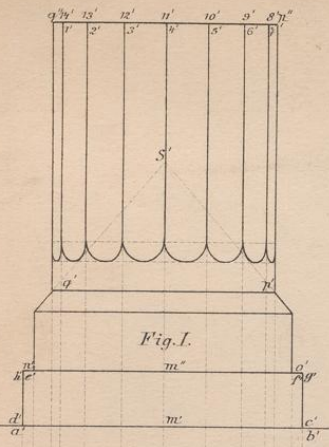


Fig. I.

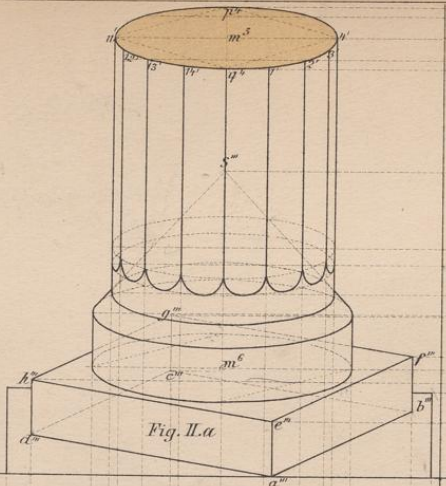


Fig. II.a

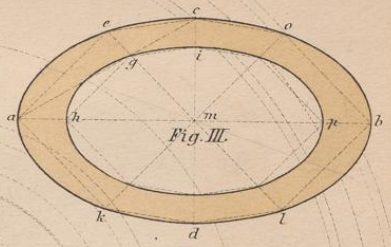
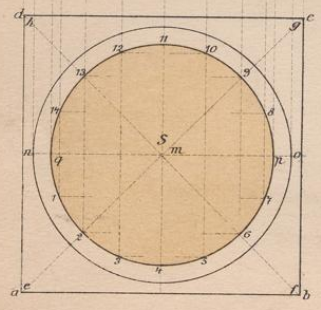
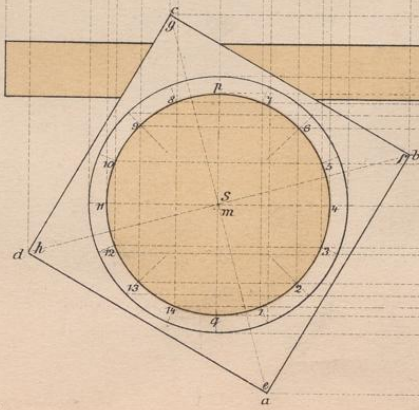


Fig. III.





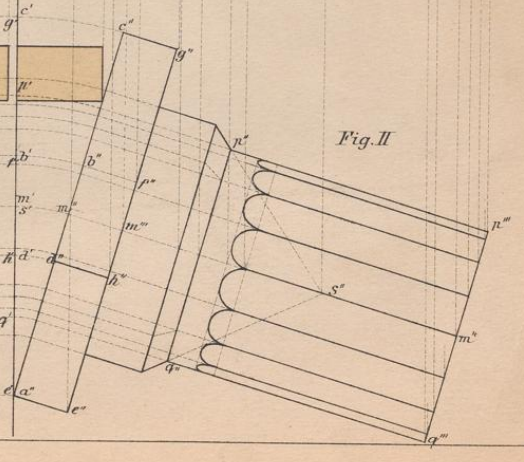


Fig. II

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV 1K5

06
TPA
1453

Fig. II.

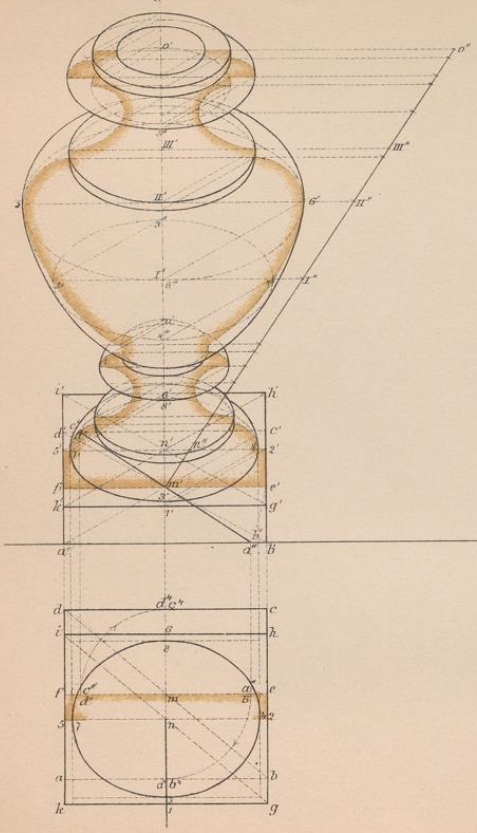


Fig. I.

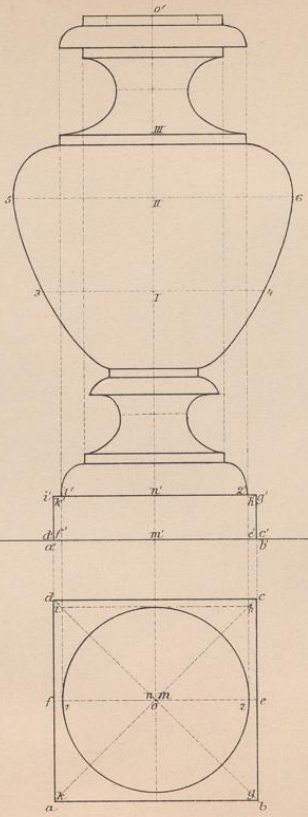
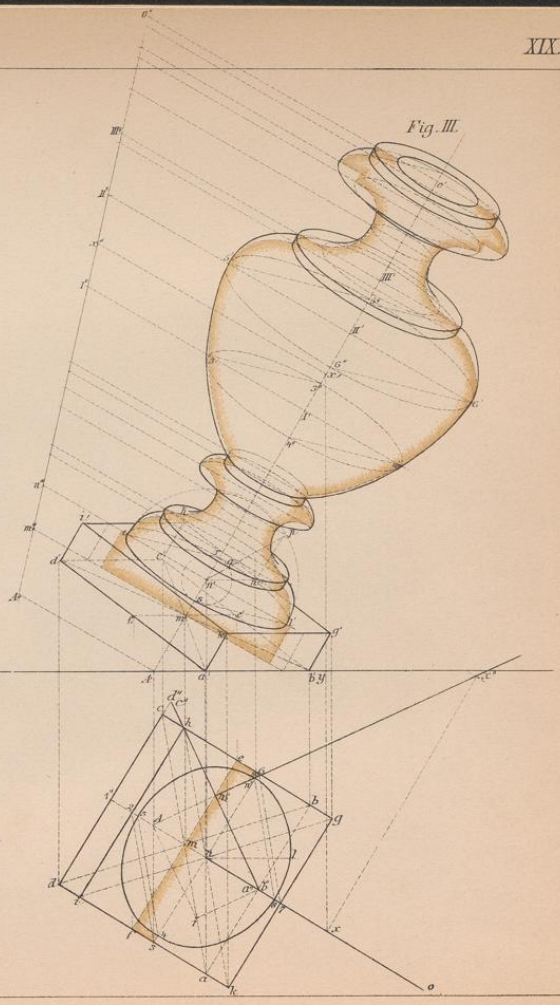


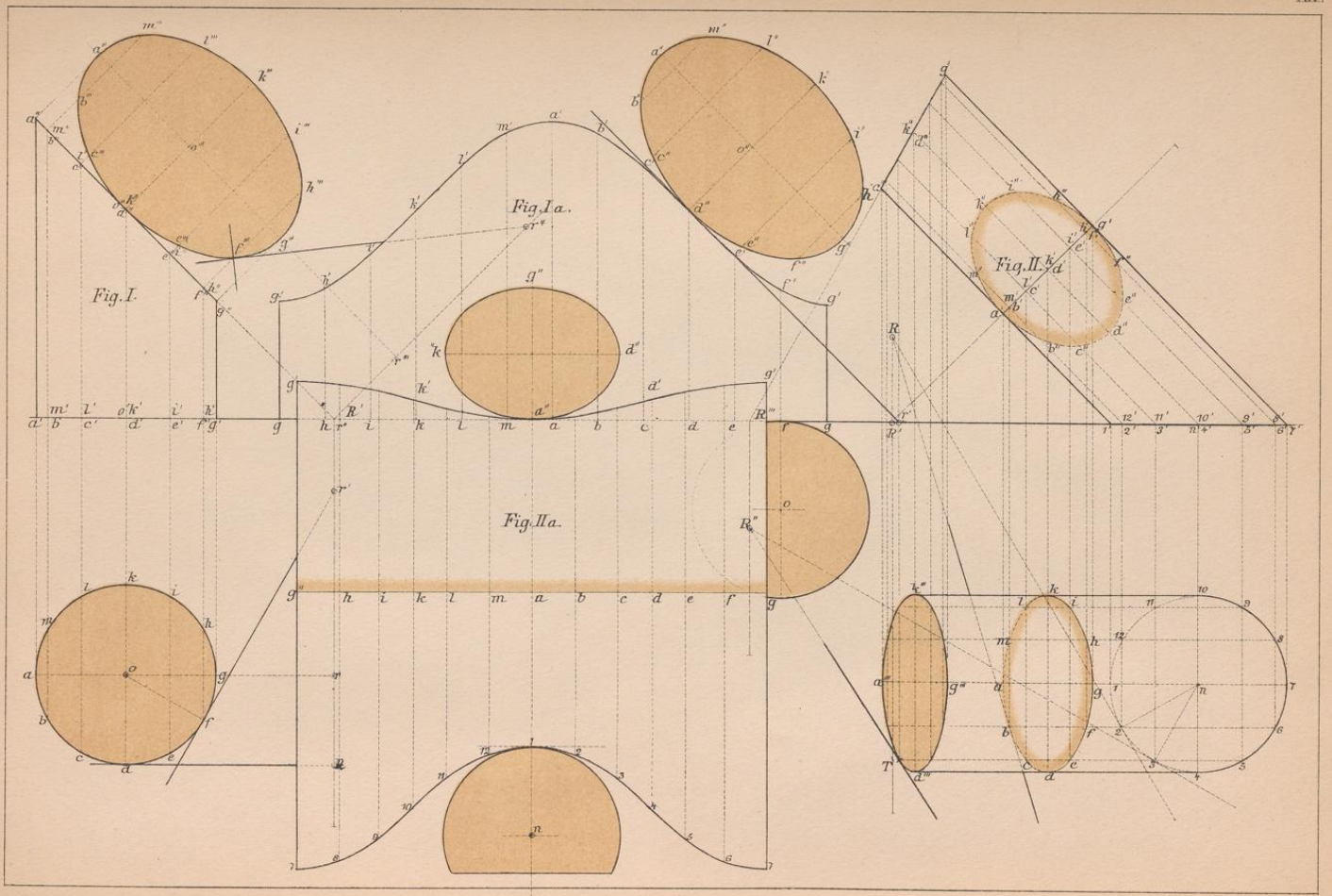
Fig. III.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
kA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

