UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Rathgeber bei mathematischen Beschäftigungen

Stöpel, August

Stendal, 1819

urn:nbn:de:hbz:466:1-63556

Visual Library



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der

Rathgeber

bei

mathematischen Beschäftigungen

oder

Sammlung von Formeln aus der reinen und angewandten Mathematik mit nöthigen Erläuterungen und Beispielen,

für

Lehrer, Zöglinge, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, und diejenigen, die sich selbst darin unterrichten.

Mit 6 Kupfertafeln,
vielen beim Gebrauch der Mathematik nützlichen Tabellen
und 13 astronomischen Tafeln.

Herausgegeben
von

August Stöpel.

Zu haben beim Verfasser,
und zu Stendal
in Commission bei Franzen und Große, 1819.

Universitäts-Gesamthochschule
Bibliothek
15
Paderborn

OG
TBN
2181 Te
19 1988 4561 G.

Vorrede.

Ein aufmerksamer Blick auf die Bedürfnisse unserer Zeit, auf den Geschäftsdrang in fast allen Ständen und Verhältnissen, so wie auf den Zustand der mehrsten Bildungsanstalten scheint zu verrathen, daß ein Buch, welches die Anwendung mathematischer Sätze auf das praktische Leben in einer gewissen Kürze und Deutlichkeit enthält, für sehr Viele ein wahres Noth- und Hülfsbuch sey. Eine bloße Formelsammlung hilft nicht aus, und kann schon darum dem Bedürfnisse nicht entsprechen, weil die Benutzung derselben zu viele Vorkenntnisse voraussetzt. Nur mit den nöthigsten Erläuterungen und Beispielen versehen, können Formeln auch von denen mit Vortheil gebraucht werden, die keine Gelegenheit hatten, sich gründliche Einsichten in die Mathematik zu erwerben. Aber es bleibt immer noch eine eigene Bekanntschaft mit den arithmetischen und geometrischen Operationen nothwendig, um sich in den gegebenen Regeln oder Formeln zu Recht zu finden. Sich diese zu erwerben, muß das angelegentlichste Geschäft eines jeden seyn, der sich von dem

weitumfassenden Nutzen dieser herrlichen Wissenschaft für eigne Ausbildung sowohl, als für seine künftige Brauchbarkeit überzeugt hat. Jede gute Bürgerschule könnte und sollte der Jugend hierin hinlängliche Anweisung geben.

Diese Ansichten haben mich bei der Ausarbeitung des gegenwärtigen Buches geleitet, dessen Zweck daher folgender ist. Es soll

denkenden Köpfen, die sich gründliche mathematische Kenntnisse nicht früher erwerben konnten, bei vorkommenden Fällen ein Freund in der Noth, ein Rathgeber seyn;

dem Lehrer mathematischer Wissenschaften, so wie dem Geometer, die Bequemlichkeit, welche überhaupt jede gut geordnete Formelsammlung giebt, gewähren, und bei beschränkten Lehrstunden als Leitfaden dienen;

vom Lernenden zum eigenen Studium und zur Wiederholung des Unterrichts gebraucht werden.

In wie fern mir der Versuch gelungen ist, für diesen Zweck mit Nutzen zu arbeiten, mögen Kenner beurtheilen. Entfernt von aller Anmaßung bin ich mir wenigstens bewußt, ihn fest im Auge gehalten zu haben, bekenne aber auch meine Ueberzeugung, daß es schwer ist, ihn zu erreichen, und völlig unmöglich, den Forderungen, die jeder Einzelne nach seinem individuellen Bedürfniß und dem Grade seiner Kenntnisse an dieses kleine Werk machen kann

und

und wird, völlige Genüge zu leisten. Um so mehr glaube ich auf die Nachsicht der Leser Anspruch machen zu können, welche ich von allen denen gewiß zu erhalten hoffe, die es nicht vergessen, daß ein Buch dieser Art nicht ohne einige Anstrengung gebraucht und benutzt werden kann. Auch die Bogenzahl konnte nicht unbeachtet bleiben, weil sie den Preis bestimmt, der, wenn meine Absicht, Vielen nützlich zu werden, erreicht werden sollte, nicht hoch seyn dürfte. Daher glaubte ich alle weitläufige Beweise und Herleitungen der Formeln, woran ohnehin dem Praktiker und Geschäftsmanne wenig liegt, wo es irgend zulässig war, übergehen, und dem Ganzen gerade diese Form geben zu müssen, welche bei einem gewissen Grad der Vollständigkeit schnelles Auffinden der gewünschten Regeln und Formeln bezweckt. Ob ich auch hierin glücklich gewesen bin, davon wird mich besonders das Urtheil derer, welche das Werkchen benutzen, belehren.

Die erste Abtheilung enthält außer den zum völligen Verstehen unentbehrlichen arithmetischen, geometrischen und trigonometrischen Vorkenntnissen, auch noch etwas von den Kegelschnitten und krummen Linien höherer Ordnungen, welches freilich nur dem Geübteren nützen, und deshalb von denen, die es nicht bedürfen, überschlagen werden kann. Nach dem zum Grunde gelegten Plan konnte alles hier Gegebene nicht vollständiger und gründlicher abgehandelt werden. Es wird für Bürgerschulen, in

wel-

welchen dem Unterricht in der Geometrie nur wenige Stunden gewidmet sind, hinreichen. Größere Weitläufigkeit wäre nach meiner Meinung zweckwidrig gewesen. Kann der Unterricht einmal nicht erschöpfend gegeben werden, so umfasse er wenigstens dasjenige, was dem Leben frommt, und schließe aus, was irgend entbehrt werden kann. In diesem Fall ist es Pflicht des Lehrers, seine Zöglinge auf das Praktische mehr, als auf das Theoretische hinzuführen. Wenn in einer Schule wöchentlich nur 2 mathematische, 4 Rechnenstunden, und 1 Stunde zu praktischen Übungen statt finden, so wird ein fähiger Knabe von 14 Jahren die ersten 8 Abschnitte wohl begriffen haben, folglich alles mit Geläufigkeit übersehen, was die folgende zweite Abtheilung enthält.

Die Zeichnung geometrischer Figuren ist ein sehr angenehmes Geschäft, welches schon den 9jährigen Knaben anzieht, und, außer vielen Vortheilen für's künftige Leben, auch noch den Nutzen gewährt, daß es ihm Liebe zur Mathematik einflößt, und als eine gute Vorübung zum eigentlichen und höhern Unterricht betrachtet werden kann. — Nicht allen, die geometrische Aufgaben lösen wollen, stehen vollkommene Meßgeräthschaften und Hülfsmittel zu Gebote; daher mußten die Aufgaben aus der Linienzeichnung und Linienmessung faßlich und auf mehrerlei Weise gelöset, und die Meßgeräthschaften auf's Einfachste beschrieben werden. So weit als möglich sind alle Formeln in der 2ten Abtheilung durch Beispiele

spiele erläutert, und deshalb zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet. Wer in einer höhern Schule nur reine Mathematik hörte, wird mit Wohlgefallen bei der praktischen Geometrie verweilen, wenn ihm seine Berufsgeschäfte Erholungsstunden gönnen.

Dem wißbegierigen Jünglinge und Manne nützt die dritte Abtheilung vornehmlich dadurch, daß sie ihn bei seinem Gewerbe oder seiner Kunst, bei der Wissenschaft oder Lieblingsbeschäftigung mit einer ziemlichen Sammlung von Formeln unterstützt, die mit einigen Vorkenntnissen leicht zu verstehen und anzuwenden sind. Überhaupt kann man bei jedem Gebildeten voraussetzen, daß ihm die darin abgehandelten Wissenschaften nicht ganz fremd sind.

In der vierten Abtheilung finden diejenigen, welche die erhabenste aller Wissenschaften, die Sternkunde, zu ihrer erholenden Nebenbeschäftigung machen, die vornehmsten Formeln so faßlich, als es ohne große Weitläufigkeit möglich war, in einer leicht zu übersehenden Ordnung beisammen. Die im Anhange befindlichen astronomischen Tafeln sind dabei unentbehrlich, bequem, und zu ihrem Zweck genau genug. Durch die Verbreitung astronomischer Kenntnisse wird der Geographie wesentlicher Nutzen gestiftet, mancher Irrthum zerstört, und eine reinere, würdigere Erkenntniß des Weltenschöpfers erzeugt. Möge diese meine Darstellung hiezu das ihrige beitragen!

Benutzte Schriften sind, wie ich glaube, mehrere

rentheils angegeben. Denen, die sich selbst unterrichten, hätten vielleicht noch einige neuere Schriften, z. B. die Lehrbücher von Streit, Lehmus ꝛc., genannt werden können. Allein die wenigsten werden der literarischen Kenntniß in diesem Fache bedürfen, und falls sie ihnen nöthig wäre, das Beste und Gehaltvollste in weitläufigern Werken und Zeitschriften angezeigt finden.

Das frühere Erscheinen dieses Buches wurde durch das späte Eingehen der Subscribentenlisten unmöglich gemacht, weshalb mich die gütigen Beförderer entschuldigen werden. Auf Satz und Correctur ist der möglichste Fleiß verwendet; wenn sich dessenungeachtet einige Druckfehler eingeschlichen haben, so erinnern sie an die Unvollkommenheit aller menschlichen Bemühungen.

Endlich muß ich allen geehrten Interessenten für ihre gütige Theilnahme, besonders aber den achtungswerthen Männern, welche die Gewogenheit hatten, diese Schrift zu empfehlen, hiemit meinen innigsten Dank sagen. Mögen sie nichts Unwürdiges empfohlen haben, und sich in dem Beifalle, den jeder Schriftsteller seinem Werke wünscht, belohnt sehen!

Tangermünde, im May 1819.

Stöpel.

Verzeichniß der Beförderer.

Abbenrode.

Exempl.

Hr. Wehmeier, Revierförster . . . 1

Altbeichlingen.

— W. Stöpel, Einnehmer 1

Arendsee.

— Geißler, Einnehmer 2

— Audorf, Cantor . 3

Berlin.

— Amelang, Buchh. 2

— Prof. Bode, Königl. Astronom . . . 4

— C. Blume Studios. 2

— M. Kaiser

— Gebr. Gädicke, Buchhändler 1

— Haude und Spener, Buchhändl. 1

Joachimsthalsches Gymnasium . . 10

für Hr. Braumüller

— — Clasen

— — Cleve

— — v. Dolffs

— — Korn

— — Laake

— — Neumark

— — Penzhorn

— — Schmidt

— — Schulze.

Die Maurersche Buchh. 4

für Hrn. Schirmer, Candidat.

für Hrn. Sieber, Königl. Hüttenofficiant zu Pasewalk.

2 Ungenannte.

— Mittler, Buchh. 2

Exempl.

Hr. Nauk, Buchhändl. 1

— Nicolai — 12

Betzow.

— Krickau, Canditat Theolog. . . . 1

Bielefeld.

— Helmich, Buchh. 1

Braunschweig.

— Lucius, Buchhändl. 1

Briest.

— Borchmann, Amtm. 1

Buch.

— Kaselitz, Kantor 1

Coblenz.

— Stephan, Oberpostsekretair . . . 1

Coburg.

Ahlsche Buchhandl. 1

für Hrn. Lieut. v. Hensoldt.

Darmstadt.

Hr. Heyer u. Leske, Buchhändler . . . 2

Elversdorf.

— Hübenthal, Pastor 1

Fischbeck.

— Heinemann, Ackerm. 1

— Lindstedt — 1

— Neumann, Mühlenbesitzer 1

Frankfurt a. d. O.

— Ewald, Rector 1

Grünau bei Rathenow.

— Graf v. Bredow, Lieutenant . . . 1

— Maj. v. Bornstedt 1

— v. Bornstedt, Oberförster 1

Hr.

	Exempl.
Hr. Köls, Oconnomie-commissair . . .	1
— Lud. Peetsch —	1
Genthin.	
— Hirschberg, Pred.	3
Grieben.	
— Haupt, Cand. Theol.	1
— Pohlmann, Pastor	1
Halle.	
— C. Räck an dem Waisenhause . . .	15
für Hrn. Böttcher, Inspector.	
— — v. Bonnin.	
— — F. Brehme.	
— — A. C. Gieseler.	
— — H. W. Hedicke.	
— — C. F. D. Koch.	
— — F. E. Obenaus.	
— — C. A. Pfützenreiter.	
— — F. v. Portugall.	
— — J. F. Rennert.	
— — C. W. Richter.	
— — E. Roloff.	
— — C. A. W. Thiele.	
— — F. Veit.	
Buchhandlung des Waisenhauses . . .	2
für Hrn. Dr. Mensing	
— J. C. Preßler	
Hr. Kahlbau, Studios.	1
— Lehmann, Studios. Theolog. . . .	1
— J. F. W. Petzee	1
— E. Schwarz . .	1
Hamburg.	
— Hoffmann u. Campe, Buchhändler	2
— Perthes u. Besser	1

	Exempl.
Hasserode.	
Hr. Semper, Revierj.	1
Havelberg.	
— Petzold, Rector	1
Hemerten.	
— Hahnes, Pastor	2
Herzberg.	
— Ruperti, Candit.	
Hildesheim.	
— Gerstenberg, Buchhändler	4
Jerchel.	
— Maaß, Administrat.	1
— Lautz, Förster	1
Jerichow.	
— Friese, Einnehmer	6
— Herzberg, Pastor	1
— Schrader, Oberamtmann	2
Joachimsthal.	
— Mann, Bürgermeister und Postmeister	8
Ilsenburg.	
— v. Hagen, Forstm.	1
— Feierstavke, Forsteleve	1
— Kallmeier, Forstcontroleur . .	1
Köckte.	
— v. Roth, Obristl.	1
Königsberg.	
— Unzer, Buchhändl.	1
Langeln.	
— Krieg, Kantor	1
Leipzig.	
— Köhler, Buchhändl.	2
— Kummer —	1
Lindstedt.	
— Schreck, Pastor	1

Magdeburg.

Exempl.

Hr. Aster, Kupferstecher 1
Creutzsche Buchhandl. 2
Hr. G. W. Dennhard 1
Mangelsdorf.
— Schmidt, Pastor 1
Ostehren.
— Echtermeier, Kant. 1
Osterburg.
— Binde, Uhrmacher 1
Potsdam.
— Boukle, Mechanik. 1
Prenzlau.
— L. Ragotzky, Buchh. 1
Quedlinburg.
— Basse, Buchh. 1
Ringfort.
— Lucke, Amtmann 1
Rossau.
— Frede, Kantor und
Organist . . . 1
Ruppin.
— Dr. Thormeyer,
Rector 1
Schulbibliothek daselbst 1
Kl. Schwechten.
Hr. Böttticher, Pastor 1
Schmidtsdorf.
— A. Bartsch, Pastor 1
Schönebeck.
— Postsek. Huttner 11
für Hrn. Backs, Gra-
dierinspector
— — Bäseler, Cal-
culator
— — Fabian, Sa-
lineninspector.
— — Freiburg,
Salineneleve.
— — Grund, Fuß-
steiger.

Exempl.

für Hrn. Hermann,
Buchhalter
— — Schönwalde,
Bauinspector.
Sondershausen.
Hr. B. F. Voigt, Buchh. 2
Stendal.
— Pastor Krüger an
St. Jacobi . . 21
für Hrn. Allendorf,
Kaufmann.
— — Domh. v. Bis-
mark, Landrath.
— — v. Bornstedt,
Oberforstinsp.
— — Brohm, Cri-
minalactuar.
— — Dulon, Postm.
— — Ehrich, Kaufm.
— — Fels, Kreisphys.
— — Fogliani, Ein-
nehmer.
— — Garlipp, Sekret.
— — Bar. v. Gayl,
Cammerdirector.
— — Dr. Große, Con-
rector.
— — Hauffen, Con-
ducteur.
— — Helmke, Rathm.
— — John, Subrect.
— — Klee, Land- und
Stadtgerichtsdir.
— — v. Pirch, Obrist,
und Commandeur
eines Regiments.
— — Quehl, Crimi-
nalrichter.
— Ribbeck, Superint.
— — Rothe, reit. Feldj.

für

für Hrn. Straube, Past.
— — Templin, Act.
— — Villaret, Past.
— — Con. Wernike, Kaufmann.
— — H. Wernike, Kaufm.

Tangermünde.

Hr. Allendorf, Bürgermeister 1
— Aly, Kaufmann 1
— Bauer, Stadtsek. 1
— Bauer, Brauer 1
— Bernhardt, Kaufm. 1
— Beschütz, Kaufm. 1
— Blell, Brauer . 1
— Bredemeier, Gastw. 1
— Buchmann, Steueraufseher . . . 1
— Burgwardt, Gärtn. 1
— Dieterici, Pastor 1
— Ebeling, Rector 1
— Engelmann, Lwhdl. 1
— F. Fischer, Kaufm. 1
— W. Fischer, Kaufm. 1
— Flotho, Oberamtm. 1
— Flügel, Strombaum. 1
— Gagel, Stadtmusik. 1
— Gerike, Klosterpächt. 1
— Hanisch, Superint. 1
— Hemprich, Brauer 1
— Holländer, Bäcker 1
— C. v. Hoverbeck 1
— Hübener, Kaufm. 1
— Huldreich, Bäcker 1
— Imelmann, Thierarzt 1
— Kindervater, Priv. 1
— Kleinau, Salzfact. 1
— W. Kleinau, Pharm. 1

Exemp.

Hr. Knappe, Schlosserm. 1
— Kohlmeier, Schuhm. 1
— Köppe, Instrumentm. 1
— Kolbe, Postmeister 2
— Kramer, Baucond. 1
— Krebs, Instrumentm. 1
— Kusmin, Kaufm. 1
— Lengner, Dr. Med. 1
— Meier, Kaufmann 1
— Müller, Kaufm. 1
— Nethe, Schiff. u. Ölf. 1
— Prüß, Schiffer 1
— Richter, Str. bauel. 1
— Röhr, Rathszimmerm. 1
— Roscher, Stadtphys. 1
— Sack, Schiffbauer 1
— Schluß, Schiffer 1
— Schmidt, Küster 1
— Sieckel, Conrector 1
— Striepen, Amtm. 1
— Thiele, Seilermeist. 1
— Thürnagel, Brauer 1
— Trippler, Drechsler 1
— Zabel, Gastwirth 1
— Zabel, Orgelbauer 1

Vinzelberg.

— Gorges, Kreissekret. 1
— Stöter, Sekretair 1

Wernigerode.

— Postm. Schwieger 6

für Hr. Dahl, Kammersek.
— — Gier, Conrector.
— — Harzmann, Cand.
— — J. N. Hellmann.
— — Salomon, Musikd.

Züllichau.

— Darnmann, Buchh. 1

Zossen.

— Kinderling, Pastor 1

Inhalt.

Erste Abtheilung.

I. Buchstabenrechnung von Seite 1 bis 17.
§. 1 — 41 Addition, Subtraction, Multiplication und Division der einfachen und zusammengesetzten Buchstabenausdrücke und Potenzen.

II. Decimalbruchrechnung von Seite 18 — 24.
§. 42 — 59 wie Decimalbrüche entstehen, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden.

III. Verhältnisse, Proportionen und Progressionen, Seite 24 — 42.
§. 60 — 74 Erklärungen, arithmetische Verhältnisse, Proportionen, Progressionen, Aufgaben und Formeltafel; §. 75 — 89 geometrische Proportionen, Progressionen, Aufgaben und Formeltafel.

IV. Das Ausziehen der Wurzeln, Seite 42 — 56.
§. 90 — 103 Dignitäten, die Quadratwurzel, Beispiele; √ aus Irrationalgrößen und Brüchen; §. 104 — 113 Auffinden der Kubikwurzel aus allerlei Größen.

V. Gebrauch der Logarithmen, Seite 56 — 66.
§. 114 — 133 etwas von ihrer Entstehung, Gebrauch der logarithmischen Tafeln an allerlei Fällen.

VI. Von den Gleichungen, Seite 66 — 92.
§. 134 — 141 mit einer unbekannten Größe; §. 142 — 146 mit mehrern unbekannten Größen; §. 147 — 154 quadratische Gleichungen; §. 155 bis 160 kubische Gleichungen.

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Begriffe, Seite 93 — 123.

§. 161

§. 161 — 196 die vornehmsten geometrischen Lehrsätze; §. 197 — 206 Vielecke und Kreis; §. 207 bis 212 Lage der Ebenen; §. 213 — 237 geometrische Körper.

VIII. Ebene Trigonometrie, Seite 124 — 131.
§. 238 — 251 Erklärungen, Lehrsätze und Anwendung derselben; allerlei Regeln.

IX. Sphärische Trigonometrie, Seite 131—142.
§. 251 — 263 Erklärungen; Sechs Gesetze zur Auflösung der rechtwinklichten Kugeldreiecke nebst Beispielen; §. 264 — 273 Sieben Gesetze zur Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke nebst Beispielen.

X. Von den Kegelschnitten, Seite 142 — 181.
§. 274 Erklärungen; §. 275 — 299 die Parabel mit ihren Gleichungen, Zeichnung und Berechnung aller ihrer Linien nebst einer Formeltafel. §. 301 die Ellipse; §. 302 — 343 Erklärungen und Gleichungen der elliptischen Linien; Zeichnung und Berechnung; Formeltafel. §. 344 die Hyperbel; §. 345 — 376 Gleichungen für alle hyperbolische Linien; Zeichnung und Berechnung derselben; Formeltafel.

XI. Von den Linien höherer Ordnungen, Seite 181 — 194.
§. 378 die Cissoide, ihre Zeichnung und Berechnung; §. 379 die Conchoide, ihre Zeichnung und Berechnung; §. 381 die Spirallinie, §. 382 — 383 Zeichnung und Berechnung derselben; §. 384 — 386 Cycloide nebst Zeichnung und Berechnung; §. 387 Logarithmische Linie und ihre Construction; §. 388. die Schlangenlinie oder Glockenlinie; §. 389. die Blattlinie; §. 390. die Quadratrix; Berechnung dieser Linien.

Zweite Abtheilung.
Praktische Geometrie.

I. Zeichnung geometrischer Figuren, Seite 195 bis 215.

§. 392

§. 392 — 420. allerlei Aufgaben, die Zeichnung der gerad- und krummlinichten Figuren betreffend; §. 421 — 443. Zeichnung der geometrischen Körper.

II. Linienmessung, Seite 213 — 250.
§. 446 — 485. Meßgeräthschaften, sie anzufertigen; allerlei Linien im Freien auf mancherlei Art zu messen, Gegenden aufzunehmen; Höhen zu finden auf mehrerlei Weise, Tiefen u. s. w.

III. Flächenmessung, Seite 250 — 264.
§. 486 — 492. Formeln für die Flächen der geradlinichten Figuren; §. 493 — 495. Formeltafeln für die Vielecke; §. 496. Flächen der krummlinichten Figuren.

IV. Vermischte Aufgaben über Linien- und Flächenmessung, Seite 264 — 278.
§. 510 — 528. Aufgaben aus der analytischen Geometrie, die Dreiecke und Trapezien betreffend.

V. Verwandlung der Figuren, Seite 278 — 288.
§. 529 — 544. Formeln für die Verwandlung einer Fläche in ein Dreieck, Parallelogramm, Vieleck; in Figuren von gegebenen Verhältnissen; in krummlinichte Figuren.

VI. Ausmessung der Körper, Seite 288 — 309.
§. 545 — 582. Formeln für den kubischen Inhalt aller geometrischen Körper, elliptischer Gefäße, der Fässer (Anfertigung der Kreuzvisirstäbe), der Ellipsoide, des paraboloischen Afterkegels, der Kugel und ihrer Theile; der Kornhaufen und Schiffsräume.

VII. Verwandlung der Körper, S. 309 — 317.
§. 583 — 594. Formeln für die Verwandlung eines Körpers in allerlei andere geometrische (Würfel zu verdoppeln); in Körper von gegebenem Verhältniß; §. 595. eine Anwendung auf Orgelpfeifen.

Dritte Abtheilung.
(Angewandte Mathematik.)

I. Statik oder Mechanik, Seite 317 — 333.
§. 597 — 608. der Hebel; Formeln für alle vorkommende Fälle bei Hebeln von der ersten, zweiten und

und dritten Art; beim Winkelhebel; mittlere Kraft. – §. 609 613. das Räderwerk, Formeln für das Gleichgewicht und Verhältniß der Räder; die Umläufe; für den Flaschenzug. — §. 614 – 617. die schräge Ebene, der Keil, die Schraube, Schraube ohne Ende.

II. Hydrostatik oder vom Gleichgewicht flüssiger Körper, Seite 334 – 352.

§. 618—633. Druck; wahre Horizontallinie; das Nivelliren, Profilöffnung, Geschwindigkeit, Wassermenge eines Stroms zu finden; Wasserstrahl, Tabelle für den Seitendruck; lebendige und todte Kraft; Schutzöffnung und Standwasserhöhe; §. 634 – 636. Reibung bei Mühlenwerken, Tabellen; §. 637 641. specifisches Gewicht der Körper: Tabelle über die eigenthümlichen Gewichte vieler Körper; Verluste der Körper beim Abwägen im Wasser ꝛc.

III. Von der Luft und dem Barometer, Seite 352 – 358.

§. 643 – 649. Druck der Luft, Barometer, Formeln zur Höhenmessung mittelst desselben; Schwere der Luftarten.

IV. Vom Wärmestoff und dem Thermometer, Seite 358 – 364.

§. 650 – 659. der Wärmestoff, Vergleichung der Thermometergrade; Tafel der Wärmegrade vieler Dinge nach Fahrenheit und Reaumür; Gesetze der Temperaturveränderungen; Verbrennen; Bestandtheile des Luftzünders, Knallpulvers ꝛc., Entzündung und Schmelzung; Wärme leitende Kraft.

V. Vom Licht, Seite 365 – 392.

§. 660 667. Optik, Erleuchtung, Sehewinkel, Größe der Schatten und Halbschatten; §. 668 bis 672. Katoptrik, Planspiegel, Hohlspiegel, erhabene Spiegel, Formeln für die Brenn- und Bildpuncte; Spiegelmasse; §. 673 – 697. Dioptrik, Brechung der Lichtstrahlen, optische Gläser und ihre Brennweiten, Größe der Bilder; Spaltung der Lichtstrahlen, achromatische Gläser; Brillen; das Microscop, Fernröhre und Formeln dazu;

Vor-

Vorsichtsmaßregeln; Spiegeltelescope, andere optische Geräthschaften.

VI. Grundsätze aus der Dynamik, Seite 393 bis 414.

§. 698—710. Masse, Dichtigkeit, Bewegung, Stoß; krummlinichte Bewegung, Centralkräfte, Kepplers Gesetze ꝛc.; §. 711—717. Gesetze der Schwere auf der Erdoberfläche, ihre Verminderung durch den Umschwung der Erde; durch beschleunigte Bewegung erzeugte Kraft, Wurfbewegung; §. 718—723. das Sekundenpendel, Formeln für die Pendellängen; §. 724—726. Fall auf der schrägen Ebene; §. 727—729. Stoß elastischer Körper; §. 730—733. Berechnung der Töne, Tabelle für die gleichschwebende Temperatur; Anwendung auf die Guitarre.

Vierte Abtheilung.
Astronomie.

I. Sphärische Sternkunde, Seite 415—464.

§. 734—760. Erklärungen; Himmelskugeln, Meridianinstrument, Zeitgleichung; §. 763—801. Formeln für alle Aufgaben aus der sphärischen Sternkunde, die Sonne und Fixsterne betreffend; §. 802—804. Mittagsverbesserung (Hülfstafeln); §. 805—807. Zurückweichen der Aquinoctialpuncte, Verzeichniß der vornehmsten Fixsterne, nebst Bestimmung ihres Orts für das Jahr 1820; §. 808—813. Strahlenbrechung und ihre Folgen; §. 814—820. Parallaxe, Abstand der Weltkörper.

II. Copernikus Lehre, Seite 465—482.

§. 821—843. das Sonnensystem, Umwälzung der Erde; Erscheinungen an den Planeten; ihre wahre Bahnen, Elemente derselben zur Zeichnung eines Sonnensystems; wie der elliptische Lauf der Planeten zu bestimmen sey.

III. Natürliche Beschaffenheit der Sonnen- und Planetenoberflächen. Seite 482—507.

§. 844—848 von der Sonne; §. 849 dem Mer-

kur;

kur; §. 850. von der Venus; §. 851 — 868. die Erde mit dem Monde, Lauf des Mondes, Beschreibung seiner Oberfläche; §. 869 — 883. Beschreibung der Oberflächen aller übrigen Planeten, und Erscheinungen an denselben; §. 885. die Kometen; §. 886. wahrer Durchmesser, §. 887. Masse und Dichtigkeit der Planeten, Fallkraft ꝛc.

IV. Leichte und sichere Verfahrungsweise, Sonnenuhren zu zeichnen. Seite 507 — 512. §. 889 — 895. Zeichnung der Horizontaluhr, Vertikal- Oriental- und Occidentaluhr, Tangenten der Stundenwinkel zu finden.

Anhang.
Astronomische Tafeln.

Tafel I. Verwandlung der Zeit in Grade; und umgekehrt.
— II. Sternzeit auf mittlere Sonnenzeit.
— III. Zeitgleichung.
— IV. Halbmesser der Sonne für jeden 10ten Tag des Jahrs.
— V. Sonnenparallaxe für ihre scheinbare Höhe.
— VI. Strahlenbrechung nebst Verbesserung.
— VII. Verbesserung des durch Sonnenhöhen erhaltenen Mittags.
— VIII. Zur Zeichnung der Horizontalsonnenuhren;
— IX. Zu Vertikalsonnenuhren.
— X. Zu Oriental- und Occidentaluhren.
— XI. Zur Berechnung des scheinbaren Sonnenlaufs vom Jahr 1810 bis 1869.
— XII. Auflösung der ebenen Dreiecke;
— XIII. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Verbesserungen.

Seite 72, Zeile 11 von oben lies 28x anstatt 28. S. 115. Z. 1 v. o. lies Linie anst. Ebene. S. 126. Z. 3 v. u. lies 180° anst. 80°. S. 182. Z. 21 v. o. lies aufzutragen anst. aufgetragen. S. 235. Z. 18 v. o. lies lba anst. lha. S. 240. Z. 23 v. o. lies ac anst. bp. S. 246. Z. 15 v. o. lies x anst. y. S. 248. Z. 4 v. u. lies Zirkel anst. Zir=. S. 257. Z. 6 v. u. lies 3,14 anst. 314. S. 268. Z. 7 v. o. lies ym anst. yn. S. 269. Z. 1 v. o. lies x^2 anst. y^2. S. 272. Z. 14 v. o. lies ab anst. a.d. Z. 19 v. o. lies AF anst. AE. S. 273. Z. 2 v. u. lies noch anst. nach. S. 276. Z. 11 v. u. lies x^2 anst. a^2. S. 286. Z. 1 v. o. lies geforderte anstatt gefundene. S. 350. Z. 4 v. u. lies Verlust anstatt Verust. S. 434. Z. 2 v. u. (muß die Parallaxe zur Aquatorhöhe addirt werden.) S. 440, 441 und öfter ist dauert anst. dauret zu lesen. S. 444. Z. 4 v. u. fehlt das Zeichen ♈. S. 460. Z. 10 v. o. lies VI anst. VII. S. 476. Z. 15 v. o. lies Perihelium anst. Periphelium.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Erste Abtheilung.

I. Buchstabenrechnung.

§. 1. Die Buchstabenrechnung ist eine, jedem Freunde der Mathematik unentbehrliche, Wissenschaft, ohne welche es ihm unmöglich ist, Formeln oder Vorschriften zur Auflösung mathematischer Aufgaben zu lesen, anzuwenden, oder selbst zu erfinden, und die dahin gehörigen Schriften zu verstehen. Es ist daher nothwendig, daß sich jeder, der es zu einiger Vollkommenheit bringen will, mit derselben bekannt mache, wozu wir in dem Folgenden Anleitung geben wollen. Die Kenntniß der gemeinen Zahlenrechnung, wie sie in jeder nicht gar zu schlechten Schule gelehrt wird, können wir bei den Freunden mathematischer Beschäftigungen voraussetzen.

§. 2. Gemeiniglich stellen sich Unkundige die Rechnung mit Buchstaben weit schwerer vor, als sie in der That ist, woran unter andern auch der Umstand Schuld seyn mag, daß sie sich bei den Buchstaben, die in Rechnungen vorkommen, durchaus bestimmte Größen oder Zahlenwerthe vorstellen wollen, und von dem damit bezweckten Nutzen oder Vortheile keinen deutlichen Begriff machen können. Ein guter mündlicher Vortrag ist freilich der leichteste und kürzeste Weg, bald zu einiger Fertigkeit in der Buchstabenrechnung zu gelangen; allein nicht Alle können sich dieses Glücks erfreuen! Eigenes Studium muß Vielen ersetzen, was sie früher entbehrten oder versäumten. Wer sich ernstlich vornimmt, eine Wissenschaft zu erlernen, beginne sein Werk nur mit Liebe und Ausdauer, ermatte nicht, wenn ihm dieselbe zu mühevoll, zu schwer vorkommt. So wie jede hohe Gabe

nach dem unabänderlichen Naturgesetze errungen werden muß, so kann man auch die Lustgefilde, welche die Mathematik dem Geiste darbietet, nur dann erreichen, wenn man Muth genug hat, durch die freilich etwas rauhen Pfade, die ihnen vorangehen, zu wandeln. —

§. 3. Zahlen sind Zeichen, durch die wir entweder den Mangel (0), oder die Einheit (1) oder die Mehrheit (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einer Sache dem Auge vorstellig machen. Aus diesen Zeichen ersehen wir aber nicht, welche Sache gemeint sey, sondern nur, wie oft sie als Einheit genommen werden solle.

Das Rechnen mit den Zahlzeichen besteht in einer auf feststehende Regeln sich gründenden Versetzung und Veränderung, die mit ihnen vorgenommen wird. Will man eine Größe, ein Ding, eine Person, Linie oder einen Winkel durch ein einziges Zeichen ausdrücken, und arithmetische Veränderungen damit machen, so sind dazu die Zahlzeichen nicht so brauchbar, als die Buchstaben, weshalb die Rechnung mit letzteren entstanden ist.

Die Buchstaben in den Rechnungen sollen allgemeine Größen vorstellen, unter welchen man sich allerley denken kann. Die Antwort, welche eine Buchstabenrechnung giebt, ist daher eben so allgemein, d. h. auf alles passend; und man rechnet mit Buchstaben hauptsächlich deshalb, um leichte und einfache Regeln zur Lösung einer Aufgabe zu finden. Soll nun die Antwort in Zahlen erfolgen, so setzt man statt der Buchstaben diejenigen Zahlen, die ihnen in der Rechnung zukommen. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Gartens aus seiner Länge und Breite zu bestimmen, so giebt die Geometrie folgende Regel:

$$l \cdot b = F$$

d. h. Länge multiplicirt mit der Breite ist gleich der Fläche. Wenn nun die Länge oder l 8 Ruthen, die Breite oder b 5 Ruthen ist, so beträgt die Fläche F

8 mal 5 = 40 Quadratruthen.

Die Zahlen 8 und 5 geben nur den Flächenraum dieses Gartens, aber die Buchstaben l und b gelten bei allen ähnlichen Gärten und Rechtecken, folglich allgemein.

§. 4. Bei mathematischen Rechnungen sind die negativen und positiven Größen vorzüglich merkwür-

würdig. Sie sind einander stets entgegengesetzt, und etwa als Schulden und Vermögen, Rückwärtsgehen und Vorwärtsgehen, Ausgabe und Einnahme anzusehen. Die negativen Größen werden mit dem Subtractions- oder Minuszeichen (—), und die positiven mit dem Additions- oder Pluszeichen (+) versehen. Größen, vor welchen keins dieser beiden Zeichen steht, sind allemal als positive, oder Plusgrößen, zu betrachten, und müßten das Zeichen + erhalten; welches man der Kürze wegen ausläßt. Wie wichtig der Einfluß dieser Zeichen in den Rechnungen ist, wird man im Folgenden sehen.