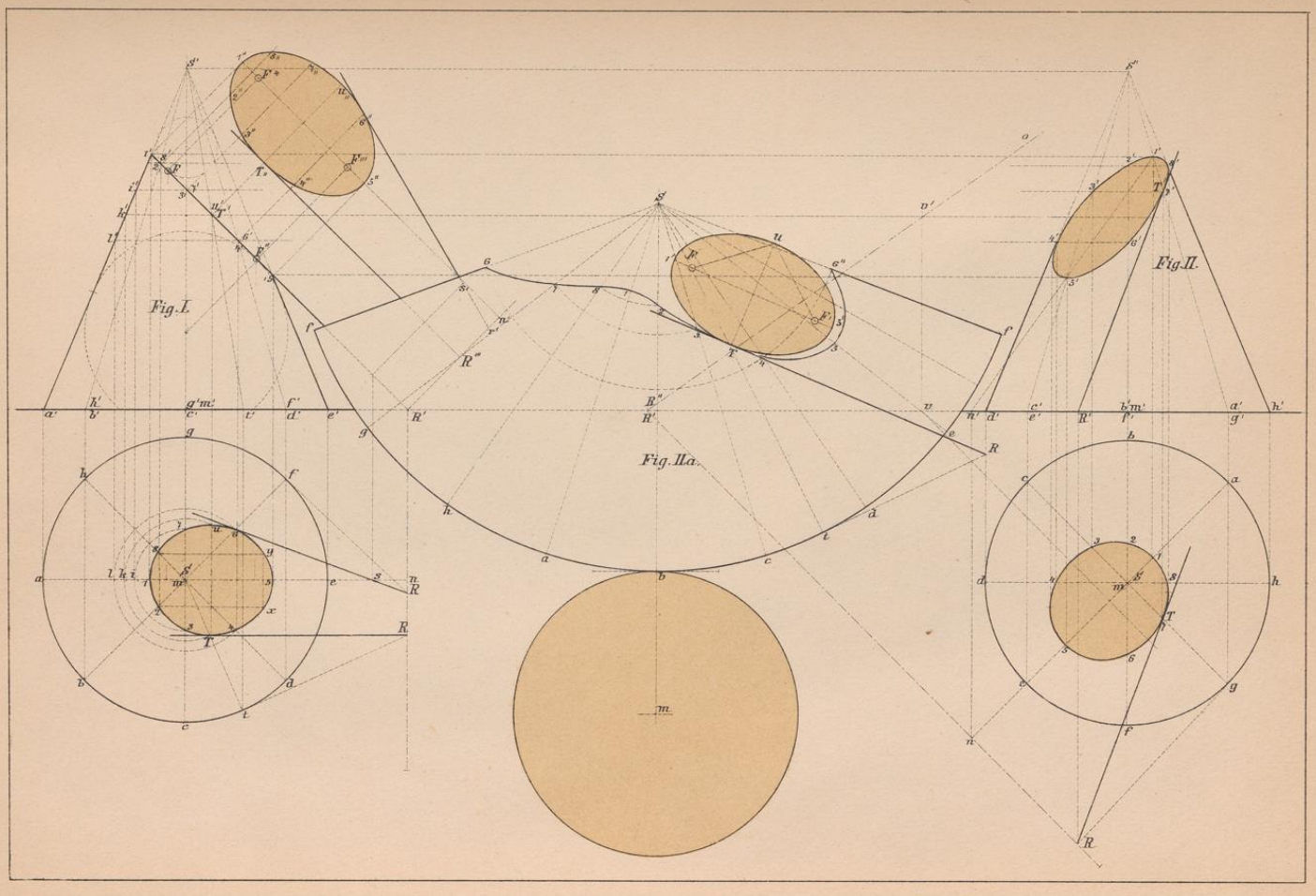
20

06
TPA
1453

Universitätsbibliothek Paderborn

EK 1511
HA IV 1K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



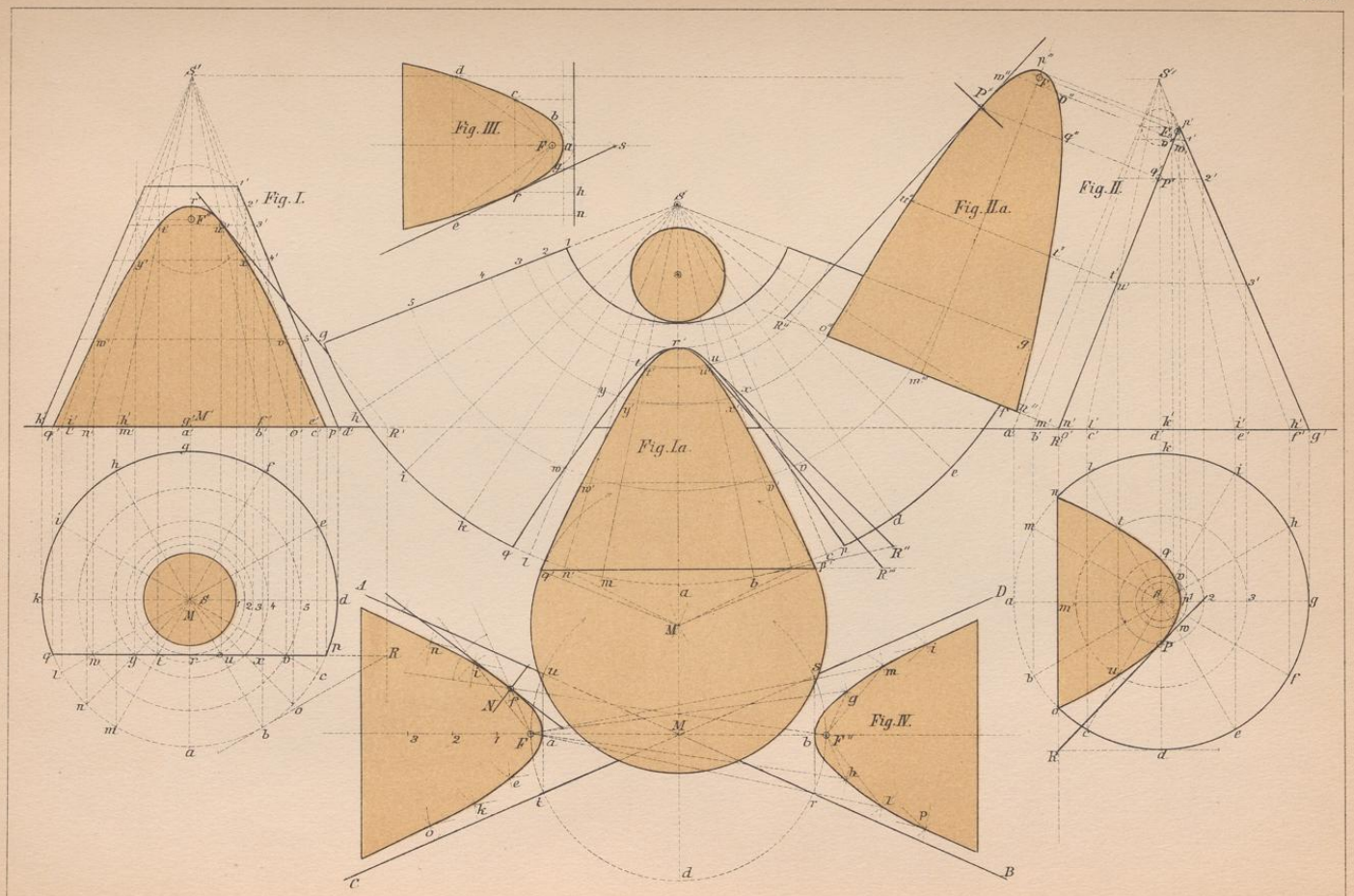
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

06
TIA
1453

EK 1511
KA IV 1K5

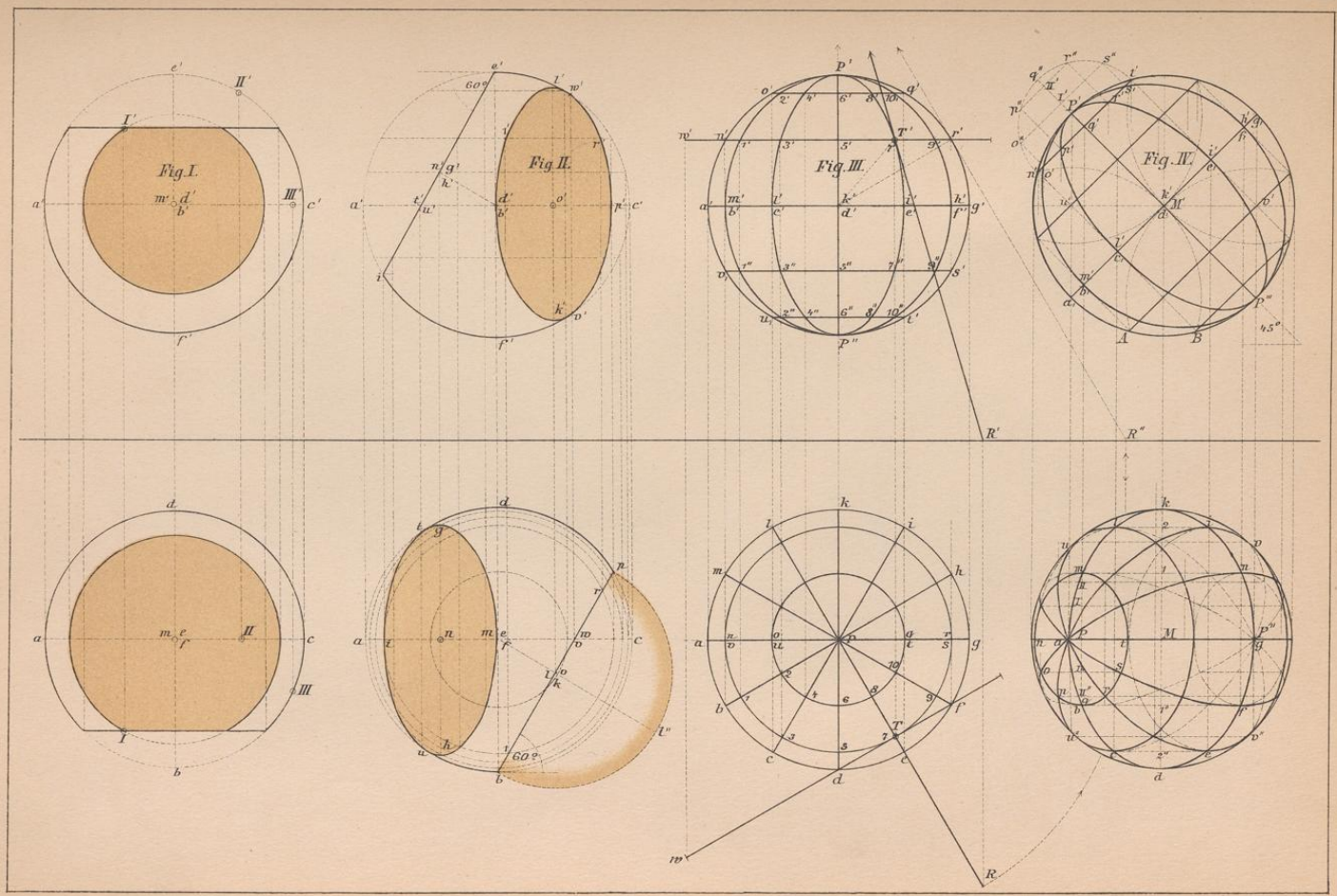


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06
TPA
1453
Universitätsbibliothek Paderborn
Ek 6511
KA IX 145

22

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



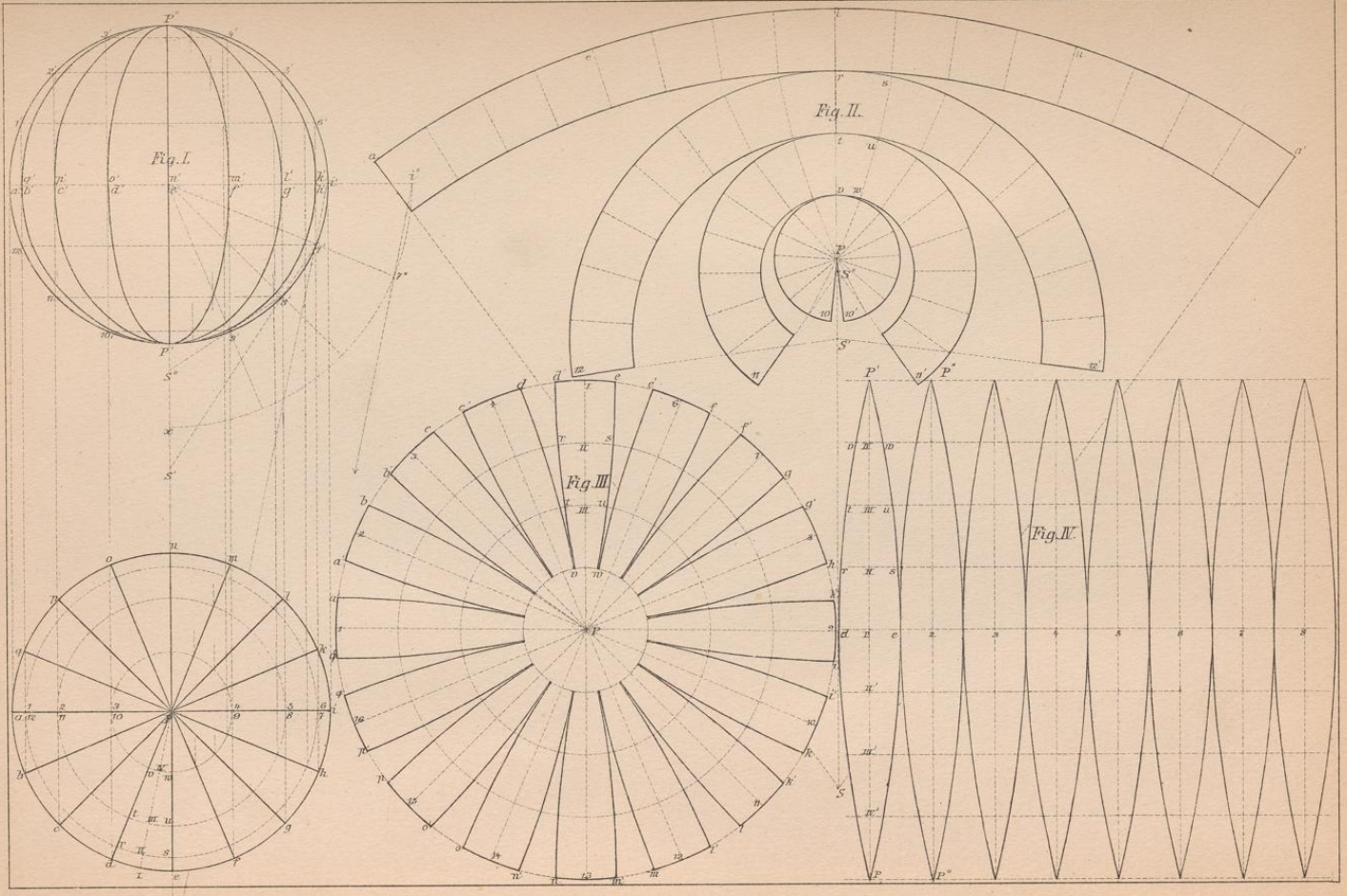
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