Addition.

§. 5. Größen, die zu einander addirt werden sollen, erhalten das Pluszeichen. So heißt z. B. 8+6, oder a+b so viel: die Größen 8 und 6, oder a und b sind zu addiren.

Das Zeichen der Gleichheit ist ein doppelter Strich (=); und 8+6=14 heißt: 8 und 6 ist gleich, oder macht 14.

Nur Dinge von einerley Art lassen sich addiren. 6 Äpfel, 5 Birnen und 9 Pflaumen können unter dieser Benennung nicht summirt werden; daher ordne man alle zu summirende Größen nach ihrer Art und schreibe sie unter einander; dann zähle man das Gleichartige zusammen, und schreibe die Summe darunter.

Eine Zahl vor einer Größe heißt Coëfficient; steht keine davor, so ist der Coëfficient =1.

6a+ 7b+8c	g+ m+ n
3a+ 4b+ c	2g+ 6m+3n
Summe=9a+11b+9c	7g+ 5m+2n
	Summe=10g+12m+6n

Unter den Buchstaben a, b, c, g ꝛc. denke man sich, was man will, als Äpfel, Birnen, Castanien, Gurken u. d. gl., so wird man einsehen, daß 6a und 3a=9a; 7b und 4b=11b u. s. w. machen.

§. 6. Wenn entgegengesetzte Größen z. B. +3 und —3 zu addiren sind, so gleicht man sie mit einander aus, d. h. man zieht die kleinere von der größern ab, und giebt dem Rest das Zeichen der größeren. Z. B.

				+ 7a
+3	+4	−4	+5	+ 3a
−3	−2	+2	−7	− 4a
=0	=+2	=−2	=−2	−11a
				+ 6a
				=+16a−15a=+a

6a	− 4b	−2c	+ d
−a	− 7b	+3c	+ d
5a	− 9b	−7c	
10a	−20b	−6c	+2d

Sind mehrere Größen Einer Art mit verschiedenen Zeichen, wie in den beiden letzten Beispielen, so addirt man die Plusgrößen besonders, und zieht davon die Summe der Minusgrößen ab, oder gleicht sie aus. Z. B. 6a +5a sind + 11a; davon −a, bleibt + 10a.

§. 7. Sollen Größen addirt werden, die nicht von einerlei Art sind, so setzt man sie mit ihren Zeichen neben einander. Z. B.

	4a
	−6b
	+2c
	− d
	− g
=4a	−6b+2c−d−g.

§. 8. Daß eine Größe mehr, oder größer sey, als eine andere, wird durch das Zeichen < angezeigt; an der Öffnung steht die größere, an der Spitze die kleinere Größe. Z. B. 9>5 heißt: 9 ist größer, als 5; und 5<8 heißt: 5 ist kleiner, als 8.

Jede Größe ist sich selbst gleich, also c=c; a=a. Wenn nun a>b, so muß auch a+c>b+c; folglich b+c<a+c.

Subtraction.

§. 9. Da das Subtrahiren oder Abziehen das Entgegengesetzte vom Addiren oder Hinzuthun ist, so gilt auch hier, was schon §. 5. gesagt ist, nämlich: nur Gleichartiges läßt sich wirklich von einander abziehen.

Allge-

Allgemeine Regeln beim Subtrahiren:

Verwandle das Zeichen des Subtrahenden oder der abzuziehenden Größe in das entgegengesetzte, und addire dann oder gleiche aus, so wird das Kommende der Rest oder Unterschied seyn.

Z. B.

Von 12a ist gleich 12a	Von — 16 ist gleich — 16
ab 5a dazu — 5a	ab — 10 dazu + 10
Rest 7a 7a	Rest — 6 — 6
Von 3b + x — 2z	Von a + b + 5c + 3d
ab b — x + z	ab — 6a — 2b + 2d
— + —	+ + —
Rest 2b + 2x — 3z	Rest 7a + 3b + 5c + d
Von — 2z — x + 17g	Von 3m + n
ab — 5z — 8g	ab 4m + 2n + 6z — 8x
+ +	— — — +
Rest + 3z — x + 25g	Rest — m — n — 6z + 8x

In den Beispielen sind in der untersten Reihe die Zeichen verwechselt, und dann beide Reihen addirt. Die Größen, zu denen sich keine gleichnamigen finden, werden, wenn sie in der obern Reihe oder in dem Minuenden stehen, mit demselben Zeichen unter den Strich, wenn sie aber im Subtrahenden stehen, mit entgegengesetztem Zeichen herabgesetzt.

§. 10. Sind die Größen nicht gleichnamig, aber zusammengesetzt, d. h. aus mehrern durch + und — verbundenen Theilen oder Gliedern bestehend, so wird das, was zu jeder Größe gehört, in Klammern eingeschlossen, und zwischen beide das Minuszeichen gesetzt. Z. B.

Von 4a — 3b + 2c
ab — 7g + x — z

Rest (4a — 3b + 2c) — (— 7g + x — z)

In solchen Fällen wird also die Subtraction bloß angezeigt.

Wenn die Werthe der einzelnen Glieder bekannt sind, so verwandelt man sie in einen Zahlwerth, und verrichtet dann die Subtraction. Z. B.

Von

Von 6 + 5 + 4 das ist = 15
ab − 7 − 8 + 9 − = −6
+
Rest = +21

§. 11. So wie Gleichviel zu Gleichvielem addirt Gleichviel in den Summen giebt, so muß Gleiches von Gleichem subtrahirt auch gleichgroße Reste übrig lassen.

Es sey a = m, so ist a + z = m + z
und a − z = m − z

Das Minuszeichen erhält jede abzuziehende Größe; als 60 − 30 heißt: von 60 soll 30 subtrahirt werden; deßgleichen a − b heißt: von der Größe a soll die Größe b abgezogen werden.

Multiplication.

§. 12. Größen, die mit einander multiplicirt werden, erhalten das Multiplicationszeichen, welches ein Punct, oder ein schiefliegendes Kreuz ist. Z. B. 8 . 6 oder 8 X 6 heißt: 8 mal 6; a . b heißt: a mal b. Indessen braucht man die Buchstaben, welche mit einander zu multipliciren sind, nur neben einander ohne Zeichen zu setzen, wenn nicht anderer Ursachen wegen eine Zweideutigkeit zu besorgen ist. So ist ab eben so viel, als a . b oder a X b.

§. 13. Die zu multiplicirenden Größen heißen Factoren oder Efficienten; was aus beiden entsteht heißt Product.

§. 14. Oft sind mehrere Factoren mit einander zu multipliciren, dann ist es einerlei, in welcher Reihenfolge sie stehen. Denn

2 . 4 . 6 = 48 desgleichen a . b . c . d = abcd
und 4 . 6 . 2 = 48 und c . d . b . a = abcd

Man ordnet sie aber gern nach ihrer alphabetischen Ordnung, wenn nicht andere Umstände dies verbieten.

§. 15. Zusammengesetzte Größen werden in Klammern geschlossen, und das Multiplicationszeichen wird zwischen die Factoren gesetzt. Z. B.

(5 + 4 − 3 − 2) . (3 + 9 + 1 − 4 − 2)

Verwandelt man jeden Factor in Eine Größe, welches hier

wohl

wohl angeht, so wird aus $(5+4-3-2)=+4$, und aus $(3+9+1-4-2)=+7$. Die beiden Factoren sind dann 4 und 7, und ihr Product 28.

Überhaupt muß man suchen, zusammengesetzte Größen auf die einfachste Form zu bringen. So wäre es z. B. vortheilhafter, anstatt $(mn).(rp)$ lieber $mnrp$ zu schreiben.

§. 16. Haben die Factoren Zahlzeichen zu Coëfficienten bei sich, so kann man die Multiplication auch bloß durch das Zusammensetzen (jedoch nicht ohne Puncte) verrichten. Z. B.

$$4a.5b.6d$$

das ist $=4.5.6.abd$, oder noch besser $120abd$. Und $4pq.3x$ ist auch $3.4pqx$ oder $12pqx$ zu schreiben, denn die Coëfficienten sind Factoren, von denen gilt, was §. 14. gesagt wurde. Wenn die Coëfficienten aber große Zahlen sind, so läßt man sie oft auch stehen; als

$$720c.84ab=(720.84)abc.$$

§. 17. Sind entgegengesetzte Größen mit einander zu multiplicieren, so gilt folgende Regel:

Einerlei Zeichen mit einander multiplicirt geben im Product eine Plusgröße; verschiedene Zeichen geben im Product eine Minusgröße.

Z. B. $+a.+b=+ab$ oder $+3.+9=+27$
$-a.-b=+ab$ $-3.-9=+27$
$+a.-b=-ab$ $+3.-9=-27$
$-a.+b=-ab$ $-3.+9=-27$

§. 18. Sind mehr, als zwei Factoren mit verschiedenen Zeichen da, so multiplicire man erst zwei mit einander, und gebe dem Producte das ihm gehörige Zeichen; dann multiplicire man den dritten Factor mit dem Producte der beiden erstern, und fahre so fort, so wird es sich ausweisen, welches Zeichen das letzte Product erhalten muß. Z. B.

$$a.-b.+c.+d.-g$$

hier ist

$a.-b=-ab$, weil die Zeichen verschieden sind;
und $-ab.+c=-abc$ — — — — —
und $-abc.+d=-abcd$ — — — — —
und $-abcd.-g=+abcdg$, weil die Zeichen gleich sind.

§. 19.

§. 19. Die Multiplication mit zusammengesetzten Größen geschieht beinahe eben so, als mit Zahlen. Nämlich man multiplicirt mit jedem Gliede des einen Factors alle Glieder des andern Factors, schreibt sie mit ihren Zeichen hin, und addirt sie endlich zusammen.

Z. B. 9—2 multiplicirt mit 5—3, ist also anzufangen:

$$\begin{array}{r} 9-2 \\ 5-3 \\ \hline -27+6 \\ 45-10 \\ \hline \text{Product } 45-37+6 \end{array}$$

Und $(a+2b+c)$ mal $a = a+2b+c$

$$\begin{array}{r} a \\ \hline \text{Product } aa+2ab+ac \end{array}$$

$$(a+2b+c)\,.\,(a-b) = a+2b+c$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline -ab-2bb-bc \\ aa+2ab+ac \\ \hline \text{Product } aa+ab-2bb+ac-bc \end{array}$$

Mit 3 Factoren: $a+2b+c$

$$\begin{array}{r} a-2b-c \\ \hline -ac-2bc-cc \\ -2ab-4bb-2bc \\ aa+2ab+ac \\ \hline aa \quad -4bb-4bc-cc = \text{Product.} \end{array}$$

§. 20. Man pflegt die Producte gern kürzer zu schreiben, wenn es angeht und vortheilhaft ist. Ein Abkürzen ist z. B. dann möglich, wenn in allen, oder einigen Gliedern einerlei Buchstaben oder Factoren vorkommen. Diese sind dann als allgemeine Factoren anzusehen, und die durch sie multiplicirten Größen in eine Klammer zu schließen. Z. B.

$aa-3ab$ kann auch heißen: $(a-3b)\,.\,a$, weil a ein gemeinschaftlicher Factor in beiden Gliedern ist.

An-

Anstatt aabd + 2aab — 5abd steht kürzer (ad + 2a — 5d) . ab ., weil ab in allen Gliedern als gemeinschaftlicher Factor ist.

Anstatt 3aac — 9abd + 18a schreibt man lieber (ac — 3bd + 6) . 3a, weil 3a in allen Gliedern ist.

Anstatt 5pqx — 30qx + 25px, lieber (pq — 6q + 5p) . 5x.

Man kann die erste Schreibart wieder herstellen, wenn man die Größe in der Klammer mit der hinter derselben multiplicirt; als

$$\begin{array}{r} pq - 6q + 5p \\ \hline 5x \\ \hline 5pqx - 30qx + 25px \end{array}$$

Dies Abkürzen und Verändern einer Größe ist sehr nützlich, und wird durch Übung und Nachdenken bald geläufig.

§. 21. Wenn eine Größe mehrere Male mit sich multiplicirt wird, so schreibt man sie entweder eben so oft neben einander hin, oder man bemerkt rechts neben der Größe durch eine kleine Zahl, wie oft sie neben einander stehen sollte. Z. B.

$a = a^1$
$aa = a^2$
$aaa = a^3$
$aaaa = a^4$
a unbestimmte oder gewisse Male $= a^n$

Diese Schreibart ist sehr bequem. Man bemerke aber folgende dabei vorkommende Kunstausdrücke.

Das einfache a, woraus durch die Multiplication alle andere entstehen, heißt Wurzel;

die Größen a^2, a^3, a^4, a^n heißen Dignitäten oder Potenzen von a;

die kleinen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ..... n heißen Exponenten des a.

Steht keine Zahl am Kopfe einer Größe, so ist die Größe selbst noch in der ersten Potenz, und also ihr Exponent = 1.

Die Wurzel oder die radix wird durch das Zeichen $\sqrt{}$ angezeigt. So ist $\sqrt{aa}$ oder $\sqrt{a^2} = a$; d. h. die Wurzel aus a^2 ist a.

Die

Die Wurzel erhält verschiedene Namen; so heißt sie z. B. Quadratwurzel ($\sqrt{}$), wenn die Größe, deren Wurzel sie ist, in der zweiten Potenz; Kubikwurzel ($\sqrt[3]{}$), wenn die Größe in der 3ten Potenz steht u. s. w.; und so ist

a von a^2 die Quadratwurzel $= \sqrt{}$
von a^3 die Kubikwurzel $= \sqrt[3]{}$
von a^4 die vierte Wurzel $= \sqrt[4]{}$
von a^5 die fünfte Wurzel $= \sqrt[5]{}$ ꝛc.

§. 22. Die Potenzen können addirt und subtrahirt werden. Z. B. $2a^2$ und noch $4a^2$ sind $= 6a^2$;

$2b^2 x^3 + 5b^2 x^3 = 7b^2 x^3$

Und wenn die Zeichen verschieden sind:

	$+ 4x^3 z^2$	oder von	$+ 4x^3 z^2$
und	$- 2x^3 z^2$	ab	$- 2x^3 z^2$
Summe	$+ 2x^3 z^2$		+
		Rest	$+ 6x^3 z^2$

§. 23. Diese Addition und Subtraction ist nur bei einerlei Buchstaben und gleichen Potenzen möglich, und wird unter den Coëfficienten abgemacht.

Sind die Exponenten nicht gleich, so wird die Addition oder Subtraction bloß angezeigt. Z. B. zu $4x^3$ sollen $3x^2$ addirt werden, so ist die Summe $= 4x^3 + 3x^2$.

Größen, die durch die Multiplication verbunden sind, gelten nur für eine Größe (oder ein Glied).

§. 24. Die Multiplication der Potenzen geschieht dadurch, daß man die Exponenten gleichartiger Größen addirt. Z. B.

$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$; denn $a^2 = aa$
und $a^3 = aaa$
aaaaa oder a^5

$x^3 \cdot x^4 = x^7$; und $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$x^2 y^2 \cdot x^3 y^4 = x^{2+3}\ y^{2+4} = x^5 \cdot y^6$

§. 25. Ungleichnamige Potenzen setzt man bloß neben einander, und das Multiplicationszeichen etwa zwischen sie. Z. B. $x^5 \cdot z^2$.

Auch bei größeren Exempeln kommt die Multiplication mit Potenzen vor. Z. B.

$$\begin{array}{r} px + ax^2 - a^2 \\ x^2 + a^2 \\ \hline a^2 px + a^3 x^2 - a^4 \\ px^3 + ax^4 - a^2 x^2 \\ \hline \end{array}$$

Product $px^3 + a^2 px + ax^4 + a^3 x^2 - a^2 x^2 - a^4$.

§. 26. Gegebene Potenzen werden zu höheren erhoben, wenn man ihre Exponenten mit der Größe multiplicirt, zu welcher Potenz sie erhoben werden sollen. Z. B.

a^2 in die dritte Potenz erhoben, ist $= a^{2 \cdot 3} = a^6$

z^4 in die zweite Potenz erhoben, ist $= z^{4 \cdot 2} = z^8$

b^m in die nte Potenz erhoben, ist $= b^{m \cdot n} = b^{mn}$

§. 27. Wenn Größen, die durch die Multiplication mit einander verbunden sind, zu Potenzen erhoben werden sollen, so wird jede Größe mit dem gegebenen Exponenten bezeichnet. Z. B.

$(ax)^2$ heißt: a mit x multiplicirt, und das Product wieder mit sich selbst multiplicirt, oder ins Quadrat erhoben. Dies ist gleich $a^2 x^2$.

Es sey $a = 2$, $x = 3$; so ist $(ax)^2 = (2.3)^2 = 6^2 = 36$ und $a^2 . x^2 = 2^2 . 3^2 = 2.2.3.3 = 4.9 = 36$.

Eben so wird $(axy)^3 = a^3 x^3 y^3$.

§. 28. Jede zusammengesetzte Größe, die zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, muß in eine Klammer geschlossen seyn. Z. B. $9 + 3$ in der 3ten Potenz, ist $(9+3)^3$; $(a+b)^2$.

Löst man die Aufgabe, so fällt die Klammer weg.

So ist $(9+3)^3 = 12^3 = 12 . 12 . 12 = 1728$.

Oder $(a+b)^2 = a+b$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline \end{array}$$

Product $a^2 + 2ab + b^2 =$ der 2ten Potenz, oder $(a+b)^2$.

Oder $(a-b)^2 = a - b$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline -ab+b^2 \\ a^2-ab \\ \hline \end{array}$$

$a^2 - 2ab + b^2 =$ der 2ten Potenz von a–b.

Schriebe

Schriebe man anstatt $(a+b)^2$ nur $a+b^2$, so sollte nur b ins Quadrat erhoben werden, und die Antwort würde seyn $a+bb$.

Division.

§. 29. Das Divisionszeichen besteht in einem Querstrich zwischen den Größen, oder in zwei über einander stehenden Puncten. So heißt $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ so viel, als: die Größe a soll durch b getheilt werden. Die erstere Schreibart ist mit Recht die gewöhnlichste. Divisor und Dividendus stehen allemal in einem Bruch, in welchem der erstere der Nenner ist. Soll 48 durch 6 getheilt werden, so zeigt dies der Mathematiker durch den Bruch $\frac{48}{6}$ an. Und $a^2+2ab+b^2$ dividirt durch $a+b$ steht so:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$$

§. 30. Sind gleichnamige Größen im Divisor und Dividendus, so geschieht die Division durch Wegnahme der gleichnamigen Größen. Z. B.

$\frac{abc}{c} = ab$, weil c im Divisor sich gegen c im Dividendus hebt. Der Quotient ist ab.

$\frac{abc}{bc} = a$, weil bc sich heben läßt.

$\frac{6.7.8}{8} = 6.7$, weil 8 sich heben läßt.

§. 31. Da die Division eine entgegengesetzte Multiplication ist, so gilt auch hier die Regel:

Einerlei Zeichen geben +; verschiedene Zeichen geben — im Quotienten.

Z. B. $\frac{bc}{c} = +b$; $\frac{-bc}{-c} = +b$; $\frac{+bc}{-c} = -b$;

$\frac{-bc}{+c} = -b$.

§. 32.

§. 32. Wenn Divisor und Dividendus gleich groß sind, so ist der Quotient = 1.

$$\frac{a}{a} = 1;\quad \frac{+a}{-a} = -1;\quad \frac{-a}{-a} = 1;\quad \frac{-5}{+5} = -1.$$

Wenn gleich 1 nicht dividirt, so hat doch ihr Zeichen auf den Quotienten den gewöhnlichen Einfluß.

$$\frac{+4}{-1} = -4;\quad \frac{-5a^2b}{-1} = +5a^2b;\quad \frac{+3ab}{+1} = +3ab.$$

§. 33. Zusammengesetzte Größen werden fast eben so dividirt, als gemeine Zahlen.

Es sey 4abc — 16cda durch 2a zu theilen. Man stelle die Größen folgendermaßen:

Divisor. Dividend. Quotient.

2a) 4abc — 16cda || 2bc — 8cd, od. auch (b — 4d). 2c

ab 4abc — siehe §. 20.

Rest — 16cda

ab — 16cda

Rest 0

Man dividirt mit 2a in 4abc; a hebt sich gegen a, und 2 in 4bc = 2bc, welches das erste Glied im Quotienten ist. Multiplicire 2bc mit 2a, schreibe das Product 4abc unter den gleichnamigen Theil des Dividendus, und ziehe ab. Den Rest, hier = — 16cda, setze herunter; dividire mit 2a in — 16cda; a fällt gegen a weg, und 2 in 16cd = — 8cd, welches das zweite Glied des Quotienten ist. Hiermit den Divisor multiplicirt, giebt — 16cda, und alles geht auf.

Ferner: Divis. Dividend. Quotient.

— 4cg) — 16gcd + 4c²g² — 8cg || + 4d — cg + 2

ab — 16gcd

Rest + 4c²g² — 8cg

ab + 4c²g²

Rest — 8cg

ab — 8cg

Rest 0.

Man hätte denselben Quotienten bekommen, wenn man die gleichnamigen Buchstaben oder Größen des Divisors und

und Dividenden ausgestrichen oder aufgehoben hätte. Denn die Glieder des Quotienten bleiben dann allein stehen. Z. B.

$$\frac{-\overset{4}{\cancel{16}}\,\cancel{g}cd + \cancel{4}\,\cancel{c}cg\cancel{g} - \overset{2}{\cancel{8}}\cancel{c}\cancel{g}}{-\cancel{4}\cancel{c}\cancel{g}} = +4d - cg + 2$$

wobei man aber immer auf die Zeichen zu achten hat.

§. 34. Wenn der Dividend eine einfache, der Divisor eine zusammengesetzte Größe ist, als 1 dividirt durch $1+a$, so wird die Division bloß angezeigt.

$$\frac{1}{1+a}$$

§. 35. Eben so wird die Division nur angezeigt, wenn sich im Divisor und Dividenden keine gleichnamigen Größen finden. Denn alsdann kann gar nicht wirklich dividirt werden. Z. B.

$$\frac{5a + d}{2g - m}$$

läßt sich nur dann theilen, wenn den Buchstaben Zahlenwerthe untergelegt sind.

§. 36. Folgende Regeln können bei der Division mit zusammengesetzten Größen gute Dienste leisten.

1) Man ordne die Glieder im Divisor, wie im Dividendus, nach einem am häufigsten vorkommenden Buchstaben, und zwar die größten Potenzen voran. Es wäre z. B.

Dividendus $= bbbb + 4abbb + 4aaab + 6aabb + aaaa$,

Divisor $= bb + aa + 2ab$,

so würden sie folgendermaßen zu ordnen seyn:

Dividendus $= aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.

Divisor $= aa + 2ab + bb$.

Und mit Potenzzeichen noch kürzer:

$$\frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^2 + 2ab + b^2}$$

2) Man theile nun das erste Glied des Dividendus durch das erste des Divisors, so erhält man einen Di-

Theil des Quotienten, mit dem man alle Glieder des Divisors multiplicirt und die Producte unter solche Glieder des Dividendus setzt, von denen sie sich abziehen lassen. Mit dem herabgesetzten Reste verfährt man eben so, wodurch man das zweite Glied des Quotienten bekommt. Geht am Ende nicht alles auf, so ist der Rest der Zähler und der Divisor ist der Nenner eines Bruchs, wie bei der Zahlendivision.

3) Wenn wegen der vorkommenden ungleichartigen Glieder zuweilen die Subtraction nicht angeht, so setzt man die ungleichartigen Glieder des Subtrahenden mit verändertem Zeichen als Rest herunter, weil es dann eben so gut ist, als wenn abgezogen wäre.

Zur Übung einige Beispiele:

Divisor. Dividend. Quotient.

1) $a+b)\ aa+2ab+bb\ ||\ a+b$

$$\begin{array}{r} aa+ab \\ \hline +ab+bb \\ +ab+bb \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $a-b-d)\ a^2-2ad-b^2+d^2\ ||\ a-d+b$

$$\begin{array}{r} a^2-ad-ab \\ + \\ \hline -ad-b^2+ab+d^2 \\ -ad+db\quad +d^2 \\ - \\ \hline -b^2-db+ab \end{array}$$

(besser $ab-db-b^2$)

$$\begin{array}{r} ab-db-b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

3) $5a+3d)\ 15a^2-10ab+9ad-6bd\ ||\ 3a-2b$

$$\begin{array}{r} 15a^2\quad +9ad \\ \hline -10ab\quad -6bd \\ -10ab\quad -6bd \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 37. Wenn man mehrere Größen einzeln durch eine dividirt, so kommt eben so viel heraus, als wenn man diese Größen erst addirt, und dann dividirt. Z. B.

$\frac{6}{2}+$

$$\frac{6}{2}+\frac{8}{2}+\frac{10}{2}+\frac{12}{2}=3+4+5+6=18$$

und $$\frac{6+8+10+12}{2}=\frac{36}{2}=18.$$

also $$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$$

Größen, welche durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden, und durch eine andere Größe zu dividiren sind, müssen daher einzeln dividirt werden, wenn man ihre Summe nicht theilen kann.

§. 38. Potenzen von einerlei Wurzeln werden durch einander dividirt, indem man ihre Exponenten von einander abzieht. Z. B.

$\frac{a^3}{a^2}=a$; denn $\frac{a^3}{a^2}=\frac{aaa}{aa}=a$. Und $\frac{d^5}{d}=d^4$

$\frac{a^3x^4}{a^2x^2}=ax^2$; $\frac{a^mx^n}{a^nx^r}=a^{m-n}x^{n-r}$

$\frac{a^5}{a^7}=a^{5-7}=a^{-2}$, wobei der Exponent negativ wird, weil der Nenner eine höhere Potenz hat, als der Zähler.

§. 39. Weil es negative Exponenten giebt, so kann folgende Reihe der Potenzen statt finden:

$a^n \ldots\ldots a^4, a^3, a^2, a, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} \ldots\ldots a^{-n}$

Eine Größe in der Potenz o ist allemal $=1$, also $a^0=1$. Von a^{-1} an soll a noch a mal kleiner werden, welches geschieht, wenn der Divisor a mal größer wird; daher kann auch die Reihe

$$a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-n}$$

also aussehen $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^n}$, was wohl zu merken ist.

Dividirt man $\frac{a^4x^ry^5}{a^4x^ry}$, so ist der Quotient $a^{4-4}x^{r-r}y^{5-1}$ $=a^0x^0y^4=1.1.y^4=y^4$.

§. 40.

§. 40. Potenzen werden erniedrigt, wenn man ihre Exponenten dividirt. — Gesetzt man wollte aus a^{12} die dreifache oder $\sqrt[3]{}$ ziehen, so wäre dies

$$a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

$\sqrt[6]{x^{12}} = x^{\frac{12}{6}} = x^2$; $\sqrt[2]{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$; $\sqrt[3]{g^2} = g^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}}$, und das Wurzelzeichen kann also wegbleiben, wenn man den Exponenten der Wurzel unter den Exponenten der Potenz als Nenner desselben setzt. Und eine Größe $a^{\frac{n}{m}}$ kann auch $\sqrt[m]{a^n}$ geschrieben werden, welches der umgekehrte Fall vom vorigen ist. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

§. 41. Aus Größen, welche durch die Multiplication verbunden sind, zieht man die Wurzel, indem man die Wurzel aus jeder besonders zieht. Z. B.

$\sqrt[3]{a^2 x^4 z} = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} z^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{a^6 x^9 y^{12}} = a^{\frac{6}{3}} x^{\frac{9}{3}} y^{\frac{12}{3}} = a^2 x^3 y^4$

Nun wird man auch folgendes Exempel dividiren können.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
a^2+b^2	a^6+b^6	$a^4-a^2b^2+b^4$
	$a^6+a^4b^2$	
	—	
Rest	$-a^4b^2+b^6$	
	$-a^4b^2-a^2b^4$	
	+	
Rest	$+a^2b^4+b^6$	
	$+a^2b^4+b^6$	
		0

wobei man sich erinnern muß, daß Potenzen durch die Addition ihrer Exponenten multiplicirt, und durch die Subtraction ihrer Exponenten dividirt werden.

II. Decimalbruchrechnung.

§. 42. Unter Decimalbrüchen versteht man solche Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000, 10000 ꝛc., also Potenzen der 10 sind.

Nach unserm Zahlensystem gilt eine Zahl 10 mal weniger, wenn sie um eine Stelle (Klasse) weiter rechts gerückt wird. Schreibt man nun rechts neben der Klasse der Einer noch eine Zahl, so muß sie Zehntel der Einer gelten; eine zweite Zahl wird wieder Zehntel der vorigen, oder Hundertel der Einer gelten ꝛc. Da, wo die Einer aufhören, wird ein Komma gemacht. So heißt 2,5 so viel als 2 Ganze und $\frac{5}{10}$; 2,57 heißt: 2 Ganze 5 Zehntel 7 Einhundertel oder 2 Ganze $\frac{57}{100}$; 2,579 heißt: $2\frac{579}{1000}$; $25{,}79 = 25\frac{79}{100}$; $257{,}9 = 257\frac{9}{10}$; $0{,}2579 = \frac{2579}{10000}$, und die Null an dem Komma links zeigt an, daß hier keine Ganze vorhanden.

§. 43. Der Nenner eines Decimalbruchs wird nicht hingeschrieben, weil er allemal aus einer 1 mit so vielen Nullen, als der Decimalbruch Ziffern hat, besteht. Z. B. in dem Bruche 0,57 sind zwei Decimalbruchziffern (57), folglich ist ihr Nenner eine 1 mit 2 Nullen, also 100; und 3,14159 heißt $3\frac{14159}{100000}$.

§. 44. Die Decimalbrüche sind ihrer großen Bequemlichkeit wegen in allen mathematischen Schriften und Rechnungen gebräuchlich, und ihre Kenntniß daher jedem, der nur einigermaßen etwas darin leisten will, unentbehrlich. Welche wichtige Vortheile sie gewähren, wird man aus dem Folgenden ersehen.

§. 45. Man kann jeden Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, und, um dies zu können, letzterem so oft eine Null anhängt, als noch ein Rest bleibt, oder (weil dieser bei manchen Brüchen immerfort bleibt), so lange, als man will.

1) Es sey z. B. $\frac{3}{4}$ in einen Decimalbruch zuverwandeln,

4) in 3 || 0,75 d. h. $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$

Rest 30
28

Rest 20
20

2) Wi

2) Wie steht der Bruch $\frac{4}{5}$ im Decimalbruch?

5) 4 || 0,8 d. h. $\frac{4}{5} = 0{,}8 = \frac{8}{10}$

Rest 40

40

3) Wie lautet der Bruch $\frac{7}{4}$ im Decimalbruch?

4) 7 || $1{,}75 = \frac{7}{4}$ oder $1\frac{3}{4} = 1\frac{75}{100}$

4

Rest 30

28

20

20

§. 46. Aus den wenigen Beispielen wird man bemerken, daß bei jedem echten Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt wird, die erste Ziffer im Quotienten eine Null ist, ein Zeichen, daß kein Ganzes darinnen steckt; bei einem unechten Bruch ist die erste Ziffer im Quotienten wenigstens eine 1, weil er größer als 1 ist.

§. 47. Selbst wenn jede andere ganze Zahl in eine ganze Zahl zu dividiren ist, und endlich ein Rest bleibt, so hängt man demselben eine oder mehrere Nullen nach und nach an, macht im Quotienten ein Komma, und dividirt fort. Die alsdann noch kommenden Ziffern im Quotienten sind Decimalbrüche. Z. B. $\frac{46507}{8}$

8) 46507 || $5813{,}375 = 5813\frac{375}{1000}$

40

65

64

10

8

27

24

30 mit angehängten Nullen,

24

60

56

40

40

§. 48.

§. 48. Oft geht die Division nie auf, wenn auch noch so viele Nullen angehängt würden. Dann ist der kommende Decimalbruch nur eine Annäherung, die mit jeder folgenden Decimalstelle 10 mal genauer wird. Z. B. 7 in 40, oder $\frac{40}{7}$ giebt 5,71428...., wobei das Fehlende noch kein $\frac{1}{100000}$ beträgt. Je mehr Decimalstellen, je genauer, und es hängt von dem Grade der geforderten Genauigkeit ab, ob man mit einigen oder mehrern zufrieden seyn kann. Fünf bis sieben Decimalstellen werden höchstens gebraucht, oft nur einige.

§. 49. Bei der Addition und Subtraction gilt als Regel:

Schreibe Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel u. s. w. so, daß das Komma stets unter dem Komma zu stehen kommt, und addire oder subtrahire, wie bei gemeinen Zahlen, von der Rechten zur Linken. Z. B. 32,5 + 6,97 + 120 + 0,75 steht also

		ferner	
32,5		3,361	
6,97		27,0001	
120,		142,3	
0,75		0,01	
Summe	160,22	Summe	172,6711

In der Summe oder dem Rest steht das Komma unter den übrigen Komma's in einer senkrechten Reihe.

§. 50. Kommen entgegengesetzte Größen zu addiren vor, so werden sie, wie bei der Buchstabenrechnung behandelt, d. h. addirt, wenn sie gleiche Zeichen, oder mit einander ausgeglichen, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

+ 4,5	— 3,29	+ 3,29	— 3,29	+ 52
+ 7,9	— 7,01	— 7,01	+ 7,01	— 6,42
+ 12,4	— 10,3	— 3,72	+ 3,72	+ 45,58

§. 51. Die Subtraction der Decimalbrüche geschieht wie bei der gemeinen Subtraction ganzer Zahlen. Nur vergesse man die §. 49 gegebene Regel nicht.

Von 78,31	Von 10,0001	Von 1230
ab 60,42	ab 5,5	ab 0,2
Rest 17,89	Rest 4,5001	Rest 1229,8

Wenn

Wenn, wie im 3ten Exempel, über einer Decimalstelle des Subtrahenden keine Decimalstelle des Minuenden ist, so denkt man sich eine Null hin und borgt linker Hand eine 1, wie gewöhnlich).

§. 52. Mit entgegengesetzten Größen wird hier eben so, wie in andern Rechnungen, subtrahirt.

Von — 5,0321	Von + 27,03	Von — 27,03
ab + 2,1432	ab + 6,978	ab + 6,978
—	—	—
Rest — 7,1753	Rest + 20,052	Rest — 34,008

§. 53. Beim Multipliciren der Decimalbrüche gilt die allgemeine Regel:

Multiplicire beide Factoren, ohne dich um das Komma zu bekümmern, als wenn es gemeine Zahlen wären; vom Product streiche rechts so viel Zahlzeichen ab, als Decimalstellen in beiden Factoren, zusammen genommen, sind.

Z. B. 4,6 mal 6 ist = 4,6
6

Product 27,6, denn beide Factoren haben nur 1 Decimalstelle.

32,54 . 8 = 32,54
8

Product 260,32, denn beide haben 2 Decimalstellen.

7,124 . 0,2 = 7,124
2

Product 1,4248, denn beide zusammen haben 4 Decimalziffern.

12,34 . 0,123 = 12,34
1 23

37 02
246 8
1234

Product 1,517 82, beide zusammen haben 5 Decimalstellen.

4,231 . 2,001 = 4,231
2,001
4231
8462
Product 8,466231, beide zusammen haben 6 Decimalzeichen.

§. 54. Hat das Product nicht so viel Ziffern, als nach der Regel abgestrichen werden sollten, so fülle man die fehlenden Stellen mit Nullen aus, und an die Stelle der Einer oder Ganzen setze man auch eine Null, und hinter letztere das Komma. Z. B.

0,008 . 0,23 = 0,008
0,23
24
16
0,001 84

Das Product 184 kann nicht Ganze seyn, indem beide Factoren zusammen 5 Decimalstellen enthalten, folglich müssen auch 5 Zahlzeichen zu Decimalstellen vom Product durch das Komma abgestrichen werden, und darum sind die drei Nullen nothwendig.