DC
TPA
1453

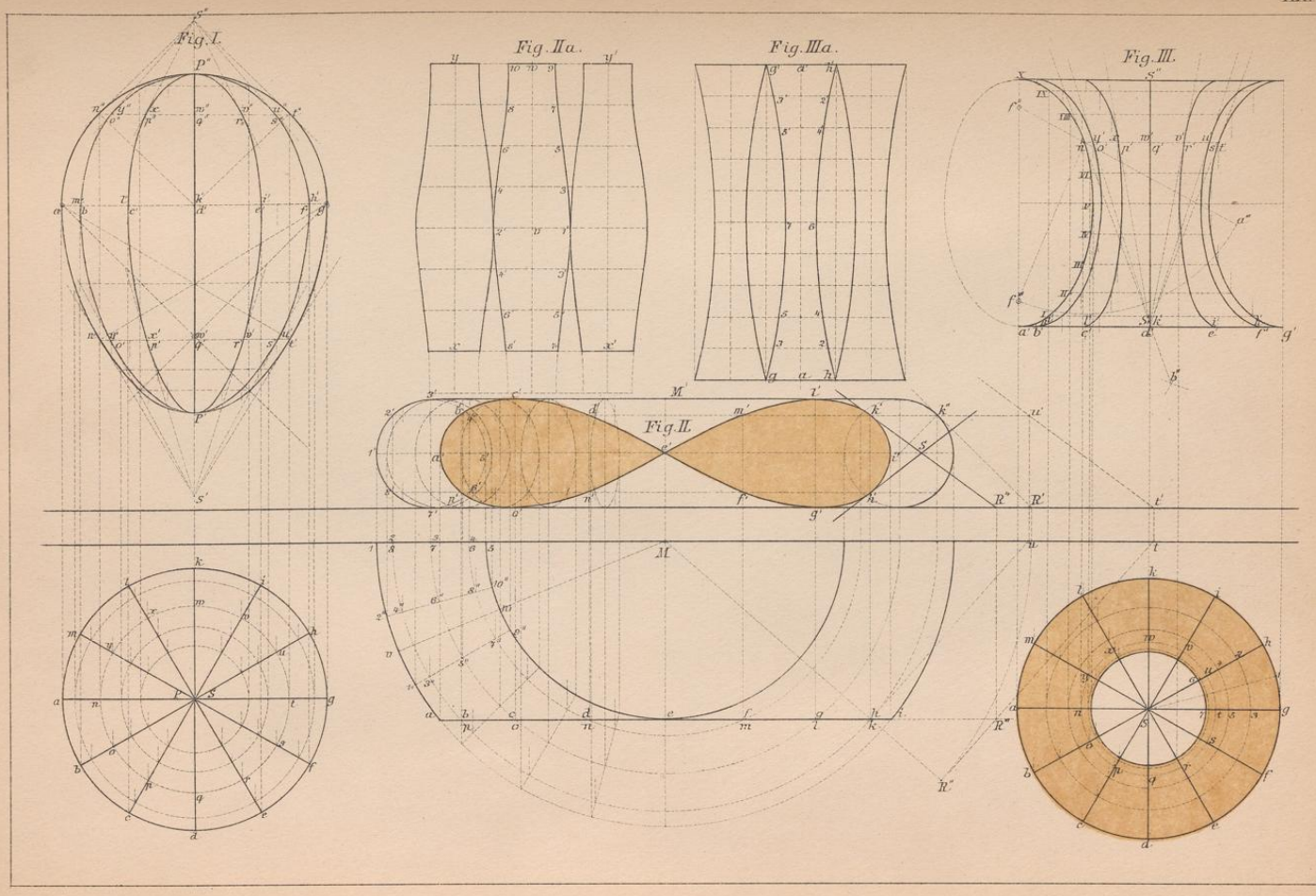
EK 1511
KA IV 1K5



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 1453
06 TPA 1453

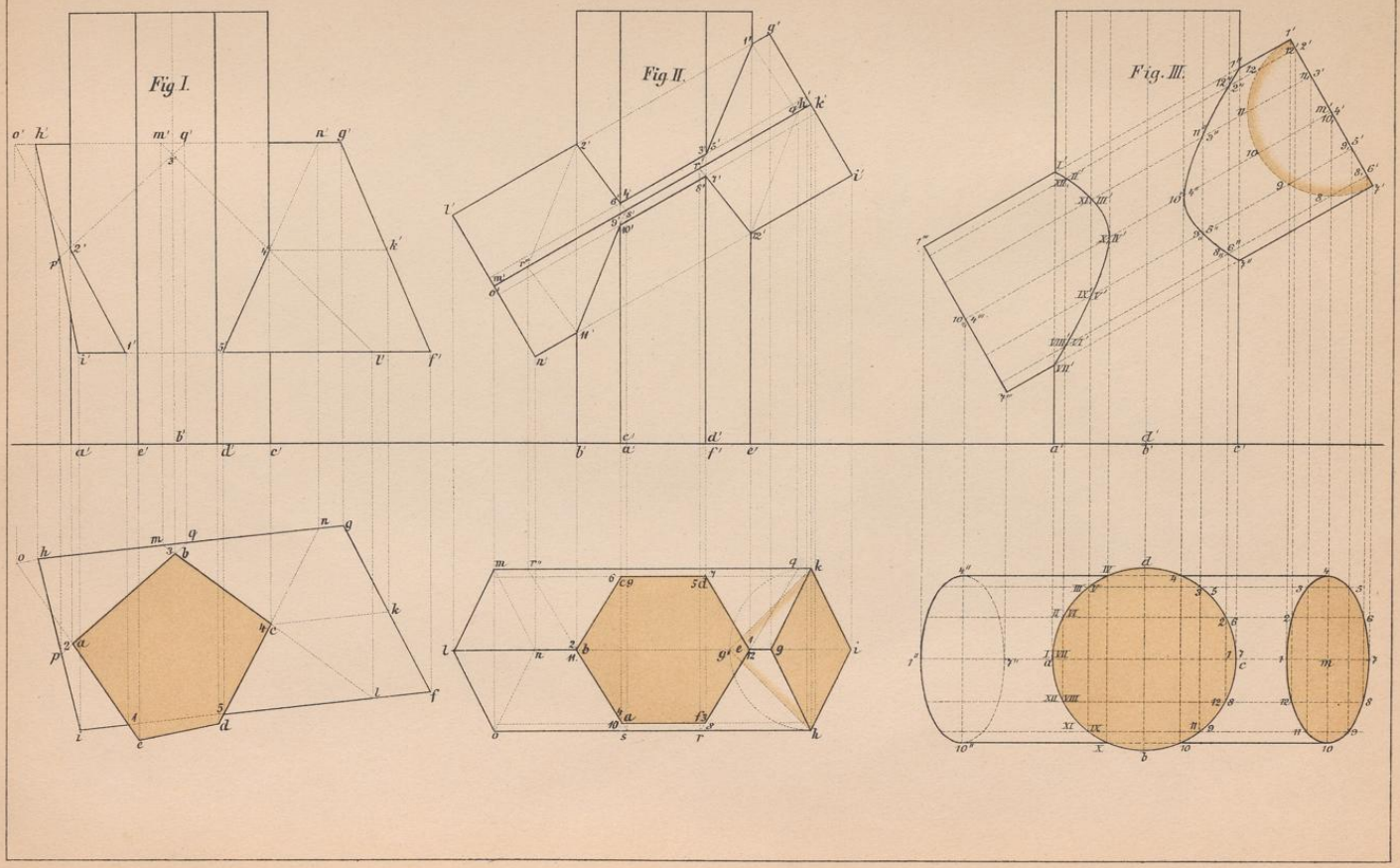
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV/145
DG
TPA
1453



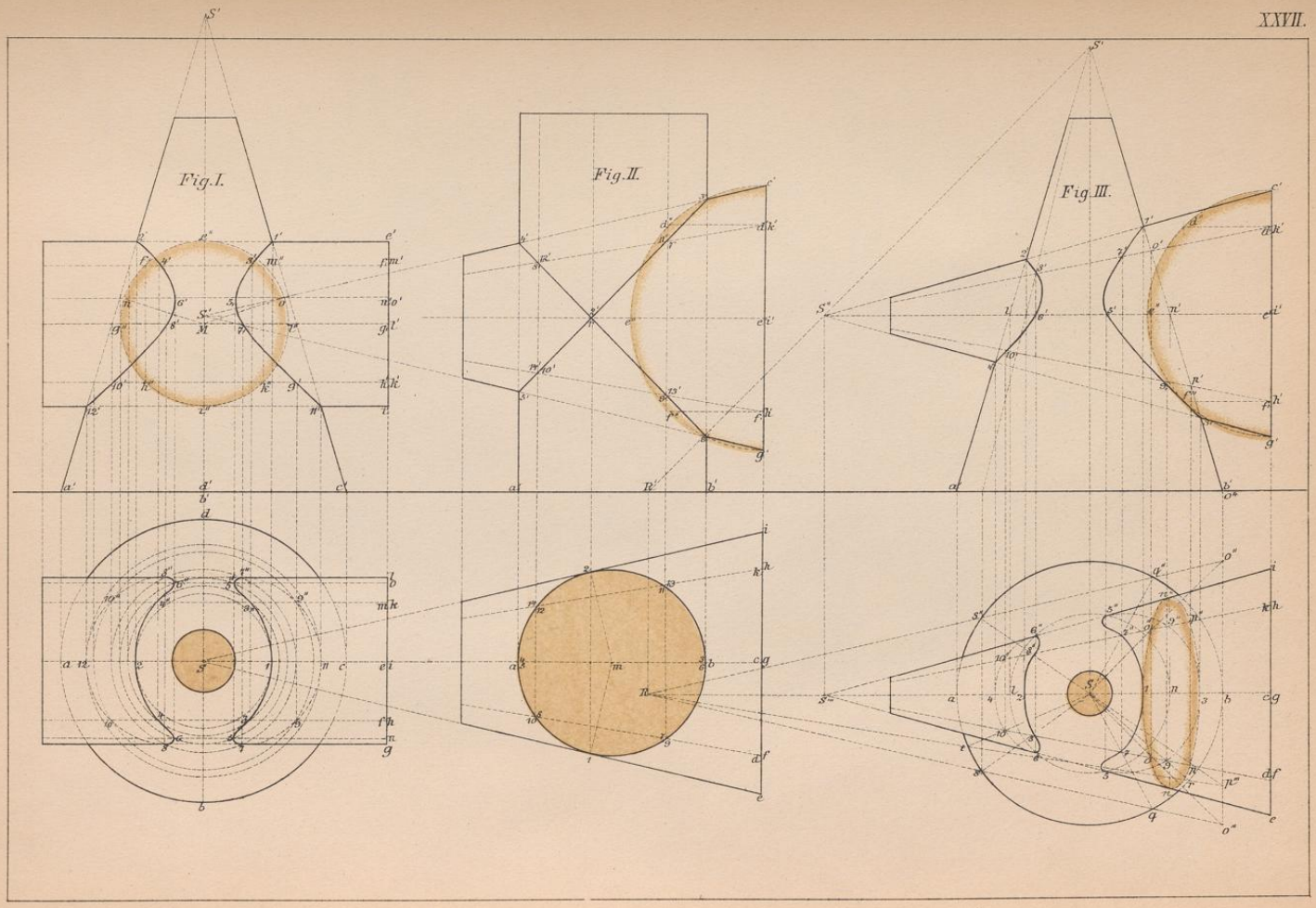
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

06
TPA
1453

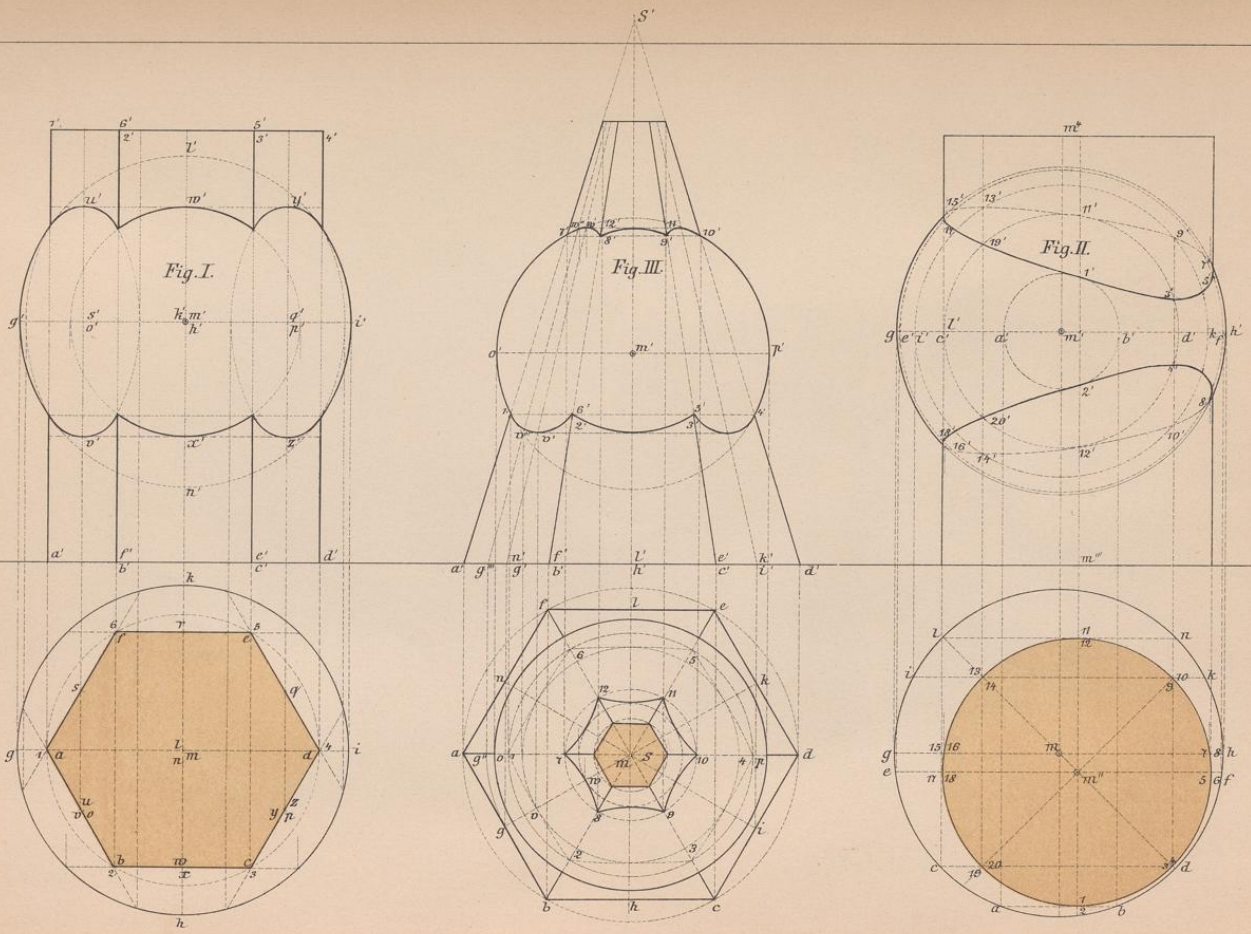
EK 1511
KA IV /K5



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06
TPA
1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV 145

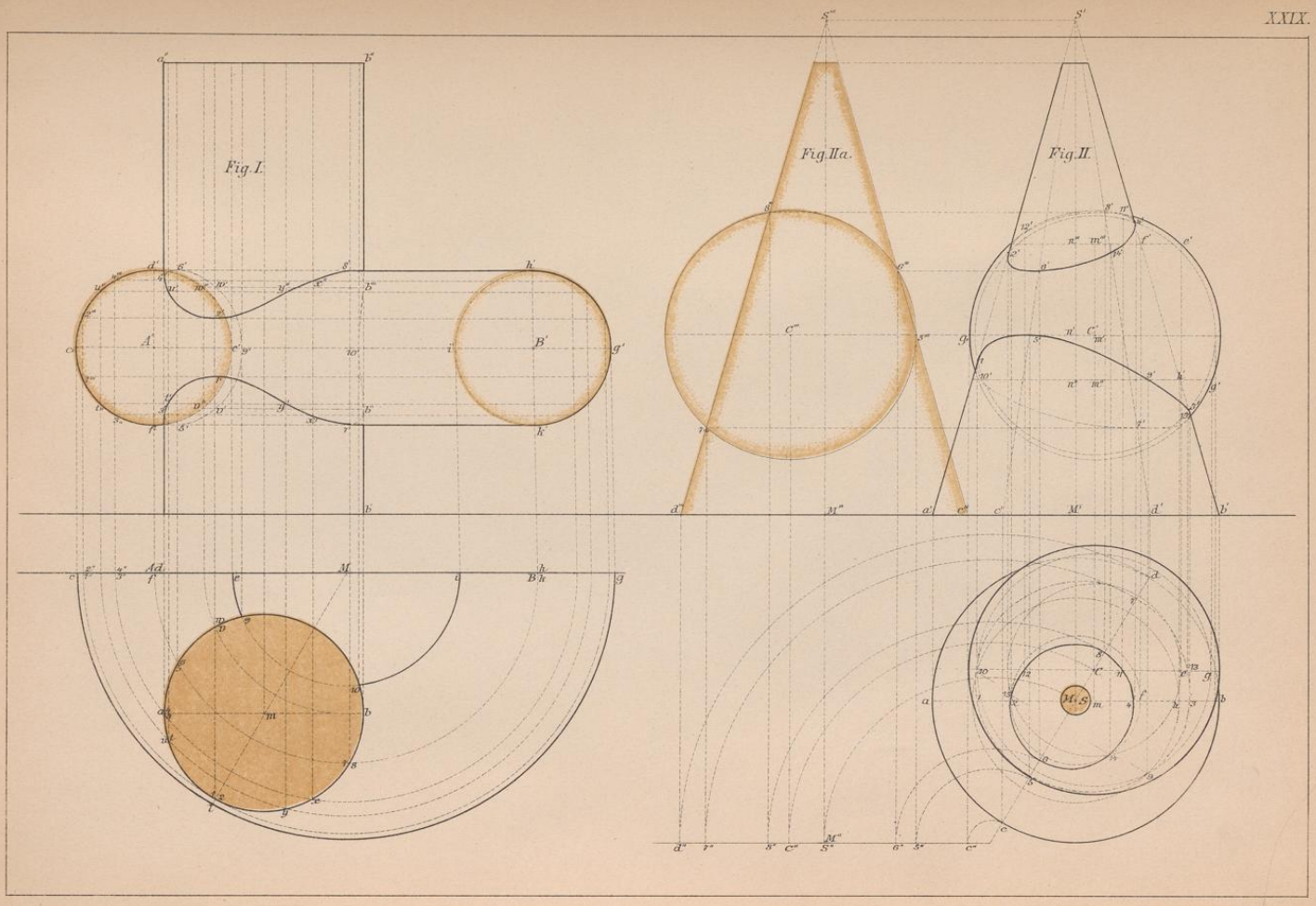
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
SA / IV 64
1151 E43
06 TIA 1453