§. 55. Kommen entgegengesetzte Größen zu multipliciren vor, so gilt auch hier die Regel:

Einerlei Zeichen geben dem Producte +; verschiedene geben ihm —.

+ 2,8 . + 4,7 = + 13,16
und + 2,8 . — 4,7 = — 13,16
— 2,8 . — 4,7 = + 13,16
— 2,8 . + 4,7 = — 13,16.

§. 56. Die verschiedenen Regeln beim Dividiren der Decimalbrüche lassen sich in eine einzige zusammen fassen:

Mache den Divisor und Dividendus gleichnamig, d. h. gieb jedem gleichviel Decimalstellen (welches durch Anhängen von Nullen geschieht) und dividire dann, wie mit gemeinen Zahlen; der aus beiden folgende Quotient besteht aus Ganzen.

Es

Es sey 65,19 durch 1,23 zu dividiren. Hier haben beide Größen schon gleichviel Decimalstellen, folglich enthält der Quotient Ganze, und die Aufgabe ist folgende:

123) 6519 || 53 Ganze
615

369
369

0

Wenn $\frac{12,236}{2,3}$, so hänge man dem Divisor (2,3) noch zwei Nullen an, damit er dem Dividendus in der Zahl der Decimalziffern gleich sey, und im Quotienten Ganze kommen. Dann ist die Aufgabe:

$\frac{12236}{2300}$ = 2300) 12236 || 5,32
11500

Rest 7360
6900

4600
4600

Nachdem hier mit 2300 in 12236 dividirt worden ist, und der Quotient 5 Ganze enthielt, blieb Rest 736, dem man nach §. 47 nach und nach noch mehrere Nullen anhängt, um den Quotienten genauer in Decimalbrüchen zu bekommen, welcher = 5,32 ist.

Es sey 504,3 durch 1,23 zu dividiren. Hier muß der Dividendus eine Null bekommen, damit er gleichnamig werde, und dann ist die Aufgabe eigentlich:

$\frac{50430}{123}$ = 410 Ganze.

Wenn 492 durch 1,23 zu dividiren ist, so heißt dies

$\frac{49200}{123}$ = 400 Ganze.

§. 57. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ohne Bruch ist, so ist das Gleichnamigmachen unnöthig, weil man leicht übersieht, wo die Ganzen im Quotienten aufhören.

hören. Z. B. $\frac{21,468}{4} = 5,367$; denn wenn man 4 in 21 dividirt, so können nur 5 Ganze kommen.

§. 58. Einerlei Zeichen, durch einander dividirt, geben +; verschiedene, — im Quotienten.

$\frac{+3,2}{+1,6} = +2$; $\frac{+3,2}{-1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{+1,6} = -2$; $\frac{-3,2}{-1,6} = +2$.

Die Division der Decimalbrüche ist von der mit gemeinen Zahlen nur dadurch unterschieden, daß man durch die §. 56. gegebene Regel zu bestimmen sucht, wo die Ganzen aufhören, also, wohin das Komma im Quotienten zu sezzen ist.

§. 59. Decimalbrüche, die nicht ins Unendliche fortgehen, können in gemeine Brüche verwandelt werden, wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt. Z. B. $3,75 = 3\frac{75}{100}$, und hebt man den Bruch durch 25, so erhält man $3\frac{3}{4}$. Gehen die Decimalbrüche aber ins Unendliche fort, so mögte dies Verfahren nicht immer zuverlässig genug seyn.

III. Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 60. Zwei Größen einerlei Art stehen zu einander in einem Verhältniß. Sieht man dabei auf den Umstand, wie viel kleiner oder größer die eine sey, so heißt ihr Verhältniß arithmetisch; untersucht man aber, wie viel mal die eine Größe in der andern enthalten sey, so heißt das Verhältniß geometrisch. Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses ist sehr passend das Subtractionszeichen (—), weil die Differenz beider Größen oder Glieder hier die Hauptsache ist; das Zeichen eines geometrischen Verhältnisses ist das Divisionszeichen (:); die Zahl, welche bestimmt, wie oft das eine Glied in dem andern enthalten ist, heißt Exponent oder Quotient. So sind

Arithmetische Verhältnisse.		Geometrische Verhältnisse.	
6 — 3,	Differenz = 3	6 : 3,	Exponent = 2
3 — 6,	— = −3	12 : 6,	— = 2
15 — 10,	— = 5	15 : 10,	— = 1,5
10 — 15,	— = −5	10 : 15	— = $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Der Unterschied der arithmetischen und geometrischen Verhältnisse wird aus diesen wenigen Beispielen leicht erkannt werden.

§. 61. Bei dem arithmetischen Verhältnisse kommen 3 Größen vor:

1. die große Zahl. Sie besteht aus der kleinen + der Differenz.
2. die kleinere Zahl. Sie ist = der großen — der Differenz.
3. die Differenz. Sie ist gleich der großen — der kleinen.

Denn a sey die große, b die kleine, d die Differenz, so ist

a = b + d	in Zahlen	15 = 10 + 5
b = a — d		10 = 15 — 5
d = a — b		5 = 15 — 10

§. 62. Ein geometrisches Verhältniß ist als ein Bruch anzusehen, dessen Werth der Exponent ist. Denn

$$12 : 6 = \frac{12}{6} = 2 = \text{Werth oder Exponenten.}$$

Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so wird das Verhältniß nicht geändert, und der Exponent derselbe bleiben. Denn

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ und } \frac{12 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{36}{18} = 2. \quad \text{Oder } \frac{12 : 3}{6 : 3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Weil kleine Zahlen faßlicher sind, als große, so pflegt man gern die durch große Zahlen ausgedrückten Verhältnisse durch die Division mit einerlei Zahl auf kleinere Zahlen zu bringen. Z. B. $\frac{26}{144}$ ist nicht so faßlich, als $\frac{2}{3}$, obgleich beide Verhältnisse gleich sind.

§. 63. Im geometrischen Verhältniß sind auch 3 Größen zu merken:

der Zähler a; der Nenner b; der Exponent m,

$a = bm$ in Zahlen $144 = 48 \cdot 3$

$b = \frac{a}{m}$ $\qquad 48 = \frac{144}{3}$

$m = \frac{a}{b}$ $\qquad 3 = \frac{144}{48}$

a = dem Product aus dem Nenner und Exponenten;
b = dem Zähler dividirt durch den Exponenten;
m = dem Zähler dividirt durch den Nenner.

§. 64. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine arithmetische Proportion. Z. B.

$5 - 7 = 9 - 11$
$7 - 5 = 11 - 9$ } bei allen ist die Differenz = 2;

folglich ist $5 - 7 = 9 - 11$ eine arithmetische Proportion, so wie auch $a - b = c - g$, wenn beide Verhältnisse einerlei Differenz haben.

Kann das zweite Glied vom ersten abgezogen werden, so ist es kleiner, und das Verhältniß

$7 - 5 = 7 - (7 - 2)$ oder $a - b = a - (a - d)$.

Ist das erste Glied das kleinere, so wird das Verhältniß

$5 - 7 = 5 - (5 + 2)$ oder $a - b = a - (a + d)$.

Da das auch im 2ten Verhältniß, dessen erstes Glied b seyn soll, der Fall ist, so kann eine arithmetische Proportion allgemein auch so ausgedrückt werden:

Erstes Glied. Zweites. Drittes. Viertes.

$a - (a - d) = b - (b - d)$
oder $a - (a + d) = b - (b + d)$.

§. 65. Jede Proportion besteht demnach aus 4 Gliedern. Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion discret; ist es aber ihm gleich, so heißt sie stetig.

So ist $3 - 4 = 9 - 10$ eine discrete
und $3 - 4 = 4 - 5$ eine stetige } Proportion.

Für die stetige arithmetische Proportion paßt der allgemeine Ausdruck

$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$
oder $a - (a - d) = (a - d) - (a - 2d)$.

§. 66. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußersten Glieder gleich der Summe

der beiden mittelsten. Dieses Gleichseyn ist ein untrügliches Kennzeichen einer arithmetischen Proportion. In den Proportionen

$8 - 11 = 12 - 15$ ist $8 + 15 = 11 + 12 = 23$
$a - a + d = b - (b + d)$ ist $a + b + d = a + d + b$.

§. 67. Die Glieder einer arithmetischen Proportion sind mancherlei Versetzungen fähig. Z. B.

$8 - 10 = 16 - 18$
$10 - 8 = 18 - 16$
$16 - 18 = 8 - 10$
$18 - 16 = 10 - 8$.

Daher kann jedes Glied zum letzten gemacht und leicht gefunden werden. Denn zieht man das 1ste Glied von der Summe der beiden mittelsten ab, so bleibt im Rest das letzte Glied. Die 4 Glieder mögen allgemein a, b, c, g heißen, so ist

das letzte $g = (b + c) - a$
das erste $a = (b + c) - g$
das dritte $c = (a + g) - b$
das zweite $b = (a + g) - c$.

§. 68. Weil in der stetigen Proportion das 3te Glied dem zweiten gleich ist, so ist es die Hälfte von der Summe der beiden äußern.

$a - b = b - c$; dann ist $a + c = 2b$; also $\frac{a + c}{2} = b$.

Man nennt das 2te Glied einer solchen Proportion auch das arithmetische Mittel, und bedient sich dessen oft, wenn vom mittlern Werthe oder Durchschnitt die Rede ist. Z. B. In einem Jahre kostete der Scheffel Korn 2 Rthlr. bis 3 Rthlr., so wird der mittlere Preis also gefunden:

$$\frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Rthlr.}$$

§. 69. Mehrere zusammengesetzte arithmetische stetige Proportionen bilden eine arithmetische Progression. Z. B. $2 - 4 = 4 - 6$; $4 - 6 = 6 - 8$; $6 - 8 = 8 - 10$; $8 - 10 = 10 - 12$. Die Glieder derselben sind 2, 4, 6, 8, 10, 12.

In

In allgemeinen Zeichen a, a + d, a + 2d, a + 3
a + 4d, a + 5d, wobei leicht bemerkt wird, daß die D
ferenz d stets um eins geringer ist, als die Anzahl
vorhergehenden Glieder. Z. B. das 3te Glied ist = a +
das 6ste ist = a + 5d.

§. 70. Wenn das erste Glied a einer arithmetisch
Progression und die Differenz d bekannt sind, so k
daraus jedes verlangte Glied n gefunden werden. B
zeichnet n ein gewisses Glied, so besteht dieses Glied n
§. 69. aus a + (n — 1) d; nun kann dasselbe immer
das letzte angesehen werden, welches wir z nennen woll
also ist

$$z = a + (n - 1)\,d$$

worin n die Anzahl der Glieder bedeutet.

§. 71. In der arithmetischen Progression sind d
nach 4 Größen zu merken; wenn 3 von ihnen beka
sind, so findet man jedesmal die 4te durch Rechnung.

a, das erste Glied ist $= z - (n-1)\,d$

z das letzte $= a + (n-1)\,d$

d die Differenz $= \frac{z-a}{n-1}$

n die Anzahl der Glieder $= \frac{z-a+d}{d}$

§. 72. Wenn man zwei von den Enden gleich w
abstehende Glieder addirt, so bekommt man aus jed
Paar einerlei Summe. Z. B.

3, 5, 7, 9, 11, 13. Hierin ist $\left.\begin{matrix} 3+13 \\ 5+11 \\ 7+9 \end{matrix}\right\} = 16$

In a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d

ist ebenfalls $\left.\begin{matrix} a+a+5d \\ a+d+a+4d \\ a+2d+a+3d \end{matrix}\right\} = 2a + 5d.$

§. 73. Hierauf gründet sich eine vortheilhafte S
mirung einer arithmetischen Progression:

Dividire die Anzahl der Glieder n durch 2, so erhält man Paare $= \frac{n}{2}$; addire das erste und letzte Glied $a + z$, so erhält man den Werth eines Paars; dieser Werth, multiplicirt mit der Anzahl der Paare $\frac{n}{2}$, giebt im Product die Summe S, und also ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a + z) \text{ oder } \frac{n \cdot (a + z)}{2}$$

Diese Formel gilt auch, wenn die Zahl der Glieder ungerade ist.

Weiß man das letzte Glied z nicht, so setze man seinen Werth §. 71. dafür; dann ist

$$S = \frac{n}{2} \cdot 2a + \Big((n-1)d\Big)$$

$$\text{oder } an + \frac{(n-1)dn}{2}$$

§. 74. Über die Summirung der arithmetischen Progressionen, welche am meisten vorkommen, einige Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe der Zahlen von 1 bis 50?
Hier ist $a = 1$; $n = 50 = z$; $d = 1$.

Und $\frac{n \cdot (a+z}{2} = \frac{50\,(1+50)}{2} = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$
= Summe.

oder auch $an + \frac{(n-1)dn}{2} = 1 \cdot 50 + \frac{(50-1) \cdot 1 \cdot 50}{2}$

$= 50 + \frac{49 \cdot 50}{2} = 50 + \frac{2450}{2} = 50 + 1225$
$= 1275 =$ Summe.

2. Wie viel Schläge thut eine Uhr, die nur voll schlägt, in 24 Stunden?
Da die Uhr nur bis 12 schlägt, so sind in 24 Stunden 2 völlig gleiche Progressionen von 1 bis 12.
Auch hier ist $a = 1$; $n = 12 = z$; $d = 1$.

Die

Die Summe $= \frac{n \cdot (a+z)}{2} = \frac{12 \cdot (1+12)}{2} = \frac{12 \cdot 13}{2}$

$= \frac{156}{2} = 78$ Schläge. Diese 2 Mal genommen

$= 156$ Schläge in 24 Stunden. Sollen die Viertelschläge, deren in jeder Stunde 10 sind, mitgezählt werden, so giebt es noch $10 \cdot 24 = 240$ Schläge, in allem also 396 Schläge.

3. Jemand verkauft 48 Bäume. Für den ersten bekommt er 3 Gr., für den 2ten 5 Gr. und für jeden folgenden 2 Gr. mehr, als für den vorhergehenden. Wie viel löst er für die 48 Bäume?

Hier ist $a = 3$; $n = 48$; $d = 2$, und die Reihe ist $= 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots z$, also z unbekannt.

$$S = an + \frac{(n-1)dn}{2} = 3 \cdot 48 + \frac{(48-1) \cdot 2 \cdot 48}{2}$$

$= 144 + 47 \cdot 48 = 144 + 2256 = 2400$ Gr.
$= 100$ Rthlr.

Der letzte Baum $z = a + (n-1)d = 3 + (48-1) \cdot 2$
$= 3 + 47 \cdot 2 = 3 + 94 = 97$ Gr.

4. In der obern Reihe Ziegel eines Dachgiebels liegen 2, in der zweiten 5, in jeder folgenden 3 mehr, und in der letzten Reihe 59 Dachziegeln. Wie viel Reihen und wie viel Dachsteine erfordert der Giebel?

Hier ist $a = 2$; $d = 3$; $z = 59$; man sucht n und S.

$$n = \frac{z-a+d}{d} = \frac{59-2+3}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a+z) = \frac{20}{2} \cdot (2+59) = 10 \cdot 61$$

$= 610$ Dachziegeln.

Überhaupt, wenn von den 5 Größen a, d, n, z, s drei gegeben sind, so lassen sich jedesmal die beiden übrigen mittelst folgender Tafel finden.

Formeltafel für die arithmetischen Progressionen.

Z. P.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	
1	a, d, n	z	$z = a + (n-1)\,d$	Wobei a = erstes, z = letztes Glied, n = Anz. d. Glied., d = Differenz, s = Summe.
2	a, d, s	z	$z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + (a-\frac{1}{2}d)^2)}$	
3	a, n, s	z	$z = \frac{2s}{n} - a$	
4	d, n, s	z	$z = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)\,d}{2}$	
5	a, d, n	s	$s = \frac{1}{2}\,n\,(2a + (n-1)\,d)$	
6	a, d, z	s	$s = \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a).(z-a)}{2d}$	
7	a, n, z	s	$s = \frac{1}{2}\,n\,(a+z)$	
8	d, n, z	s	$s = \frac{1}{2}\,n\,(2z - (n-1)\,d$	
9	a, n, z	d	$d = \frac{z-a}{n-1}$	Vergleiche S. 71.
10	a, n, s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n\,(n-1)}$	
11	a, z, s	d	$d = \frac{(z+a).(z-a)}{2s - z - a}$	
12	n, z, s	d	$d = \frac{2nz - 2s}{n\,(n-1)}$	
13	a, d, z	n	$n = 1 + \frac{z-a}{d}$	
14	a, d, s	n	$n = \frac{d - 2a}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right)}$	
15	a, z, s	n	$n = \frac{2s}{a+z}$	
16	d, z, s	n	$n = \frac{2z+d}{2d} - \sqrt{\left(\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
17	d, n, z	a	$a = z - (n-1)\,d$
18	d, n, s	a	$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$
19	d, z, s	a	$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\left((z+\frac{1}{2}d)^2 - 2ds\right)}$
20	n, z, s	a	$a = \frac{2s}{n} - z.$

Die Formeln No. 2, 14, 16 und 19 werden nur demjenigen völlig verständlich seyn, der sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel (wovon weiter unten) bekannt gemacht hat.

§. 75. Von der geometrischen Proportion. Zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion. Als $2 : 8 = 3 : 12$ sind zwei solche Verhältnisse, die gleiche Exponenten, nämlich 4, haben. Der Exponent kann auch ein Bruch seyn, als $8 : 12 = 12 : 3$, wobei wir uns das erste und 3te Glied als Divisoren denken können, denn es ändert in dem Wesen der Proportion nichts ab, ob man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied zu Divisoren nimmt; die Exponenten ändern sich gleichmäßig.

Und $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, Exponenten $= 4$
oder $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, Exponenten $= \frac{1}{4}$.

Es ist gebräuchlicher, die Divisoren ins 1ste und 3te Glied zu setzen.

§. 76. Die geometrische Proportion ist in allen mathematischen Rechnungen recht wichtig und im gemeinen Rechnungswesen unter dem Namen Regel de tri bekannt, weil aus 3 Gliedern derselben sich jedesmal das 4te durch Rechnung finden läßt.

§. 77. Die 4 Glieder einer geometrischen Proportion haben folgende Einrichtung:

das erste besteht für sich;
das zweite aus dem ersten, multiplicirt mit dem Exponenten;

das dritte wieder für sich;
das vierte aus dem 3ten, multiplicirt mit dem Exponenten.

Folglich kann die Proportion $2 : 8 = 3 : 12$ auch so ausgedrückt werden: $2 : 2 . 4 = 3 : 3 . 4$. Heißt nun das erste Glied a, das 3te b, und der Exponent m, so ist jede geometrische Proportion in allgemeinen Ausdrücken $= a : am = b : bm$.

Wenn das 3te Glied dem 2ten nicht gleich ist, so heißt die Proportion diskret; wenn aber das 2te Glied dem 3ten gleich ist, so heißt die Proportion continuirlich.

Diskrete Proportionen sind z. B. $2 : 8 = 3 : 12$
$a : am = b : bm$
und continuirliche Proportionen sind z. B. $2 : 8 = 8 : 32$
und allgemein ausgedrückt $= a : am = am : amm$
oder am^2

denn $2 : 2.4 = 2 . 4 : 2 . 4 . 4$.

§. 78. Bei jeder geometrischen Proportion gilt die Generalregel:

das Product der beiden äußern Glieder ist gleich dem Product der beiden innern oder mittlern Glieder.

In $2 : 8 = 3 : 12$ ist $2 . 12 = 8 . 3 = 24$
In $2 : 8 = 8 : 32$ ist $2 . 32 = 8 . 8 = 64$
In $a : am = b : bm$ ist $abm = amb = abm$
In $a : am = am : amm$ ist $aamm = amam = a^2 m^2$
Ähnliche Glieder sind das 1ste und 3te; das 2te und 4te.

§. 79. Da man $2 : 8 = 3 : 12$ auch schreiben kann $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$, so folgt, daß eine Proportion aus zwei gleichen Brüchen besteht, und also aus zwei gleichgroßen Brüchen auch eine Proportion geformt werden kann. Z. B. $\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ kann stehen $6 : 3 = 14 : 7$, wobei nur darauf zu sehen ist, daß ähnliche Glieder zu Divisoren gemacht werden; z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ kann stehen $a : b = c : d$ und auch $b : a = d : c$; es bleibt immer eine richtige Proportion.

§. 80. Mit jeder Proportion können vielerlei Veränderungen vorgenommen werden.

1) Durch Versetzung der Glieder.

2 : 8 = 3 : 12
8 : 2 = 12 : 3
12 : 3 = 8 : 2
3 : 12 = 2 : 8

und jedes Glied kann also letztes seyn.

2) Durch Versetzung der mittelsten Glieder.

2 : 3 = 8 : 12.

3) Durch Addition bei ähnlichen Gliedern.

am : a + ma = bm : b + mb, wo beim 2ten und 4ten Glied ma und mb addirt sind.

4) Durch Subtraction bei ähnlichen Gliedern.

a — am : am = b — mb : bm.

5) Durch Multiplication einer Größe in alle 4 Glieder, oder in 2 Glieder.

a : am = b : bm
ac : acm = bc : bcm
a : acm = b : bcm
ac : acm = b : bm
a : am = bc : bcm
ac : am = bc : bm

wo stets das Product der beiden äußern Glieder dem der beiden innern gleich ist, nämlich abmc.

6) Durch die Division einer Größe in alle 4 Glieder oder nur in zwei.

$$a : am = b : bm$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$$
$$a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$$
$$a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$$

7) Durch

7) Durch Erhebung der Glieder zu Potenzen, oder Ausziehung der Wurzeln.

$$a : am = b : bm$$
$$a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm}$$
$$a : am = b^2 : b^2m \text{ ꝛc.}$$

wobei einerlei Exponenten der Potenzen und der Wurzeln vorausgesetzt werden.

Als Hauptregel für alle Veränderungen von 3 bis 7 bei geometrischen Proportionen merke man, daß die zu machende Veränderung niemals allein an solchen Gliedern vorgenommen werden kann, die einander multipliciren, als am 1sten und 4ten; am 2ten und 3ten. Denn alsdann würde die Hauptbedingung, daß das Product der äußern Glieder dem der innern gleich sey, nicht erfüllt. So würde es z. B. keine Proportion mehr bleiben, wenn man das 2te und 3te Glied mit einerlei Größe multiplicirte, als $a : acm = bc : bm$, wie die Probe beweist.

§. 81. Aus drei Gliedern einer geometrischen Proportion läßt sich allezeit das 4te finden, denn jedes Glied kann zum letzten gemacht werden, und das letzte ist gleich dem Product der mittlern dividirt durch das vordere.

$a : am = b : bm$, also ist $bm = \frac{amb}{a}$

$2 : 8 = 3 : 12$, — — $12 = \frac{8 \cdot 3}{2}$

$8 : 2 = 12 : 3$, — — $3 = \frac{2 \cdot 12}{8}$

$12 : 3 = 8 : 2$, — — $2 = \frac{3 \cdot 8}{12}$

$3 : 12 = 2 : 8$, — — $8 = \frac{12 \cdot 2}{3}$

Bei der continuirlichen Proportion, worin das 2te Glied dem 3ten gleich ist, ist das 4te Glied eben so zu finden, denn

$2 : 8 = 8 : 32$, und $32 = \frac{8 \cdot 8}{2}$

allgemein $a : b = b : c$, und $c = \frac{bb}{a}$

das Product der äußersten $ac = bb = b^2$, und $b = \sqrt{ac}$; woraus folgt, daß man beide mittlere finden kann, wenn die äußeren gegeben sind; denn die $\sqrt{ac}$ ist dem zweiten Gliede, folglich auch dem 3ten gleich.

§. 82. Aus der Vergleichung zweier oder mehrerer Proportionen entstehen oft ganz neue. Denn

1) Wenn in 2 verschiedenen Proportionen entweder die beiden vordern oder die beiden letzten Glieder gleich sind, so stehen die andern auch in Proportion. Z. B.

wenn $a : am = b : bm$	wenn $a : am = b : bm$
und $a : am = c : cm$	und $c : cm = b : bm$
so ist $b : bm = c : cm$	so ist $a : am = c : cm$

denn 2 Dinge, die einem 3ten gleich sind, sind einander selbst gleich.

2) Wenn ähnliche Glieder in zweien Proportionen einander gleich sind (als das 1ste und 3te; das 2te und 4te), so stehen die andern auch in Proportion.

$a : am = b : bm$	$a : am = b : bm$
$a : an = b : bn$	$na : am = nb : bm$
also $am : an = bm : bn$	also $a : na = b : nb$

3) Wenn das 2te Glied der einen Proportion dem 1sten in der andern, und das 4te der einen dem 3ten in der andern gleich ist, so stehen die übrigen in Proportion.

$a : am = b : bm$	$a : am = b : bm$
$am : an = bm : bn$	$am : amn = \frac{b}{n} : b$
folgl. $a : an = b : bn$	also $a : amn = \frac{b}{n} : bm$
Oder wenn	Oder wenn
$a : am = b : bm$	$a : am = b : bm$
und $amn : am = b : \frac{b}{n}$	und $a : amn = \frac{b}{n} : bm$
so ist $a : amn = \frac{b}{n} : bm$	so ist $am : amn = \frac{b}{n} : b$

4) Durch

4) Durch die Multiplication der gleichnamigen Glieder in zweien Proportionen entstehen neue.

$$\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline ac : amcn = bd : bmdn \end{array}$$

5) desgleichen durch die Division gleichnamiger Glieder:

$$\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn} \end{array}$$

Es ist ein wichtiges, und für die bessere Einsicht in mathematische Lehrsätze und Beweise höchst nothwendiges Geschäft, sich mit den geometrischen Proportionen und ihren Verwandlungen recht bekannt zu machen.

§. 83. Eine Reihe Zahlen, die immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, heißt eine geometrische Progression. Z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32
oder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
oder 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ ꝛc.

Solche Reihen entstehen aus lauter continuirlichen Proportionen, als:

$1 : 2 = 2 : 4$ oder $a : am = am : am^2$
$2 : 4 = 4 : 8$ $am : am^2 = am^2 : am^3$ ꝛc.
$4 : 8 = 8 : 16$ ꝛc.

Die neuen Glieder sind: a, am, am^2, am^3, am^4, am^5 und man entdeckt leicht, daß der Exponent m um eine Potenz niedriger ist, als die Zahl des Gliedes. Z. B. im 6ten Glied ist m^5; im 3ten Gliede m^2 ꝛc.

Heißt nun die Zahl eines Gliedes allgemein n, so ist die Potenz von m allemal um 1 geringer, als n, also $= n - 1$ und das letzte Glied $= am^{n-1}$.

§. 84. Zwei von den Enden einer geometrischen Progression gleichweit abstehende Glieder geben einerlei Product.

1, 2, 4, 8, 16, 32 und $1 . 32 = 2 . 16 = 4 . 8 = 32$

a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6

und

und jedes Paar Glieder giebt $a^2 m^6$; weil n oder die Anzahl der Glieder ungerade ist, so bleibt am^3 allein, und wird es mit sich selbst multiplicirt, so kommt auch $a^2 m^6$.

§. 85. Bei der geometrischen Progression sind zu merken:

das erste Glied $= a$
der Exponent $= m$
das letzte Glied $= z$
die Anzahl der Glieder $= n$.

Jedes Glied in einer Progression kann als letztes angesehen und geschrieben werden $am^{n-1} = z$.

Das erste $a = \frac{z}{m^{n-1}}$

Der Exponent $m = \frac{am}{a}$ d. i. dem 2ten Gliede dividirt durchs erste; in der Reihe 3, 6, 12, 24, 48 ist $a = 3$; am oder das zweite Glied $= 6$, und $\frac{6}{3} = 2 = m$; überhaupt bekommt man den Exponenten, wenn man das kleinere Glied in das nächst größere dividirt, als $\frac{4}{2}\frac{3}{4} = 2$.

Die Anzahl der Glieder n findet man am leichtesten, wenn man die Reihe wirklich hinschreibt. Z. B. wenn $a = 2$, $m = 3$, $z = 162$, so muß die Reihe seyn:

2, 2.3, 2.3.3, 2.3.3.3, 2.3.3.3.3
$= 2, \quad 6, \quad 18, \quad 54, \quad 162$

also sind 5 Glieder, und $n = 5$

Das Auffinden des Exponenten m und der Anzahl der Glieder n aus gegebenen Datis erfordert indessen Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung (wovon weiter unten). Für Kundige sind daher folgende Formeln brauchbar

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}, \text{ und } n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$$

§. 86. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b eine mittlere Proportionalzahl zu finden, sage man:

$a : x = x : b$, und $xx = ab$
$= x^2 = ab$
$x = \sqrt{ab}$

wobei x die gesuchte Zahl ist.

Mehr-

Mehrere Proportionalzahlen z. B. 3 zu finden:

Die Reihe ist a, x, x^2, x^3, b.

Nun ist $ab = x \cdot x^3$ (siehe §. 84); und $x \cdot x^3 = x^4$; folglich ist $ab = x^4$, und $\sqrt[4]{ab} = x =$ dem 2ten Gliede. Wird dies durch das 1ste Glied dividirt, so ergiebt sich der Exponent, mit dem alle folgende Glieder leicht zu finden sind.

§. 87. Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression giebt die Formel

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = S = \text{Summe.}$$

Z. B. In der Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ist $a = 1$; $m = 2$, $n = 9$, folglich

$$S = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

indessen pflegt man oft durch die bloße Addition der Glieder die Summe zu finden, wenn die Reihe bekannt oder gegeben und nicht zu lang ist.

§. 88. Die Summe einer bis in's Unendliche fortgehenden Progression kann nur dann gefunden werden, wenn die Reihe eine fallende, und der Exponent kleiner, als 1 ist.

Wenn das erste Glied $= a$; der Exponent $= \frac{b}{c}$, so ist, wenn jedes Glied das Pluszeichen hat, die Summe

$$S = \frac{ac}{c - b}$$

Z. B. in der Reihe 3, 2, $1\frac{1}{2}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{27}$ u. s. f. ist $a = 3$; der Exponent $= \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$, und

$$\frac{ac}{c - b} = \frac{3 \cdot 3}{3 - 2} = \frac{9}{1} = 9$$

§. 89. Wenn in einer unendlichen Reihe die Zeichen wechseln, so ist die Summe $S = \frac{ac}{c + b}$

In der Reihe $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $+\frac{4}{27}$, u. s. w. ist $a = \frac{3}{4}$, $m = \frac{3}{4}$ in $-\frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{b}{c}$; und

$$\frac{ac}{c+b} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3}{3+2} = \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{20} = s$$

Wenn von den 5 Größen a, m, z, n, s drei bekannt sind, so lassen sich mittelst folgender Tafel die übrigen finden.

Formeltafel für die geometrische Progression.

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.	Wobei
1	a, m, n	z	$z = am^{n-1}$	a = erstes, z = letztes } Glied, m = Exponent, n = Anz. d. Glied., s = Summe.
2	a, m, s		$z = \frac{a+(m-1)s}{m}$	
3	a, n, s		$z \cdot (s-z)^{n-1} - a \cdot (s-a)^{n-1} = 0$	
4	m, n, s		$z = \frac{(m-1)sm^{n-1}}{m^n - 1}$.	
5	a, m, n	s	$s = \frac{a(m^n - 1)}{m-1}$.	
6	a, m, z		$s = \frac{mz - a}{m-1}$.	
7	a, n, z		$s = \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$	
8	m, n, z		$s = \frac{z(m^n - 1)}{(m-1)m^{n-1}}$.	
9	m, n, z	a	$a = \frac{z}{m^{n-1}}$	
10	m, n, s		$a = \frac{(m-1)s}{m^n - 1}$	
11	m, z, s		$a = mz - (m-1)s$	
12	n, z, s		$a \cdot (s-a)^{n-1} - z(s-z)^{n-1} = 0$	

No.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
13	a, n, z	m	$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
14	a, n, s	m	$m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a, z, s	m	$m = \frac{s-a}{s-z}$
16	n, z, s	m	$m^n - \frac{s}{s-z} m^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
17	a, m, z	n	$n = 1 + \frac{\log. z - \log. a}{\log. m}$
18	a, m, s	n	$n = \frac{\log. (a + (m-1)s) - \log. a}{\log. m}$
19	a, z, s	n	$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-1)} + 1$
20	m, z, s	n	$n = \frac{\log. z - \log. (mz - (m-1)s)}{\log m} + 1$

Die Formeln No. 3, 12, 14, 16 sind auf o gebrachte Gleichungen von höheren Graden, deren Auflösung schwierig und mühsam ist; indessen kann man durch Versuche oft bald das Gesuchte finden. Z. B. es sey No. 14 $a = 2$, $n = 5$, $s = 242$, man sucht m; dann soll $m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = o$ seyn. Man lege die Werthe unter, so ist $m^5 - \frac{242}{2} m + \frac{242-2}{2} = m^5 - 121\,m + 120 = o$.

Die Zahl 120 ist durch 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. theilbar; daher versuche man, statt m die 2, 3 ꝛc. zu setzen; bei welcher Zahl die Gleichung Null wird, dieselbe ist die richtige. Wir wollen annehmen $m = 2$, so ist

m^5

$m^5 - 121\,m + 120 = 2^5 - 121 \cdot 2 + 120 = 32 - 242 + 120 = 152 - 242 = -90$, also nicht Null.

Nehmen wir $m = 3$, so ist

$m^5 - 121\,m + 120 = 3^5 - 121 \cdot 3 + 120 = 243 - 363 + 120 = 363 - 363 = 0$, also ist $m = 3$.

Das 7te Formular kann auch also geschrieben und mit Logarithmen leicht berechnet werden.

$$\frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Die Auflösung dieser Formulare setzt Kenntniß der Wurzel- und Logarithmenrechnung voraus. Der Vollständigkeit wegen stehen sie mit hier an einem Platze, wo man sie mit Recht suchen kann. Der Zweck dieser Schrift erlaubt uns keine genauere Auseinandersetzung der Lehre von den Progressionen, die man in Häseler's, Burja's und anderer Autoren Schriften vollständig abgehandelt findet. Wer das Vorhergehende begriffen hat, und die folgenden 3 Abschnitte mit Aufmerksamkeit liest, wird die Formulare mit Leichtigkeit lösen und anwenden können.

IV. Ausziehung der Wurzeln.

§. 90. Ohne die Kunst, aus einer gegebenen Zahl die verlangte Wurzel zu ziehen oder zu finden, kann man in der Mathematik nicht weit kommen, weshalb dieser Abschnitt eine besondere Aufmerksamkeit verdient.

§. 91. Diejenige Zahl, welche Ein- oder mehrere Male mit sich multiplicirt wird, heißt die Wurzel der auf diese Weise entstandenen Größe (Potenz). Siehe §. 21. So ist z. B. 4 die Wurzel von 16, denn $4 \cdot 4 = 16$; man schreibt es $\sqrt{16} = 4$, d. h. die Quadratwurzel aus 16 ist 4. Der Kubus von $4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 92. Ganze Zahlen geben ganze Zahlen zum Quadrat, zum Kubus ꝛc.; Brüche geben Brüche.

So

So giebt

1	im Quadrat	1,	im Kubus	1
2	— —	4	— —	8
3	— —	9	— —	27
4	— —	16	— —	64
5	— —	25	— —	125
6	— —	36	— —	216
7	— —	49	— —	343
8	— —	64	— —	512
9	— —	81	— —	729

§. 93. Diese kleine Tafel kann uns auf wichtige Bemerkungen leiten.

1) Kein Quadrat der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 2 Zahlen, ist also jedesmal unter 100.

2) Kein Kubus der einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9 hat über 3 Zahlen, ist also jedesmal unter 1000.