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

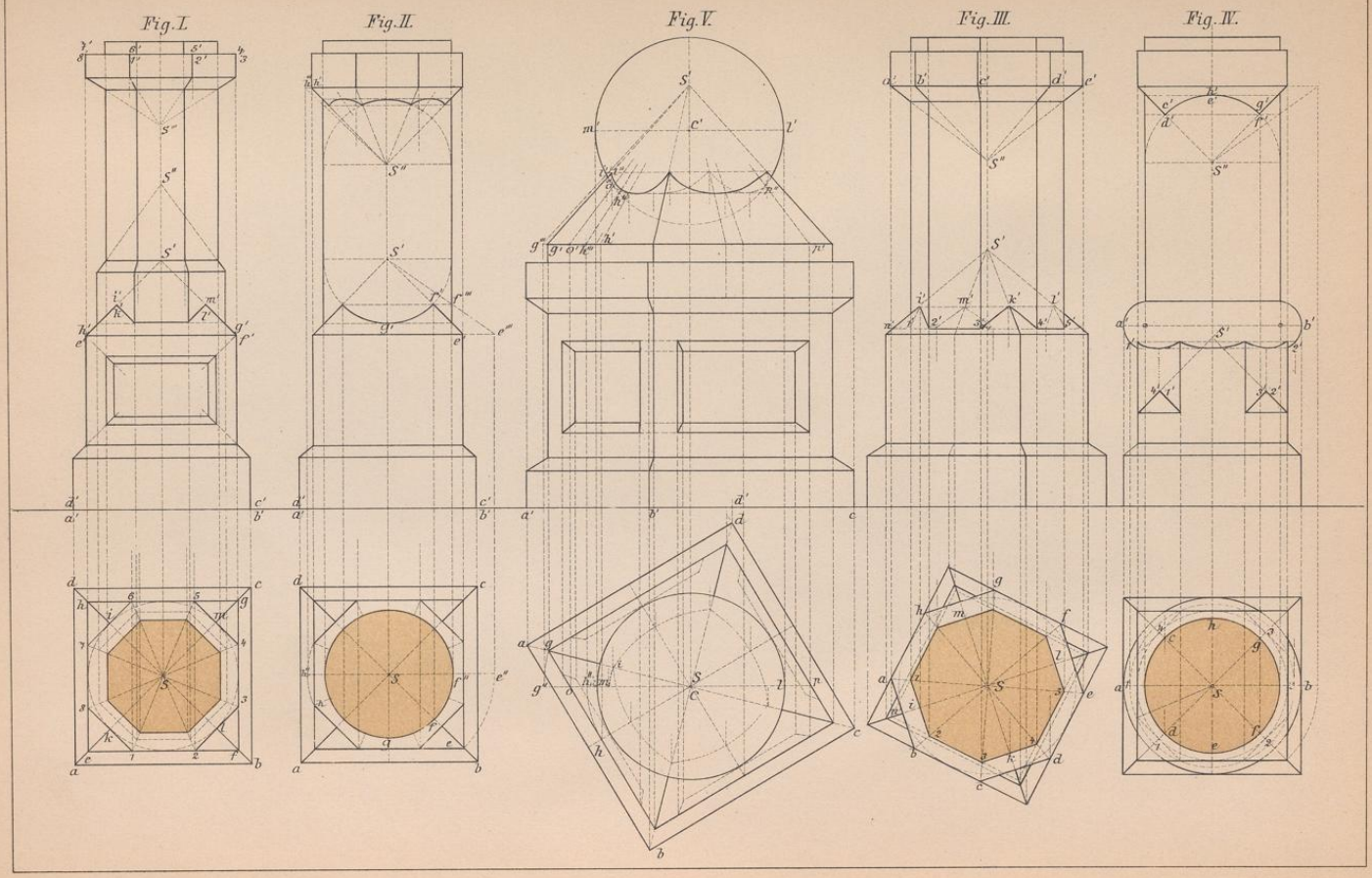
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

Ek 1511

KA IV/K5

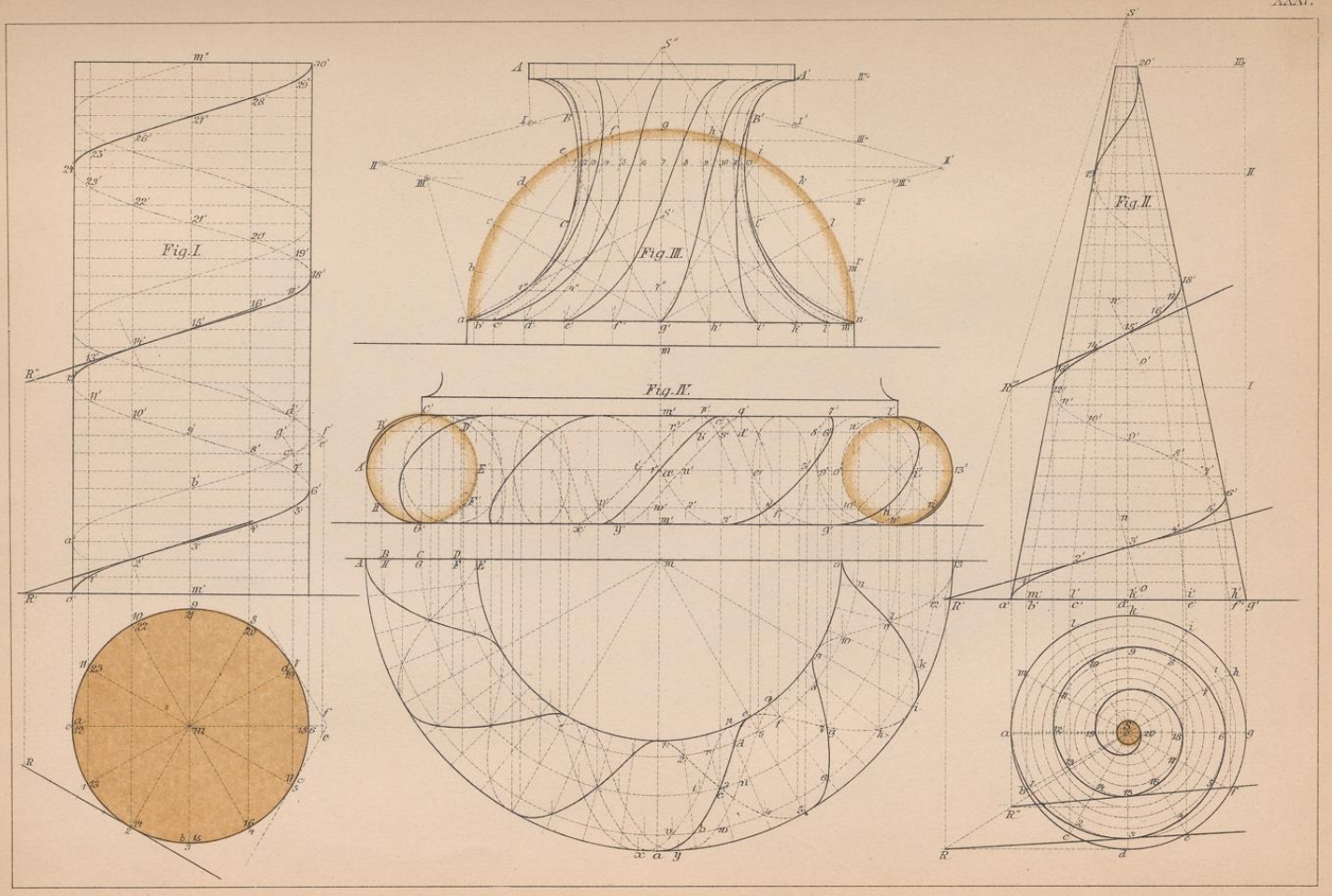
06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
06 TPA 1453
EK 1511
KA IV / K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 5111
KA IV / K5
06 TPA 1453

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

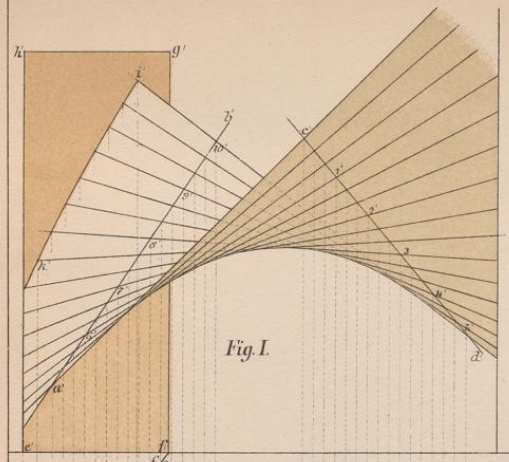


Fig. I.

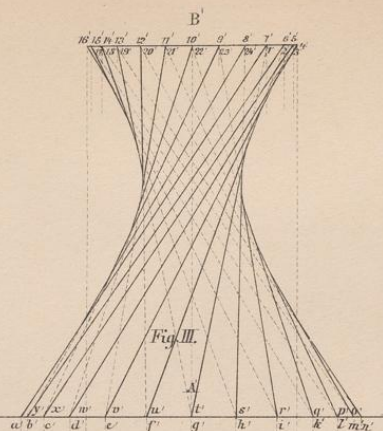


Fig. III.

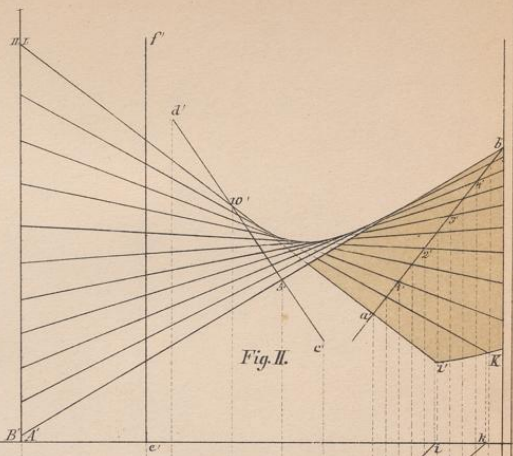
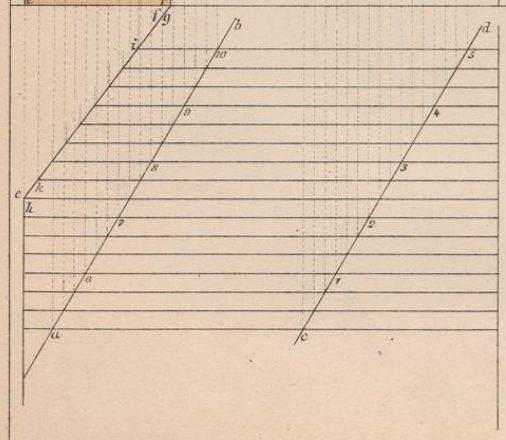
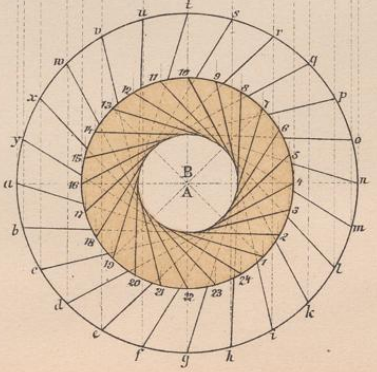
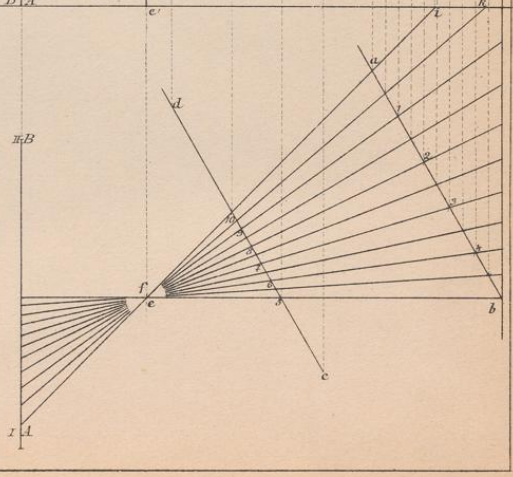


Fig. II.

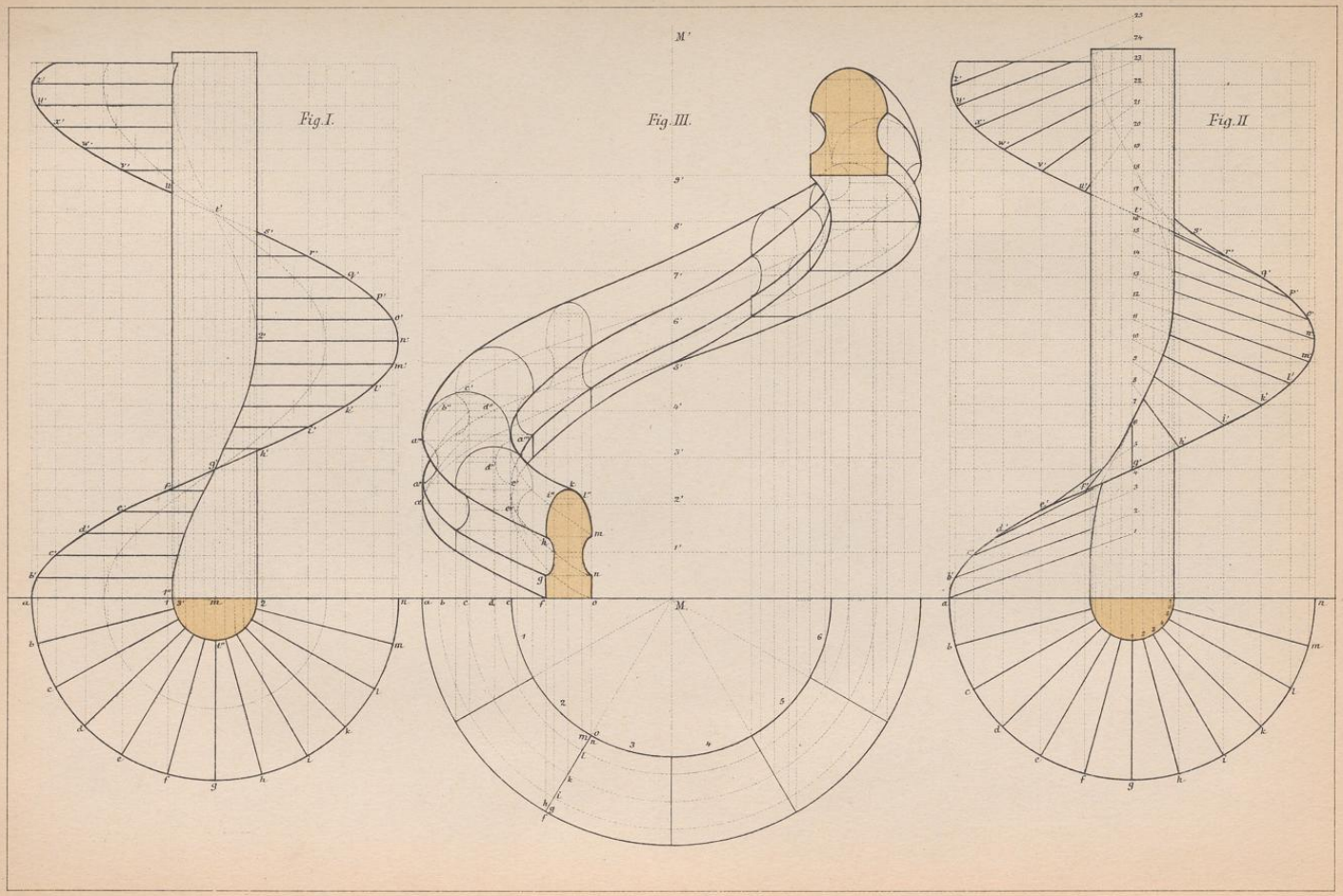






06
TPA
1453
Universitätsbibliothek Paderborn
EK 1511
KA IV / K5
32

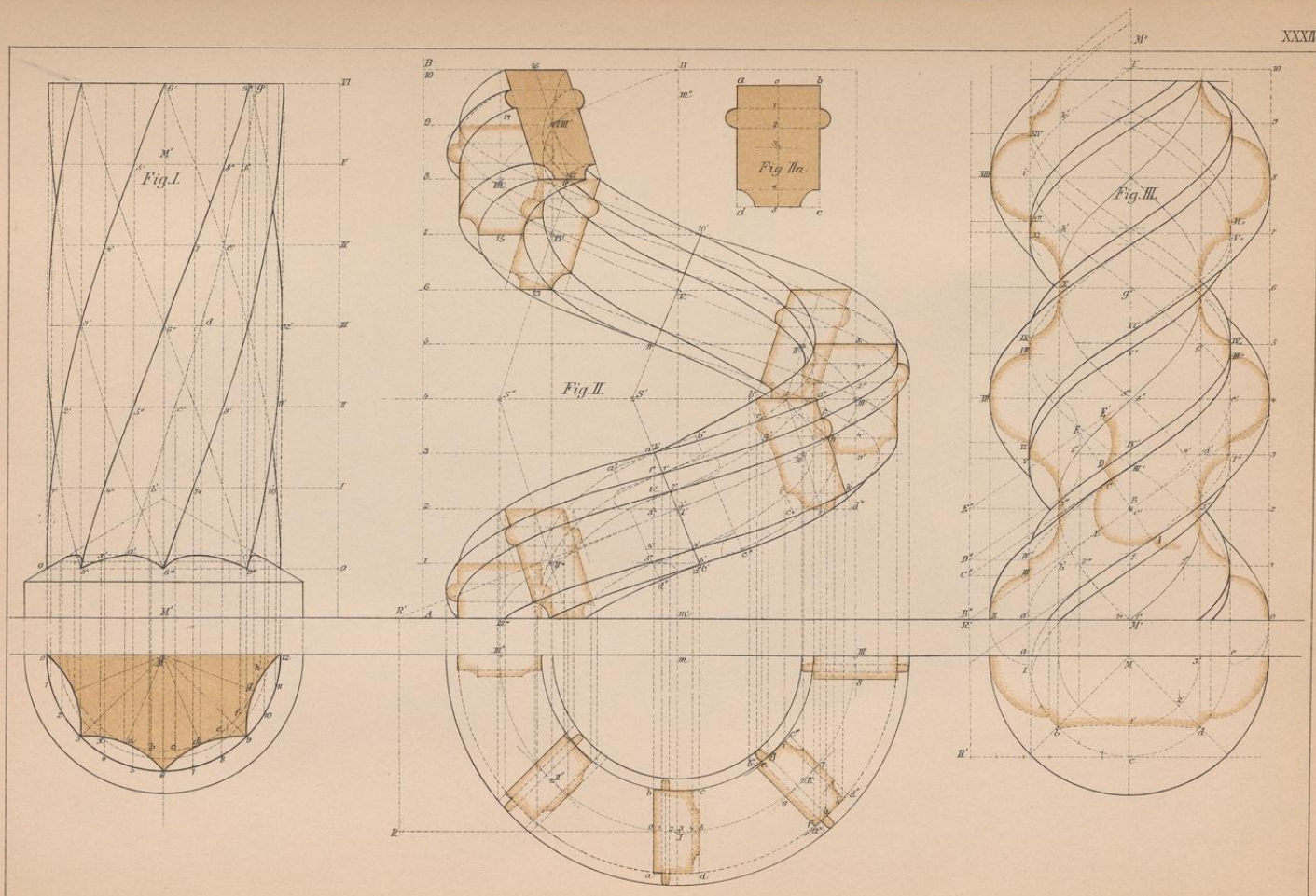
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
06 TPA 1453
KA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



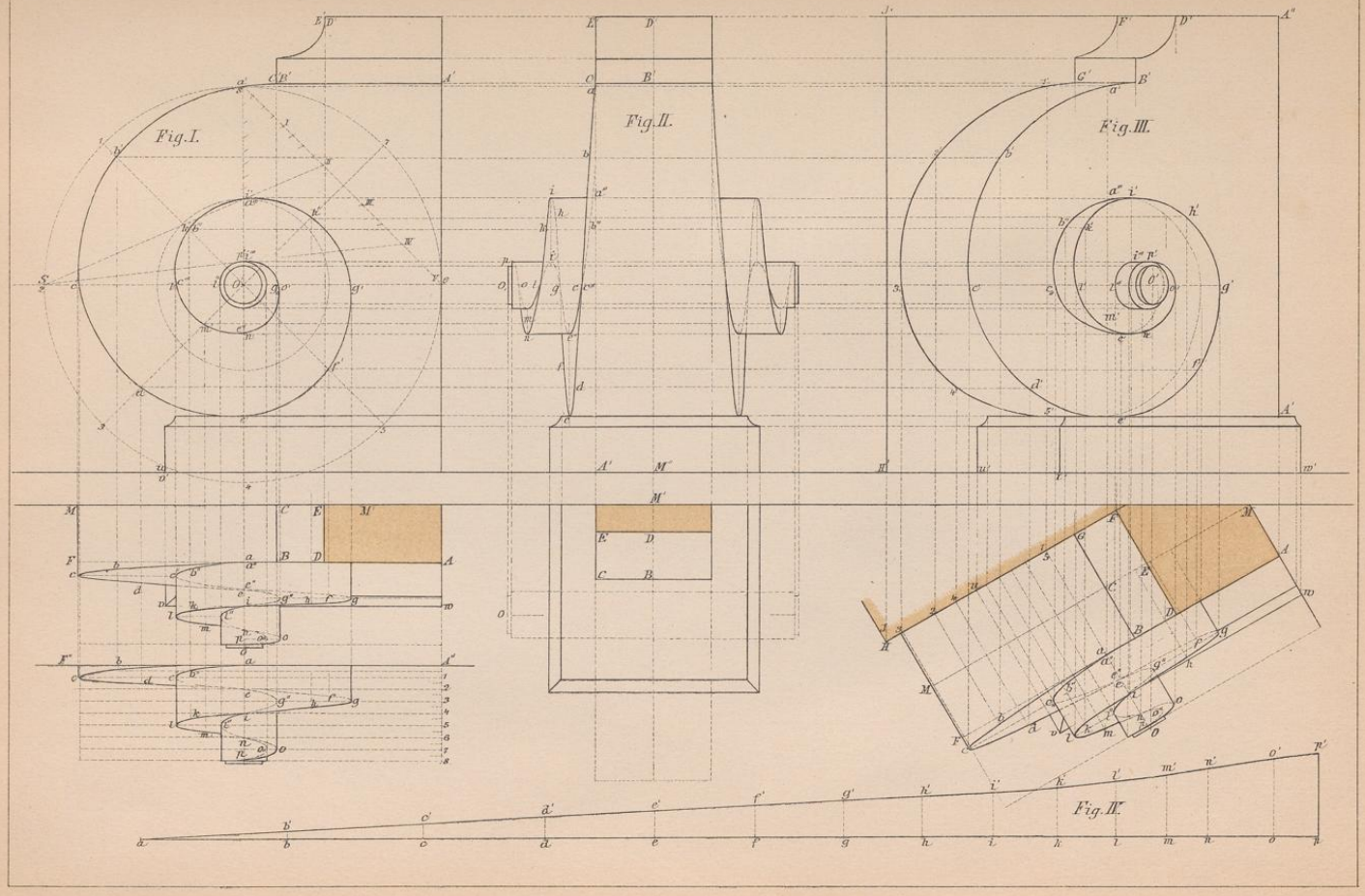
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV / K5

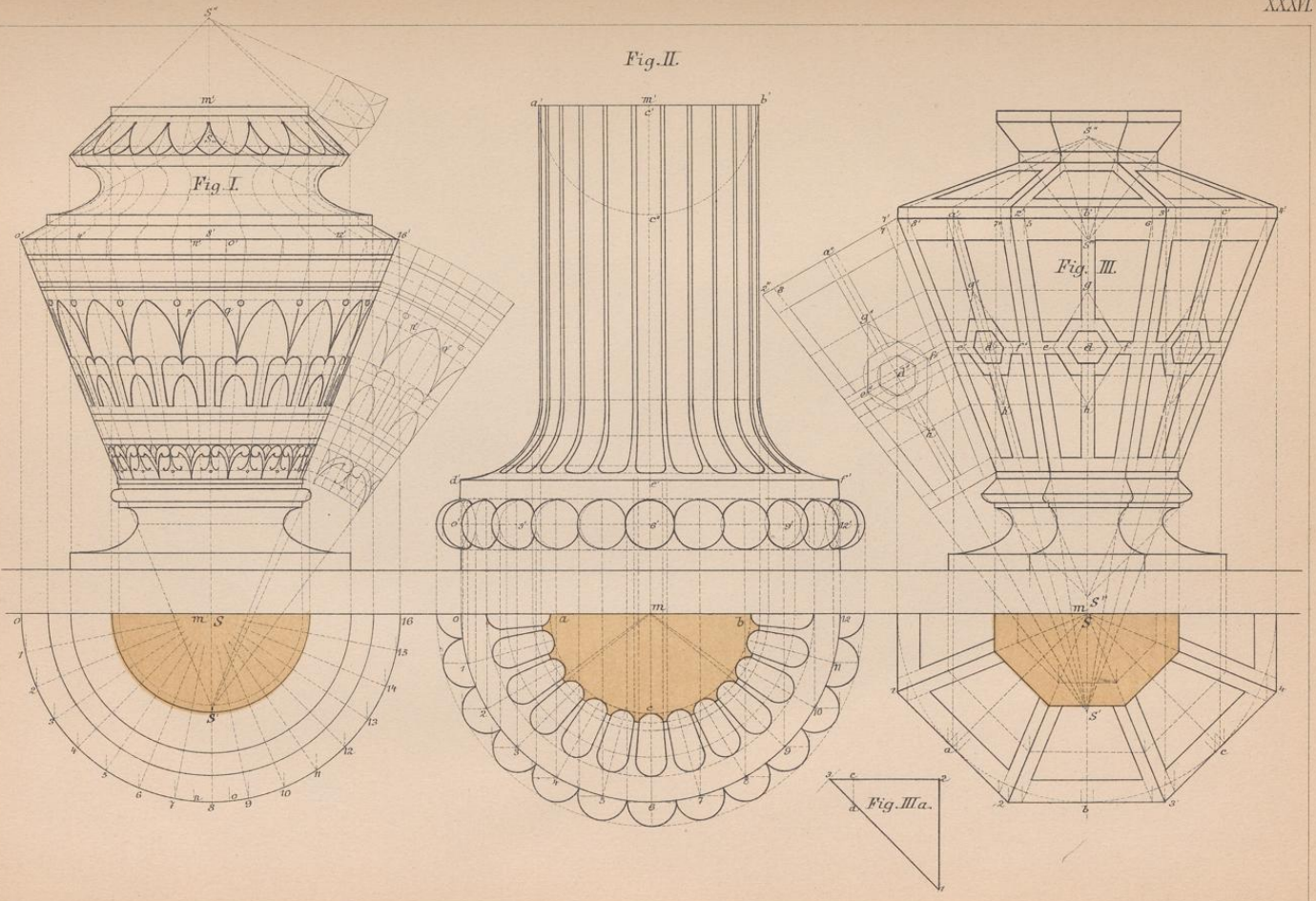
06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 15
EK 1511
KA IV 1K5
D6
TPA
1453



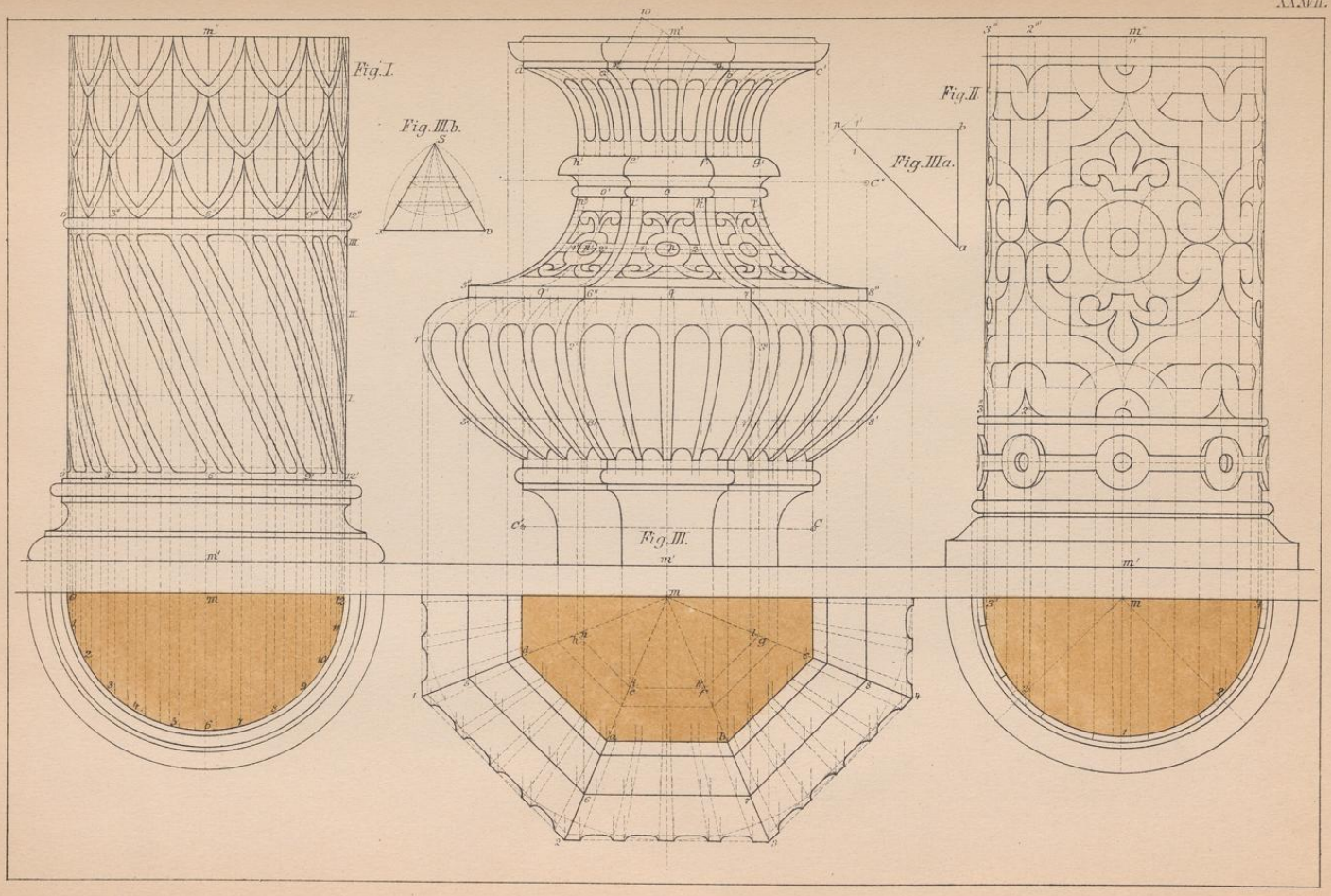
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn
51