3) Der wahren Quadratzahlen und Kubikzahlen sind im Grunde nur wenige, denn zwischen 4 und 9 fehlen 5, 6, 7, 8, welche keine reine Wurzel haben, weil ihre Wurzel zwischen 2 und 3 fällt. Zwischen 9 und 16 fehlen: 10, 11, 12, 13, 14, 15, deren Wurzel zwischen 3 und 4 liegen muß. Nun geben aber Brüche mit Brüchen multiplicirt niemals Ganze zum Product, folglich kann man auch aus den Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, keine reine Wurzel finden. Noch seltener sind die Kubikzahlen, wie aus der kleinen Tafel zu ersehen ist. Man nennt solche Zahlen, deren Wurzeln sich genau angeben lassen, Rationalzahlen; alle übrige heißen Irrationalzahlen.

§. 94. Man hat eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus jeder Zahl eine verlangte Wurzel ziehen, d. h. angeben kann, was das für eine Zahl ist, aus deren Multiplication die gegebene Zahl entstanden seyn muß. Die Wurzel aus Irrationalzahlen wird freilich nicht völlig genau gefunden, allein man kann sich ihr doch so weit nähern, als man will. Diese Rechnungsart heißt das Ausziehen der Wurzeln, und gründet sich auf folgende Betrachtung.

§. 95.

§. 95. Da man jede Größe, z. B. 7, so ansehen kann, als sey sie aus zweien andern, etwa aus 5 + 2, oder 8 — 1, entstanden, so mag a + b irgend eine solche Größe seyn, und zur Potenz erhoben, d. h. mit sich selbst multiplicirt werden. Wir wollen beobachten, was mit ihr vorgeht, und versuchen, wie es anzufangen sey, aus der Potenz die Wurzel zu ziehen. Daß es durch eine Art von Division geschehen müsse, folgt schon daraus, daß jede quadratische oder kubische Größe durch die Multiplication ihrer Wurzel entstanden ist. Man multiplicire a + b mit sich selbst, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$ als Quadrat von der Wurzel a + b.

§. 96. Das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$, dessen Wurzel a + b wir kennen, besteht aus 3 Gliedern a^2; 2ab, und b^2.

1) Den ersten Theil der Wurzel findet man leicht, denn man dividire nur a^2 durch a, so erhält man a.
2) Nun bleibt noch $2ab + b^2$, welches bequemer ausgedrückt wird durch (2a + b) . b.
3) Dividirt man mit 2a + b in (2a + b) b, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel, nämlich b.
4) Den Divisor 2a + b bekommt man, wenn man den ersten Theil der Wurzel, a, doppelt nimmt (er ist dann = 2a) und damit 2a + b dividirt, wodurch man b bekommt. Wird nun b auch zu 2a gesetzt, so erhält man 2a + b.

Das Exempel sieht also aus:

$a^2 + 2ab + b^2 \;||\; a + b$ = Quadratwurzel.

Divisor a) a^2

Rest = $2ab + b^2$

neuer Divis. 2a + b)

(siehe 4.) $2ab + b^2$

Was dem Anfänger etwa noch dunkel und schwer vorkommt, wird ihm aus dem Folgenden und aus eigenen Versuchen bald klar werden.

§. 97. Aus dem, was von §. 90. an bisher gesagt worden ist, ergeben sich folgende Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzeln:

1) Man

1) Man theile die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, von der Rechten zur Linken in Klassen, jede von 2 Ziffern (denn kein Quadrat einer einfachen Zahl ist über 81, siehe §. 92.). Es schadet nichts, wenn vorn nur 1 Ziffer bleibt. Z. B.

$\sqrt{1764}$ wird abgetheilt 17|64||

oder $\sqrt{15625}$ — — 1|56|25||

2) Man suche für die erste Klasse linker Hand (hier für 17) die Wurzel, und wenn sie nicht genau paßt, die nächst kleinere (hier die 4; denn $4 \cdot 4 = 16$, welche der 17 am nächsten kommt).

3) Die so gefundene Wurzel (4) setze in den Quotienten, als den ersten Wurzeltheil $= a$, multiplicire ihn mit sich selbst, und ziehe das Product (16) von der ersten Klasse ab. Zum etwaigen Rest (1) setze die 2te Klasse (64) herunter.

a

17|64||4
16|

Rest und 2te Klasse 1 64

4) Den neuen Divisor bekommt man, indem man den 1sten Wurzeltheil a (hier $= 4$) doppelt nimmt, also $2a$ ($= 8$). Den Divisor setzt man so unter die zweite Klasse, daß die Ziffer rechts (hier die 4) nichts unter sich bekommt.

a

17|64||4
16|

1 64

neuer Divisor $= 8$)

5) Dividire mit dem neuen Divisor (8) in die über ihm stehende Zahl (16). Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel $= b$ (hier $= 2$). Er muß auch rechts neben den Divisor (8) gesetzt werden, wodurch dieser $= 2a + b$ (82) wird, und die leere Stelle der 2ten Klasse einnimmt. Multiplicire nun $2a + b$ mit dem zweiten Wurzeltheil b, und ziehe das Product von der 2ten Klasse und dem Reste der ersten ab,

a + b

17|64||4 2 = Wurzel

$a^2 = 16$

Rest und 2te Klasse 1 6 4
neuer Divisor = 2a = (8,2)
und b = 2 dazu gesetzt
endlich (2a+b) . b = 1 6 4

Rest = 0

6) Wenn nun alles aufgeht, so ist a+b (42) die reine Wurzel. Hat aber die Zahl mehr, als 2 Klassen, so setzt man die 3te Klasse herunter, sieht die beiden schon erhaltenen Wurzeltheile als Einen an, nimmt ihn doppelt, so hat man abermals einen neuen Divisor, mit dem man wie vorher bei 5 verfährt, und so den 3ten Wurzeltheil bekommt.

Man wiederholt dies so lange, als man Klassen hat, und erhält auch eben so viel Wurzeltheile, als Klassen. Ist die gegebene Zahl ein wirkliches Quadrat, so geht am Ende alles auf.

§. 98. Zur Übung einige Beispiele.

Die $\sqrt{}$15625. Da diese Zahl drei Klassen, nämlich 1|56|25|| hat, so muß auch die Wurzel aus 3 Ziffern bestehen.

a + b

1|56|25||1 2 5 Wurzel = 125.

$a^2 = 1$

a + b

zweite Klasse 56
neuer Divisor 2a = 2 = (2,2)
(2a+b) . b = 4 4

Rest und 3te Klasse = 1225
Divisor = 2 . 12 = (24,5)
(nun ist a = 12)
b = 5) u. 2a+b = 1225

Rest = 0

Die $\sqrt{}$582169 wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl drei Klassen hat

a + b

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b \\ & 58|21|69||\underline{7\quad 6}\quad 3, \text{Wurzel} = 763. \\ a^2 = 7 \cdot 7 = & \underline{49|\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b} \\ \text{Rest und 2te Kl.} = & 9\ 21 \\ \text{neuer Divisor } 2 \cdot 7 = & (1\ 4{,}6) \\ (2a+b) \cdot b = & \underline{8\ 7\ 6} \\ \text{Rest und 3te Kl.} = & 4\ 569 \\ \text{neuer Divis.} = 2 \cdot 76 = & (1\ 52{,}3) \\ (2a+b) \cdot b = & \underline{4\ 56\ 9} \\ \text{Rest} = & 0 \end{array}$$

§. 99. Wenn die Zahl, woraus die Wurzel gezogen werden soll, kein Quadrat ist, und man also die Wurzel durch Näherung suchen muß, so hänge man an die Zahl so viel Klassen von Nullen, als man will, und ziehe die Wurzel, wie gewöhnlich, aus. Im Quotienten streiche man aber so viel Decimalstellen ab, als man Klassen von Nullen angehängt hat. Es wird niemals aufgehen; doch erhält man die Wurzel immer genauer, je mehr Klassen Nullen angehängt werden.

Man soll z. B. die Wurzel aus 5 bis auf drei Decimalstellen finden, so hänge man der 5 drei Klassen Nullen an.

$$\begin{array}{l} \text{Also } \sqrt{5} = \sqrt{5}|00|00|00||2{,}236\ldots = \text{Wurzel} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{4|\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1\ 00 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (4{,}2) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{8\ 4} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1600 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (44{,}3) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{1\ 3\ 2\ 9} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 27100 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (446{,}6) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{26796} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{Rest } 304 \end{array}$$

§. 100. Wenn die Wurzel aus einer ganzen Zahl mit einem Decimalbruche gezogen werden soll, so theilt man nur die Ganzen ab, und zieht die Decimalstellen so her-

herunter, als man im vorigen §. die Nullen herunter-setzte. Z. B. $\sqrt{7,651}$ zu finden.

7|65|10||2,76.... = Wurzel
4| : :
3 65 : :
(4,7) : :
3 29 : :
3610
(54,6
3276
Rest 334

Man kann nun dem Rest 334 abermals eine oder mehrere Klassen Nullen geben, und mit der Rechnung fortfahren, wodurch man die Wurzel immer genauer bekommt. Im obigen Beispiel geben die 3 Decimalstellen 651 nicht zwei volle Klassen; deshalb mußte noch eine Null angehängt werden. Daß die Wurzel unvollständig ist, zeigt man durch Puncte (2,76....) an.

§. 101. Auch aus Decimalbrüchen, ohne Ganze, kann die Wurzel eben so, wie vorhin, gefunden werden. Dann vertritt die Null die Stelle der Ganzen, folglich kann die Wurzel auch keine Ganze enthalten.

Z. B. $\sqrt{0,056}$ zu finden auf 4 Decimalstellen. Man hänge so viel Nullen an, daß aus 056 vier Klassen werden, also $\sqrt{0,}$|05|60|00|00||0,2366 = Wurzel.
0|

5
$1a^2 = 4$
160
(4,3)
129
3100
(46,6)
2796
30400
(472,6)
28356
Rest = 2044

§. 102.

§. 102. Soll die Wurzel aus einem Bruch gezogen werden, so ziehe man sowol aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Wurzel, und setze beide Wurzeln in einen Bruch.

Z. B. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, denn $\sqrt{1} = 1$; und $\sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$, denn $\sqrt{9} = 4$; und $\sqrt{16} = 4$.

Oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht daraus die Wurzel.

Z. B: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{0,25}$; und $\sqrt{0,25} = 0,5$ = Wurzel.

$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0,75}$; und nach §. 101 wird $\sqrt{0,75}$ = 0,866 .. = Wurzel.

§. 103. Weil einerlei Zeichen beim Multipliciren stets Plus geben, so muß jede quadratische Größe + haben. Die Wurzel kann daher sowol + als — haben, und wird auch oft mit beiderlei Zeichen geschrieben, als $\sqrt{16} = \pm 4$. Für negative Größen giebt es also keine Wurzeln.

Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 104. Wenn wir eine zweitheilige (binomische) Größe a + b in die 3te Potenz erheben, und auf das genau achten, was mit ihr vorgeht, so können wir allgemeine Regeln zur Ausziehung der kubischen Wurzel entdecken.

$(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = a + b$

$a + b$

$ab + b^2$

$a^2 + ab$

$a^2 + 2ab + b^2$ = zweite Potenz

$a + b$

$a^2b + 2ab^2 + b^3$

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ = dritte Potenz.

Aus dieser kubischen Größe müssen wir die Wurzel a + b durch eine Art von Division wieder zu bekommen suchen.

Das erste der 4 Glieder ist a^3; wird der erste Wurzeltheil a in die 3te Potenz erhoben, so geht er darin auf.

Um die übrigen 3 Glieder $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dahin zu bringen, ist ein neuer Divisor $= 3a^2$ nöthig; damit in $3a^2b$ dividirt, giebt den zweiten Wurzeltheil b, welcher mit $3a^2$ multiplicirt, $3a^2b$ giebt, und also geht auch dieses Glied auf.

Das Glied $3ab^2$ wird aufgehen, wenn wir b quadriren und mit 3a multipliciren.

Das letzte Glied b^3 ist das kubirte zweite Glied b in der Wurzel.

Auf diese Weise lehrt uns die kubische Größe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wie wir das Werk beginnen sollen, um die Wurzel $a + b$ wieder zu bekommen. Die Glieder $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ heißen Partialproducte, und müssen bei Zahlenausdrücken auf eine gewisse Art addirt, und von der kubischen Größe abgezogen werden.

§. 105. Aus der Betrachtung dieser allgemeinen Rechnung und aus dem Umstande, daß kein Kubus einer einfachen Zahl mehr als 3 Zahlzeichen, wol aber weniger haben kann, ergeben sich folgende Regeln zur

Ausziehung der Kubikwurzeln aus Zahlengrößen.

1. Ist die gegebene Zahl ein wirklicher Kubus und aus nicht mehr als 3 Zahlzeichen bestehend, so ist die Wurzel eine von den Ziffern 1 bis 9 (siehe §. 92.), und ohne weitere Rechnung aus jener Tafel zu finden. Hat sie aber mehr als 3 Ziffern, so theile man sie von der Rechten zur Linken in Klassen, jede zu 3 Ziffern. In der letzten Klasse links können weniger, zwei oder eine seyn.
2. Suche für die erste Klasse linker Hand die Kubikwurzel nach §. 92., und, findet sich die Zahl nicht genau, die nächst kleinere, und schreibe sie in den Quotienten. Diese erste Ziffer heiße a.
3. Kubire diesen ersten Wurzeltheil a, setze den Kubus unter die erste Klasse, ziehe ihn davon ab, und setze den etwanigen Rest unter den Strich. Zu dem Reste setze die 2te Klasse.

4. Nun

4. Nun ist ein Divisor nöthig, welchen man bekommt, wenn man den ersten Wurzeltheil a quadrirt und mit 3 multiplicirt. Dann ist er $= 3a^2$.

5. Dividire mit $3a^2$ in den heruntergesetzten Rest, und die erste Ziffer links in der zweiten Klasse. Der Quotient ist der zweite Wurzeltheil b, den man nicht zu groß nehmen muß, weil noch mehrere Partialproducte von der zweiten Klasse abgezogen werden.

6. Der zweite Wurzeltheil b mit dem Divisor $3a^2$ multiplicirt, giebt das erste Partialproduct $= 3a^2 b$, welches so hingeschrieben wird, daß zwei Ziffern in der zweiten Klasse rechts nichts unter sich bekommen.

7. Der zweite Wurzeltheil b quadrirt und mit 3a multiplicirt, giebt $3ab^2$ oder das zweite Partialproduct, welches so hingeschrieben wird, daß seine Einer unter der mittlern Zahl der zweiten Klasse stehen.

8. Das dritte Partialproduct ist b^3, dessen niedrigste Ziffer unter der niedrigsten Ziffer der zweiten Klasse (also Einer unter Einer) stehen muß.

9. Man addire alle 3 Partialproducte in dieser Stellung zusammen, und ziehe ihre Summe von der Zahl, welche durch den Rest der ersten Klasse und durch die 3 Ziffern der zweiten Klasse entstanden ist, ab.

10. Ist nun die Zahl ein reiner oder wirklicher Kubus, und hat sie nur 2 Klassen gehabt, so muß alles aufgehen. Sind aber mehr, als zwei Klassen, so wird die 3te Klasse zum Reste der 2ten heruntergesetzt.

11. Die beiden gefundenen Wurzeltheile $a + b$ sehe man als Einen an, und nenne ihn a. Darauf beginne die ganze Verrichtung, wie sie von 3 an gelehrt, von neuem. Das gefundene dritte Wurzelglied behandle wie b.

Hat die Zahl 4 Klassen, die Wurzel also 4 Ziffern, so nenne man die 3 ersten Ziffern der Wurzel a, und die 4te wieder b. Auf diese Weise wird das Buchstabenformular stets brauchbar seyn.

§. 106. Beispiele erläutern die Regeln am besten.

1. Aus der Zahl 79507 die Kubikwurzel zu finden.

a+b

Theile 79507 in Klassen, also = 79|507||4 3 = Wurzel.
Suche aus 79 die $\sqrt[3]{}$, welche
4 = a, und $a^3 = 64$

Zum Rest 15 die 2te Kl. gesetzt = 15 507
Divisor = $3a^2 = 3 . 4 . 4 =$ (48)::
1. Partialpr. = $3a^2b = 3.4.4.3 =$ 144 ::
2. Partialpr. = $3ab^2 = 3.4.3.3 =$ 10 8:
3. Partialpr. = $b^3 = 3.3.3 =$ 27

Summe der 3 Partialpr. = 15507
und abgezogen von 15507
bleibt = 0

Die $\sqrt[3]{}$ aus 79507 ist also = 43, und 43 . 43 . 43 wird jene Zahl wiedergeben. Der Anfänger wird wohlthun, so lange bei diesem Beispiele zu verweilen, und alle Regeln zu wiederholen, bis sie ihm ganz geläufig sind.

2. Die $\sqrt[3]{}$ 884736 zu finden.

a+b

884|736||9 6 = Wurzel.
$a^3 = 729$|

Rest und 2te Klasse = 155 736
Divisor = $3a^2$ = (24 3)
Partialproducte $3a^2b$ = 145 8
$3ab^2$ = 9 72
b^3 = 216

Summe = 155 736
abgezogen von obigem Rest geht auf.

3. Die $\sqrt[3]{}$ 34965783 zu finden.

Die Wurzel wird 3 Ziffern haben, weil die Zahl 3 Klassen hat.

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b \\ & 34|965|783||3\quad 2\quad 7 = \text{Wurzel} \\ a^3 = & 27| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b \\ \hline \end{array}$$

Rest und 2te Klasse = 7 965

Divisor $3a^2 = (2\ 7)$

Partialpr. $\begin{cases} 3a^2b = 5\ 4 \\ 3ab^2 = \quad 36 \\ b^3 = \quad\quad 8 \end{cases}$

Summe = 5 768

Rest und 3te Klasse 2 197 783

Divis. $= 3a^2 = 3 . 32^2 = (307\ 2)$ denn $a = 32$

$3a^2b = 2150\ 4$

$3ab^2 = \quad 47\ 04$

$b^3 = \quad\quad 343$

Summe = 2 197 783

abgezogen vom Rest der 2ten und 3ten Klasse = 0.

§. 107. Wenn die Zahl keine wirkliche Kubikzahl ist, so bleibt endlich ein Rest, an den man so viele Klassen von Nullen hängt, als man Decimalstellen in der Wurzel haben will.

Z. B. $\sqrt[3]{636059}$ zu finden. Die Wurzel kann nur zwei ganze Zahlen haben.

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b \\ & 636|059||8\quad 6 \\ a^3 = & 512| \\ \hline & 124\ 059 \end{array}$$

Divisor $= 3a^2 = (19\ 2)$

$\begin{cases} 3a^2b = 115\ 2 \\ 3ab^2 = \quad 8\ 64 \\ b^3 = \quad\quad 216 \end{cases}$

Summe 124 056

Rest = 3

Weil hier der Rest sehr gering ist, so könnte man sich mit der gefundenen Wurzel 86 begnügen, denn 86 . 86 . 86 = 636056. Allein verlangt man mehr Schärfe, so müssen dem Reste 3 mehrere Klassen Nullen angehängt werden. Wir wollen 4 Klassen anhängen, um noch 4 Decimal-

malstellen zu bekommen. Die Fortsetzung des Exempels sieht also aus:

..... ||86,0001 = Wurzel.

Rest u. neue Kl. = 3000

a = 86, $3a^2$ = (22188) Da die Division nicht angeht, so wird o in den Quotienten gesetzt, und eine neue Klasse Nullen angehängt.

3000000

a = 860, $3a^2$ = (2218800) Die Division geht noch nicht, daher o in den Quotienten und 3 Nullen zum Rest.

30000 00000

a = 8600, $3a^2$ = (221880 000) wie vorher verfahren.

30000 000 00000

a = 86000, $3a^2$ = 22188 000 000):: hier geht die Division an.

b = 1, $3a^2b$ = 22188 000 000 ::

$3ab^2$ = 25 8000:

b^3 = 1

Summe = 22188 025 80001

Rest = 7811 974 19999

Hängt man noch eine Klasse Nullen an, und führe fort, so wäre a = 860001, und b = 3; dann ist die Wurzel = 86,00013....

§. 108. Soll die $\sqrt[3]{}$ aus einer Zahl mit einem Decimalbruche gezogen werden, so theilt man nur die Ganze in Klassen, und zieht die Decimalbrüche anstatt der Nullenklassen herunter. Die Wurzel erhält natürlich nur so viel Ganze, als Wurzeltheile sich aus den Ganzen ergeben, oder als die Ganzen Klassen haben; sobald die Decimalbrüche heruntergezogen werden, fangen in der Wurzel auch die Decimalstellen an.

Z. B. $\sqrt[3]{}$ 126,52 = 126,520||5,02 = Wurzel.

$a^3 = 125$

1520

$3a^2 = (75)$ Die Division geht nicht an.

1 520000

Nun ist a = 50, u. $3a^2$ = (7500)::

b = 2, $3a^2b$ = 15000 ::

$3ab^2$ = 600:

b^3 = 8

Summe = 1506008

Rest = 13992

§. 109. Soll aus einem Decimalbruche die $\sqrt[3]{}$ gezogen werden, so setzt man in dem Quotienten an die Stelle der Ganzen eine Null. Z. B. $\sqrt[3]{}$ 0,004096.

0|004|096||0,16 = Wurzel.

suche $\sqrt[3]{}$ aus 4; a^3 = 1

Rest = 3096

$3a^2$ = (3)

$3a^2b$ = 18

$3ab^2$ = 108

b^3 = 216

Summe = 3096

0

§. 110. Die $\sqrt[3]{}$ aus Brüchen ziehen heißt: sie sowol aus dem Zähler als aus dem Nenner ziehen. Z. B. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}}$.

Soll aber aus dem Zähler oder aus dem Nenner allein die Wurzel gezogen werden, so muß es so angezeigt stehen:

$\frac{\sqrt[3]{8}}{17}$ und $\frac{8}{\sqrt[3]{17}}$.

§. 111. Wenn Buchstabengrößen wirkliche Quadrate oder Kubi sind, so läßt sich auch aus ihnen die Wurzel ziehen. Z. B. $\sqrt[3]{}(m^3 + 12m^2 + 48m + 64)$.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a+b \\ m^3+12m^2+48m+64 \,||\, m+4 = \text{Wurz.} \end{array}$$

hier ist $a = m$, u. $a^3 = m^3$

$$\begin{array}{rl} & 12m^2+48m+64 \\ \text{Divisor } 3a^2 & = (3m^2) \\ \left\{\begin{array}{l} 3a^2b = \\ 3ab^2 = \\ b^3 = \end{array}\right. & \begin{array}{l} 12m^2 \\ \qquad +48m \\ \qquad\qquad +64 \end{array} \\ \hline \text{Summe} & 12m^2+48m+64 \\ \hline \text{Rest} & = 0 \end{array}$$

§. 112. Die Kubikwurzel aus einer Größe kann sowol Plus als Minus haben, denn der Kubus von einer Plusgröße $= +$, von einer Minusgröße $= -$.

Auch aus einer Minusgröße muß sich daher die $\sqrt[3]{\ }$ ziehen lassen. $\sqrt[3]{64} = +4$; und $\sqrt[3]{-64} = -4$; denn $-4 \cdot -4 \cdot -4 = +16 \cdot -4 = -64$.

§. 113. Die Wurzeln aus der 4ten, 5ten, 6ten Potenz zu ziehen, ist zwar auch möglich, aber sehr weitläufig. Wir werden in den Logarithmen bequeme Mittel finden, aus einer Größe jede verlangte Wurzel zu ziehen.

V. Gebrauch der Logarithmen.

§. 114. Unter eine geometrische Progression, deren erstes Glied sich mit 1 anfängt, setze eine arithmetische Progression, deren 1stes Glied sich mit Null anfängt, so heißt jedes Glied der letztern der Logarithme des über ihm stehenden Gliedes in der geometrischen Reihe. Z. B.

Geometr. Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 u. s. w.
Arithmet. Progr. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.

Die Glieder der untern Reihe sind also eigentlich die Exponenten der geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1, deren Exponent $= 2$ ist. So ist z. B. 6 der Logarithme von 64, und auch die sechste Potenz des Exponenten 2; die

die 64 ist daher das 6te Verhältniß in der geometrischen Reihe.

Anmerk. Man kann die Logarithmen Verhältnißzähler nennen. Ihre Erfindung fällt in die Zeit 1614 bis 1624, wo Nepper und Brigg sich dadurch unsterblich machten, daß sie die höchst mühevolle Berechnung der Logarithmen unternahmen und logarithmische Tafeln in den Druck gaben

§. 115. An den im vorigen §. angeführten beiden Reihen können wir vieles entdecken, was uns über den Gebrauch der Logarithmen Aufschluß geben kann.

1. Wenn z. B. zwei Zahlen der obern Reihe, 4 und 32 mit einander multiplicirt werden sollen, so braucht man nur ihre darunter stehenden Logarithmen 2 und 5 zu addiren: die Summe 7 ist der Logarithme der Zahl 128, welche die Antwort ist; und $4 . 32 = 128$.
2. Ist 4 in 32 zu dividiren, so findet man die Antwort dadurch, daß man den Logarithmen der Zahl 4 vom Logarithmen der 32 abzieht, hier $5 - 2 = 3$. Die 3 ist der Logarithme der Antwort, und steht unter der 8. Aber $\frac{32}{4}$ ist auch $= 8$.
3. Soll die 4 in die 3te Potenz erhoben werden, so multiplicire man den Logarithmen der Zahl 4, welcher 2 ist, mit 3; das Product 6 ist der Logarithme von 64, welches auch der Kubus von 4 ist.
4. Das Ausziehen der Wurzel geschieht dadurch, daß man den Logarithmen durch den Wurzelexponenten dividirt. Z. B. $\sqrt{256}$ wird gefunden, indem wir 8 durch 2 dividiren. Der Quotient 4 ist der Logarithme der Wurzel, und gehört der 16, welches auch die Wurzel ist. Die $\sqrt[4]{256}$ wäre $\frac{8}{4} = 2$, welche Zahl der Logarithme von 4 ist; und $\sqrt[4]{256}$ ist auch $= 4$.

Die Multiplication zweier Zahlen geschieht also durch die Addition ihrer Logarithmen;

die Division durch die Subtraction der Logarithmen;

die Erhebung zu Potenzen geschieht durch die Multiplication der Logarithmen mit dem Exponenten;

die Ausziehung der Wurzel geschieht durch die Division durch den Exponenten.

Die

Die erhaltene Zahl ist dann der Logarithme der Antwort.

Dies alles hat seinen Grund darin, daß man die Logarithmen als Exponenten der obern Reihe betrachten kann.

§. 116. Man kann übrigens mit jeder geometrischen und arithmetischen Reihe alle vorige Aufgaben lösen, wie Versuche beweisen werden. Wir bedienen uns gegenwärtig der sogenannten Briggischen oder gemeinen Logarithmen, deren 2 Reihen folgende sind:

Geometr. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000.
Arithmet. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
od. Logarith.

Es sind unzählig viele Logarithmensysteme möglich, aber in jedem ist 0 der Logarithme der Einheit, und diejenige Zahl, deren Logarithme 1 ist, heißt die Grundzahl dieses Systems.

§. 117. Wie fand man aber die Logarithmen für die Zahlen zwischen 1 und 10; zwischen 10 und 100 u. s. w.? Sollen die Logarithmen ganz brauchbar werden, so muß man für jede Zahl einen Logarithmen haben. Nun sieht man bald, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, zwar größer als 0, aber doch kleiner als 1, also echte Brüche; die Logarithmen der Zahlen 11 bis 99 zwar größer als 1, aber doch kleiner, als 2; die Logarithmen der Zahlen von 101 bis 999 zwar größer, als 2, aber doch kleiner, als 3, folglich Ganze und Brüche seyn müssen. Die Logarithmen der 10 und ihrer Potenzen sind daher nur ganze Zahlen; die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestehen aus Brüchen, die man auf eine mühsame Weise berechnet, und in Büchern, die den Titel: logarithmische Tafeln, führen, hat abdrucken lassen.

§. 118. Um einen kleinen Überblick zu geben, wie logarithmische Tafeln aussehen, setze ich die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 nebst ihren Logarithmen her.

Na-

Natürliche Zahl = N.	Logarithmen = Log.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5	0,6989700
6	0,7781513
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425
10	1,0000000
11	1,0413927
12	1,0791812
13	1,1139434
14	1,1461280
15	1,1760913
16	1,2041200
u. s. w.	

Anmerk.

Die Ganze in den Logarithmen nennt man die Kennziffer, Charakteristik; der angehängte Decimalbruch heißt Mantisse.

Die natürlichen Zahlen
von 1 — 9 haben 0 zur Kennziffer
von 10 — 99 — 1 —
von 100 — 999 — 2 —
von 1000 — 9999 — 3 —
u. s. w.

folglich ist die Kennziffer stets um eine 1 geringer, als die ihr zugehörige natürliche Zahl Ziffern hat. Daher läßt man auch in größeren Tafeln die Kennziffer ganz weg.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir einige Aufgaben mit Hülfe vorstehender 16 Logarithmen lösen.

1. Es soll 3 mit 4 multiplicirt werden. Dies geschieht logarithmisch also Log. 3 + log. 4

log. 3 = 0,4771213 } addirt.
+ log. 4 = 0,6020600 }

log. (3.4) = 1,0791813, gehört zu 12.

2. Man dividirt z. B. 3 in 15 logarithmisch also:
log. $\frac{15}{3}$ = log. 15 — log. 3;

log. 15 = 1,1760913
— log. 3 = 0,4771213 subtrahirt.

log. $\frac{15}{3}$ = 0,6989700, gehört zur 5.

3. Die 2 in die 4te Potenz zu erheben, heißt 4 log. 2.

log. 2 = 0,3010300 (4 multiplic.
log. 2^4 = 1,2041200
wozu die Zahl 16 gehört.

4. Aus

4. Aus 16 die $\sqrt[4]{}$ zu finden, heißt $\frac{\log. 16}{4}$

log. 16 = 1,2041200

dividirt durch 4) 0,3010300

welcher Logarithme zur 2 gehört, also $\sqrt[4]{16} = 2$.

Die Rechnung mit größern Zahlen ist eben nicht weitläufiger, daher sind die Logarithmen ein recht bequemes Mittel, weitläufige Rechnungen kurz und leicht zu vollenden, die auf gewöhnlichem Wege sehr mühsam, oft unmöglich auszuführen sind.

§. 119. Ohne Zweifel werden sich Liebhaber mathematischer Beschäftigungen solche logarithmische Tafeln anschaffen wollen. Daher empfehlen wir ihnen folgende brauchbare Werke, in denen zugleich noch andere zur Mathematik gehörige Tafeln vorkommen, von denen wir in der Folge reden werden.

1. Adrian Vlacqs Tabellen der Sinus, Tangenten ꝛc., nebst ihren Logarithmen, und der Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000. Preis 1 Rthlr. (Für Anfänger brauchbar und beliebt.)
2. Joh. Carl Schulze Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer trigonometrischer, und anderer, zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin, 1778. Zwei Bände. Preis 4 Rthlr.
3. Georg Vega Logarith. trigonometr. und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien, 1783. Preis 1 Rthlr 4 Gr.

Außer diesen recht brauchbaren Werken verdient aber folgendes vorzügliche Empfehlung:

4. Georg Vega Logarith. trigonometr. Tafeln nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 2 Bände. 3te verbesserte und vermehrte Aufl. Leipz. 1814. Preis 5 Rthlr.

(Der erste Band enthält die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 101000; die Logarithmen der trigonometrischen Linien; die Linien selbst, und

viele

viele andere Tafeln und Formeln in höchster Schärfe. Der zweite Band enthält die sogenannten natürlichen Logarithmen, viele astronomische Tafeln, Formeln aus der Analysis, Differenzial- und Integralrechnung ꝛc., alles in höchster Schärfe, und daher für Kenner sehr brauchbar).

Jedem dieser Werke ist eine Anweisung beigefügt, die die Einrichtung und den Gebrauch erklärt.

§. 120. Jede Zahl, die mit der 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt oder dividirt wird, ist im Logarithmus nur durch ihre Kennziffer unterschieden. So ist z. B.

log. 3450 = 3,5389506
und log. 34590 = 4,5389506
log. 345900 = 5,5389506
log. 34,59 = 1,5389506
log. 3,459 = 0,5389506

Da die Kennziffer sich nach der Anzahl Ziffern richtet, woraus die Ganzen einer Zahl bestehen, so kann man umgekehrt aus der Kennziffer eines Logarithmen auf die ihm gehörige Zahl schließen. Ist die Kennziffer 0, so ist die natürliche Zahl unter 10; ist sie 1, zwischen 10 und 100 ꝛc.

§. 121. Über den Gebrauch der Logarithmen müssen wir noch einige Aufgaben hinzufügen, und dem Anfänger rathen, seine Tafeln zur Hand zu nehmen, jeden Logarithmen selbst aufzusuchen, und die §. 115 gegebenen Regeln wohl zu beachten.

§. 122. Durch die Benutzung der Logarithmen wird, besonders wenn man mit großen Zahlen zu rechnen hat, viel Kürze und Bequemlichkeit erreicht. Auch bei der gemeinen Regeldetri kann man Logarithmen brauchen. Z. B.

3457 ℔ : 1000 Rthlr. = 864,25 ℔?

log. 864,25 = 2,9366394 } addirt.
log. 1000 = 3,0000000 }

5,9366394
log. 3457 = 3,5386994 subtrahirt.

log. 2,3979400 gehört zu 250, folglich ist die Antwort ein Logarithme 2,3979400, den man in den Tafeln aufschlägt, und neben der Zahl 250 findet, welche = 250 Rthlr. sind.

§. 123.

§. 123. Unter der sogenannten decadischen Ergänzung versteht man das, was übrig bleibt, wenn man jede der Ziffern eines Logarithmen von 9 subtrahirt. Addirt man die decadische Ergänzung eines zu subtrahirenden Logarithmen, so ist es eben so gut, als hätte man ihn subtrahirt. Von der Kennziffer der Summe wirft man dann die Zehner weg.

So hätte z. B. voriges Exempel auch so ausgerechnet werden können:

log. 864,25 = 2,9366394
log. 1000 = 3,0000000
decadische Ergänzung des log. 3457 = 6,4613006 } addirt

12,3979400 = 250

von der Kennziffer 12 wird die 1 weggeworfen.

Die decadische Ergänzung ist aber da besonders bequem, wenn mehrere Divisoren in der Rechnung sind.

Z. B. $\frac{72648}{94.36}$ wird logarithmisch also stehen:

log. 72648 = 4,8612237
decadische Ergänzung des log. 94 = 8,0268720
decadische Ergänzung des log. 36 = 8,4436975

1,3317932

Der gefundene Logarithme 1,3317932 gehört zur Zahl 21468. Da nun aber aus der Kennziffer 1 hervorgeht, daß der Quotient nur 2 ganze Ziffern haben kann, so ist derselbe = 21,468.

§. 124. Den Logarithmen eines echten Bruchs mittelst der Tafeln zu finden.

1ste Auflösung. Weil der Nenner größer ist, als der Zähler, so subtrahire man den log. des Zählers vom log. des Nenners, und setze dem Unterschiede das Minuszeichen vor.

Z. B. log. $\frac{5}{8}$ = log. 8 = 0,9030900
log 5 = 0,6989700

log. $\frac{5}{8}$ = — 0,2041200

2te Auflösung. Vermehre die Kennziffer des Zählers so, daß der log. des Nenners abgezogen

gen werden kann. Wie viel diese Vermehrung betragen habe, bemerke man hinter dem Logarithmen. Z. B. log. $\frac{5}{8}$

$$+1$$
$$\log. 5 = 0{,}6989700 - 1$$
$$\log. 8 = 0{,}9030900$$
$$\log. \tfrac{5}{8} = 0{,}7958700 - 1.$$

3te Auflösung. Zum log. des Zählers addire die decadische Ergänzung des Nenners und schreibe — 10 hinter den log.