EK 1511
KA IV /k5

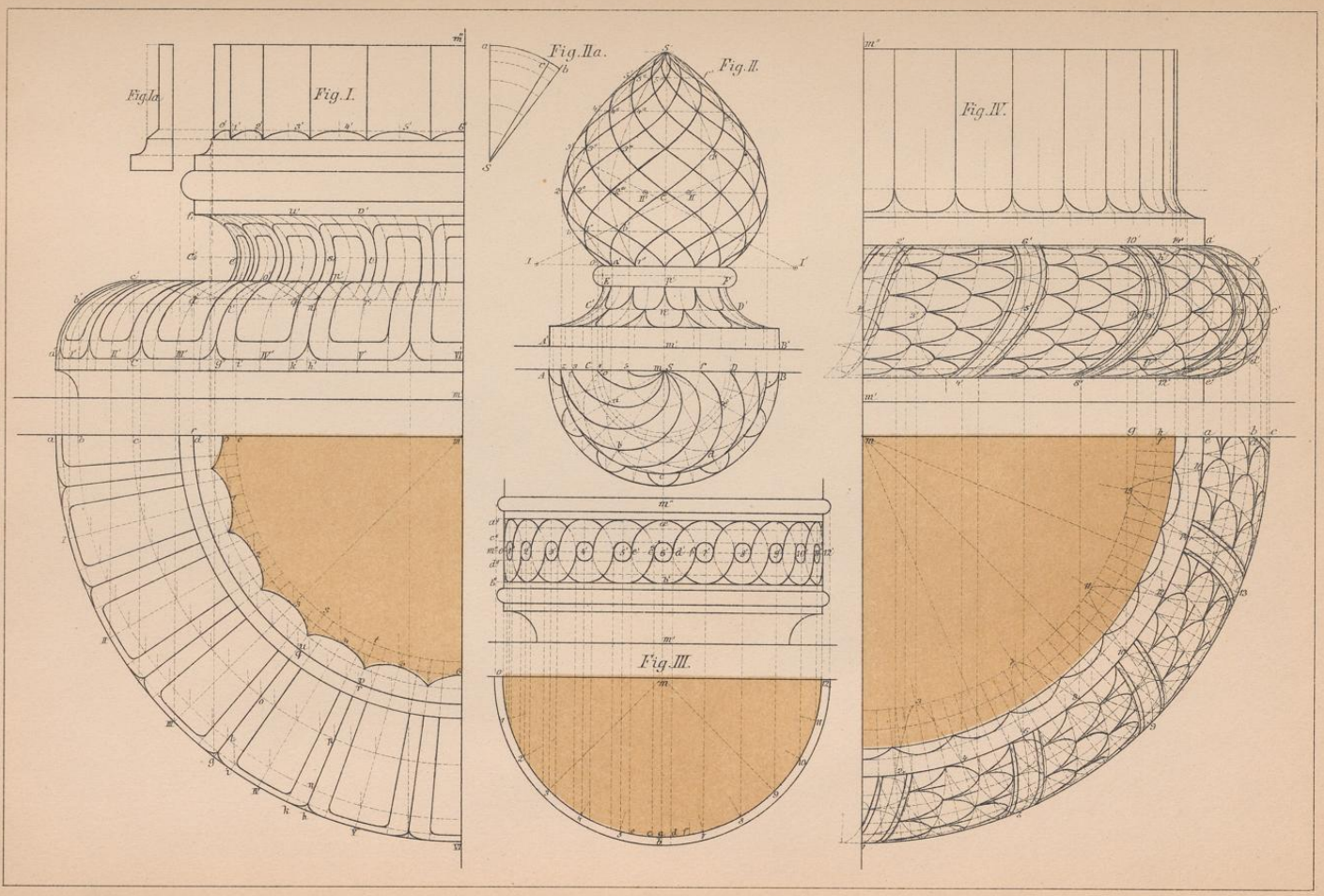
06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV / K5
06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 15

OG
TPA
1453

EK 511
KA IV /K5

Fig. II.

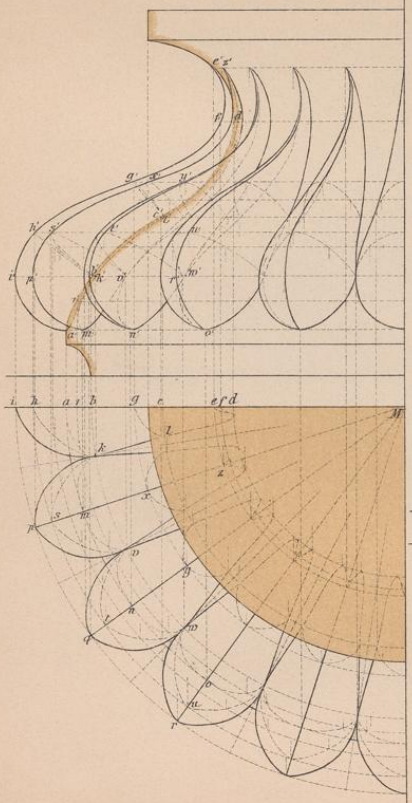


Fig. I.

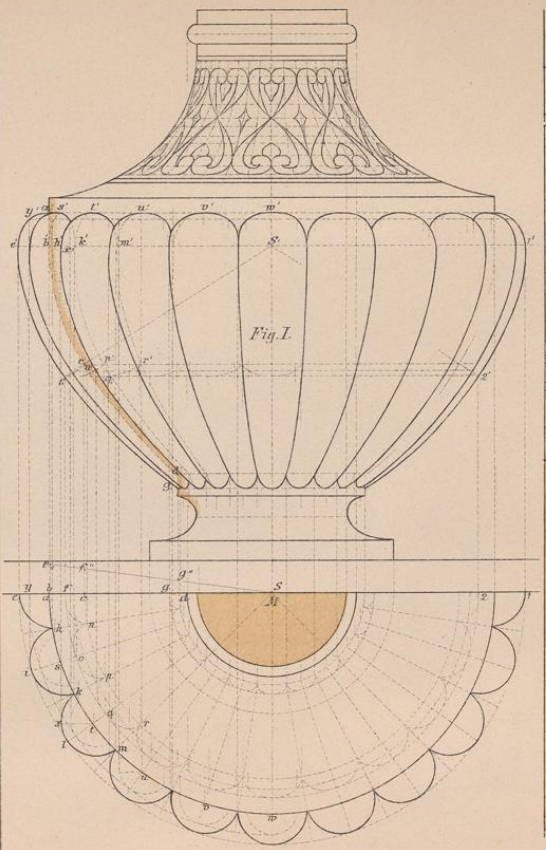
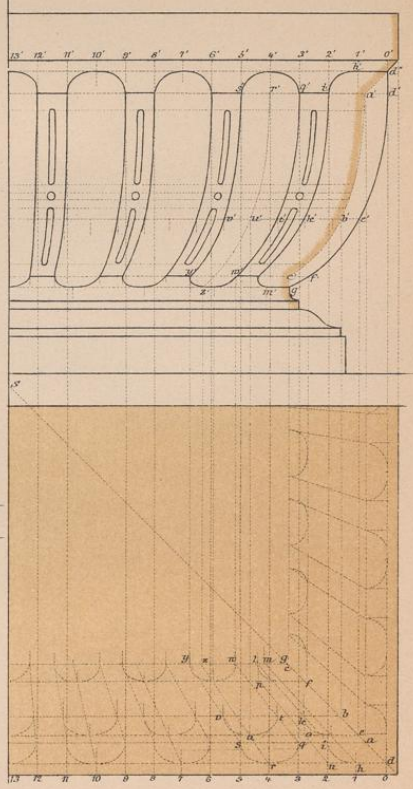


Fig. III.



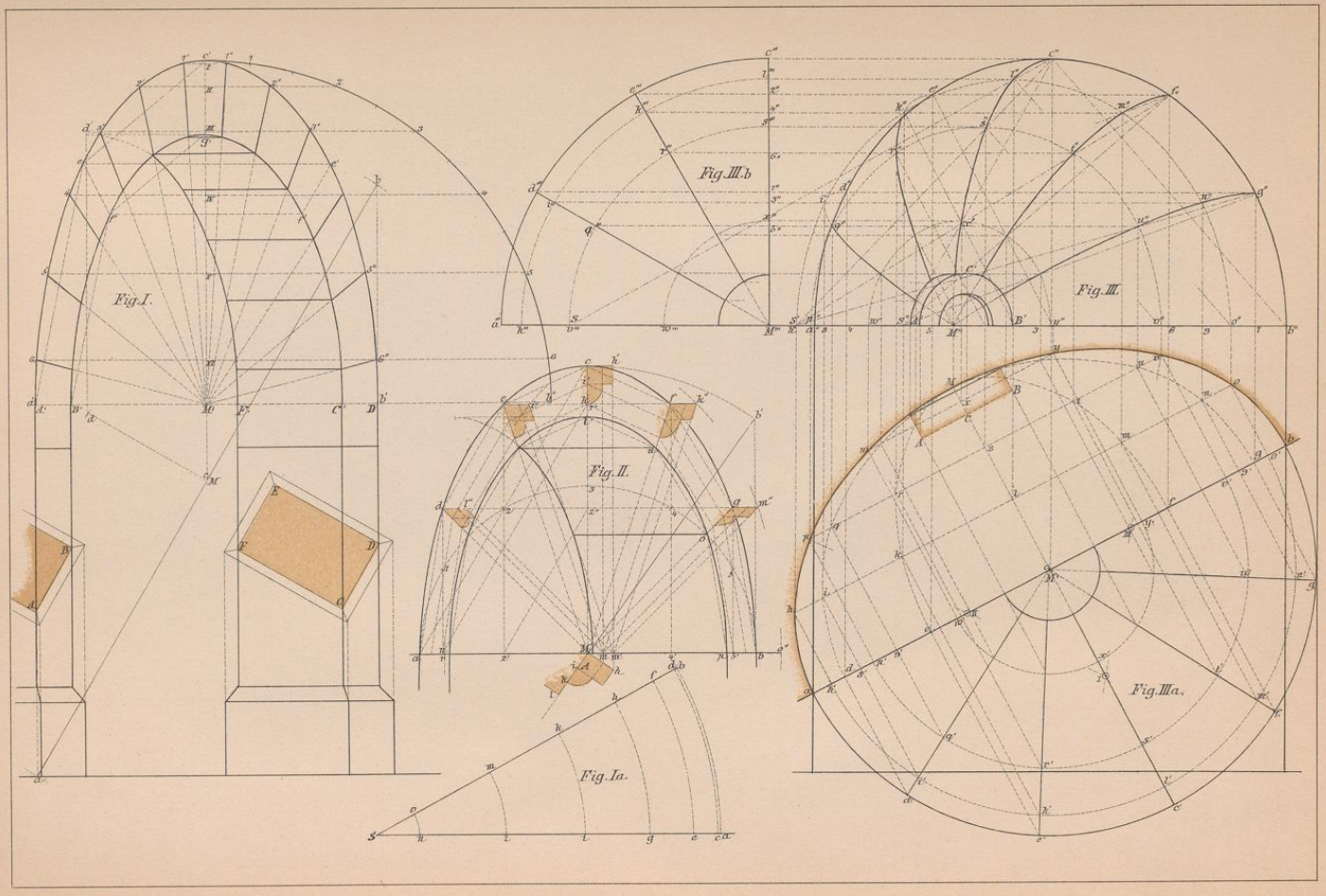
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 15

06
TPA
1453

EK 1511
KA IV 1K5



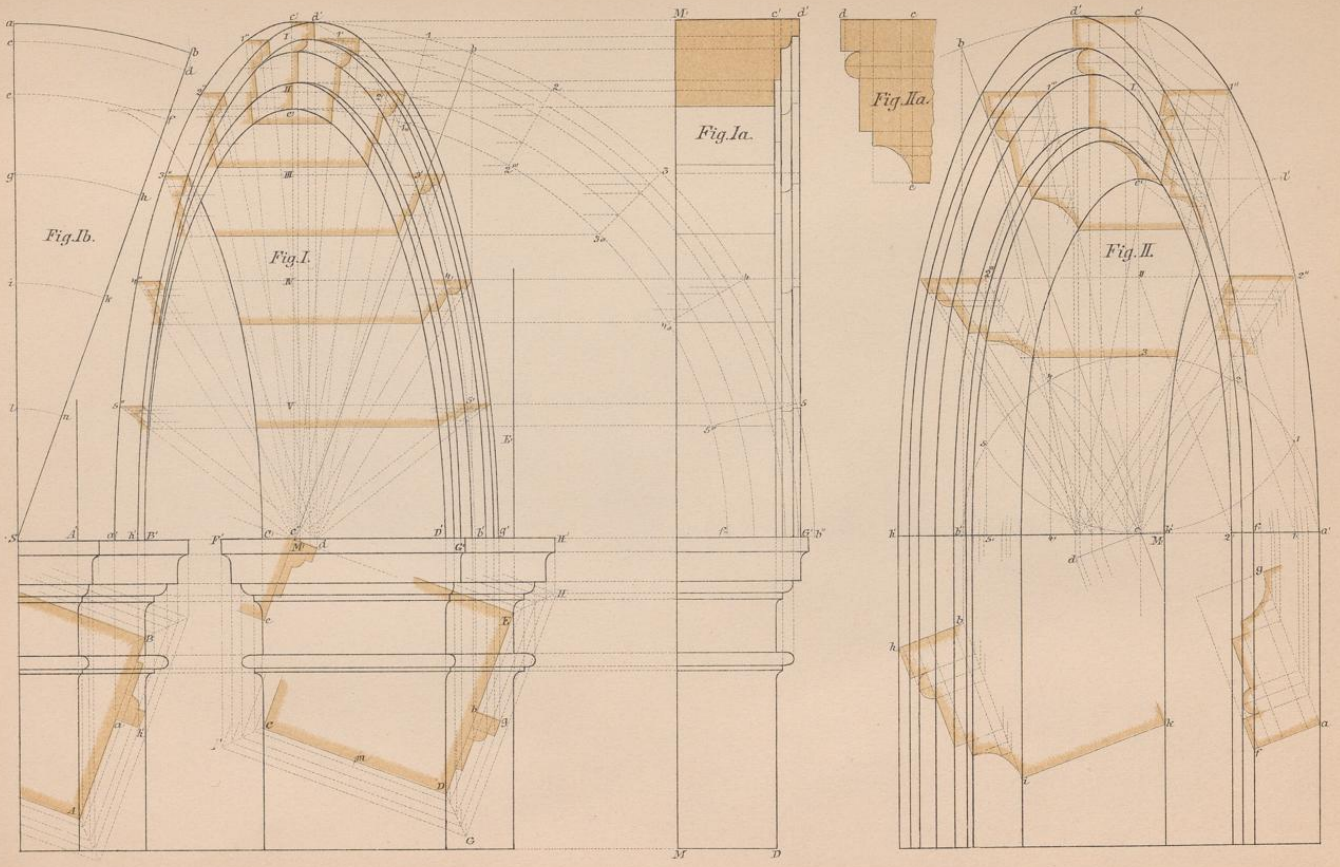
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 15

EK 1511
KA IV 1K5

06
TPA
1453



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 15

EK 1511
KA III/K5

06
TPA
1453

Fig.I.

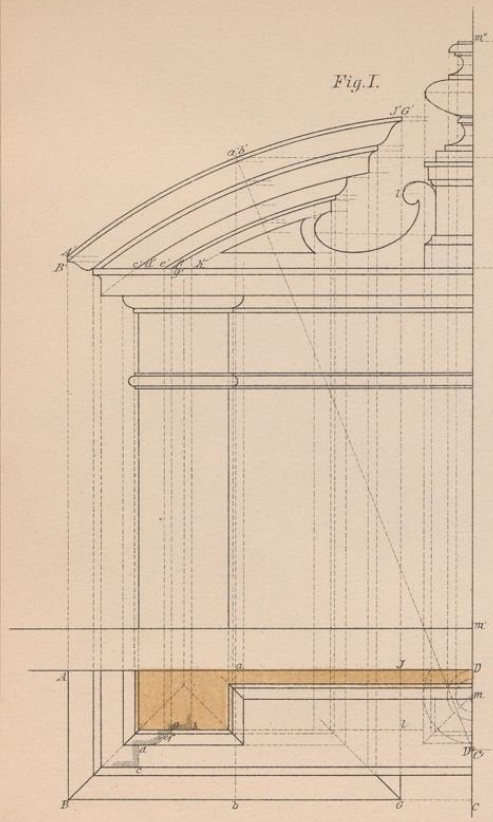
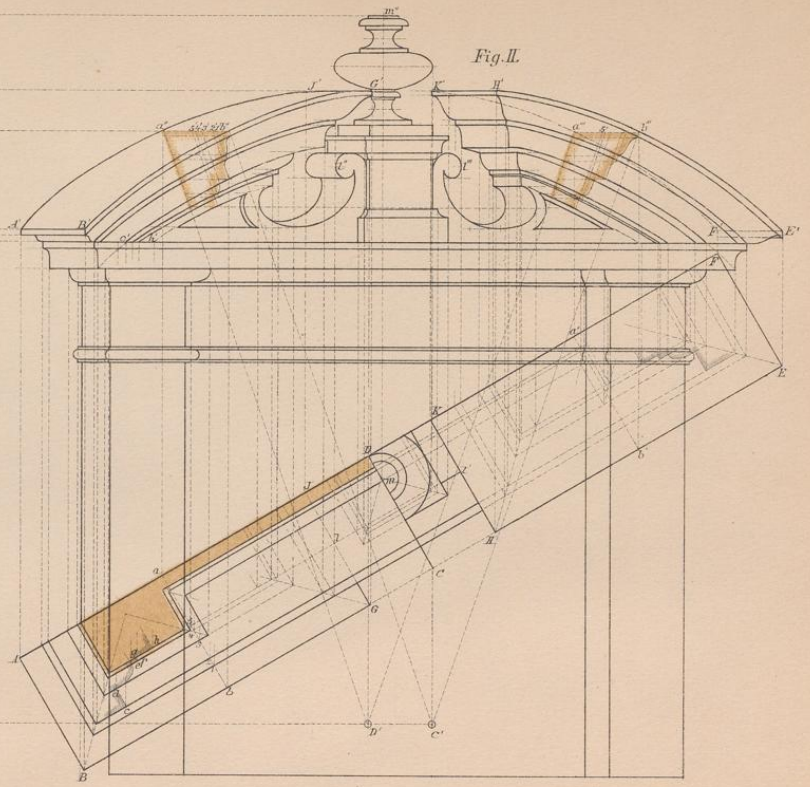


Fig.II.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
KA IV 1K5

06
TPA
1453

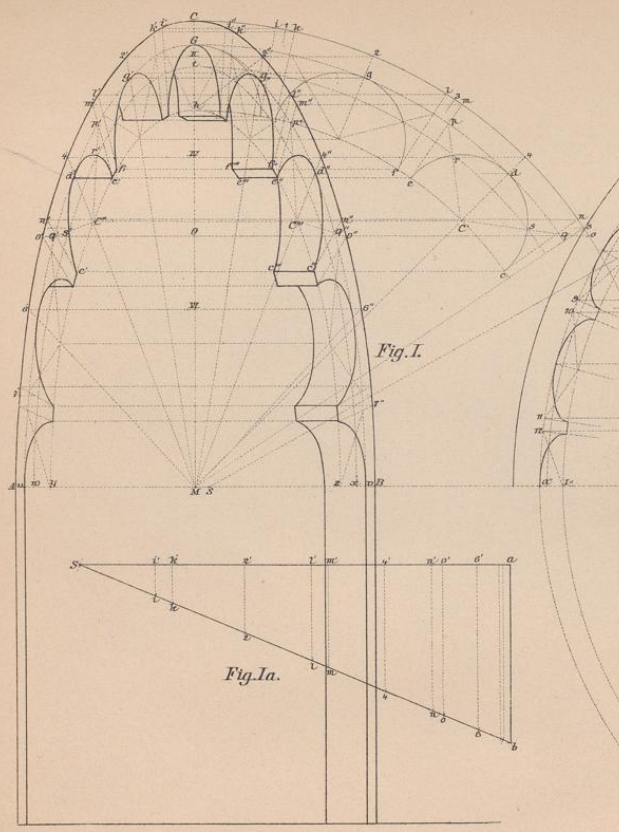


Fig.I.

Fig.Ia.

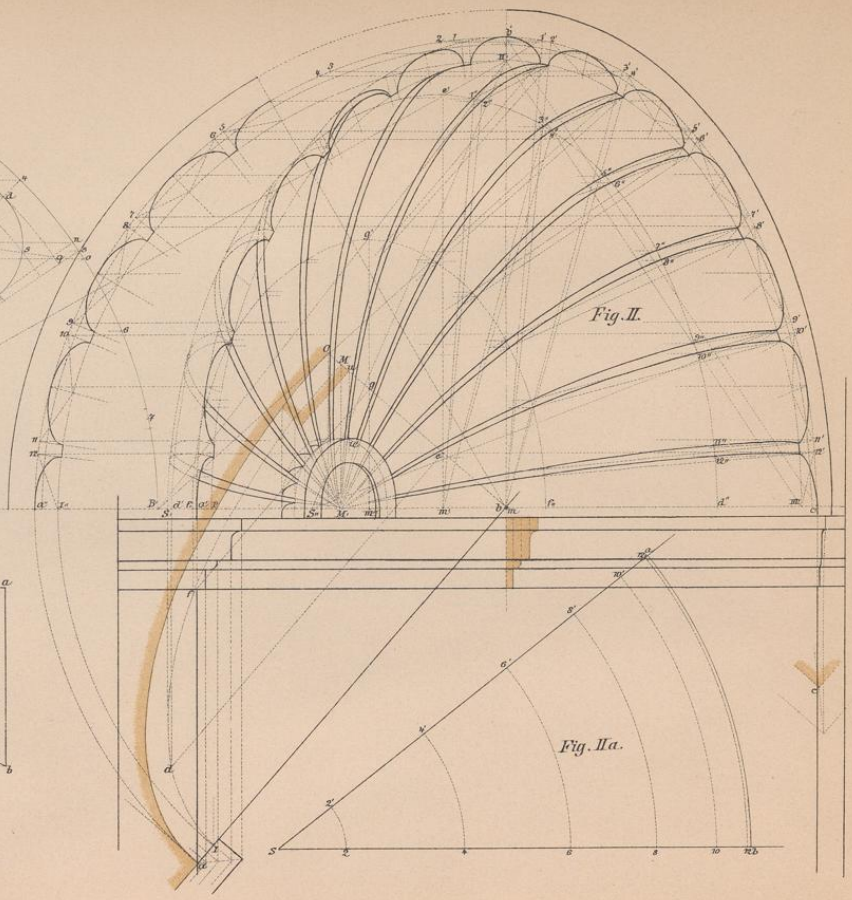


Fig.II.

Fig.IIa.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

43

06 TPA 1453

Universitätsbibliothek Paderborn

EK 1511

KA IV 1K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

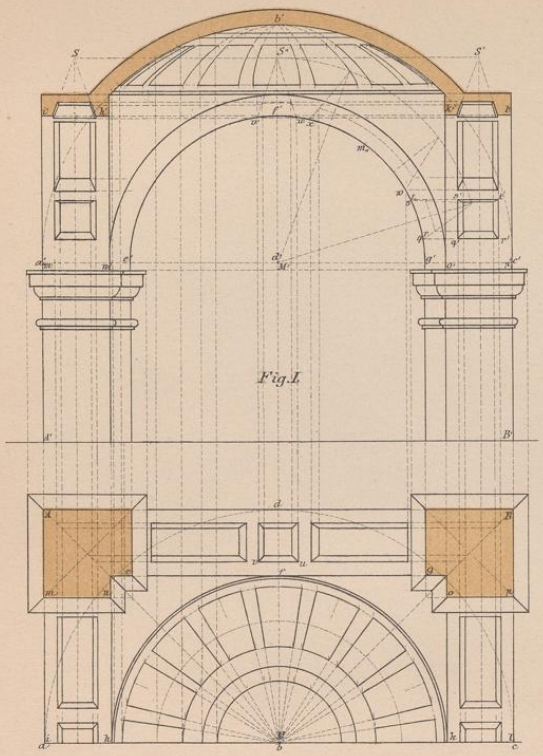


Fig. I.

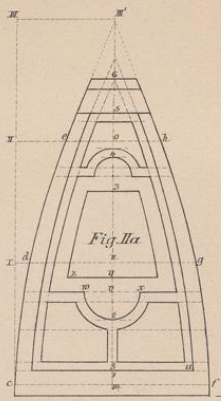


Fig. IIa

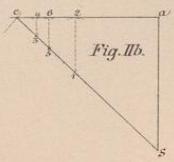


Fig. IIb.

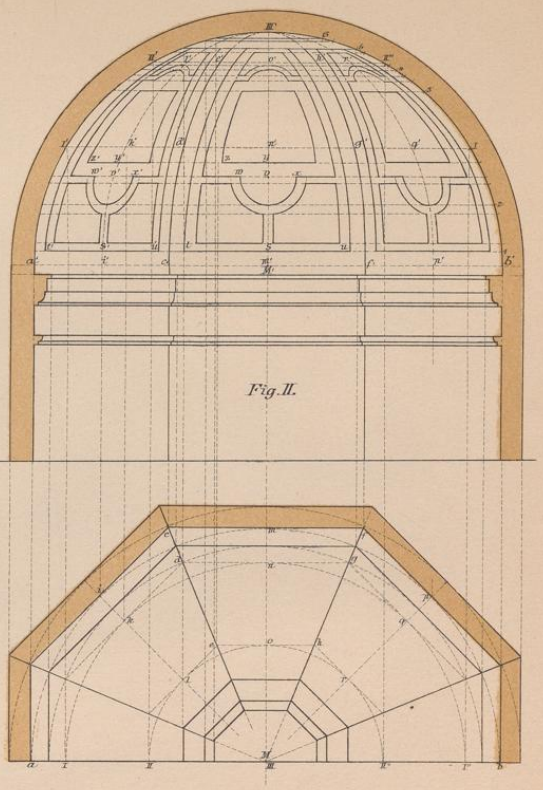
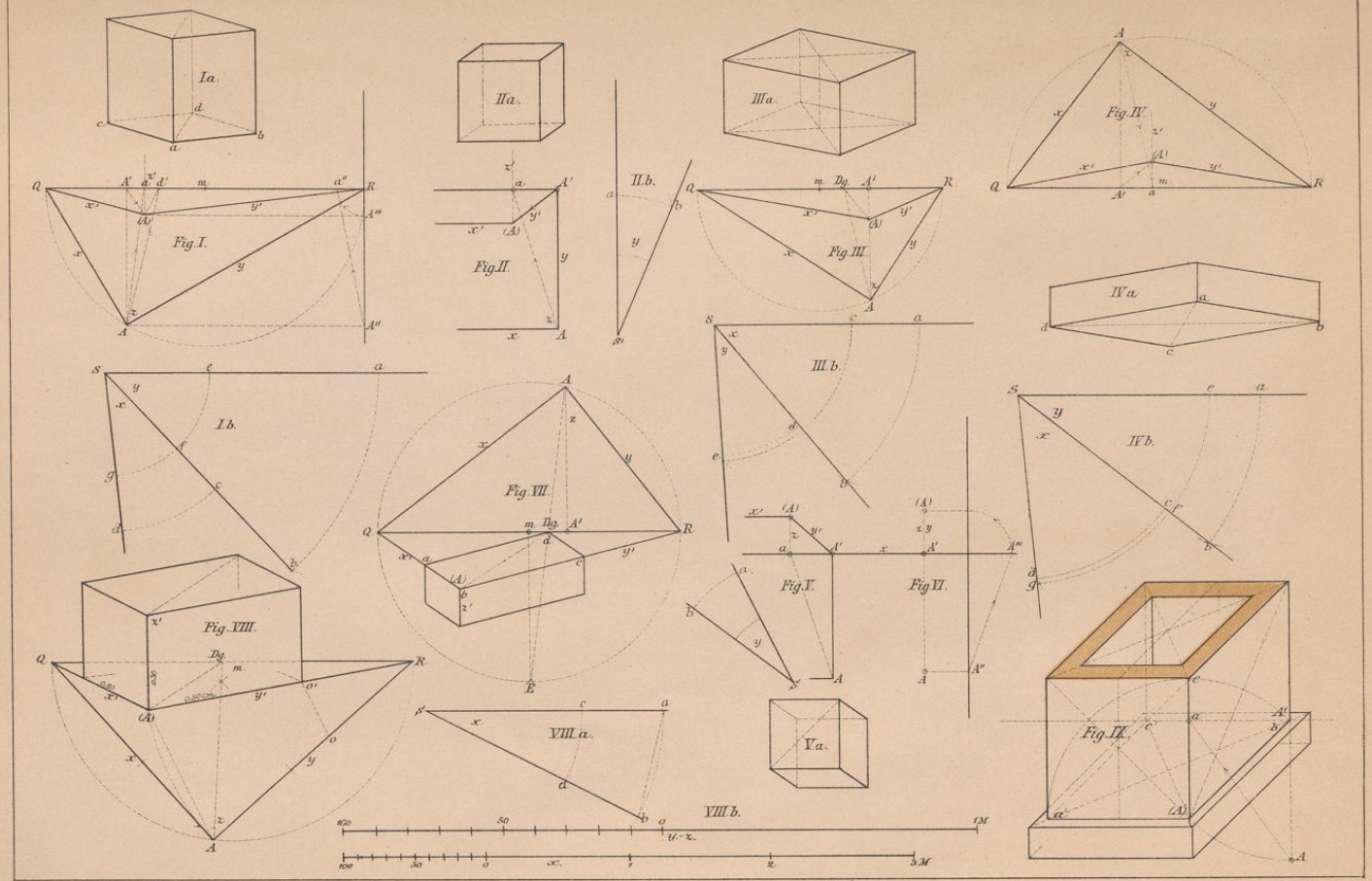


Fig. II.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1911
KA IV 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