Als log. $\frac{5}{8}$ = log. 5 = 0,6989700
decadische Ergänzung log. 8 = 9,0969099

log. $\frac{5}{8}$ = 9,7958799 — 10
oder = 0,7958800 — 1.

§. 125. Gebrauch eines Bruchlogarithmen, z. B. log. $\frac{5}{8}$. Es sey $\frac{5}{8}$ mit 80 zu multipliciren.

log. 80 = 1,9030900
Nach 1r Aufl. d. §. 124 ist log. $\frac{5}{8}$ = — 0,2041200

log. $\frac{5}{8}$. 80 = 1,6989700 geh. zu 50.

(Hier wurden die zu addirenden Logarithmen, weil sie verschiedene Zeichen hatten, mit einander ausgeglichen, wie dies §. 6 gelehrt.)

oder log. 80 = 1,9030900
Nach 2r Aufl. d. §. 124 ist log. $\frac{5}{8}$ = 0,7958800 — 1

log. $\frac{5}{8}$. 80 = 2,6989700 — 1
oder = 1,6989700 geh. zu 50.

Oder endlich, da $\frac{5}{8} \cdot 80 = \frac{5 \cdot 80}{8}$, ist auch folgende Rechnung zu empfehlen:

log. 80 = 1,9030900
log. 5 = 0,6989700
decadische Ergänzung d. log. 8 = 9,0969100

$$\log. \frac{5 \cdot 80}{8} = 1{,}6989700 \text{ geh. zu } 50.$$

§. 126. Man hätte auch den Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch verwandeln und dazu den Logarithmen aufsuchen können.

$\frac{5}{8} = 0{,}625$, dessen log. $= 0{,}7958800 - 1$.

wobei zu merken, daß die Kennziffer einer Zahl, welche kleiner, als 1, ist, kleiner als Null, d. h. negativ werden muß.

So ist log 625 $= 2{,}7958800$
$- 6{,}25 = 0{,}7958800$
$- 0{,}625 = 0{,}7958800 - 1$
$- 0{,}0625 = 0{,}7958800 - 2$
u. s. w.

Die Kennziffer des Logarithmen eines Decimalbruchs ist allemal Null; und hinter dem Logarithmen stehen so viel Einheiten mit dem Minuszeichen, als der Decimalbruch überhaupt linker Hand Nullen hat. Der log. von 0,000625 $= 0{,}7958800 - 4$.

Bekommt aber ein Bruch durch die Verwandlung in einen Decimalbruch zu viele Decimalstellen, oder bleibt er unvollständig, so ist es genauer und sicherer, den gemeinen Bruch beizubehalten, und log. $\frac{a}{b}$ zu schreiben: log. a — log. b, wie §. 124. gewiesen worden ist.

§. 127. Hat ein Decimalbruch Ganze bei sich, so richtet sich die Kennziffer bloß nach den Ganzen. So ist log. 62,5 $= 1{,}7958800$, und wenn man daher zu einer Zahl mit einem Decimalbruch, oder zum bloßen Decimalbruch den Logarithmen sucht, so bekümmert man sich um das Komma nicht, nimmt die Zahl für Ganze, und ordnet endlich die Kennziffer nach den wirklichen Ganzen.

§. 128. Die Erhebung einer Zahl zur verlangten Potenz. Z. B. log. $275^3 = 3$ log. 275.

log. 275 $= 2{,}4393327$
log. $275^3 = 7{,}3179981$ (3 mal

wozu die Zahl 20796875 gehört, welche der Kubus ist.

§. 129. Die Wurzel aus einer gegebenen Zahl z. B. $\sqrt[5]{2000}$ findet man

log. 2000 $= 3{,}3010300$
dividirt durch 5)
log. $\sqrt[5]{2000} = 0{,}6602060$

wozu die Zahl 457305 gehört. Da aber aus der Kennziffer

ziffer o hervorgeht, daß die Wurzel zwischen 1 und 10 liegt, so ist sie nur = 4,57305.

§. 130. Die Wurzel aus einer Zahl, deren Logarithmus zum Theil positiv, zum Theil negativ ist, zu ziehen, richte man seine Kennziffer so ein, daß der Divisor in dem negativen Theil aufgeht.

$$\text{Z. B. log. } \sqrt[5]{\frac{3475}{8946}} = \text{log. } \frac{0{,}5893258 - 1}{5}$$

$$= \text{log. } \frac{4{,}5893258 - 5}{5} = 0{,}9178651 - 1.$$

Die Wurzel wird zwischen o und 1 liegen, also ein Bruch seyn. In den Tafeln findet man dazu die Zahl 827685, welche = 0,827685 zu lesen, und $\sqrt[5]{\frac{3475}{8946}}$ ist.

§. 131. Den Exponenten einer gegebenen Potenz findet man, wenn man den Logarithmen der Potenz durch den Logarithmen der Wurzel dividirt, wobei man die 2 oder 3 niedrigsten Stellen der Mantisse weglassen kann. Z. B. die Zahl 61 sey in eine gewisse Potenz erhoben, welche = 2476099 ist. Welches ist ihr Exponent?

$$\frac{\text{log. } 2476099}{\text{log. } 19} = \frac{6{,}39376}{1{,}27875} = 5 = \text{Exponenten, also ist}$$

$19^5 = 2476099.$

§. 132. Zu einem gegebenen ganz negativen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden.

1ste Aufl. Suche zur decadischen Ergänzung des Logarithmen die Zahl.

Z. B. zum log. $= 0{,}2041200$ gehört die
decadische Erg. $= 9{,}7958800 - 10$
$= 0{,}7958800 - 1$, wozu 0,625 geh.

2te Aufl. Sieh den gegebenen log. als positiv an, und suche dazu die Zahl, welche der Nenner eines Bruchs ist, dessen Zähler = 1, Z. B. log. $-0{,}2041200$ gehört, positiv genommen, zu 1,6; folglich ist die

$$\text{Zahl} = \frac{1}{1{,}6} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

§. 133. Die nähere Anweisung zum Gebrauch logarithmischer Tafeln ist solchen Werken immer beigefügt; daher beschließen wir diesen Abschnitt.

VI. Von den Gleichungen.

§. 134. Eine Gleichung ist ein doppelter Ausdruck für eine und dieselbe Größe. Zwischen beiden Ausdrücken steht das Gleichheitszeichen, Z. B.

$$3 + 2 = 5$$
$$10 - 8 = 2$$
$$12 = 2 \,.\, 6$$
$$3 \,.\, 9 = 24 + 3$$
$$\frac{15}{5} = \frac{6 \,.\, 2}{4} \text{ u. s. w.}$$

sind 5 Gleichungen, in denen das Wesentlichste darin besteht, daß auf jeder Seite gleiche Größen stehen. Denn $\frac{15}{5} = 3$, und $\frac{6 \,.\, 2}{4}$ auch $= 3$.

Ein solcher doppelter Ausdruck einerlei Größe bleibt daher immer eine Gleichung, wenn man auf jeder Seite gleichviel zulegt oder wegnimmt, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, sie zu gleichen Potenzen erhebt, oder beiderseits einerlei Wurzel auszieht.

Wenn $3 + 2 = 5$ eine Gleichung ist, so ist es auch
$3 + 2 + 1 = 5 + 1$, denn auf jeder Seite ist $= 6$.

§. 135. Die Mathematiker unterscheiden Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade, je nachdem die darin vorkommende unbekannte Größe in der ersten, 2ten, 3ten oder 4ten Potenz erscheint.

§. 136. Das Verfahren, die unbekannte Größe in einer Gleichung so abzusondern, daß sie auf der einen Seite allein ist, und auf der andern lauter bekannte Größen, die ihr gleich sind, zu stehen kommen, gründet sich auf die allereinfachsten Regeln der Vernunft, und ist un-

ter

ter dem Namen: Auflösung der Gleichungen bekannt.

Man muß bei diesem Geschäft stets dahin sehen, auf jeder Seite gleich große Werthe zu erhalten, weil es sonst keine Gleichung mehr bleiben würde.

Von der Seite, wo sich die unbekannte Größe befindet, schaffe man nach und nach alle bekannten Größen weg, und bringe sie auf die andere Seite, welches dadurch geschieht, daß man sie auf der einen Seite auslöscht und sie mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite setzt.

So oft man eine Veränderung der Art damit vorgenommen hat, mache man unter die ganze Gleichung einen Strich, wodurch die Übersicht erleichtert wird.

Kömmt die unbekannte Größe auf beiden Seiten vor, so bringe man sie (die gewöhnlich x, y oder z genannt wird) auf einerlei Seite, und sondere sie gehörig ab.

§. 137. Diese vorläufigen Regeln sind einstweilen hinlänglich. An Beispielen wollen wir sie und manche andere näher entwickeln.

1. Es sey $x+3=5$ eine Gleichung,

so ist $x = 5-3$, wo die 3 mit entgegengesetztem Zeichen auf die andere Seite gebracht ist

und $x = 2$; denn $5-3=2$.

2. Es sey $x-2=8$ eine Gleichung;

so ist $x = 8+2$, wo die 2 auf der andern Seite + 2 wird.

also $x = 10$, denn $8+2$ macht 10.

3. Es sey $48 = x \cdot 2 + 24$

$48-24 = x \cdot 2$, wo + 24 auf der andern Seite — 24 geworden ist.

$24 = x \cdot 2$, denn $48-24$ ist 24

$\frac{24}{2} = x$, wo die multiplicirende 2 auf der andern Seite zum Divisor geworden ist.

$12 = x$, denn $\frac{24}{2} = 12$.

4. Es sey $\frac{x}{5} = 12 + 3$

$x = (12+3) \cdot 5$, wo der Divisor 5 auf der andern Seite multiplicirt.

$x = 15 \cdot 5$, wo die Größe $(12+3)$ in Eine verwandelt ist.

$x = 75$, denn 15 mal $5 = 75$.

§. 138. Auf diese Weise haben wir den Werth von x in Zahlen gefunden, welches der Zweck der Rechnung ist. Mit Buchstabenausdrücken werden wir eben so verfahren, und die bekannten Größen a, b, c, d von den unbekannten absondern müssen.

1. Es sey $a + x - c = b$

$a + x = b + c$, wo c herübergebracht ist.

$x = b + c - a$, wo a herübergebracht ist.

2. Es sey $a \cdot x + b = c$

$ax = c - b$

$x = \frac{c-b}{a}$

3. Es sey $\frac{b}{x} + d = a$

$\frac{b}{x} = a - d$

$b = (a-d) \cdot x$, wo x herübergebr. ist.

$\frac{b}{a-d} = x$, wo a — d fortgeschafft ist.

Die Nenner der Brüche, die in den Gleichungen vorkommen, schafft man dadurch weg, daß man alle Glieder der ganzen Gleichung mit denselben multiplicirt. (Glieder heißen alle Größen, die das Additions- oder Subtractionszeichen haben. Größen, welche durch die Multiplication oder Division mit einander verbunden sind, gelten nur für 1 Glied; daher ist jede Größe ax oder $\frac{x}{c}$,

desgleichen jede in eine Klammer eingeschlossene Größe nur als 1 Glied anzusehen. Z. B. $\frac{3x-7}{8}$ oder $(a-b).c$ wird nur für 1 Glied gelten können).

Es sey $\frac{5x+3}{x-1} = 7$

$(.x-1)$ multiplicirt.

$5x+3 = 7x-7$ die bekannten Größen auf die eine, und die unbek. auf die andere Seite gebr.

$+3+7 = 7x-5x$

$10 = 2x$

$\frac{10}{2} = x$

$5 = x$

Es sey $\frac{x}{3} + \frac{a}{3} - \frac{bd}{4} = c$. Die Nenner nach einander weggeschafft.

$(.3$

$x + a - \frac{3bd}{4} = 3c$

$(.4$

$4x + 4a - 3bd = 12c$

$4x + 4a = 12c + 3bd$

$4x = 12c + 3bd - 4a$

$x = \frac{12c + 3bd - 4a}{4}$ wenn wirkl.

$x = 3c + \frac{3}{4}bd - a$ mit 4 dividirt wird.

§. 139. Wenn eine Größe in mehrern Gliedern auf einer Seite als ein gemeinschaftlicher Factor erscheint, so setzt man die durch ihn multiplicirten Größen in eine Klammer, und hinter diese den gemeinschaftlichen Factor. Umgekehrt schafft man die Klammer dadurch wieder weg, daß man jedes Glied in derselben mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

Es

Es sey $\frac{-ax+b}{x-c} = gd - f$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(.\,x-c$$

$$-ax+b = gdx - fx - gdc + cf$$

$$b = gdx + ax - fx - gdc + cf$$

ie ax herüber gebracht.

$$b + gdc - cf = gdx + ax - fx$$

$$b + gdc - cf = (gd + a - f).x$$

$$\frac{b + gdc - cf}{gd + a - f} = x$$

Hier ist x gemeinschaftlicher Factor von 3 Größen, die in die Klammer gesetzt werden. Und nun die bekannten Größen in der () weggebracht.

welcher Ausdruck sich auch so schreiben ließe: $\frac{b + (gd - f)c}{gd + a - f}$

denn c ist in 2 Gliedern gemeinschaftlicher Factor.

§. 140. Jede Proportion ist eine Gleichung. Nach den Regeln der Gleichungen behandelt, findet sich jedes der 4 Glieder sehr leicht.

Es sey $a : b = c : d$ eine Proportion, so ist nach §. 78.

$ad = bc$ eine Gleichung, in der sich jedes Glied durch Absonderung finden läßt.

denn $a = \frac{bc}{d}$ desgleichen $\frac{ad}{c} = b$

und $d = \frac{bc}{a}$ und $\frac{ad}{b} = c$

§. 141. Jedes Formular für irgend eine Größe ist eine Gleichung, welche auf der einen Seite das Formular, auf der andern die Größe enthält. Durch Absonderung läßt sich ein neuer Ausdruck für jede im Formular vorkommende Größe finden. Daher ist die Auflösung der Gleichungen eine dem Mathematiker unentbehrliche Rechnungsart.

§. 142. Oft kommen in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen vor. Dann muß man aus der

der Aufgabe eben so viel Gleichungen zu ziehen wissen, als unbekannte Größen darinnen sind, wenn eine bestimmte Antwort möglich seyn soll.

Z. B. Die Summe zweier Zahlen x und y beträgt 40; ihr Unterschied 8. Welches sind die Zahlen?

Die beiden Gleichungen sind: $x + y = 40$
ihr Unterschied $x - y = 8$

Eine von den mancherlei Auflösungen, die man kennt, ist folgende überall anwendbare:

Suche aus jeder Gleichung einen Werth für x. Die beiden Werthe von x müssen sich nothwendig selbst gleich seyn, weil $x = x$, und eine neue Gleichung geben, in der nur Eine unbekannte Größe, nämlich y, ist, die sich dann leicht bestimmen läßt.

1ste Gleich. $x + y = 40$ 2te Gleich. $x - y = 8$

Also $x = 40 - y$ Also $x = 8 + y$

neue Gleichung ist $40 - y = 8 + y$

$40 - 8 = y + y = 2y$

$32 = 2y$

$16 = y$

Setzt man den Werth von $y = 16$ in die 1ste Gleichung, so ist

$x + y = 40$

$= x + 16 = 40$

$x = 40 - 16$

$x = 24$

Folglich sind die beiden Zahlen $y = 16$, und $x = 24$ gefunden.

Eine bequeme Auflösungsweise, wenn die unbekannten Größen verschiedene Coëfficienten haben, ist auch folgende:

Multiplicire die erste Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der zweiten Gleichung hat, und die zweite Gleichung mit dem Coëfficienten, den x in der ersten hat. Hernach addire oder subtrahire beide Gleichungen, so verschwindet x, und es bleibt nur

Eine

Eine unbekannte Größe darin, nämlich y, deren Werth man dann findet. Z. B. Man sucht 2 Zahlen von folgender Beschaffenheit: das Vierfache der ersten zum Fünffachen der zweiten addirt, macht 23; das Siebenfache der ersten mit dem Zweifachen der andern macht 20. In Zeichen ist dies

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 23 \\ 7x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{ Hauptgleichungen.}$$

Multiplicirt man die erste mit 7, die zweite mit 4, so kommt

$$\begin{array}{rl} 28x + 35y = & 161 \\ 28 \quad + \quad 8y = & 80 \text{ subtrahirt} \\ \hline \text{Rest} = 27y = & 81 \text{ neue Gleichung.} \end{array}$$

$$y = \tfrac{81}{27} = 3.$$

Setzt man nun den Werth von $y = 3$ anstatt y in eine der Hauptgleichungen, so ergiebt sich x.

$$\begin{array}{rl} 4x + 5 \,.\, 3 = & 23 \\ \hline 4x + \quad 15 = & 23 \\ \hline 4x \qquad = & 23 - 15 \\ \hline x \qquad = & \tfrac{8}{4} = 2. \end{array}$$

Hätte man mit den Coëfficienten von y in den Hauptgleichungen dieselben multiplicirt, so wäre y daraus verschwunden, und x in der neuen Gleichung gefunden worden.

§. 143. Wenn 3 unbekannte Größen x, y, z in einer Gleichung vorkommen, so suche man den allgemeinen Werth der einen z. B. x aus der ersten Hauptgleichung, und versetze ihn in die zweite, worin x vorkommt. Dadurch wird x verschwinden. Mit den beiden Größen y und z, die jetzt nur noch da sind, verfahre man, wie im vorigen §. 142.

Z. B. Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die Summe der ersten und zweiten, also $x + y = 23$; der ersten und dritten $x + z = 24$; und der zweiten und dritten, $y + z = 25$ macht.

$x + y = 23$
$x + z = 24$ Hauptgleichungen.
$y + z = 25$

Aus der ersten ist $x = 23 - y$. Durch Versetzung dieses Werthes in die zweite Hauptgleichung wird

$23 - y + z = 24$; es ist aber $y + z = 25$

$z - y = 24 - 23$ und $z = 25 - y$

$z = 1 + y$

Die beiden Werthe von z müssen sich gleich seyn, daher

$1 + y = 25 - y$

$y + y = 25 - 1$

$2y = 24$

Also $y = 12$

Nun ist in d. ersten Hauptgleich. $x + y = 23$

also $x + 12 = 23$

$x = 23 - 12 = 11$

Und in der 2ten Hauptgleichung war $x + z = 24$

also $11 + z = 24$

$z = 24 - 11$

$z = 13$

folglich sind die Werthe von x, y und z gefunden worden, nämlich $x = 11$; $y = 12$; $z = 13$.

§. 144. Können aus einer Aufgabe nicht so viel Hauptgleichungen gezogen werden, als unbekannte Größen darin vorkommen, so bleibt die Auflösung zum Theil unbestimmt oder willkührlich. Z. B.

Das Sechsfache einer Zahl soll dem Quadrat einer andern gleich seyn. Wenn x und y diese Zahlen sind, so soll $6x = y^2 = yy$

und $x = \frac{y^2}{6}$

Man setze nun anstatt y welche Zahl man will, so wird immer die Frage beantwortet. Es sey $y = 4$, so ist

y^2

$\frac{y^2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} = x$. Wenn $y = 5$; so ist $\frac{y^2}{6} = \frac{25}{6}$ $= 4\frac{1}{6} = x$. In jedem Falle wird nur das Verhältniß $x : y$ gefunden.

§. 145. Zur Übung im Anordnen und Auflösen der Gleichungen wollen wir einige Aufgaben lösen. (Siehe M. Hirsch Sammlung von Beispielen und Aufgaben ..... S. 139.)

1) Jemand hat 2640 Rthlr. und darunter $4\frac{1}{2}$ mal so viel Münze als Courant. Wie viel hatte er von jeder Sorte?

Aufl. Nenne das Courant x
dann ist die Münze $= 4\frac{1}{2}x$

und die Summe $= 5\frac{1}{2}x = \frac{11x}{2} = 2640$ rthl.

$11x = 5280$ (2

$x = \frac{5280}{11}$.

Courant $= x = 480$ rthl.
und die Münze $= 4\frac{1}{2} \cdot 480 = 2160$ rthl.

2) Ich multiplicire eine gewisse Zahl (x) mit 4, und dividire das Product durch 3; da erhielt ich 24. Welche Zahl ist es?

$\frac{4x}{3} = 24$

$4x = 72$ (3

$x = 18$ war die Zahl.

3) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte A, B, C ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B, wie 3 : 5; die Volksmenge von B zu der von C sich wie 8 : 7 verhält, wie viel Mann muß jede Stadt stellen?

Aufl. Reducire das Verhältniß B : C auf das von A : B und sprich

A : B = 3 : 5
ferner B : C = 8 : 7
d. ist 5 : C = 8 : 7

Also ist $5 \cdot 7 = 8\,C = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} = C$.

Nun hat A $3x$
B $5x$
C $4\frac{3}{8}x$

Summe $12\frac{3}{8}x$ oder $\frac{99x}{8} = 594$ Mann

$99x = 4752$ (8

$$x = \frac{4752}{99} = 48 \text{ Mann.}$$

Aber A giebt $3x$, oder $3 \cdot 48 = 144$ Mann
B — $5x$ — $5 \cdot 48 = 240$ —
C — $4\frac{3}{8}x$ — $4\frac{3}{8} \cdot 48 = 210$ —

Summa 594 Mann.

4) Unter 3 Personen A, B, C sollen 1170 Rthlr. nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt, als A. Wie viel erhält jede Person?

Aufl. Das Alter von A = x
dann ist B = $x + \frac{1}{3}x$
und C = $2x$
Summe = $4\frac{1}{3}x$

$4\frac{1}{3}x = 1170$ Rthlr.

$\frac{13x}{3} = 1170$

$13x = 3510$ (3

$$x = \frac{3510}{13} = 270 \text{ Rthlr.} = A,$$

und $270 + \frac{270}{3} = 270 + 90 = 360 = B.$
und $2 \cdot 270 = 540 = C.$

Summe = 1170 Rthlr.

5) Die Garnison einer Stadt besteht aus 1250 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Jeder Cavallerist bekommt monatlich 5, und jeder Infanterist 3 Rthlr. Wenn nun der monatliche Sold 4150 Rthlr. beträgt, wie viel Cavalleristen und Infanteristen befinden sich darunter?

Aufl. Es sey die Infanterie $= x$; also ihr Sold $= 3x$
und die Cavallerie $= y$; und ihr Sold $= 5y$

Nach der Aufg. ist $x + y = 1250$; u. $3x + 5y = 4150$ rthl.

der Werth von $x = 1250 - y$; so wie $x = \frac{4150 - 5y}{3}$

Folglich ist auch $1250 - y = \frac{4150 - 5y}{3}$

$3750 - 3y = 4150 - 5y$ | 3

$5y - 3y = 4150 - 3750$

$2y = 400$

$y = 200$ Mann Cavall.

Und $x + y = 1250$ Mann
d. h. $x + 200 = 1250$

$x = 1250 - 200 = 1050$ Mann Infanterie.
(Vergl. §. 142.)

6) Es sollen 3 Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite, durch die erste dividirt, 2 zum Quotienten und 1 für den Rest; hingegen die dritte durch die zweite dividirt 3 zum Quotienten und 3 für den Rest gebe; die Summe dieser 3 Zahlen soll 70 seyn. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Wenn die 3 Zahlen x, y, z heißen, so soll

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y-1}{x} = 2 \\ \text{und } \frac{z-3}{y} = 3 \\ \text{und } x+y+z = 70 \end{array}\right\} \text{Hauptgleichung.}$$

Aus

Aus der ersten ist $y = 2x + 1$

Diesen Werth in die zweite Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{z - 3}{2x + 1} = 3$$

$$z - 3 = 6x + 3 \quad (2x + 1$$

$$z = 6x + 6$$

Jetzt sind die Werthe von y und z in lauter x gefunden; da nun $x + y + z = 70$, so muß $x = x$

$y = 2x + 1$

$z = 6x + 6$

Also $70 = 9x + 7$

$70 - 7 = 9x$

$\frac{63}{9} = x$

$7 = x$

folglich $2x + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 = y$

und $6x + 6 = 6 \cdot 7 + 6 = 48 = z$.

7) Ich bin jetzt 30, mein Bruder 20 Jahre alt, und folglich ist 3 : 2 das Verhältniß unsers Alters. Nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß 5 : 4 seyn?

Aufl. Nenne die gesuchten Jahre x, so soll sich verhalten

$x + 30 : x + 20 = 5 : 4$; nach den Regeln der Proportion ist

$(x + 30) \cdot 4 = (x + 20) \cdot 5$

$4x + 120 = 5x + 100$

$120 - 100 = 5x - 4x$

$20 = x$, also nach 20 Jahren.

8) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs dreimal so viel Herren als Frauen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der beiden Geschlechter noch ungleicher; es blieben nämlich gar noch 5 mal so viel Herren als Frauen. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft im Anfange?

Aufl.

Aufl. Nenne die Zahl der Frauen x, so sind vor der Entfernung der 16 Personen x . 3 die Herren; nach ihrer Entfernung aber ist das Verhältniß

$$3x - 8 : x - 8 = 5 : 1$$

und $3x - 8 = (x - 8) . 5$

$$3x - 8 = 5x - 40$$

$40 - 8 = 5x - 3x$, d. h. $32 = 2x$, und $16 = x$ = Frauen, und $3 . 16 = 48$ Herren, in allem 64 Personen.

9) An einem vollen Weinfasse befinden sich 3 Spundlöcher von verschiedener Größe; durch das erste könnte der Wein in 2, durch das zweite in 3, und durch das dritte in 4 Stunden abgezapft werden. Wie viel Zeit wird zur Ausleerung erfordert, wenn alle 3 Spundlöcher zugleich geöffnet werden?

Aufl. Es heiße diese Zeit x Stunden, so läuft

12 Generalnenner.

das 1ste Spundloch	$\frac{x}{2}$	$6x$
2te —	$\frac{x}{3}$	$4x$
3te —	$\frac{x}{4}$	$3x$

Summe $= 13x$ in 12 Stunden

$x = \frac{12}{13}$ St. $= 55\frac{5}{13}$ Minuten.

Anmerk. Man schließe: Wenn das erste Spundloch allein läuft, so leert es das Faß in 12 Stunden 6 mal; das zweite aber nur 4 mal, und das dritte 3 mal; also 13 mal in 12 Stunden (wenn alle Löcher laufen), wie lange Zeit ist zu einem einmaligen Leeren erforderlich?

Allgemein heiße die Zeit des ersten Spundlochs a; des 2ten = b; des 3ten = c, so findet man die Zeit, in welcher alle 3 Löcher das Faß leeren, in allgemeinen Ausdrücken:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

abc

abc = Generalnenner.

$\frac{x}{a}$	bcx
$\frac{x}{b}$	acx
$\frac{x}{c}$	abx

Summe $(bc + ac + ab)\,x$

Gleichung.

$(bc + ac + ab)\,x = abc$

$$x = \frac{abc}{bc+ac+ab}$$

§. 146. Aus diesen 9 Beispielen geht hervor, daß es zum Anordnen der Gleichung öfters mancherlei Vorbereitungen bedarf, die in jedem besondern Falle der Beurtheilung und dem Scharfblick des Rechners überlassen bleiben; aber man wird auch mit Vergnügen bemerken, daß die Gleichungen ein weiteres Feld, als jede andere Rechnungsart, und eigentlich alle Rechnungsarten mit umfassen. Nach einigen Schriftstellern ist die Algebra eine Wissenschaft, eine unbekannte Größe durch Gleichungen zu finden.

§. 147. Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen heißen solche, in denen x oder die unbekannte Größe in der 2ten Potenz, x^2, ein oder etliche Mal vorkömmt. Man theilt sie in reine, und unreine quadratische Gleichungen.

Reine quadratische Gleichungen sind es, wenn x^2 nur allein auf einer Seite abgesondert bleibt. Z. B.

$$ax^2 = b$$

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

beiderseits $\sqrt{}$ ausgezogen.

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

wobei also die unbekannte Größe x abgesondert, und beiderseits die $\sqrt{}$ ausgezogen wird, um den Werth von x zu haben.

Unreine quadratische Gleichungen sind dies-

diejenigen, worin außer x^2 auch noch x mit einem bekannten Coëfficienten vorkommt; als $x^2 + 6x = 27$.

§. 148. Die Gleichung mag beschaffen seyn, wie sie will, so lassen sich ihre Glieder so ordnen, daß x^2 und x bekannte Coëfficienten bekommen, und die ganze Gleichung auf Null gebracht werden kann.

Z. B. $3x^2 + 6cx - x = x^2 + 5ax - c + dn$

Hier können alle Glieder auf eine Seite gebracht werden; auf die leere Seite schreibt man Null. Dann wird obige Gleichung

$$\frac{3x^2 - x^2 + 6cx - 5ax - x + c - dn = 0}{\text{geordnet: } 2x^2 + (6c - 5a - 1).x + c - dn = 0}$$ einfacher

Die bekannte Größe bei x^2 (die 2) wollen wir allgemein a; die bei x $(6c - 5a - 1)$, welche sich allemal in Eine Zahl verwandeln läßt, wollen wir $= b$; und endlich die bekannte Größe $(c - dn)$ hinter x wollen wir $= q$ nennen. Dann haben wir eine Gleichung, welche alle unreine quadratische Gleichungen allgemein vorstellt, a, b und q mögen Größen seyn, wie sie wollen.

$ax^2 + bx + q = 0$, oder $ax^2 - bx - q = 0$.

ax^2 muß stets das Pluszeichen haben, weil sonst $\sqrt{}$ unmöglich wäre; hat es im Verfolg der Rechnung etwa Minus bekommen, so bringe man es auf die andere Seite, wo es dann $+$ erhält. — Die Wurzel kann bekanntlich beide Zeichen haben.

§. 149. Ehe wir zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen schreiten, wollen wir noch einige Exempel von reinen quadratischen Gleichungen geben.

1) Man sucht eine Zahl, deren Hälfte mit ihrem vierten Theil multiplicirt, und alsdann von diesem Product 10 abgezogen, 152 zum letzten Facit giebt.

Aufl. Die Zahl sey x, so ist ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$,

und ihr Viertel $= \frac{x}{4}$, und nach der Bedingung

soll

$$\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4}\right) - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} = 152 + 10 = 162$$

$$x^2 = 1296 \quad (8$$

auf beid. Seit. $\sqrt{}$ ausgez. $x = \sqrt{1296}$

$x = 36$ = der gesuchten Zahl.

2) Es wird eine Zahl x von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man dieselbe erst zu 94 addirt $(x + 94)$, hernach auch von 94 subtrahirt $(94 - x)$, und diesen Rest mit jener Summe multiplicirt $(x+94) \cdot (94-x)$, das Product 8512 sey. Welche Zahl ist es?

$x + 94$
$94 - x$ multiplicirt

$-x^2 - 94x$
$8836 + 94x$

Product $= -x^2 + 8836$, welches $= 8512$ seyn soll.

$-x^2$ auf die and. Seite $8836 - 8512 = x^2$
gebr., dann, es $+x^2$ werde

$324 = x^2$

$\sqrt{324} = x$

gesuchte Zahl $= 18 = x$

3) Ein gewisses Capital (x) steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man das Capital mit den 5monatlichen Zinsen desselben, so erhält man $117041\frac{2}{3}$ rhl. Was für ein Capital ist es?

Aufl. Schließe: 100 Rthlr. : 4 Rtlr. $= x$ Rtlr. : $\frac{4x}{100}$ jährliche Zinsen;

und 12 Monat : $\frac{4x}{100} = 5$ Monat : $\frac{20x}{1200}$ Rthlr. 5 monatliche Zinsen; damit das Capital x multi-

plic

plicirt giebt $\frac{20xx}{1200}$ oder einfacher $= \frac{x^2}{60}$, welches $= 117041\frac{2}{3}$ seyn soll.

Gleichung $\frac{x^2}{60} = 117041\frac{2}{3}$

$x^2 = 7022500$ (60

$x = \sqrt{7022500}$

$x = 2650$ Rthlr. Capital.

4) Ein Cylinder ist 20 Zoll lang und faßt 1004,8 Kubikzoll; wie groß ist der Halbmesser ($= r$) seiner Grundfläche?

In der Körpermessung findet man für den Inhalt eines Cylinders das Formular: $r^2 p . h = J$, wobei r Radius, p die beständige Zahl 3,14; und h die Höhe oder Länge bedeutet. Folglich wird

$r^2 p . h = J =$ Inhalt

$= r^2 . 3,14 . 20 = 1004,8$

nun r^2 abgesond.

$r^2 = \frac{1004,8}{3,14 . 20} = \frac{1004,8}{62,8}$

$r^2 = 16$

r oder Halbmesser $= \sqrt{16} = 4$ Zoll.

§. 150. Jede unreine quadratische Gleichung muß sich so ordnen lassen, daß sie endlich folgende Gestalt hat:

$x^2 + px = c$, oder $x^2 - px = c$

wobei p und c bekannte Größen sind. Siehe §. 148.

Die Größe $x^2 + px$ ist aber kein vollständiges Quadrat, denn wenn man $a + b$ ins Quadrat erhebt, so bekommt man $a^2 + 2ab + b^2$; also fehlt auch an dem Quadrat in der Gleichung der dritte Theil, nämlich b^2, den man aus $a^2 + 2ab$ dadurch gefunden hätte, daß man das, was sich im zweiten Giede außer a befindet ($2b$), halbirte (b) und quadrirte (b^2) und hinzufügte, wodurch erst ein wirkliches Quadrat wird, nämlich

$a^2 + 2ab + b^2$

oder $a^2 + 2ba + b^2$

Die

Die 2b ist Coëfficient von a, und dasjenige, was in unserer Gleichung p ist. Daher können wir nun das unvollständige Quadrat $x^2 + px$ dadurch vollständig machen, daß wir den Coëfficienten von x, nämlich p, halbiren, quadriren und zu $x^2 + px$ addiren. Die Wurzel muß dann seyn $x + \frac{p}{2}$. Der halbirte und quadrirte Coëfficient p wird in der Gleichung auch auf der andern Seite, wo die bekannte Größe c steht, addirt werden müssen, wenn es eine Gleichung bleiben soll. Das Quadrat von $\frac{p}{2}$ ist $= \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$ oder $\frac{1}{4}p^2$, und die Gleichung sieht nun also aus:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$$

Die Wurzel auf der Seite, wo sich x^2 befindet, wissen wir, sie ist $= x + \frac{1}{2}p$, und da auf der andern lauter bekannte Größen sind, die sich in eine einzige bringen lassen, so wird man auch da die $\surd$ ausziehen können. Dann ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \surd\left(c + \frac{p^2}{4}\right)$$

folglich $$x = \surd\left(c + \frac{p^2}{4}\right) - \tfrac{1}{2}p$$

§. 151. Die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen ist daher in folgenden Regeln enthalten:

1. Ordne die Gleichung zur Form $x^2 + px = c$
oder $x^2 - px = c$.

2. Halbire p und quadrire es, so wird es $\frac{p^2}{4}$.

3. Addire dies $\frac{p^2}{4}$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}.$$

4. Ziehe auf beiden Seiten die Wurzel aus. Sie ist

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}.$$

4. Bringe die $\frac{1}{2}p$ mit verändertem Zeichen auf die andere Seite, so ist x abgesondert, und

$$x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2}p$$

Wenn die Gleichung folgende Gestalt hat

$x^2 - px = c$, so ist $\frac{p}{2} = -\frac{p}{2}$, u. $-\frac{p}{2} \cdot -\frac{p}{2} = +\frac{p^2}{4}$

folgl. $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = c + \frac{p^2}{4}$

und $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$ — die $\sqrt{}$ ausgezogen

endlich $x = \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{2}$

§. 152. Wir wollen nicht vergessen, daß jede Quadratwurzel sowol positiv als negativ genommen werden kann. Daher schreibt man auch beide Zeichen vor die Wurzel, und die Umstände bestimmen, welches Zeichen gelten soll.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$$

oder $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(c + \frac{p^2}{4}\right)}$

§. 153. Zur Übung wollen wir einige Aufgaben lösen.