45

06
TPA
1453

Universitätsbibliothek Paderborn

EK 1511
KA IV / 145

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

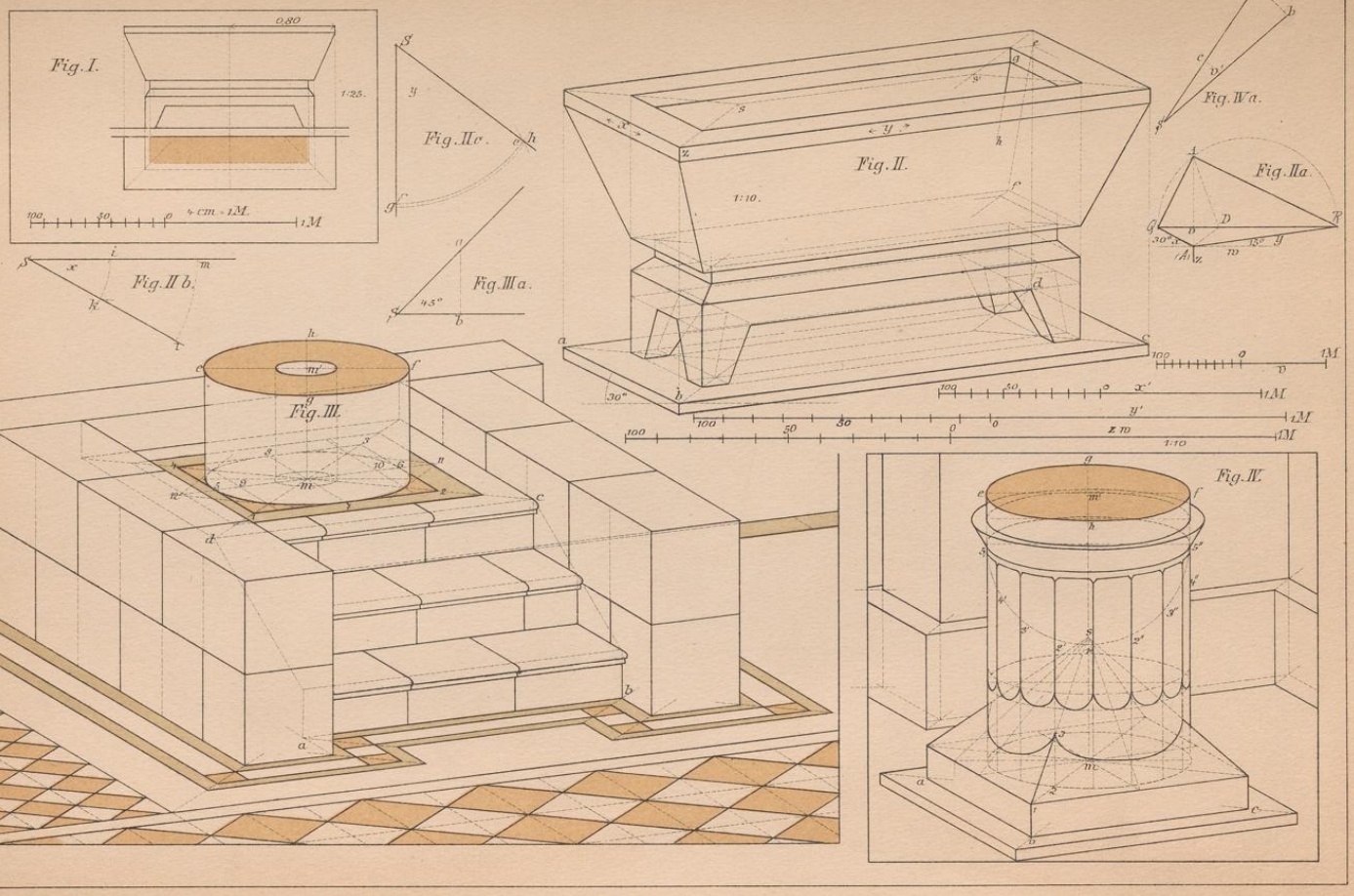


Fig. I.
0,80
1:25.
100 50 0 4 cm = 1M. 1M
Fig. IIc.
Fig. IIb.
Fig. IIIa.
45°
Fig. III.
Fig. II.
1:10.
Fig. IVa.
Fig. IIa.
30°
45°
100 50 0 x' 1M
100 50 30 0 y' 1M
100 50 0 0 z m 1M
1:10
Fig. IV.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn 51

EK 1511
A IV / K5

06
TPA
1453

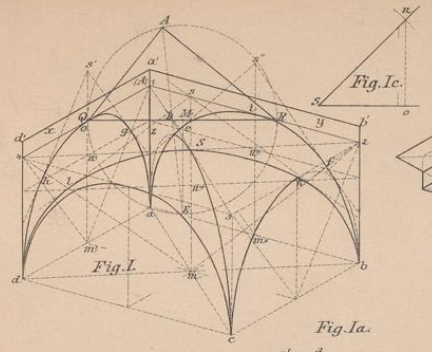


Fig. I.

Fig. Ic.

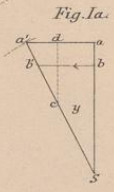


Fig. Ia.

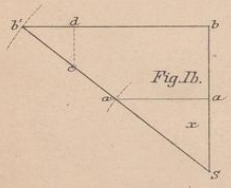


Fig. Ib.

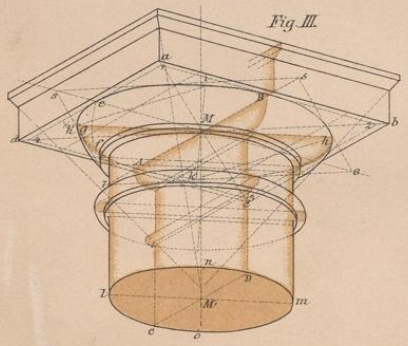


Fig. III.

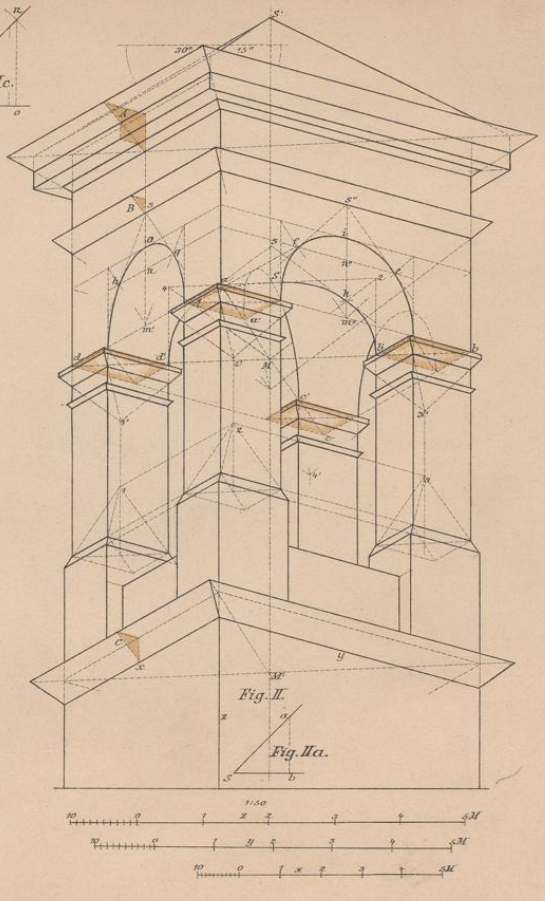


Fig. II.

Fig. IIa.

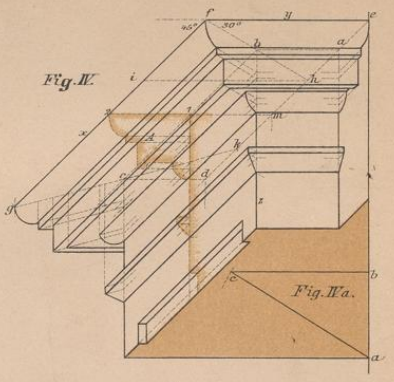


Fig. IV.

Fig. IVa.

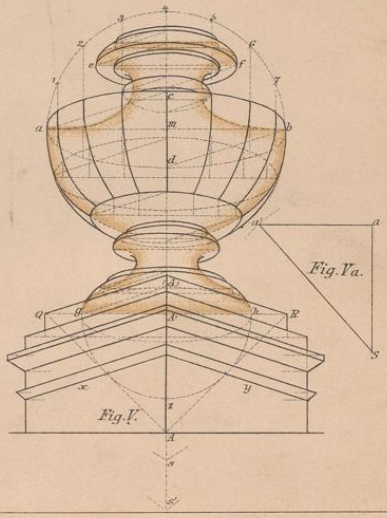


Fig. V.

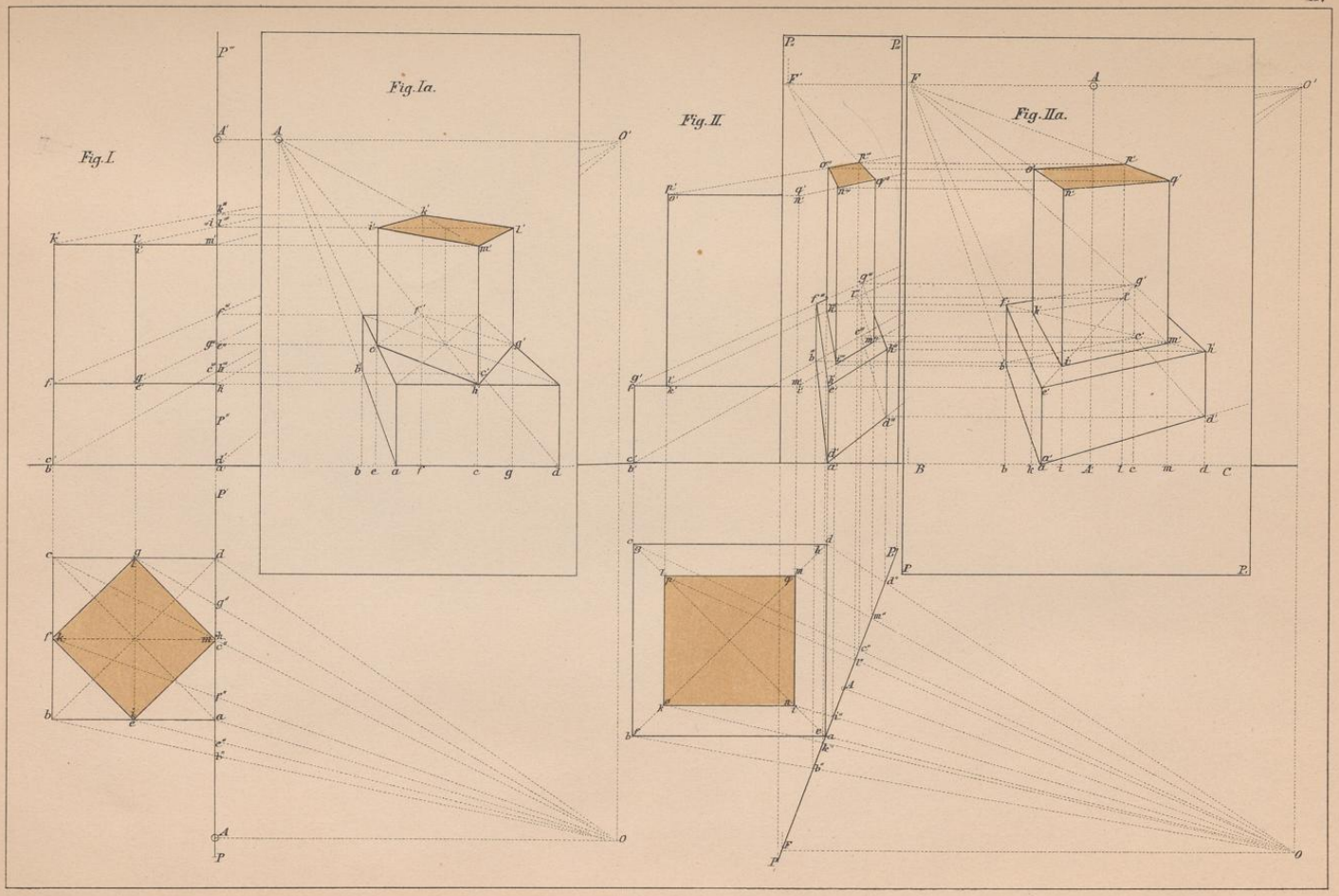
Fig. Va.

48

06
TP9
1453

Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV / K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

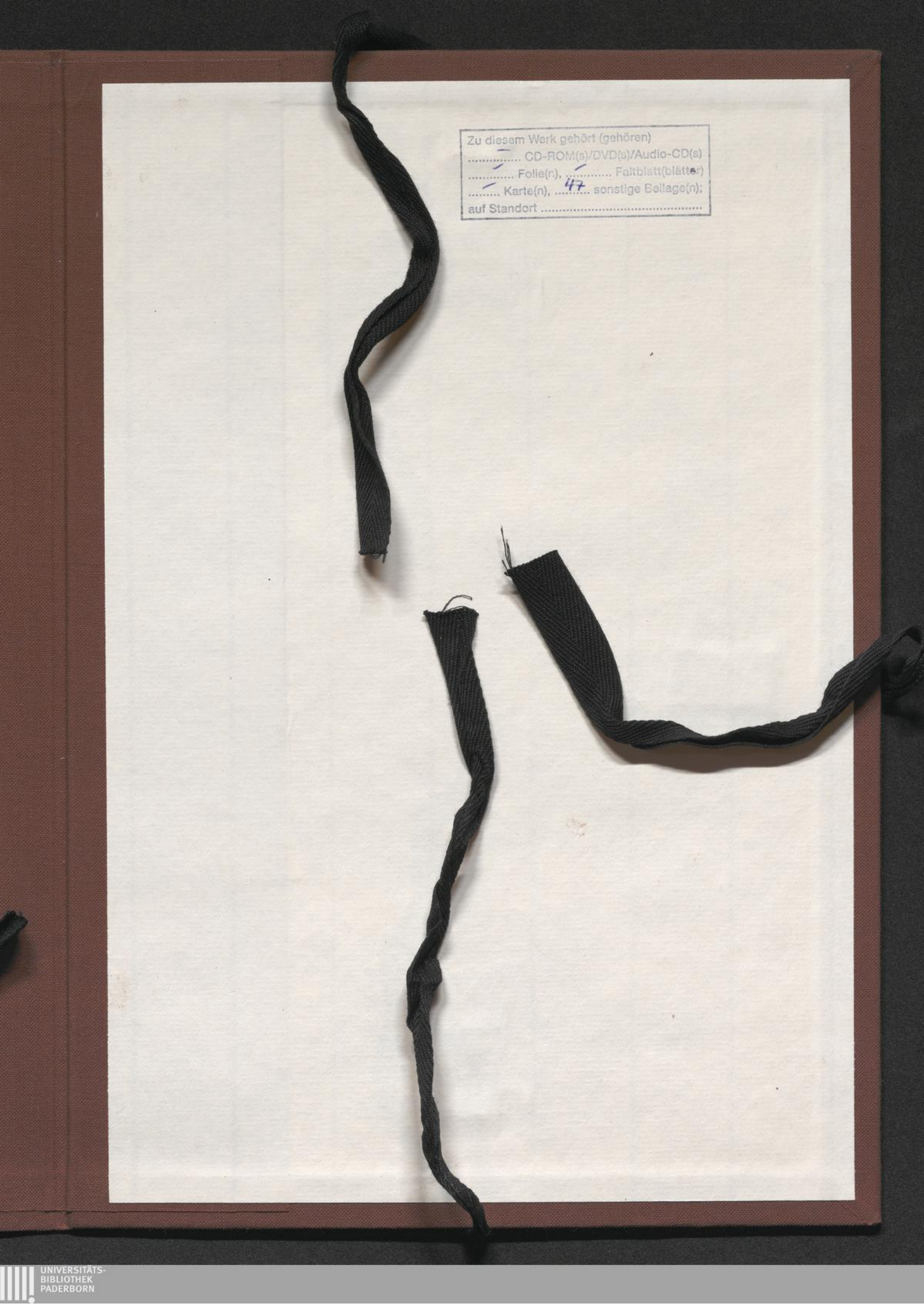


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

06 TPA 1453
Universitätsbibliothek Paderborn 51
EK 1511
KA IV/K5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zu diesem Werk gehört (gehören)
— CD-ROM(s)/DVD(s)/Audio-CD(s)
/ Folie(n), / Faltblatt(blätter)
/ Karte(n), 47 sonstige Beilage(n);
auf Standort



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

P
06

TPA
1453