1. Von zwei Zahlen ist die eine um 6 größer, als die andere; mit einander multiplicirt geben sie 27. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Es sey x die kleinere, und $x + 6$ die größere.

Nach

Nach der Bedingung soll $x \cdot (x+6) = 27$

d. Coëfficienten halbirt, gibt 3, $x^2 + 6x = 27$

u. $3^2 = 9$ auf beid. Seit. addirt $x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 = 36$

Wurzel ausgezogen $x + 3 = \sqrt{36} = 6$

$x = 6 - 3$

Da x zwei Werthe haben kann $x = +6 - 3 = +3$

und $x = -6 - 3 = -9$

die beiden Zahlen sind also 3 und 9, welche die verlangten Eigenschaften haben.

2. Wie groß ist x in folgender auf Null gebrachten Gleichung?

$x^2 - 7x + 3\frac{1}{4} = 0$

$x^2 - 7x = -3\frac{1}{4}$

$x^2 - 7x = -\frac{13}{4}$

$x^2 - 7x = -3{,}25$

$\frac{7}{2} = 3{,}5$, dessen Quadrat $= 12{,}25$ $x^2 - 7x + 12{,}25 = 12{,}25 - 3{,}25 = 9$

daraus die $\sqrt{\ } = x - 3.5 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = +3 + 3{,}5 = 6{,}5$

und $-3 + 3{,}5 = 0{,}5$

3. Ein Kaufmann hat zweierlei Thee von verschiedenem Gewicht und Preise. Das Gewicht der erstern Sorte verhält sich zum Gewicht der zweiten Sorte, wie 4 : 3. Das Pfund der erstern kostet halb so viel Groschen, als sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten kostet 6 Gr. weniger. Der Betrag des Thee's überhaupt ist 218 Rthlr. 8 Gr. Wie viel wiegt jede Sorte?

Aufl. Es sey die erste Sorte x ℔; die zweite $= y$ ℔; so ist x ℔ : y ℔ $= 4 : 3$

und $x = \frac{4y}{3}$; oder $y = \frac{3x}{4}$ (Siehe §. 140.)

der Preis der ersten Sorte $= \frac{x}{2}$, ihr ganzer

Werth

Werth $= x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Der Preis der zweiten Sorte $= \frac{x}{2} - 6$, ihr ganzer Werth $\left(\frac{x}{2} - 6\right) \cdot y$ oder $= \left(\frac{x}{2} - 6\right) \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4}$.

Die Summe beid. Werthe $= \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4} = 5240$ Gr.

$\frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{18x}{4} = 5240$ Gr. (·2

$x^2 + \frac{3x^2}{4} - 9x = 10480$ Gr. (·4

$4x^2 + 3x^2 - 36x = 41920$ (:7

$7x^2 - 36x = 41920$

$x^2 - 5{,}143x = 5988{,}57$

D. Qudr. v. $\frac{5{,}143}{2}$ add. $= x^2 - 5{,}143x + 6{,}612 = 5988{,}57$

$+ 6{,}612$

$= 5995{,}182$

aus beiden Seiten die $\sqrt{}$ gez. $x - 2{,}571 = 77{,}429$

$x = 77{,}429$

$+ 2{,}571$

$80{,}000 = 80$ ℔.

Da $x = 80$ ℔, so muß, wenn man den oben gefundnen Werth unterlegt, $y = \frac{3x}{4} = 60$ ℔ seyn.

4. Die Summe zweier Zahlen soll 41, und die Summe ihrer Quadrate soll 901 seyn. Was für Zahlen sind es?

Aufl. Die beiden Zahlen mögen x und y seyn, so ist

$x + y = 41$, also $x = 41 - y$

und $x^2 + y^2 = 901$, also $x^2 = 901 - y^2$.

Um

Um für x gleiche Werthe zu bekommen, erhebe man $x = 41 - y$ ins Quadrat. $(41-y).(41-y) = y^2 - 82y + 1681 = x^2$.

Nun ist $y^2 - 82y + 1681 = 901 - y^2$ besser geordnet.

$2y^2 - 82y = 901 - 1681$

$2y^2 - 82y = -780$ (:2

gehör. Form $y^2 - 41y = -390$.

$\frac{41^2}{4}$ addirt $y^2 - 41y + 420{,}25 = -390 + 420{,}25$

$\sqrt{}$ ausgez. $y - 20{,}5 = \sqrt{30{,}25}$

$y - 20{,}5 = 5{,}5$

$y = 5{,}5 + 20{,}5 = 26$, der einen Zahl.

Aber $x + y = 41$

und $x + 26 = 41$

$x = 41 - 26 = 15$, der and. gesucht. Zahl.

§. 154. Am meisten macht die Anordnung der Gleichung dem Anfänger zu schaffen; indessen erlangt er durch eigene Versuche und Nachdenken bald eine Fertigkeit, die ihm das größte Vergnügen gewährt. Dem Wißbegierigen empfehlen wir

M. Hirsch Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Dieses treffliche Werkchen enthält fast nur Aufgaben und Antworten, ohne Ausrechnung. Viele der hier mitgetheilten Aufgaben sind daraus entlehnt, und nur die Ausrechnungen, worauf es hier hauptsächlich ankam, von mir hinzugefügt.

§. 155. Eine Gleichung, worin die gesuchte Größe endlich in der dritten Potenz erscheint, als x^3, heißt eine kubische Gleichung. Z. B.

$$x^3 + ax^2 + bx = c; \text{ oder } \frac{x^3 p}{6} = c.$$

Wenn

Wenn die x^3 nur allein darin vorkommt, so heißt die Gleichung eine reine kubische Gleichung, als $\frac{x^3 p}{6} = c$; unrein oder vollständig heißt sie, wenn x auch noch in der zweiten und ersten Potenz mit einer bekannten Größe darin vorkommt, als $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$.

§. 156. Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung besteht darin: Sondere x^3 auf einer Seite ab, bringe alle bekannte Größen auf die andere Seite, verwandle sie in Eine, und ziehe auf beiden Seiten die $\sqrt[3]{}$ aus, so erhält man x und seinen Werth. Die Wurzel kann eine Plus- oder Minusgröße seyn, aber niemals beide Zeichen zugleich haben, wie die quadratische Wurzel.

1. Es sey $\frac{x^3 p}{6} = c$

$x^3 p = 6c$ (.6

$x^3 = \frac{6c}{p}$

$\sqrt[3]{\quad}$

$x = \sqrt[3]{\frac{6c}{p}}$

2. Einer sprach: ich multiplicirte eine Zahl (x) mit dem halben Quadrate derselben $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ und erhielt die Zahl 256. Welche Zahl war es?

Aufl. Nach der Aufgabe ist $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$.

Gleichung $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$

$\frac{x^3}{2} = 256$

$x^3 = 512$ (2

$\sqrt[3]{\quad}$

$x = \sqrt[3]{512}$

$x = 8$

3. Aus

3. Aus dem Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden.

Es sey der Inhalt = J = 1000; der Durchmesser = D.

Die Geometrie giebt für den Inhalt der Kugel das Formular:

$\frac{D^3 p}{6} = J$, worin $p = 3{,}14$ bedeutet.

$D^3 p = 6J$ (.6

$D^3 = \frac{6J}{p}$

$D = \sqrt[3]{\frac{6J}{p}}$ das ist $\sqrt[3]{\left(\frac{6.1000}{3{,}14}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6000}{3{,}14}}$

$= 12{,}41$.

§. 157. Mehr Schwierigkeiten hat die Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen, worin x^3, x^2 und x vorkommt.

Man ordne die Gleichung so einfach wie möglich, schaffe alle Glieder auf die eine Seite, und setze auf die andere Null.

Jede vollständige kubische Gleichung hat 3 Wurzeln, die zum Theil positiv, zum Theil negativ seyn können. Alle drei Wurzeln heißen x, folglich hat x einen dreifachen Werth.

Ob die Wurzeln positiv, oder negativ sind, sieht man vorläufig an den 4 Gliedern einer auf Null gebrachten kubischen Gleichung durch folgende Kennzeichen:

1. Wenn alle Glieder der auf Null gebrachten Gleichung positiv sind, so sind alle Wurzeln negativ.
2. Wenn die Zeichen wechseln, so sind alle Wurzeln positiv.
3. Wenn mehrere gleiche Zeichen der Glieder auf einander folgen, so sind auch mehrere negative Wurzeln darin.

§. 158. Das 4te oder letzte Glied einer auf Null gebrachten Gleichung ist das Product aus allen 3 Wurzeln. Auf diesen Umstand gründet sich die Auflösung der kubischen Gleichungen.

Man

Man zerfälle nämlich das letzte Glied in seine Factoren, setze sie positiv oder negativ, je nachdem es aus den Zeichen ersichtlich ist, und einen nach dem andern anstatt x in die Gleichung. Wenn sie dadurch Null wird, so ist der für x gesetzte Factor eine Wurzel. Geschieht es bei keinem, so ist keine rationale Wurzel darin. Wenn man aber erst eine Wurzel hat, so lassen sich die andern dadurch finden, daß man die Gleichung mit der Wurzel dividirt. Man erhält im Quotienten eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man die andern beiden Wurzeln findet. Aus der Natur der Aufgabe ergiebt sich, ob eine, oder alle drei Wurzeln möglich sind.

§. 159. Das Gesagte wollen wir an 2 Beispielen erläutern.

1. Ein Kapitalist giebt 10000 Rthlr. auf Zinsen, und schlägt die Zinsen jährlich zum Kapital. Am Ende des dritten Jahres findet er sein Kapital $1157\frac{1}{4}$ Rthlr. angewachsen. Wie viel Procent Zinsen nahm er jährlich?

Auflösung. Nenne die Zinsen x, so findet man dieselben fürs 1ste Jahr durch die Proportion:

$100 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.} = 10000 \text{ Rthlr.} : \frac{10000x}{100} = 100x$ Zinsen.

Kapital und Zinsen betragen nach 1 Jahr $= 100x + 10000$ Rthlr.

Ferner $100 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.} = 100x + 10000 \text{ Rthlr.} : \frac{100x^2 + 10000x}{100} = x^2 + 100x$ Zinsen des 2ten Jahres.

Kapital und Zinsen am Ende des 1sten Jahres waren $= 100x + 10000$ Rthlr.

Zinsen des 2ten Jahres $= x^2 + 100x$

Kapit. u. Zins. n. 2 Jahren $= x^2 + 200x + 10000$ Rthlr.

Ferner

$100 \text{ lr.} : x \text{ rl.} = x^2 + 200x + 10000 \text{ rl.} : \frac{x^3 + 200x^2 + 10000x}{100}$

$= \frac{x^3}{100} + 2x^2 + 100x$ Zinsen des 3ten Jahres.

$x^2 + 200x + 10000$ rl. Kapital dazu

$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000$ rl. ganzes Kapital, wel-

ches nach der Aufgabe $= 11576\frac{1}{4}$ Rthlr. werth seyn soll. Das giebt die Gleichung

$$\frac{x^3}{100} + 3x^2 + 300x + 10000\text{rl.} = 11576\tfrac{1}{4}\text{rl.}$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x + 1000000 = 1157625 \quad (.100$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x = 1157625 - 1000000 = 157625$$

$$x^3 + 300x^2 + 30000x - 157625 = 0$$

Die Zahl 157625 ist nur durch 5 theilbar, daher muß 5 eine Wurzel seyn. Setzt man nun 5 anstatt x, so ist

$x^3 = 125$
$300x^2 = 7500$
$30000x = 150000$

Summe $= 157625$
davon ab 157625

die Gleichung wird $= 0$, also ist $x = 5$, und das Kapital zu 5 Procent ausgeliehen worden. —

2. Es sey die Gleichung aus folgenden Angaben zu ordnen: zum Kubus einer Zahl wurde das vierfache Quadrat derselben addirt und die vierfache Zahl selbst subtrahirt; der Rest betrug 16. Welche Zahl war es:

Aufl. Nenne die Zahl x, so ist der Kubus $= x^3$; das vierfache Quadrat $= 4x^2$; die vierfache Zahl $= 4x$. Die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 - 4x = 16$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0.$$

Da hier eine Folge gleicher Zeichen und eine Abwechselung statt findet, so werden die meisten Wurzeln negativ, und eine positiv seyn. Nun läßt sich 16 zerlegen in . . . . . | 2, 4, 8, 16, 1

Wir wollen, da 2 negative Wurzeln sind, die 2 negativ, also -2 anstatt x setzen.

Dann ist $x^3 = -2^3 = -8$
$4x^2 = 4 \cdot 2^2 = +16$
$-4x = -4 \cdot -2 = +8$
$-16 = -16$

Summe $= 0$. Die -2 ist also eine Wurzel.

Nimmt

Nimmt man $x = -4$, so wird die Gleichung ebenfalls Null; allein nimmt man $x = 8$, so bleibt endlich -240. Daher wollen wir die ganze Gleichung mit der auf Null gebrachten Wurzel dividiren. Wenn $x = -2$, so ist $x + 2 = 0$.

Quotient.

$$x + 2 : x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \,||\, x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^3 + 2x^2$$

$$2x^2 - 4x - 16$$

$$2x^2 + 4x$$

$$-8x - 16$$

$$-8x - 16$$

In dem Quotienten, welcher eine quadratische Gleichung ist, hat x die andern beiden Wurzelwerthe. Wir lösen sie auf.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$\frac{2}{2}' = 1$ quadrirt. $\quad x^2 + 2x + 1 = 8 + 1 = 9$

$\sqrt{}$ ausgezogen $\quad x + 1 = \sqrt{9} = 3$

$$x = +3 - 1 \text{ d. h. } = +2 \text{ und } -4.$$

Die 3 Wurzeln sind demnach -2, $+2$ und -4.

§. 160. Wir übergehen die mannichfachen Kunstgriffe, deren man sich bedient, die vollständigen kubischen Gleichungen zu lösen, wenn die Wurzeln irrational sind, und durch Näherung gefunden werden müssen, da sie in diesem Buche nicht vorkommen, und verweisen den Wißbegierigen auf

Burja's selbstlernenden Algebraisten ꝛc. und

Häseler's Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, welche schätzbare Werke dieses Thema sehr faßlich abhandeln.

VII. Beschreibung und Erklärung geometrischer Linien, Figuren und Lehrsätze.

§. 161. Jedes Ding, das eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe hat, heißt ein Körper. Der Körper wird von seiner ganzen Oberfläche eingeschlossen, welche mithin die Grenze des Raums ist, den der Körper ausfüllt. Die Grenze einer Fläche ist eine Linie, welche, wie jene, gerade oder krumm seyn kann, jenachdem sie einerlei Richtung behält, oder nicht. Das Ende einer Linie ist ein Punct. Folglich kann der Punct weder breit, noch lang, noch dick seyn. Eine Linie kann lang, aber weder breit noch dick; und eine Fläche zwar lang und breit, aber nicht dick seyn.

Anmerk. In der Ausübung begnügt man sich, Puncte und Linien so zart und fein als möglich zu machen; und auf die höchste mathematische Genauigkeit Verzicht zu leisten, weil sie alsdann nicht sinnliche Darstellungen seyn würden, welche man durch Zeichnungen doch bezweckt.

§. 162. Wenn zwei gerade Linien ab und fd Fig. 1. einander durchschneiden, so geschieht dies nur in einem einzigen Puncte c, denn Linien haben keine Breite.

Die Neigung der sich durchschneidenden Linien heißt der Winkel, und die Linien selbst, in sofern sie den Winkel bestimmen, werden Schenkel genannt, bei denen es nicht auf die Länge, sondern nur auf die Neigung, die bei gleicher Länge sehr verschieden seyn kann, ankommt. So ist z. B. n ein Winkel, dessen Schenkel cb und cd sind; m ist ein eben so großer Winkel mit kürzern Schenkeln ac und fc. Der Kürze wegen schreibt man oft Winkel mit dem Zeichen $<$, und nennt den Winkel entweder mit 3 Buchstaben, die an seinen Schenkeln und seinem Scheitel stehen, als $<$ bcd, wobei der Buchstabe am Scheitel allemal der mittlere seyn muß, oder mit einem einzigen Buchstaben, der am Scheitel oder zwischen den Schenkeln steht. Hier ist $<$ n $=<$ bcd, und $<$ m $=<$ fca genannt.

Die Linie df könnte auch eine andere Neigung zu ab haben, wobei die Winkel n und m größer, oder kleiner wür-

würden. Man denke sich fd um den Punct c beweglich, so könnte sie z. B. auch in die Richtung der punctirten Linie hi, und in alle mögliche andere Richtungen gebracht werden. In der Lage hi würde < ach eben so groß seyn, als < hcb, und die Linie hi die ab senkrecht durchschneiden.

§. 163. Wenn zwei gerade Linien ab und df Fig. 2. einander senkrecht durchschneiden, so bilden sie an dem Durchschnittspuncte c vier gleichgroße Winkel, wo von jeder ein rechter Winkel heißt. So sind g, h, i, k rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Man bringe die df in die Lage hi Fig. 3., so sind die Winkel h und i um eben so viel größer geworden, als die Winkel g und k abgenommen haben. Was h und i gewinnen, verlieren die andern g und k.

Die Winkel h, i sind einander gleich, eben so g und k, und heißen Scheitelwinkel.

Die Winkel g und h heißen Nebenwinkel, haben einen gemeinschaftlichen Schenkel und machen zusammen so viel, als zwei rechte Winkel. So ist auch i Nebenwinkel von k; k Nebenwinkel von h, denn $h + k = 2$ rechten u. s. w. Weil nun $g + h = h + k$ (die punctirte Linie weggedacht), so ist $g = k$; und da $h + k = k + i$, so ist $h = i$.

§. 164. Alle Winkel, die nicht rechte sind, heißen schiefe. Zu den schiefen Winkeln gehören:

a. der spitze Winkel (z. B. < g), der kleiner, als ein rechter;

b. der stumpfe Winkel (z. B. < h), der größer, als ein rechter;

c. der hohle Winkel, der größer als 2 rechte, und nicht so gebräuchlich ist; oft wird er ein negativer Winkel genannt.

§. 165. Auf einer geraden Linie ab Fig. 4. können in dem Punct c die Scheitel mehrerer Winkel liegen; aber alle Winkel zusammengenommen sind nicht größer oder kleiner, als 2 rechte. Man nehme de als senkrecht, so sind < bcd und < acd zwei rechte Winkel; im erstern

liegen

liegen die spitzen Winkel m, n, und im letzteren o und p; folglich sind $m + n + o + p = 2$ rechten Winkeln.

Da nun dasselbe auch für alle Winkel unterhalb der ab um den Punct c gilt, so folgt, daß alle Winkel um einen Punct c zusammengenommen gerade so viel, als 4 rechte Winkel betragen.

§. 166. Eine Fläche läßt sich durch nicht weniger, als 3 gerade Linien einschließen, wovon aber eine nicht länger, oder eben so lang seyn darf, als die Summe der beiden übrigen, weil sonst die längste Linie in die beiden andern fallen, und sie decken würde.

Eine von 3 Seiten eingeschlossene Figur heißt Triangel oder Dreieck, und wird oft durch △ bezeichnet.

Im Dreieck sind 3 Winkel und 3 Seiten zu merken. Auch ohne vieles Nachdenken entdeckt man bald, daß der größte Winkel im △ der größten Seite, und der kleinste Winkel der kleinsten Seite gegenüber steht, daß eine jede Seite, bei übrigens gleichen Verhältnissen, mit ihrem gegenüberstehenden Winkel wächst und abnimmt. Denn wollte man den Schenkel eines Winkels im △ eine andere Lage geben, also ihre Neigung verändern, so würde die 3te Seite nothwendig auch länger oder kürzer werden müssen, wenn der △ geschlossen bleiben soll.

§. 167. Ein Dreieck heißt rechtwinklicht, wenn ein rechter Winkel darin ist. Die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Catheten, und die, dem rechten Winkel gegenüberstehende heißt Hypotenuse. In der Fig. 5. ist bei a der rechte Winkel; ab und ac sind also Catheten, und bc Hypotenuse.

In keinem Dreieck kann es 2 rechte Winkel geben. Denn wäre z. B. $< c$ auch ein rechter, so läge bc da, wo die punctirte Linie cd hintrifft, ab und cd würden nie zusammen kommen, und der Figur die Eigenschaften eines Dreiecks fehlen.

§. 168. Schiefwinklicht heißen alle Dreiecke, worin kein rechter Winkel ist. Dazu gehören

1. das gleichseitige abc, Fig. 6., worin alle Seiten, folglich auch alle Winkel einander gleich sind;

2. das

2. das gleichschenklichte def Fig. 7., worin 2 Seiten und 2 Winkel einander gleich sind. Ist de = df, so ist < n = < o.

3. das stumpfwinklichte, worin 1 Winkel größer, als ein rechter ist. In Fig. 8. ist < m stumpf;

4. Das spitzwinklichte, worin jeder Winkel kleiner, als ein rechter ist. Fig. 6. und 7.

§. 169. Zwei gerade Linien ab und cd Fig. 9., die nach einerlei Richtung laufen, und in jedem Puncte gleichweit von einander abstehen, heißen Parallelen.

Es durchschneide eine dritte gerade Linie hk die Parallelen, so entstehen 8 Winkel o, p, q, r, s, t, u, v. Da die hk gegen beide Parallelen einerlei Neigung hat, so muß < o = < s, p = t; q = u; r = v. Nun sind o und r, so wie s und v Scheitelwinkel, und einander gleich, folglich ist auch r = s; da die Scheitelwinkel p und q, t und u einander auch gleich sind, so ist t = q. Überhaupt sind < o, r, s und v einander gleich; so wie auch p, q, t und u einander gleich sind.

Die Winkel q, t oder r, s heißen Wechselswinkel, und übereinstimmende Wechselswinkel sind einander gleich.

§. 170. In jedem Dreieck sind alle 3 Winkel zusammengenommen nicht größer und nicht kleiner, als zwei rechte Winkel. Es sey das Dreieck ABC Fig. 10., und m, t, o die 3 Winkel desselben. Man ziehe durch c die Linie DE parallel mit AB.

Nun ist < t = < q; und < o = < r, weil es Wechselswinkel (Siehe §. 169.); und < m = < m; folglich sind die 3 Winkel q + m + r eben so groß, als m + t + o, und, da sie unter der geraden Linie DE an dem Puncte C liegen, zwei rechten Winkeln gleich (Siehe §. 165.).

Weil Winkel o und < n zwei Nebenwinkel auf der AB um den Punct B sind, so machen beide eben so viel, als 2 rechte Winkel. Wenn aber m + t + o = n + o

(o subt.

so ist m + t = n

Also ist der Winkel n außerhalb des Dreiecks ABC,

ABC, an der verlängerten Seite AB so groß, als die beiden innern gegenüberliegenden Winkel t + m.

§. 171. Wenn von den 6 Stücken eines Dreiecks 3 bekannt sind, so lassen sich die andern 3 durch Zeichnung (und Rechnung) finden. Unter den bekannten muß wenigstens eine Seite seyn, weil ein großes Dreieck eben solche Winkel haben kann, als ein kleines. Z. B. in dem kleinen △ wären die Seiten 3, 4, 5; im großen aber 9, 12, 15, so wären in beiden die Seiten verschieden, aber die Winkel gleich.

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann nur Ein Triangel gebildet werden, denn es ist die Neigung und Länge jedes Schenkels gegeben, folglich paßt zur 3ten Seite auch nur Eine Linie. Daher sind sich zwei Dreiecke völlig gleich und decken sich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen △ gleichen Stücken im andern △ gleich sind.

Ein Dreieck ist bestimmt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Es sey ab und < o und < m Fig. 11. gegeben, so ist die Neigung der Seiten ac und bc gegeben, und sie können sich nur in dem Puncte c schneiden. Gesetzt, es könnte dies auch in einem andern Puncte d geschehen, so müßte < o zweierlei Neigungen des Schenkels ab zulassen, welches ein Widerspruch ist. Zwei Dreiecke sind einander völlig gleich und decken sich, wenn die eine Seite und die anliegenden Winkel in dem einen △ der einen Seite und den anliegenden Winkeln im andern △ gleich sind.

Da alle 3 Winkel eines Dreiecks zusammengenommen = 2 Rechten sind, so ist aus 2 Winkeln allemal der 3te zu finden, wenn man die Summe der beiden bekannten von 2 Rechten abzieht. Zwei Dreiecke müssen daher gleiche Winkel haben, wenn 2 Winkel des einen △ zweien Winkeln des andern △ gleich sind.

Drei Seiten bestimmen ein Dreieck vollkommen. Zwei Dreiecke, in denen die 3 Seiten über-

einstimmen, d. h. wo die 3 Seiten des einen den 3 Seiten des andern gleich sind, sind sich völlig gleich und decken sich.

172. Die Größe eines Winkels ist ein Bogen, der aus der Winkelspitze mit einem Zirkel durch beide Schenkel gezogen wird. — Dies führt zum Kreis.

Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie Ac Fig. 12., die um den Punct c beweglich, mit dem andern Ende A um c herumgeführt wird. Die krumme, von A beschriebene, Linie heißt Peripherie, Umfang, Kreislinie, Kreis, Zirkel. Die cA heißt Radius oder Halbmesser. Der Punct c ist Centrum oder Mittelpunct, und steht vom Umfange überall gleich weit ab; eine Linie, die den Kreis trifft und durch's Centrum geht, AD, heißt Diameter oder Durchmesser, und theilt sowol die Kreislinie, als die von ihr eingeschlossene Fläche in 2 gleiche Theile. Sie ist = 2 Radien oder Halbmessern. Es sind unzählig viele Radien und Diameter im Kreise möglich, aber alle berühren den Mittelpunct.

Steht der Halbmesser Bc auf AD senkrecht, so theilt er den Halbkreis DABD in zwei Viertelkreise, Quadranten. Betrachtet man Ac und cB als Schenkel des rechten Winkels o, so ist AB der diesem Winkel gehörige Bogen, und also das Maaß desselben. Nun ist AB $\frac{1}{4}$ von der Kreislinie, folglich auch die Größe oder das Maaß eines rechten Winkels = $\frac{1}{4}$ Peripherie.

§. 173. Um einen Bogen in Zahlen ausdrücken zu können, theilt man den ganzen Umfang, er sey groß oder klein, in 360 Theile, Grade genannt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, diese wieder in 60 Tertien, oder, was gewöhnlicher ist, in Decimalsekunden, und bezeichnet sie der Kürze wegen mit ° (Grad), ' (Minute), " (Sekunde), "' (Tertie). So heißt 50° 20' 30" 12"' so viel als: 50 Grad, 20 Minuten, 30 Sekunden, 12 Tertien.

Ein Viertelkreis (das Maaß eines rechten Winkels) ist $\frac{360}{4} = 90°$; ein Halbkreis = 2 rechten Winkeln = 180°; das Maaß eines spitzen Winkels muß kleiner, als 90°, eines stumpfen größer, als 90° seyn. In Fig. 12 ist

$< o = < m =$ rechtem Winkel oder 90°; $< n$ ist spitz, denn sein Bogen ist unter 90°; und $< p$ größer, als 90°, also stumpf.

Unter Kreisfläche versteht man den von der Peripherie eingeschlossenen Raum. Ein Stück derselben ACE, welches von 2 Radien abgeschnitten wird, heißt Sector, Ausschnitt. Eine gerade Linie, die den Umfang an 2 Puncten durchschneidet und nicht durch's Centrum geht, heißt Sehne oder Chorde, als FG. Das von der Kreisfläche durch die Sehne abgeschnittene Stück FGH heißt Sehnenabschnitt.

Es sind unzählig viele Sehnen möglich, aber die größte von allen ist der Diameter selbst.

§. 174. Eine Figur von 4 gleichgroßen Seiten und 4 rechten Winkeln heißt Quadrat Fig. 13. Die Linie ad nach gegenüberstehenden Winkeln heißt Diagonale und theilt das Quadrat in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke. Denn

ab = cd; ac = bd, weil es Seiten eines Quadrats sind; und cb = cb; folglich haben beide Dreiecke übereinstimmige Seiten, und sind also einander gleich.

§. 175. Eine Figur von 4 gleichen Seiten, aber zweierlei Winkeln, wovon die gegenüberstehenden nur einander gleich sind, heißt Rhombus, Raute oder verschobenes Quadrat. Fig. 14.

Die Diagonale ad theilt auch diese Figur in 2 gleiche Dreiecke abd und adc, wie leicht zu erweisen. Die △ sind schiefwinklicht.

§. 176. Wenn in einer Figur zwar 4 rechte Winkel, aber nur die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so heißt sie Rechteck oder Oblongum. Die Diagonale cb Fig. 15. theilt es in 2 gleiche rechtwinklichte Dreiecke abc und cbd.

§. 177. Die Figur 15 kann auch zwei spitze und zwei stumpfe Winkel haben, verschoben seyn (s. Fig. 16.), dann heißt sie Rhomboides (verschobenes Oblongum) oder längliche Raute. Die durch die Diagonale cb entstandenen Triangel sind einander gleich und schiefwinklicht.

§. 178. Quadrat, Rhombus, Rechteck (Oblongum) und Rhomboides haben auch den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme, weil ihre gegenüberstehende Seiten stets parallel sind. Ein Triangel ist allezeit die Hälfte desjenigen Parallelogramms, aus dem er durch die Diagonale gebildet wurde. Die rechtwinklichten Triangel entspringen aus dem Quadrat, oder aus dem Rechteck; die schiefwinklichten aus dem Rhombus oder Rhomboides. Mag daher ein Dreieck beschaffen seyn, wie es will, so wird immer wieder ein Parallelogramm daraus werden, indem man einen gleichen Triangel schicklich daran fügt (ein Geschäft, das seiner Leichtigkeit wegen Anfängern zu empfehlen ist).

§. 179. Wenn in einer Figur nur 2 Seiten parallel sind, die beiden andern aber verschiedene Neigung haben, Fig. 17, so heißt sie Trapezium. Eine Diagonale cb theilt es in 2 ungleiche Dreiecke abc und cbd.

§. 180. Die Figur heißt Trapezoides, wenn keine der 4 Seiten mit einer andern parallel läuft Fig. 18. Die Diagonale ad theilt sie in 2 ungleiche Dreiecke abd, und adc.

§. 181. Eine von den Linien, die eine Figur umschließen, nennt man Grundlinie, Basis.

Unter der Höhe einer Figur versteht man die Länge des Perpendikels oder derjenigen Linie, die auf der Grundlinie senkrecht steht, und den entferntesten (höchsten) Punct der Figur berührt. Im Quadrat und Rechteck ist die Höhe allemal die eine, auf der Grundlinie stehende, Seite; im rechtwinklichten Triangel ist die eine Cathete als Grundlinie, und die andere als die Höhe anzusehen; im Rhombus und Rhomboides ist die Höhe = dem Abstande der mit der Grundlinie parallelen Seite; im schiefwinklichten Dreieck ist die Höhe = dem Abstande der Winkelspitze, welche der Grundlinie gegenüber steht, von der (nöthigenfalls verlängerten) Grundlinie. Im gleichseitigen und gleichschenklichten Dreieck fällt das Perpendikel auf die Mitte der Grundlinie, und halbirt den Winkel an der Spitze, denn es entstehen 2 völlig gleiche rechtwinklichte

Dreiecke

Dreiecke durch dasselbe, deren Congruenz leicht in die Augen fällt.

Das Perpendikel fällt noch in den △, wenn die Winkel an der Grundlinie spitz sind. (In der Fig. 6 und 8 sind die Perpendikel durch punktirte Linien bp angegeben.) Es fällt außerhalb des △, wenn ein Winkel an der angenommenen Grundlinie stumpf ist, wie in Fig. 8.

Die Flächen, welche die Parallelogramme einschließen, findet man dadurch, daß man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt. Das Product ist Quadratmaaß oder Quadratinhalt. — Sich davon zu überzeugen, zerlege man z. B. ein Rechteck durch Parallelen in kleine Quadrate von beliebiger Größe, so wird man gerade so viel Reihen von kleinen Quadraten bekommen, als die Seite eines solchen Quadrats in der Höhe des Parallelogramms enthalten ist. Bei schiefwinklichten Parallelogrammen hängt auf der Seite, wo der stumpfe Winkel liegt, gerade eben so viel über die Grundlinie, als auf der andern Seite fehlt, folglich wird auch ihr Flächeninhalt das Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Da jeder Triangel $\frac{1}{2}$ Parallelogramm ist, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat, so wird sein Flächenraum das halbe Product der Grundlinie und Höhe seyn.

Bei der Berechnung der Fläche einer Figur nimmt man die Grundlinie ohne etwanige Verlängerung wegen Fällung des Perpendikels.

§. 182. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander der Fläche nach gleich, sie mögen in Hinsicht der Winkel auch noch so verschieden seyn.

Es sey ABCD das eine, und CBDF das andere Parallelogramm. Beide haben die gemeinschaftliche Grundlinie CD, und Höhe DB. Das Parallelogramm ABDC besteht aus den Dreiecken 1 und 2, Fig. 20.; das Parallelogramm BFDC aus den △ 2 und 3. Diese drei Dreiecke sind einander gleich. Denn

△ 1

$\triangle 1 = \triangle 2$, weil CB die Diagonale im Parallelogramm ist.

$\triangle 2 = \triangle 3$, weil beide übereinstimmende Seiten haben und DB die Diagonale des Parallelogramms CBFD ist.

Also ist $\triangle 1 + \triangle 2 = \triangle 2 + \triangle 3$

und Parall. ABDC = BFCD.

Zwar können die zu vergleichenden Parallelogramme in sehr verschiedenen Lagen erscheinen, allein der angeführte Satz behält immer seine Richtigkeit.

Weil Dreiecke als Hälften der Parallelogramme anzusehen sind, so gilt auch von ihnen der Satz:

Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleichgroße Flächen ein, mögen ihre Winkel auch noch so verschieden seyn.

§. 183. Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie, aber verschiedenen Höhen, verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

P und p bezeichnen Parallelogramme; H und h ihre Höhen; und B die gemeinschaftliche Grundlinie: dann ist

$P = B \cdot H$

und $p = B \cdot h$

Und $P : p = B \cdot H : B \cdot h$ eine Proportion;

$P : p = H : h$ (: B dividirt

Sind die Höhen H und h gleich, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien B und b. D. h.

$P : p = B : b$.

Und wenn Grundlinien und Höhen verschieden sind, wie die Producte aus beiden. $P : p = B \cdot H : b \cdot h$.

Was in Hinsicht dieser Verhältnisse von den Parallelogrammen gesagt worden, muß natürlicherweise auch von den Dreiecken gelten.

§. 184. Einer der wichtigsten Lehrsätze in der ganzen Mathematik ist der vom Pythagoras erfundene:

Im rechtwinklichten Dreieck ABC Fig. 21. ist das auf der Hypotenuse AC errich-

tete

tete Quadrat ADFC eben so groß, als die beiden auf den Catheten errichteten Quadrate ABJK und BCGH zusammen genommen sind. Oder

AC Quadrat = AB Quadrat + BC Quadrat.

Beweis. Ziehe BE parallel mit CF, so ist das Quadrat ADFC dadurch in 2 Parallelogramme ADEL und LEFC getheilt, wovon ersteres dem Quadrat ABJK, und letzteres dem Quadrat BCGH gleich ist. Diese Gleichheit ist eigentlich zu erweisen.

Man ziehe die beiden Hülfslinien AG und BF, so hat man 2 Dreiecke, die einander gleich sind, △ AGC = △ BFC, denn

AC = CF; CB = CG aus Bedingung.

$< y + z = < x + z$, weil y und x rechte Winkel, folglich sind in beiden Dreiecken ACG und BFC zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, also auch die △ einander gleich.

Aber △ BCF = $\frac{1}{2}$ LEFC, weil beide gleiche Grundlinie CF und senkrechte Höhe CL haben; und △ ACG = $\frac{1}{2}$ CGHB, weil sie gleiche Grundlinie CG und gleiche Höhe CB haben.

Sind aber die Hälften zweier Dinge einander gleich, so sind es auch die Ganzen. Folglich ist das Quadrat BCGH = dem Rechteck LEFC.

Zöge man eine Hülfslinie von K nach C, und eine andere von B nach D, so ließe sich der Beweis, daß das Quadrat ABJK = dem Rechteck ADEL, wie vorher führen.

§. 185. Mit Hülfe des pythagorischen Lehrsatzes lassen sich zwei und mehrere Quadrate in eins verwandeln, oder auch Differenzquadrate finden.

1. Man setze die gegebenen Seiten zweier Quadrate rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypotenuse, welche die Seite des verlangten Quadrats ist, das so viel Fläche hat, als beide gegebene Quadrate. In Fig. 22. sind die gegebenen Seiten a und b rechtwinklicht zusammen gesetzt, und dadurch die Seite c gefunden.

Setzte

Setzte man an die gefundene c abermals die Seite eines Quadrats rechtwinklicht, so würde sich durch die neue Hypotenuse die Seite desjenigen Quadrats ergeben, das alle 3 Quadrate vereinigte.

2, Ein Quadrat zu machen, das so groß ist, als der Unterschied zweier Quadrate, ziehe man EA Fig. 22. unbestimmt lang, nehme die kleinste der gegebenen Quadratseite a und setze sie an E rechtwinklicht; von B aus trage die andere Quadratseite b nach EA, wo sie nach D hintrifft. ED ist dann die Seite des gesuchten Unterschiedsquadrates

§. 186. Ähnlich sind zwei Dreiecke, wenn jeder Winkel des einen einem übereinstimmig liegenden Winkel des andern △ gleich ist, und die Dreiecke nur in der Größe der Seiten und nicht in den Winkeln verschieden sind. In Fig. 23. ist das innere Dreieck abc dem äußern größern ABC ähnlich, denn $< A = < a$; $< B = < b$; $< C = < c$. Da nun die Seiten von den Winkeln, die ihnen gegenüberstehen, abhängig und in beiden Dreiecken übereinstimmige Winkel sind, so stehen auch die Seiten des einen Dreiecks zu einander in demselben Verhältniß, wie die des andern △ zu einander. Ist z. B. die Seite x im großen △ um die Hälfte größer, als Seite M, so ist auch Seite z im kleinern △ um die Hälfte größer, als n; wenn x und z parallel sind, so wird auch M und n; so wie W und v parallel seyn, weil sie gleiche Neigungen zu einander haben. Dies drückt der Satz aus:

In ähnlichen Dreiecken sind diejenigen Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional, d. h. die Verhältnisse sind einander gleich, und geben eine Proportion.

$$x : M = z : n$$
$$\text{und } x : W = z : v$$
$$\text{also } z : v = x : W \text{ u. s. w.}$$

wenn also zwei Seiten des einen △, und eine ähnlichliegende im andern △ bekannt sind, so läßt sich die andere ähnlich liegende Seite im 2ten Dreieck durch die Regel de tri finden.

§. 187.

§. 187. Wird in einem Dreieck eine Linie mit der Grundlinie parallel gezogen, so sind die dadurch abgeschnittenen Stücke einander proportional, denn es entstehen dadurch 2 Dreiecke ABC und dBg (wenn dg die Parallele ist) Fig. 24., welche gleiche Winkel haben und einander ähnlich sind. Es ist nähmlich $< o = < m$ und $< B$ gemeinschaftlich, $< g = < c$. Daher gelten die Proportionen

$$Bd : dA = Bg : gC$$
$$Bd : dg = BA : AC$$
$$Bg : BC = Bd : BA$$
$$AC : dg = AB : dB.$$

In allen Figuren, die einander ähnlich sind, sind die ähnlich liegenden Seiten einander proportional, sie mögen Dreiecke, oder andere Figuren bilden.

§. 188. Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ähnlichliegenden Seiten.

In den beiden ähnlichen Dreiecken ABC und abc ist $AG = H$ und $ag = h$ die Höhe; BC und bc Grundlinie $= G$, g Fig. 26. Dann gilt

$$g : G = h : H$$

$$\text{also ist } \frac{\frac{G \cdot h}{g}}{g} = H$$

Man findet aber den Inhalt eines $\triangle$, wenn Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und durch 2 dividirt wird, oder $\frac{G \cdot H.}{2}$ Also verhalten sich auch

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{G \cdot H}{2} : \frac{gh}{2}$$

durch 2 divid.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \cdot H : gh$$

Für H seinen Werth $\frac{G \cdot h}{g}$ gesetzt.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G \cdot \frac{G \cdot h}{g} : gh$$

m. g mult.

$$\triangle ABC : \triangle abc = G^2 \cdot h : g^2 h$$
$$= G_2 : g^2$$

durch h dividirt.

Weil

Weil jede Seite Grundlinie oder G, g heißen kann, so gilt der Satz für jede Seite.

Aus der Betrachtung ähnlicher Figuren ergeben sich noch folgende Wahrheiten:

In ähnlichen Figuren verhalten sich die Umfänge (Perimeter) wie ähnlich liegende Seiten; und

die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten (ihrer Diagonalen, ihrer Höhen oder Grundlinien); und, weil alle Kreise einander ähnlich sind, die Kreisflächen, wie die Quadrate der Diameter oder Radien, die Umfänge aber, wie die Diameter oder Radien selbst.

§. 189. Zur Ausmessung der Linien bedient man sich des Längenmaaßes Ruthen, Fuß, Zoll, Linien und Scrupel. Die Ruthe gilt für die Einheit und wird im bürgerlichen Leben in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel; bei Mathematikern aber, des bequemern Rechnens wegen in 10 Fuß, 1 Fuß in 10 Zoll, dieser in 10 Linien, und diese in 10 Scrupel getheilt. Man bezeichnet in den Rechnungen die Ruthe mit °, den Fuß mit ′, den Zoll mit ″, die Linie mit ‴, den Scrupel mit ⁗. Je nachdem nun die Ruthe in 10 oder 12 Theile getheilt wird, so nennt man die Eintheilung Decimal- oder Duodecimalmaaß.

§. 190. Zur Ausmessung der Flächen nimmt man das Quadratmaaß. Eine Quadratruthe ist eine Fläche, die rechtwinklicht eine Ruthe lang und eben so breit ist. Theilt man jede Seite derselben in Fuß, und zieht die Theilpuncte zusammen, so erhält man kleinere Quadrate, und zwar bei der Decimaltheilung 100, bei der Duodecimaltheilung 144 Quadratfuße. So läßt sich wieder der Quadratfuß in 100 oder 144 Quadratzolle, jeder dieser Zolle in 100 oder 144 Quadratlinien u. s. w. zerlegen.

Die Frage: wie viel Flächenraum eine Figur habe, sagt so viel: wie viel Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzolle ꝛc. lassen sich in die Fläche legen?

Anmerk.

Anmerk. In der Preußischen Monarchie ist das ehemalige Rheinländische Maaß gesetzlich eingeführt, und seine wahre Größe soll nach dem Secundenpendel angegeben werden. In Vega's logarithmischen Tafeln findet man eine sehr ausführliche Tabelle zur Vergleichung allerlei Längen- Quadrat- und Hohlmaaße im pariser Maaße angegeben.

§. 191. Im Kreise sind die Sehnen gleicher Bogen gleich.

Man ziehe zur Sehne AB Fig. 26. die Radien CA und CB, welche einen Winkel bei C einschließen, dessen Maaß der Bogen AFB ist. Wenn nun DGE ein eben so großer Bogen ist, so ist $< m$, den die Radien CE und CD einschließen, auch dem $< x + y$ gleich. Daher ist $\triangle ABC = \triangle DEC$, folglich $AB = ED$.

§. 192. Weil die Dreiecke ABC und ECD gleichschenklicht sind, so theilt die CN, welche auf der Mitte von AB in N senkrecht steht, den Winkel ACB in zwei gleiche Theile, $< x = < y$; denn in den rechtwinklichten $\triangle ANC$ und NCB ist $AN = NB$; $AC = BC$, weil es Radien, $NC = NC$, also auch die ähnlichliegenden Winkel einander gleich, und $x = y$.

Das Perpendikel auf der Mitte einer Sehne geht daher allemal durch's Centrum, und theilt Sehne, Bogen und Winkel in zwei gleiche Theile.

§. 193. Der Abstand einer Sehne vom Centro wird auf dem aus dem Centro auf die Mitte der Sehne gefällten Perpendikel gemessen. Da nun die Sehnen gleicher Bogen gleich groß, und $\triangle ACB = DCE$, so muß auch der Abstand gleichgroßer Sehnen vom Mittelpunct eines Kreises gleich seyn.

§. 194. Eine gerade Linie, die an den Kreis hinstreift und ihn nur in einem einzigen Puncte g berührt, heißt Tangente (Berührende) Fig. 26. Weil eine gerade Linie aus dem Centro nach der Peripherie auf dem Puncte, den sie trifft, senkrecht steht, so wird auch der Radius Cg auf dem Berührungspuncte der Tangente Tg, und mithin auf Tg selbst senkrecht stehen. Folglich steht auch Tangente Tg auf dem Radius Cg senkrecht.

§. 195.

§. 195. Jeder Winkel an der Peripherie ist halb so groß, als der Winkel am Mittelpunct, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Oder $< y = \frac{1}{2} x$; denn $\triangle$ CDB Fig. 27. ist gleichschenklicht, daher $y = z$; und x ist der äußere Winkel am $\triangle$, folglich so groß, als $y + z = 2y$; und $y = \frac{1}{2} x$.

2. Der Satz gilt auch, wenn der Winkel an der Peripherie mit seinen Schenkeln das Centrum umschließt, Fig. 28.

$$< \text{ADB oder } y + z = \tfrac{1}{2} \text{ ACB oder } \frac{u+x}{2}.$$

Man ziehe DE durch das Centrum, so ist $\triangle$ DCA gleichschenklicht, und $< y = < r$; $< u$ aber $= y + r$; also $u = 2y$; und $y = \frac{1}{2} u$. Dasselbe läßt sich auch auf der andern Seite beweisen, wo $x = 2z$, und $z = \frac{1}{2} x$.

$$\text{also } \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{2} x = y + z$$
$$= < \frac{\text{ACB}}{2} = < \text{ADB}.$$

3. Und wenn die Schenkel des Peripheriewinkels z das Centrum nicht berühren noch umschließen, Fig. 29., so gilt doch

$$< x = < 2z, \text{ oder } z = \tfrac{1}{2} x.$$

Man ziehe die Hülfslinie DCE durch's Centrum, so ist im gleichschenklichten $\triangle$ CDB $< y + z = < n$, und der äußere Winkel $x + u$ am $\triangle$ CDB $= y + z + n$.

Nach dem ersten Falle ist $< u = 2y$

Aber $u + x = y + z + n$

und da $n = y + z$

so ist $u + x = 2y + 2z$

Da nun $u = 2y$

so muß $x = 2z$, oder $z = \frac{1}{2} x$ seyn.

§. 196. Das Perpendikel auf dem Diameter eines Kreises ist die mittlere Proportionallinie zwischen den durch dasselbe abgeschnittenen Stücken des Diameters, oder Fig. 30.

$AE : ED = ED : EB$, und $ED^2 = AE \cdot EB$.

Ziehe die Hülfslinien AD und DB, so ist $<$ ADB ein Rech-

Rechter, weil er der Winkel an der Peripherie ist, dessen Schenkel einen Halbkreis = 180° abschneiden, also

△ ADB rechtwinklicht, oder $z + n = 90°$

△ ADE ist bei E rechtwinklicht (oder $m = 90°$), und hat mit jenem △ den $< x$ gemein. Daher

△ ADB ähnlich dem △ ADE; $m = z + n$;

x x und daher $z = y$.

Ferner ist auch △ DEB den beiden ähnlich, denn er ist bei v rechtwinklicht und y ist zwei △ gemeinschaftlich, folglich $< n = < x$.

Nun sind in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen, einander proportional,

AE : ED = ED : EB

(sieht geg. $< z$) (y) = (x) (n)

denn $z = y$, und $x = n$.

Anmerk. Man nennt die ED auch Ordinate und bezeichnet sie gemeiniglich mit y; den Diameter AB mit a, und das Stück BE desselben (Abscisse genannt) mit x, und sucht dann einen Werth für y oder ED folgendermaßen: $AE = a - x$, $EB = x$, dies in die obige Gleichung gesetzt:

$a - x : y = y : x$

$ax - x^2 = y^2$

$\sqrt{(ax - x^2)} = y$, welchen Ausdruck man die Gleichung für den Kreis nennt.

§. 197. Vielecke, Polygone, sind Figuren, die mehr, als 4 Seiten, haben. Wenn alle Seiten gleich lang sind, so heißt das Vieleck regulär, im Gegentheil irregulär. Wir beschäftigen uns hier nur mit den regulären oder gleichseitigen Vielecken. Man beschreibt die Vielecke mit Hülfe eines Kreises, welchen man in so viel Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll; die Theilpuncte zusammengezogen, bilden das Vieleck. Folglich sind die Seiten eines Vielecks als Sehnen gleicher Bogen anzusehen. Zieht man aus dem Mittelpunct des Kreises gerade Linien nach den Ecken, so erhält man eben so viel völlig gleiche Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat.

§. 198. Centriwinkel heißen diejenigen Winkel, die am Mittelpunct entstehen, wenn Radien nach allen Ecken eines Vielecks gezogen werden.

Polygonwinkel sind die, welche zwei Seiten des Vielecks mit einander machen.

Alle Centriwinkel eines Vielecks, so wie alle Polygonwinkel sind einander gleich.

§. 199. Die Zeichnung des Sechsecks ist die leichteste, denn jede Seite desselben ist dem Radius gleich, und man erhält die Theilpuncte im Kreise, wenn man den Halbmesser 6 mal in demselben umschlägt. Fig. 31. ist GFEDBA ein in einem Kreise beschriebenes Sechseck. Die Winkel m, n, o, p, q, r sind Centriwinkel, und da die Summe aller Winkel um den Punct c nur 360° beträgt, so wird hier jeder $= \frac{360}{6} = 60°$ seyn (Im Fünfeck würde ein Centriwinkel $= \frac{360}{5} = 72°$ seyn). Die Winkel u, t, s, v sind halbe Polygonwinkel, und einander gleich.

Weil alle Radien einander gleich sind, so sind die Dreiecke in einem jeden Vieleck gleichschenklicht, und daher die $<$ t und s gleich dem Rest, der bleibt, wenn ein Centriwinkel p von 180° (der Summe aller Winkel im Dreieck) abgezogen wird; weil $t = s$, so ist jeder $=$ dem halben Reste.

Daher $\frac{360}{z}$ = Centriwinkel, wo z die Anzahl der Seiten bedeutet; und $\frac{360}{z}$ von 180° abgezogen $=$ dem Polygonwinkel $= t + s$.

Man betrachte AB als Sehne, so wird ein Perpendikel aus C die AB und $<$ p in 2 gleiche Theile theilen. Dies Perpendikel ist die Höhe eines jeden Dreiecks im Vieleck und wird durch den pythagorischen Satz gefunden, denn $\triangle$ ACP ist bei P rechtwinklicht.

$$CA^2 = AP^2 + CP^2$$

$$CA^2 - AP^2 = CP^2$$

$$\sqrt{(CA^2 - AP^2)} = CP$$

so wie überhaupt jede von den 3 Linien AC (Radius), AP

AP (halbe Seite des Vielecks), und PC (Perpendikel) durch diesen Satz gefunden werden kann.

Eigentlich ist durch den Radius, und die Anzahl der Seiten eines Vielecks alles in der ganzen Figur bestimmt, d. h. Größe der Seiten und des Perpendikels, Winkel ꝛc. In der Flächenmessung werden Formulare mitgetheilt werden, allerlei Aufgaben bei Vielecken zu berechnen.

Weil im Sechseck alle Seiten Radien sind, so müssen auch die Winkel p, t, s einander gleich, d. h. jeder 60° seyn.

Der Flächenraum eines der Dreiecke im Polygon mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, giebt den Flächenraum des Vielecks.

§. 200. Auch um einen Kreis läßt sich ein Vieleck zeichnen, wenn man zuvor ein eben so vielseitiges in demselben beschreibt, und dann des äußern Vielecks Seiten mit denen des innern parallel zieht. Fig. 32. ist dies zur Hälfte geschehen.

Die Berechnung des äußern Vielecks gründet sich auf Folgendes:

Wenn ad, db, bf Seiten des Vielecks im Kreise, und AD, DB, BF Seiten des Vielecks außerhalb, und Radius und Seite des innern bekannt sind, so theilt das Perpendikel cm nicht nur bf, sondern auch BF in 2 gleiche Theile, und bildet rechte Winkel.

Nun ist $cm^2 = cb^2 - mb^2$

$$cm = \sqrt{(cb^2 - mb^2)}$$

Da cn = Radius, und die △ Cmb und CnB einander ähnlich, so gilt:

$$Cm : mb = Cn : nB$$

$$\text{und } nB = \frac{mb \cdot Cn}{Cm}, \text{ und } 2nB = BF$$

§. 201. Will man die Seite eines Vielecks von doppelt so vielen Seiten berechnen, so verfahre man also: Fig. 32.

Wenn EF die Seite des gegebenen Vielecks, Cp das Perpendikel; fq = qE die Seiten des doppelt so vielseitigen, so ist nach vorigem §. die Cp und pq zu finden.

Im

Im rechtwinklichten △ pfq ist

$pf^2 + pq^2 = fq^2$

$\sqrt{(pf^2 + pq^2)} = fq =$ der Seite des gesuchten Vielecks.

Setzt man die Vervielfältigung der Seiten eines im Kreise beschriebenen Vielecks fort, bis die Seiten so klein werden, daß sie von der krummen Linie nicht zu unterscheiden sind, so wird man durch die Addition aller Seiten beinahe die Kreislinie selbst bekommen. Thut man dasselbe auch bei einem Vielecke außer dem Kreise, so erhält man die Kreislinie auch beinahe, jedoch etwas zu groß. Der Unterschied zwischen beiden Resultaten halbirt und zu dem kleinern Resultat addirt, wird die krumme Linie noch genauer, aber niemals völlig genau, angeben.

§. 202. Ludolf nahm den Diameter eines Kreises = 1, oder 1000000 und fand nach angezeigter Art die Kreislinie zu 3,141592; oder wenn der Durchmesser 1000000 ist, so ist der Umfang 3141592, welches Verhältniß des Diameters zur Peripherie das Ludolfische genannt, und sehr gewöhnlich ist. Ein anderes Verhältniß ist 113 : 355; oder 3183 : 10000.

Wir wollen uns des Ludolfischen bedienen, und das Verhältniß 1 : 3,141592 beständig durch p ausdrükken, welcher Buchstabe demnach die Zahl 3,141592 bedeutet, von der wir so viel Decimalstellen nehmen können, als wir wollen, und als die gewünschte Genauigkeit fordert. Gewöhnlich werden 2 Decimalstellen genügen.

Da die Kreise ähnliche Figuren sind, so findet man den Umfang eines jeden Kreises, wenn man den Durchmesser und Umfang eines einzigen weiß, durch die Proportion.

Es sey D der Durchmesser und U der Umfang eines Kreises, so giebt $1 : 3{,}14159.. = D : U$

$= p$

$pD = U =$ Umfang,

und also $\frac{U}{p} = D =$ Durchmesser.

Weil alle Kreise in 360° getheilt werden, so kann man auch die Länge eines Bogenstückes für einzelne Grade bestimmen.

§. 203.

§. 203. Man kann die Kreislinie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, und ein bestimmtes Stück davon für eine solche Seite nehmen, von der sich Linien nach dem Centro ziehen lassen, wodurch ein Dreieck entsteht, dessen Höhe der Radius, und dessen Grundlinie der Bogen ist. Der Flächenraum eines solchen Sectors würde durch das halbe Product des Bogens in den Radius gefunden werden. Setzt man statt des Bogens den ganzen Umfang, so erhält man den Flächenraum des Kreises, welcher demnach einem Dreieck gleicht, dessen Grundlinie der Umfang, und dessen Höhe der Radius ist. Drücken wir dies in Zeichen aus, so ist Fläche des Kreises $= \frac{U \cdot r}{2}$, wobei r = Radius; oder da $U = Dp$, und $D = 2r$, so haben wir das Formular $\frac{2r \cdot r \cdot p}{2} = r^2 p =$ Kreisfläche.

Das Quadrat des Diameters muß 4 mal größer seyn, als das des Radius, weil letzterer nur $\frac{1}{2}$ D ist, folglich wird man auch die Kreisfläche finden durch $\frac{D^2 p}{4}$.

§. 204. Der Kreis ist die vollkommenste Figur. Kommt es darauf an, mit einer gegebenen Umfassung die größtmögliche Fläche einzuschließen: so wähle man die kreisförmige, denn der Kreis schließt bei gleichem Umfange von allen möglichen Figuren die größte Fläche ein.

§. 205. Die Flächen mehrerer Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Radien, oder ihrer Diameter. Denn wenn A und B zwei Kreise vorstellen, so ist

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{D^2 p}{4} \\ B &= \frac{d^2 p}{4} \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = \frac{D^2 p}{4} : \frac{d^2 p}{4}$$

$$A : B = D^2 p : d^2 p \quad (4 \text{ dividirt.}$$

$$A : B = D^2 : d^2 \quad (p \text{ divid.}$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} A &= R^2 p \\ B &= r^2 p \end{aligned}\right\} \text{ also } A : B = R^2 p : r^2 p$$

$$A : B = R^2 : r^2$$

§. 206. Wie allerlei Vielecke gezeichnet und berechnet werden, wie die Fläche der Kreisstücke, und allerlei anderer krummlinigten Figuren zu finden sey, wird in der Lehre von Linien- und Flächenmessung vorkommen.

§. 207. Ehe wir zur Betrachtung der Körper schreiten, müssen wir noch Einiges über die Lage der Ebenen gegen einander berühren.

Unter einer Ebene stelle man sich eine völlig gerade Fläche nach beliebiger Länge und Breite vor, in welcher gerade Linien, die man von allen Puncten ihres Umfanges über dieselbe zieht, mit allen ihren Puncten liegen. Die Begrenzung der Ebene kann krumm, eckig oder gerade seyn, es gehören diese Eigenschaften nicht mit zu ihrem Begriff. (Ein Spiegel, stillstehendes Wasser kann die sinnliche Anschauung einer Ebene erleichtern.) Obgleich die Ebene ohne alle Dicke und Tiefe seyn muß, so kann man sich doch ihre Ausdehnung nach Länge und Breite unbegrenzt vorstellen.

§. 208. Die Vorstellung mehrerer Ebenen gegen einander auf dem Papier ist deshalb schwierig, weil das Papier nur eine Ebene vorstellt, und darauf Linien und Puncte zu zeichnen sind, die außerhalb desselben liegen. (Durch Kartenblätter, welche man also legt, wie es die Betrachtungen erfordern, kommt man der Einbildungskraft des Ungeübten sehr zu Hülfe. Die auf einer Ebene stehenden Linien können durch Drathstücke oder Nadeln versinnlicht werden.)

§. 209. Zwei Puncte bestimmen die Lage einer Ebene nicht, denn ein, nur in 2 Puncten befestigtes Kartenblatt kann sich um sie, wie um eine Axe drehen, und allerlei Lagen haben. Drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene vollkommen. Ein Tisch steht auf drei Beinen auf jedem Boden fest. Ein vierbeinigter Tisch kann wanken, weil die Füße 4 Puncte vorstellen, durch welche 2 Ebenen gelegt werden können. Jeder Triangel und jeder Kreis wird nur in einer Ebene liegen, denn 3 Puncte bestimmen diese Figuren.

§. 210. Eine gerade Ebene kann auf einer Ebene unter unzähligen Winkeln stehen. (Eine Nadel auf einer Tischfläche befestigt zeigt dies deutlich.) Sie steht aber senkrecht, wenn sie mit der Ebene rings herum rechte Winkel macht. Sie kann mit zwei, in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel, und mit allen übrigen schiefe Winkel machen. Steht aber eine Linie so auf einer Ebene, daß sie mit 2 nicht in einer geraden Linie liegenden Puncten rechte Winkel macht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht. Giebt man daher einem gemeinen Winkelhaken noch einen 3ten Schenkel, so kann man mittelst desselben die senkrechte Stellung einer Linie auf einer Fläche bekommen.

§. 211. Zwei Linien, die auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel, denn es befinden sich um beide rechte Winkel.

Wenn sich zwei senkrechte Ebenen schneiden, so ist die Durchschnittslinie auch senkrecht. Z. B. die senkrechten Seitenwände eines Zimmers durchschneiden sich in der Ecke senkrecht, die Ecke ist die Durchschnittslinie und steht auf dem Fußboden senkrecht.

Ein Perpendikel, welches durch mehrere parallele Ebenen geht, steht auf allen senkrecht.

Steht eine Ebene auf einer andern, so machen beide einen Winkel, welcher Flächenwinkel, Neigungswinkel heißt, und sehr verschieden seyn kann, nachdem sich die Ebenen gegen einander neigen.

§. 212. Mit 2 oder 3 Ebenen läßt sich noch kein Raum einschließen. Zum wenigsten gehören dazu 4 Ebenen, wie jeder Versuch beweist.

§. 213. Ein Körper wird von Ebenen, die man Seitenflächen nennt, eingeschlossen. Die Geometrie lehrt, wie der durch die Seitenflächen eingeschlossene Raum zu berechnen sey.

Das Gefundene heißt der kubische oder körperliche Inhalt. Die äußere Umgebung oder der Flächenraum aller Seiten heißt das Netz, auch die Oberfläche des Körpers; diejenige Seite desselben, worauf er steht, oder stehen könnte, nennt man Grundfläche; ein Perpendikel auf der Grundfläche aus dem höchsten Punct des

Körpers heißt seine Höhe, oft auch, um Mißdeutungen vorzubeugen, senkrechte oder gerade Höhe.

§. 214. Diejenigen Körper, deren Ebenen ihren Grund in geraden Linien oder im Kreis haben, sind: Prisma, Parallelopipedon, Kubus oder Würfel, Cylinder, Piramyde, Kegel und Kugel, und nur sie werden gemeiniglich in der Geometrie abgehandelt.

§. 215. Der sogenannten Platonischen Körper, deren Seiten Polygone, oder deren Ecken alle gleichen körperlichen Raum einschließen, sind nur fünf: Tetraeder, Würfel, Octoeder, Dodecaeder, Icosaeder; und mehrere sind auch nicht möglich.

Die Zeichnung und Berechnung dieser Körper folgt unten; hier nur eine allgemeine Betrachtung über die geometrischen Körper.

§. 216. Das Maaß, womit die Körper gemessen werden, ist der Würfel oder Kubus, daher es auch Kubikmaaß heißt. Eine Kubikruthe ist ein Körper, der rechtwinklicht eine Ruthe lang, eben so breit und hoch ist. Seine Grundfläche ist daher eine Ebene von einer Quadratruthe, oder 10. 10 = 100 Quadratfuß. Stellt man ihn sich auch 10 Fuß hoch vor, so besteht der ganze Körper aus 10. 10. 10 = 1000 Kubikfuß. Theilt man die Ruthe in 12 Theile, so hat die Grundfläche 12. 12 = 144 Quadratfuß, und der Körper 12. 12. 12 = 1728 Kubikfuß Duodecimalmaaß.

Anmerk.	Decimalmaaß.	Duodecimalmaaß.
Ein Kubikfuß wird	10. 10. 10 = 1000 Kubikzoll,	od. 1728 Kubikz.
ein Kubikzoll —	10. 10. 10 = 1000 Kubiklin.,	od 1728 K. Linien
eine Kubiklinie —	10. 10. 10 = 1000 K. Scrupl.	od. 1728 K. Scpl.

§. 217. Körper, deren Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen, haben oben eine Decke, welche der Grundfläche völlig gleich ist, und daher hat ein solcher Körper eigentlich 2 Grundflächen. Dazu gehören:

1. der Würfel, welcher in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist;
2. das Parallelopipedon mit 2 Grund- und 4 Seitenflächen, wovon 2 gegenüberstehende gleich, alle

alle aber Parallelogramme sind. (Ein längliches Kästchen, der Raum eines rechtwinklichten 4eckigen Zimmers sind Körper dieser Art.)

3. Das Prisma, dessen 2 Grundflächen 3, 4, 5 und mehr Seiten haben, worauf eben so viel Seitenflächen senkrecht stehen, die Parallelogramme sind. (Ein senkrecht stehender überall gleich dicker Pfeiler, welcher 3, 4, 5 und mehr Ecken hat.)

4. Cylinder, dessen beide Grundflächen Kreise sind, und dessen Seitenfläche wie der Kreis gebogen ist. (Eine Walze, ein runder Thurm, eine Tubusröhre ꝛc.)

Man findet den körperlichen Inhalt dieser 4 Arten von Körpern dadurch, daß man den Flächenraum der Grundfläche mit ihrer senkrechten Höhe multiplicirt. Denn es können eben so viel Schichten von einer gewissen Dicke über der Grundfläche liegen, als die Höhe Theile hat, die einzeln so lang sind, als die Dicke der Schichten angenommen ist. Z. B. es sey die Grundfläche = ein Quadratfuß, so würde in einer Schicht von 1 Fuß Höhe, 1 Kubikfuß, und in jeder folgenden eben so viel körperlicher Inhalt enthalten seyn. Die Gestalt der Grundfläche mag noch so verschieden seyn, so wird sich doch ihr Quadratinhalt berechnen lassen, und immer die Regel gelten, daß Grundfläche mal Höhe den körperlichen Inhalt dieser Körper giebt.

§. 218. Wenn die Seitenflächen dieser 4 Körper, die man auch prismatische nennt, nicht auf der Grundfläche senkrecht stehen, so heißen sie schiefe, ihre Seitenflächen sind nicht mehr Rechtecke, sondern verschoben, und ihre Höhe mißt ein Perpendikel aus dem höchsten Punct auf die Grundfläche oder deren Verlängerung. Alsdann aber sind sie, wie die geraden, zu behandeln.

§. 219. Die Piramyde und der Kegel haben nur Eine Grundfläche, und ihre Seitenflächen laufen oben in einen Punct zusammen. Die Grundfläche der Piramyde kann 3, 4, 5 und mehr Seiten haben; die Seitenflächen derselben sind Dreiecke, deren Grundlinien mit den Seiten der Grundfläche einerlei sind.

Die

Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis; seine Seitenfläche (Mantel oder krumme Oberfläche genannt) ist, ausgebreitet, ein Kreissector, dessen Centrum in der Spitze des Kegels liegt. (Ein Zuckerhut giebt eine sinnliche Vorstellung des Kegels.)

§. 220. Ein Kegel ist eine Piramyde von unendlich vielen Seiten, und wenn die Grundflächen und Höhen dieser beiden Körper gleich sind, so sind es auch ihre körperlichen Inhalte. Denn gesetzt, man schnitte von beiden dünne Scheiben mit der Grundfläche parallel ab, so müßten sich diese nothwendig an Masse gleich seyn, und setzte man die Trennung fort, so würde man gleich viel und gleich große, obgleich verschieden gestaltete, Stücke oder Theile bekommen. Sind aber die Theile sich einzeln an Zahl und Inhalt gleich, so müssen es auch die Ganzen seyn. Piramyden von gleicher Grundfläche und Höhe schließen gleichgroße Räume ein, wenn sie auch in der Anzahl der Seiten noch so sehr verschieden sind.

§. 221. Jedes dreieckte Prisma läßt sich in 3 gleichgroße Piramyden zerschneiden.

Anmerk. Durch Linien auf dem Papiere läßt sich der Beweis dieses Satzes nie dem Anfänger ganz deutlich und überzeugend machen. Der Lehrer führe ihn aber sinnlich, indem er z. B. ein dreieckiges Prisma aus Holz verfertigen, und nach der Anweisung, die jedes Lehrbuch giebt, durchschneiden läßt. Er wird 3 gleichgroße Piramyden, wovon 2 völlig gleich, und eine schiefwinklicht, erhalten. Daß sich aber diese 3 Piramyden an Masse gleich sind, beweise er so: die Gleichheit der beiden ersten fällt in die Augen, denn sie haben die Grundfläche des Prisma's zur Grundfläche, und seine Länge zur Höhe; legt man nun eine Seitenfläche der ersten Piramyde auf eine Seitenfläche der 3ten (schiefen) Piramyde, so decken sich beide, und folglich nehme man diese zur Grundfläche bei der Vergleichung; die Höhe dieser so gelegten Körper ist die Dicke des Prisma. Daher haben auch sie gleiche Grundfläche und Höhe und sind dem Inhalte nach einander gleich.

§. 222. Wenn die Piramyde der 3te Theil eines prismatischen Körpers ist, so muß es der Kegel auch seyn.

§ 220. Man wird ihren Körperinhalt also finden, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und durch 3 dividirt.

§. 223. Kegel und Piramyde heißen abgekürzt, wenn die Spitze durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt davon getrennt worden ist. Man wird den Inhalt derselben finden, wenn man die fehlende Spitze für sich als einen Kegel oder eine Piramyde berechnet, und vom ganzen Körper (wie er mit der Spitze seyn würde) abzieht. Die Länge der fehlenden Spitze findet man durch eine leichte Rechnung aus den Durchmessern der Grund- und Durchschnittsfläche, und Höhe. Es sey R = Halbmesser der Grundfläche, r = Halbmesser der Durchschnittsfläche, H die Höhe des ganzen, und h die Höhe des abgekürzten Körpers, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Fig. 121.

cp : po = cm : mb, d. i. in angenommenen Zeichen

$(R-r) : h = R : H$, also $H = \frac{h \cdot R}{R-r}$

und H — h ist die Höhe der fehlenden Spitze bno.

Anmerk. Ueberhaupt ist es gut, mit dieser Betrachtung über die Körper zugleich die Zeichnung und Netze derselben zu vergleichen, wozu unter § 424 bis 443 Anleitung gegeben wird. Dann wird es auch nicht schwer werden, die Oberflächen der Piramyde Fig. 120, und Fig. 122 zu berechnen.

§. 224. Eine Kugel entsteht, wenn sich ein Halbkreis um den Diameter bewegt. Daher

a. stehen alle Puncte auf ihrer krummen Oberfläche gleichweit vom Mittelpunct ab;

b. sind alle Radien gleich lang;

c. sind alle Kugeln ähnliche Körper;

d. ist jede Durchschnittsfigur, welche durch eine schneidende Ebene, die durch die Kugel dringt, entsteht, ein Kreis, und jeder Kugelschnitt eine Kreisfläche;

e. steht ein Perpendikel aus dem Centro auf der Durchschnittsfigur allemal in ihrer Mitte;

f. trifft der größte Schnitt allemal das Centrum, und theilt die Kugel in zwei Halbkugeln;

g. schneiden diejenigen Ebenen, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunct die Kugel durchdringen, gleichgroße Stücke ab.

Von der Wahrheit dieser Sätze wird sich jeder, der die Lehre vom Kreis wohl begriffen, leicht überzeugen, daher übergehen wir die Beweise.

§. 225. Eine gerade Linie durch den Mittelpunct der Kugel bis zum Umfange heißt Diameter, die Hälfte ist Radius der Kugel. Die Endpuncte eines Diameters, um welche sich die Kugel wälzen läßt, heißen Pole, ihr Diameter Axe.

§. 226. Eine schneidende Ebene, welche den Mittelpunct der Kugel trifft, bildet auf ihrer Oberfläche einen größten Kreis. Das Centrum eines größten Kreises ist also zugleich der Mittelpunct der Kugel. Es sind unzählig viel größte Kreise möglich.

§. 227. Ein kleinerer Kreis entsteht auf der Oberfläche, wenn die schneidende Ebene nicht durch das Centrum geht. Es sind unzählig viele möglich.

§. 228. Weil die Oberfläche der Kugel durch den Kreis gebildet wurde, so theilt man sowol die größten, als die kleinern Kreise auch in 360 Grade und ihre Unterabtheilungen.

§. 229. Ein größter Kreis, der von den Polen überall 90° weit absteht, heißt Aquator oder Gleicher.

§. 230. Um das Verhältniß der Oberfläche zum Diameter zu finden, legte man unendlich nahe schneidende Ebenen durch die Kugel und nahm die dadurch abgeschnittenen Stücke für abgekürzte Kegel, deren Oberfläche man addirte.

§. 231. Eine bestimmte Menge solcher neben einander liegender Kegelstücke wird einen Kugelabschnitt ausmachen. Weil nun die Durchmesser jedes solchen Kegelstücks unendlich wenig von einander unterschieden seyn werden, so kann man in der Gleichung für die Oberfläche

des

des abgekürzten Kegels $(R+r)p$. h anstatt $R+r$ auch $2R$ setzen, folglich $2R$. p . h.

Die Oberfläche eines Kugelabschnitts KAGH Fig. 33. wird daher auch gefunden werden durch

$$2R \cdot p \cdot AH.$$

Es sey der Radius R einer Kugel 8 Zoll, die Höhe des Stückes $AH = 2$ Zoll, so ist $2 \cdot 8 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 100{,}512\ldots$ Quadratzoll Oberfläche.

Für AH läßt sich ein anderer Ausdruck finden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADG und AGH ergiebt sich, daß

$$AH = \frac{AG^2}{2R}$$

Diesen Ausdruck in vorige Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{2R \cdot p \cdot AG^2}{2R} = AG^2 \cdot p = \text{Oberfläche eines Kugelabschnitts.}$$

Weil nun jede Kreisfläche durch die allgemeine Formel $r^2 p$ gefunden wird, so kann AG als Radius desjenigen Kreises gelten, dessen Fläche der Oberfläche des Kugelabschnitts gleicht, und daher der Satz:

> Der Flächenraum eines Kugelabschnitts ist gleich dem Flächenraum eines Kreises, dessen Radius die Sehne zwischen dem Pol und dem Abschnitt ist.

§. 232. Je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunct kommt, desto größer wird der Abschnitt. Im Mittelpunct ist er = Halbkugel. Dann wird die Sehne AJ der Radius eines Kreises seyn, der so viel Flächenraum hat, als die Oberfläche der halben Kugel. Es ist aber

$$AJ^2 = CA^2 + CJ^2$$
$$= R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Und $AJ^2 \cdot p = 2R^2 p =$ zweien größten Kreisen; folglich ist der Flächenraum der ganzen Kugel der Fläche von 4 größten Kreisen gleich, $= 4R^2 p$.

§. 233. Da $4R^2 = D^2$, so kann auch die Oberfläche der Kugel durch $D^2 p$ gefunden werden, oder sie ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius der Durchmesser der Kugel ist.

§. 234.

§. 234. Wenn zwei parallele Ebenen FG und fg eine Kugel schneiden, Fig. 34., so heißt der Raum auf der Oberfläche zwischen beiden eine Zone, als fgGF. Zieht man die Oberfläche des Stückes fgA von der Oberfläche der Halbkugel ab, so giebt der Rest den Flächenraum der Zone:

$(2R \cdot p \cdot AH) - (2R \cdot p \cdot Ah) =$ Zone

oder $2R \cdot p \cdot (AH - Ah)$; und da $AH - Ah = Hh$, so ist sie $= 2R \cdot p \cdot Hh$.

Nun ist Hh die Höhe der Zone; $2R \cdot p = Dp =$ der Peripherie eines größten Kreises. Daher giebt $D.pHh$, oder die Pertpherie eines größten Kreises multiplicirt mit der Höhe der Zone, den Flächenraum derselben.

§. 235. Der körperliche Inhalt der Kugel ist dem eines Kegels oder einer Piramyde gleich, deren Grundflächen der ganzen Oberfläche der Kugel, und deren Höhen der Hälfte ihres Diameters gleichen.

Theilt man die Oberfläche der Kugel in lauter sehr kleine Quadrate, so stellen diese die Grundflächen einer eben so großen Menge von Piramyden, deren Spitzen sämmtlich im Mittelpunct liegen, vor. Ihre Höhen sind also dem Radius gleich; und ihr gemeinschaftlicher Inhalt macht den Kugelinhalt aus.

Nun giebt $\frac{1}{3}$ G . H oder $G \cdot \frac{H}{3}$ (Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe) den Inhalt einer Piramyde; und $\frac{1}{3}$ H = $\frac{1}{3}$ Radius oder $\frac{1}{6}$ Diameter. Folglich wird die Kugelfläche mit $\frac{1}{6}$ Diameter multiplicirt den Inhalt derselben geben. Weil die Oberfläche $= D^2p$, so ist nun körperlicher Inhalt $= D^2 \cdot p \cdot \frac{D}{6} = \frac{D^3p}{6}$

§. 236. Vergleicht man die Kugel mit einem Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleicht, so findet sich, daß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders sey. Den weitläufigen gewöhnlichen geometrischen Beweis mag folgender kürzere ersetzen:

Der

Der Inhalt des Cylinders ist $= G \cdot H$, d. h. $r^2 \cdot p \cdot H$ oder $\frac{D^2 \cdot p \cdot H}{4}$, oder (weil $H = D$) $= \frac{D^3 \cdot p}{4}$; Inhalt der Kugel $= \frac{D^3 \cdot p}{6}$.

Wenn nun K = Kugel; Z = Cylinder, so verhalten sich

$$K : Z = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3 \cdot p}{4} \quad (4$$

$$K : Z = \frac{4 D^3 \cdot p}{6} : D^3 p \quad (6$$

$$K : Z = 4 D^3 p : 6 D^3 p \quad (D^3 p$$

$$K : Z = 4 : 6 \quad (:2$$

$$K : Z = 2 : 3$$

$K = 2\frac{Z}{3} = \frac{2}{3} Z$ d. i. die Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Cylinders.

§. 237. Da der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders oder eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, die Kugel aber $\frac{2}{3}$ Cylinder, so ist das Verhältniß dieser drei Körper: Kegel, Kugel, Cylinder, wie 1, 2, 3; oder 1 : 2 : 3.

Anmerk. Die bisher vorgetragenen geometrischen Wahrheiten sind zum völligen Verstehen der in den folgenden Abschnitten gegebenen Formeln erforderlich, aber für denjenigen, welcher gründliche Kenntnisse in der Mathematik zu erlangen wünscht, noch nicht genügend. Ihm empfehlen wir

Häseler's Anfangsgründe der reinen Mathematik ꝛc. 3 Theile. (Zum Selbstunterricht vorzüglich geeignet.)

Kästner, Burja's, Kiesewetter's und andere Schriften, deren Menge sehr groß ist.

VIII. Ebene Trigonometrie.

§. 238. Sie ist die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks (worunter aber wenigstens 1 Seite seyn muß) die übrigen drei Stücke zu berechnen; und daher jedem guten Mathematiker unentbehrlich. Denn die geometrischen Auflösungen vieler Aufgaben sind theils nicht genau genug, theils unmöglich in der Ausübung, indem es in der angewandten Mathematik zuweilen Dreiecke giebt, worin Winkel von Sekunden, und Seiten von Millionen Meilen vorkommen, deren Construction nicht angeht. Die gehörig geführte Rechnung aber löst solche und überhaupt jede dahin gehörige Aufgabe mit der größten Schärfe auf.

Diese so äußerst wichtige Dreieckberechnung gründet sich auf den Satz, daß die ähnlichliegenden Seiten in ähnlichen Figuren einander proportional sind.

§. 239. Wir machen uns mit den dabei vorkommenden Kunstausdrücken bekannt.

Ein Perpendikel EB Fig. 35. vom Umkreise auf den Radius CA heißt Sinus des Winkels n, oder des Bogens AB. Er ist die halbe Chorde oder Sehne des Bogens BAJ, welcher 2n mißt. Wird $< n$ kleiner oder größer, so wird es auch sein Sinus; wird n ein rechter Winkel, so wird BE auf GC fallen, also gleich dem Halbmesser, oder Sinus totus, größter Sinus seyn. BE ist auch der Sinus des $< KCB$, der eben so viel über 90° hat, als dem n zu einem rechten Winkel fehlt.

Was einem Winkel an 90° fehlt, heißt sein Complement, oder seine Ergänzung. Dem $< n$ fehlt der Bogen GB Fig. 36. oder der Winkel o, ehe er 90° wird, daher ist SB der Sinus complementi, oder Cosinus von n. Der Cosinus nimmt zu, wenn der Sinus abnimmt, und umgekehrt.

Die Linie TA heißt die Tangente des Winkels n. Sie nimmt mit dem Winkel n zu und ab, und ist, wenn $n = 90°$ wird, unendlich, weil sie dann mit CB parallel läuft.

GH

GH ist die Tangente des Winkels o, also die Cotangente des < n.

CT ist der bis zur Tangente verlängerte Radius, und heißt Secante; und CH, welche die Cotangente schneidet, heißt Cosecante.

Das Stück EA des Radius CA heißt der Sinus versus, Quersinus, oder Pfeil. Er ist gleich Radius minus Cosinus oder CA — SB.

§. 240. Die Größe dieser Linien wird sich berechnen lassen, wenn der Radius CA oder CB und der Winkel n bekannt sind. Denn man kann dann < n als den halben Centriwinkel, und BE als die halbe Seite eines Vielecks betrachten und berechnen. Ist aber BE gefunden, so ergiebt sich CE = SB durch den pythagorischen Satz, denn $CB^2 - BE^2 = SB^2$, oder r^2 — Sin. Quadrat = Cosin. Quadrat.

Aus CE und EB findet man die Tangente TA durch

CE : EB = CA : AT

oder Cos. n : Sin. n = r : AT (Tangente).

Die Sekante CT durch

CE : CB = CA : CT

d. i. Cos. n : r = r : Sekante.

Die Cotangente GH durch

CS : SB = CG : GH

d. i. Sin. n : Cos. n = r : Cotangente.

Die Cosekante CH durch

CS : CB = CG : CH

d. h. Sin. n : r = r : Cosekante.

§. 241. Nimmt man nun den Radius zu 10 Millionen Theilen an, so läßt sich für jeden gegebenen Winkel n die Größe aller genannten Linien in solchen Theilen angeben. Dies mühsame Geschäft ist längst vollendet, und die Berechnung findet man in den sogenannten trigonometrischen Tafeln von Vlack, Wolf, Schulze, Vega ꝛc., wo man die Größe des Sinus, Cosinus, der Tangente und Cotangente u. s. w. für jeden Winkel von Minute zu Minute, und in den größern Tafeln bei den ersten und letzten Graden des Quadranten von Sekunde zu Sekunde berechnet hat.

Wie

Weil nun alle Kreise einander ähnlich sind, so läßt sich jede ähnliche Linie in einem Kreise, aus diesem so berechneten, durch die Proportion finden. Daher muß jedes zu berechnende Dreieck auf die trigonometrischen Linien, deren Größe für einen angenommnen Radius die logarithmischen Tafeln enthalten, zurückgeführt werden. Für Anfänger sind Vlacks Tafeln immer noch brauchbar; Geübteren aber Vega's und Schulze's Tafeln zu empfehlen. Siehe §. 119. Ohne ein solches Werk können Dreiecke nicht berechnet werden.

§. 242. Die Anwendung der trigonometrischen Tabellen ergiebt sich aus folgendem Lehrsatz:

In jedem geradlinichten oder ebenen Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel; und umgekehrt: die Sinus der Winkel verhalten sich zu einander, wie die ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Es läßt sich nämlich um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben. Die 3 Seiten werden dann Chorden. Fig. 37. ist ABO ein △; man fälle aus C die Perpendikel auf die Chorden, so werden sie in zwei Theile getheilt, und < A ist als Peripheriewinkel = $\frac{1}{2}$ BFO = BF, oder der Bogen BF ist das Maaß von A. Wenn nun CF als Radius angesehen wird, so ist BE der Sinus des Winkels A und auch des Bogens BF; BE ist = $\frac{1}{2}$ BO. Weil sich das Gesagte auch auf die Seite AB anwenden läßt, so ist Be = Sin. O = $\frac{1}{2}$ AB; und also

$\frac{1}{2}$ BO : $\frac{1}{2}$ AB = Sin. A : Sin. O
also auch BO : AB = Sin. A : Sin. O,

§. 243. Aus der Lehre von den Proportionen ist uns bekannt, daß aus 3 Gliedern allezeit das 4te gefunden werden kann. Hiernach ergeben sich schon mancherlei Auflösungen.

Z. B. Es sey Fig. 6. in dem Dreieck abc die Seite ab = 120 Fuß; < a = 40°; < b = 58° gegeben, so findet man 1. den Winkel c durch 180° — (40 + 58) = 180° — 98 = 82°; und dann die Seite cb durch die Proportion

Sin. C

Sin. c : ab = Sin. a : cb

d. h. Sin. 81° : 120 = Sin. 40° : cb. In den Taf. findet man = 9902681 : 120 = 6427876

$$\frac{\text{und } 120 \cdot 6427876}{9902681} = 77 \text{ Fuß, } 8 \text{ Zoll, } 9 \text{ Linien}$$
$$= 77' 8'' 9''' 3''''$$

Durch die in den trigonometrischen Tafeln den Winkeln beigefügten Logarithmen wird das Multipliciren und Dividiren so großer Zahlen vermieden, und die Rechnung gewinnt folgende Gestalt:

Sin. 82° : 120 Fuß = Sin. 40° : cb

log. Sin. 40° = 9.8080675

log. 120 Fuß = 2.0791812

11.8872487

log. 82° = 9.9957528

log. cb = 1.8914959, wozu die Zahl 77,893 (d. h. 77 Fuß, 8 Zoll, 9 Linien, 3 Scrupel) gehört.

§. 244. Zur Dreieckberechnung gehören noch folgende Lehrsätze:

1. Im rechtwinklichten Dreieck verhält sich der rechte Winkel (Sinus totus) zur Cathete, wie die Tangente des an dieser Cathete liegenden Winkels zur andern Cathete. Nach Fig. 5. ist dies

Sin. tot. : ac = Tang. c : ab. Es sey ac = 120 Fuß und < c = 35° 50′;

so ist 90 : 120 = Tang. 35° 50′

log. Tang. 35° 50′ = 9,8586019

log. 120 Fuß = 2,0791812

11,9377831

log. 90° = 10,0000000

log. ab = 1,9377831

Hiezu gehört die natürliche Zahl 86,653 d. h. 86 Fuß, 6 Zoll, 5''' 3''''.

2. In jedem Dreieck verhält sich die Summe der beiden Schenkel ab + ac Fig. 38. zu ihrem Unterschiede ac − ab, wie die Tangente

gente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie bc zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. D. h.

$ab + ac : ab - ac = \text{Tang.}\frac{1}{2}(x+y) : \text{Tang.}\frac{1}{2}(x-y)$

Dieser Satz lehrt, wie aus zwei bekannten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Winkel zu finden sind.

Es sey ac = 2115
ab = 1738
Summe = 3853
Unterschied = 377
und $< m = 63° 36'$
also $x + y = 116° 24'$
daher $\frac{1}{2}(x+y) = 58° 12'$

Also 3853 : 377 = Tang. 58° 12′ : Tang. $\frac{1}{2}(x-y)$
log. Tang. 58° 12′ = 10,2075899
log. 337 = 2,5763414
12,7839313
log. 3853 = 3,5857990
log. Tang. $\frac{1}{2}(x-y) = 9,1981323$

wozu der $< 8° 58'$ gehört. Wird derselbe zu 58° 12′ addirt, so erhält man den größern $< y = 67° 10'$, und davon subtrahirt, den $< x = 49° 14'$.

3. Wenn aus einem Punct A Fig. 39. zwei gerade Linien einen Kreis in E und H, D und C schneiden, so ist

$$AC : AH = AE : AD.$$

Mit Hülfe dieses Satzes findet man aus den gegebenen 3 Seiten eines Dreiecks ABC die Winkel.

Beschreibe mit der kleinsten Seite eines Dreiecks, hier mit BC, einen Kreis, der alle 3 Seiten schneidet; dann ist AB + BH = AB + BC (denn BC = BH = EB = Halbmesser; AE = AB − BC. Durch obige Proportion findet man AD, folglich auch CD und CG, denn das Perpendikel GB steht auf der Mitte von CD.

Jetzt

Jetzt ist das Dreieck ABC in 2 rechtwinklichte △ AGB und BGC zerlegt; in einem jeden sind 2 Seiten und der rechte Winkel bekannt, folglich können auch die übrigen Winkel gefunden werden.

Es sey BC = 7 so ist AH = 9 + 7 = 16; AE = 9 − 7 = 2
AB = 9 und
AC = 11 AC : AH = AE : AD
11 : 16 = 2 : 2,9.....
AC − AD = 11 − 2,9 = 8,1 = DC; und ½ DC = 4,05 = CG; also AG = 11 − 4,05 = 6,95.

AB : Sin. tot. = AG : Sin. x
d. h. 9 : 90° = 6,95 : Sin. x
log. 6,95 = 0,8419848
log. Sin. t. = 10,0000000
10,8419848
log. 9 = 0,9542425
log. Sin. x = 9.8877423 = 50°33′ < x

folglich ist < y, als seine Ergänzung zu 90° = 39° 27′

Ferner BC : CG = Sin. tot. : Sin. v
7 : 4,05 = 90°
log. 90° = 10,0000000
− 4,05 = 0,6074550
10,6074550
log. 7 0,8450980
log. v 9.7623570 = 35°21, < v

Also Z = Complement = 54° 39′; und x + v = 85° 54′.

§. 245. Wenn die Sinus und Tangenten von stumpfen Winkeln vorkommen, so nimmt man, weil die Tafeln nur bis 90° berechnet sind, die Ergänzung zu 180°. Z. B. Man sucht den Sinus von 110° 20′, so zieht man 110° 20′ von 180° ab, und erhält 69° 40′, wozu man in den Tafeln den Sinus findet. Aus dem Verhältniß der Seiten und Winkel ergiebt sich, ob ein gefundener Winkel unter 90°, oder die Ergänzung zu 180 ist. Im letzten Fall muß der gefundene Winkel von 180° subtrahirt werden.

§. 246. In allen trigonometrischen Tafeln hat man dafür gesorgt, daß auf einer Seite Sinus, Tangente, Secanten u. s. w. und dieser gegenüber die Cosinus, Cotangenten u. s. w. befindlich sind. Daher kommt es, daß Anfang und Ende der Tafeln beisammen stehen. Sucht man z. B. den Cosinus eines Winkels von 50° 30′, so findet man ihn gegenüber, wo er Sinus bei 39° 30′ ist.

§. 247. Man muß bei trigonometrischen Rechnungen wohl darauf achten, ob der gefundene Logarithmus unter den Logarithmen der natürlichen Zahlen, oder unter denen der Winkel zu suchen sey. Das Maaß jeder Linie ist eine natürliche Zahl; das eines Winkels ein Sinus, eine Tangente. — Anfänger thun wohl, wenn sie das Aufsuchen der Logarithmen an schon ausgerechneten Exempeln üben.

Beim Anordnen einer Proportion merke man, daß jede Seite aus ihrem gegenüberstehenden Winkel, und umgekehrt, zu finden ist nach §. 242. Im rechtwinklichten Dreieck ist schon allemal der rechte Winkel bekannt; nach §. 244 sind die Catheten und Winkel zu finden, indem man jedes Glied der dort gegebenen Proportion zum letzten machen kann.

§. 248. Setzt man den Radius = 1, so sind die Sinus, Tangenten ꝛc. nur Decimaltheile desselben, welches in den Rechnungen nichts weiter ändert, als daß der Sin. tot., den man gewöhnlich mit R oder r bezeichnet, aus derselben wegbleibt, weil 1 weder multiplicirt noch dividirt. Rechnet man mit Logarithmen, und ist r Multiplicator, so vermehrt man die Kennziffer um 10, und wenn r Divisor ist, so vermindert man sie um 10.

§. 249. Weil man bei der Dreiecksberechnung doch nothwendig die trigonometrischen Tafeln gebraucht, und man nicht alle Formeln für die sehr verschiedenen Fälle, welche vorkommen können, im Gedächtniß zu behalten im Stande ist, so pflegt man kleine Tabellen, wie Tafel XII. im Anhange, den trigonometrischen Handbüchern anzuhängen. Mittelst derselben kann jede Aufgabe gelöst werden. Zuvörderst benenne man das gegebene Dreieck mit den Buchstaben A, B, C, wie die Figuren bei dieser Tafel auch benannt sind; lege dann den gegebenen Stücken

ten ihre Werthe unter, und suche in der ersten und zweiten Spalte das Gegebene und Gesuchte auf, so findet man in der dritten Spalte die dazu gehörige Proportion.

§. 250. Die Auflösung der rechtwinklichten Dreiecke ist leichter, als die der schiefwinklichten; deshalb zerlegt man oft die letzteren durch Perpendikel in rechtwinklichte, wie §. 244. geschehen ist. Dabei ist darauf zu achten, ob das Perpendikel in oder außer dem Dreiecke steht. Bei verwickelten Fällen ist eine geometrische Zeichnung zur leichtern Übersicht zu empfehlen.

IX. Die sphärische Trigonometrie.

§. 251. Sie lehrt Dreiecke berechnen, deren Seiten Bogenstücke von Kugelkreisen, folglich krumme Linien sind. Zur Bildung eines Kugeldreiecks gehören 3 Bogenstücke von 3 größten Kreisen auf der Kugeloberfläche, und 3 Winkel, also ebenfalls 6 Stücke.

Die sphärischen Dreiecke werden, wie die ebenen, in recht- und schiefwinklichte, gleich- und ungleichseitige getheilt, je nachdem die Kreisbogen, woraus sie bestehen, beschaffen sind. Rechtwinklicht sind diejenigen, welche einen oder mehrere rechte Winkel haben; schiefwinklicht die, worin alle Winkel schief, d. h. stumpf oder spitz sind. In einem Kugeldreieck können mehrere rechte und stumpfe Winkel seyn, wodurch sich die sphärischen Dreiecke sehr von den ebenen unterscheiden.

Die Seiten werden, weil sie Bogen sind, nach Graden, Minuten und Sekunden gemessen, und keine Seite kann über, oder auch nur $= 180°$ seyn, weil mit so großen Bogen kein Dreieck gebildet werden kann.

§. 252. Übrigens findet zwischen Seiten und ihren gegenüberstehenden Winkeln eben das Verhältniß statt, wie in der ebenen Dreiecksberechnung, d. h. die größte Seite ist dem größten, die kleinste dem kleinsten Winkel gegenüber; gleichen Seiten gehören in einem △ gleiche Winkel; zwei Seiten zusammengenommen sind größer,

als die dritte; und alle 3 Seiten sind allemal kleiner, als 360°. Jeder Winkel kann zwar größer, als 90°, aber niemals = 180° seyn, weil sonst beide Schenkel Eine Linie bilden würden.

Die Grenze der Größe aller 3 Winkel eines sphärischen Dreiecks ist über 180°, und unter 6 rechten < oder unter 540°.

§. 253. Weil die Seiten eines sphärischen Dreiecks Bogen sind, die nach den Sinus wachsen und abnehmen, so ist das allgemeine Gesetz, wodurch die Kugeldreiecke sich bestimmen lassen, von dem in der ebenen Trigonometrie etwas verschieden, und im Wesentlichen folgendes:

Im Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Nach Fig. 40. mögen M, N, R Winkel, und a, b, c Seiten eines Kugeldreiecks seyn, so gilt

Sin. M : Sin. b = Sin. R : Sin. a
und Sin. M : Sin. b = Sin. N : Sin c

Durch Versetzung kann jedes Glied zum letzten gemacht und durch Rechnung gefunden werden.

Wenn nun bei R ein rechter Winkel ist, so ist die Auflösung noch leichter, weil dem rechten Winkel der Logarithme 10,0000000 gehört.

Es sey a = 50°, b = 35°; R ein rechter Winkel; man sucht < M.

Sin. a : Sin. R (Sin. tot.) = Sin. b : Sin. M
d. i. Sin. 50° : 90° = Sin. 35° : Sin. M

log. Sin. 35° = 9,7585913
— Sin. tot. = 10,0000000

19,7585913
log. Sin. 50° = 9,8842540

log. Sin. M = 9,8743373 = 45° 28′ 56″

§. 254. In der ebenen Trigonometrie wußten wir den 3ten Winkel aus den beiden andern zu finden, denn alle drei hatten 180°; nicht so in der sphärischen, denn die 3 Winkel sind stets größer als 180°; daher konnten wir

wir nach dem vorigen §. nicht eher eine Seite finden, bis der gegenüberstehende Winkel bekannt war, und umgekehrt.

§. 255. Es sind also mehrere Gesetze aus der Natur der sphärischen Dreiecke abgeleitet worden, durch welche sich aus 3 bekannten Stücken allemal die übrigen finden lassen.

Zweites Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Sinus einer Perpendikularseite, wie die Tangente des an dieser Seite befindlichen Winkels, zur Tangente der andern Perpendikularseite.

Es sey Fig. 40. bei R der rechte Winkel, so gilt

Sin. tot. : Sin. c = Tang. M : Tang. b
Sin. tot. : Sin. b = Tang. N : Tang. c.

Durch Versetzung der Glieder wird jedes gefunden werden können.

Z. B. wenn b = 35°; M = 48° 29′, so findet man c durch

Tang. M : Tang. b = r = Sin. c
log. r = 10,0000000
log. Tang. b = 9,8452268
19,8452268
Tang. M = 10,0531916
log. Sin. c = 9,7920352 = 38° 17′ = c

§. 256. Drittes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypotenuse.

(Unter Cosinus verstehen wir allemal die Ergänzung einer Seite oder eines Winkels zu 90°.)

Es sey Fig. 41. bei R der rechte Winkel, a Hypotenuse; b und c sind Catheten.

Der

Der Kürze wegen wollen wir den Sinus totus = 90° stets r nennen. Dann gelten

r : Cos. b = Cos. c : Cos. a
r : Cos. c = Cos. b : Cos. a, und durch Versetzung
Cos. b : r = Cos. a : Cos. c
Cos. c : r = Cos. a : Cos. b

Z. B. Es sey b = 35°; c = 38° 17′, man sucht a, so ist

r : Cos. b = Cos. c : Cos. a
35° 38° 17′
log. Cos. 38° 17′ = 9,8948457
— — 35° = 9,9133645
19,8082102
log. r = 10,0000000
Cos. a = 9,8082102 = 49° 59′ = a

§. 257. Auf diese Weise die Winkel zu finden, ist folgendes

Viertes Gesetz.

Der Sin tot. verhält sich zum Cosinus einer Cathete, wie der Sinus des anliegenden Winkels, zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

Fig. 41.

r : Cos. b = Sin. N : Cos. M
r : Cos. c = Sin. M : Cos. N.

Hiernach kann aus 3 Winkeln eine Seite gefunden werden, denn M, N und r sind Winkel, und b und c Seiten; versetzt man die Glieder, so kommt

Sin. N : Cos. M = r : Cos. b
Sin. M : Cos. N = r : Cos. c.

Es sey c = 38° 17′, M = 48° 30′, Gesucht N } so ist r : Cos c = Sin. M : Cos. N
log. Sin. M = 9,8744561
— Cos. c = 9,8948457
19,7693018
log. r = 10,0000000
log. Cos. M = 9,7693018
= 53° 59′ = N.

§. 258.

§. 258. Fünftes Gesetz.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus totus zur Cotangente eines der übrigen Winkel, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. r : Cot. M = Cot. N : Cosin. a
r : Cot. N = Cot. M : Cosin. a.

Nach diesem Gesetz ist aus den 3 Winkeln die Hypotenuse zu finden.

Es sey M = 48° 30′ } r : Cot. M = Cot. N : Cos. a
N = 53° 59′ } log. Cot. N = 9.8615267
Gesucht a } — Cot. M = 9.9468084

log. Cosin. = 9,8083351 = 49° 58′

(Wenn r Divisor ist, so braucht man nur die Kennziffer um 10 zu vermindern oder die 1 auszustreichen.)

§. 259. Sechstes Gesetz.

Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus eines der beiden übrigen Winkel, wie die Cotangente der an diesem Winkel liegenden Cathete zur Cotangente der Hypotenuse.

Nach Fig. 41. r : Cos. N = Cotang. b : Cotang. a
r : Cos. M = Cot. c : Cot. a

Es sey b = 35° } r : Cos. 53° 59′ = Cot. 35° : Cot. a
N = 53° 59′ } log. Cotang. 35° = 10,1547732
Gesucht a } — Cos. 53° 59′ = 9,7693925

log. Cotang. a = 9,9241657,
= 49° 59′

§. 260. Diese angeführten Gesetze sind völlig hinreichend, alle Aufgaben bei rechtwinklichten Kugeldreiecken aufzulösen. Es sind überhaupt 30 Fälle bei rechtwinklichten Kugeldreiecken durch diese 6 Gesetze aufgelöst. Die erste Hälfte der XIII. Tafel im Anhange enthält sie alle. Mittelst derselben ist jede Auflösung leicht; denn man benenne das gegebene Kugeldreieck nur so, daß A

am rechten Winkel, B und C an den andern Winkeln stehen, unterscheide das Gegebene und Gesuchte gehörig, und suche es in der 2ten und 3ten Spalte auf, so enthält die 4te Spalte die dazugehörige Proportion, und in der 5ten steht, ob das Gefundene größer oder kleiner als 90° ist.

§. 261. Da der Sinus und Cosinus eines Winkels unter 90° gleich sind mit einem andern über 90°, so muß das Gesuchte zuweilen zweifelhaft seyn, zumal da wir mit Bogen und Winkeln zu thun haben, die nahe an 180° seyn können. Es ist daher nothwendig, daß man bei den 3 gegebenen Stücken in einer Proportion auch darauf Rücksicht nimmt, ob sie stumpf oder spitz sind, und wo es sich thun läßt (nur bei den Sinus wird es nicht angehen) die spitzen Winkel oder Bogen mit +, und die stumpfen durch — ausdrückt. Es wird sich dann bei dem 4ten Gliede durch das ihm zukommende Zeichen entwickeln, ob das Gefundene größer, oder kleiner, als 90° sey. Eigentlich ist nur der eine Fall zweifelhaft, wenn alle 4 Glieder Sinus sind. (Hat man eine Kugel (Globus), auf welcher sich zur richtigen Übersicht das Dreieck zeichnen läßt, so bleibt kein Fall zweifelhaft; überhaupt ist zur bessern Einsicht in die Einrichtung und Gestalt der Kugeldreiecke eine Kugel nothwendig.)

Die Sinus der Winkel und Bogen (stumpfe und spitze) erhalten stets das Zeichen +.

Die Cosinus der spitzen Winkel sind +; der stumpfen —; bei 90° werden sie Null.

Die Tangenten haben bis 90° +; bei 90° sind sie unendlich; über 90° haben sie —.

Die Cotangenten unter 90° +; bei 90° = 0; über 90° = —.

§. 262. Gleichartig heißen zwei Winkel oder Bogen, wenn sie beide über, oder unter 90° haben; ungleichartig, wenn der eine über, der andere unter 90° hat.

§. 263. Wenn der Radius r = 1 gesetzt wird, so werden alle Sinus und Cosinus zu Brüchen von 1; die Tangenten unter 45° sind auch Brüche, bei 45° = 1; über

über 45° unechte Brüche. In Rechnungen und Formeln kommt dies oft vor und ist bequem. Will man die natürlichen Sinus, Tangenten u. s. w. suchen, so lassen sie sich, wie andere Brüche, durch einander multipliciren und dividiren, und der Quotient wird unter den natürlichen Sinus, Tangenten ꝛc. in den Tafeln aufgesucht.

Es läßt sich aber in solchen Formeln, worin $r = 1$ ist, das r leicht wieder herstellen. Sind die trigonometrischen Linien mit einander bloß multiplicirt, so ist r Divisor gewesen. Z. B. Cot. H = Cos. N . Cot. b. Hier ist r Divisor, und die Formel aus der Proportion r : Cos. N = Cot. b : Cot. H entstanden. Bei Formeln, wie $\text{Cot. H} = \frac{\text{Cos. M}}{\text{Tang. c}}$, ist r im Zähler gewesen, und eigentlich $\text{Cot. H} = \frac{r \text{ . Cos. M}}{\text{Tang. c}}$ zu lesen.

Man muß dann darnach die Kennziffer ordnen, und wenn man den Logarithmen des Divisors von dem des Dividendus nicht abziehen kann, zur Kennziffer des letztern 10 addiren; ist r Divisor, von der Kennziffer des Quotienten 10 abziehen.

§. Die schiefwinklichten Kugeldreiecke sind von zweierlei Art:

1. solche, deren Winkel an der Grundlinie gleichartig sind. Ein von ihrer Spitze herabgelassenes Perpendikel fällt innerhalb des Dreiecks, und ist mit den Winkeln gleichartig;

2. solche, deren Winkel an der Basis ungleichartig sind. Das Perpendikel fällt außerhalb der Basis, und ist mit dem, ihm im Dreieck am nächsten liegenden Winkel ungleichartig.

Das Perpendikel theilt die Dreiecke der erstern Art in zwei rechtwinklichte; auch die der 2ten Art werden dadurch in rechtwinklichte verwandelt, wodurch die Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 263. Man hat 7 Hauptgesetze zur Auflösung schiefwinklichter Dreiecke.

Er=

Erstes Gesetz.

Im schiefwinklichten Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenstehenden Winkel.

Wir haben dies Gesetz als das erste bei den rechtwinklichten Kugeldreiecken kennen gelernt,

§. 266. Zweites Gesetz.

Wenn das Perpendikel Pa Fig. 42. auf der Grundlinie steht, so verhalten sich die Sinus der beiden Winkel x und y, welche durch das Perpendikel entstehen, wie die Cosinus der beiden Winkel an der Grundlinie M und T.

Sin. x : Sin. y = Cosin. M : Cosin. T.

Es sey A (oder Seite bp) = 66° 45′; Winkel M = 43° 20′; < N = 79° 9′; man sucht den Winkel T.

Durch das Perpendikel Pa entstehen 2 rechtwinklichte Dreiecke bpa, und apd. Im erstern ist Seite A, < M, und der rechte Winkel bei a bekannt, man sucht erst < x durch

1 : Cos. A = Tang. M : Cot. x. (Siehe Tafel XIII. Fall 24, wo A = BC; M = B; x = c genannt).

log. Tang. 43° 20′ = 9,9747195
— Cos. 66° 45′ = 9,5963154

log. Cot. x = 9,5710349 = 69° 34′ = x.

Nun ist N — x = y, d. h. 79° 9′ — 69° 34′ = 9° 35′ = y.

Ferner: Sin. x : Sin. y = Cos. M : Cos. T
69° 34′ : 9° 35′ = 43° 20′ : Cos. T

log. Cos. M = 9,8617576
— Sin. y = 9,2213671

19,0831247
log. Sin. x = 9,9717762

log. Cos. T = 9,1113485 = 82° 34′ = T.

Man

Man hat also mehrentheils zwei Proportionen nöthig. (Siehe Anhang Tafel XIII. 2. 5te der schiefwinklichten Dreiecke).

§. 267. Drittes Gesetz.

Steht das Perpendikel auf der Grundlinie, so verhalten sich die Sinus der beiden Stücke derselben umgekehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Winkel. Nach Fig. 42.

Sin. ba : Sin. da = Tang. T : Tang. M
oder Cot. M : Cot. T.

§. 268. Viertes Gesetz.

Die Cosinus der durch das Perpendikel entstandenen Stücke der Grundlinie verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Seiten. Fig. 42.

Cos. ba : Cos. da = Cosin. A : Cos. B.

§. 269. Fünftes Gesetz.

Die Cosinus der beiden Winkel, die das Perpendikel macht, verhalten sich verkehrt, wie die Tangenten der beiden anliegenden Seiten. Nach Fig. 42.

Cos. x : Cos. y = Taug. B : Tang. A.

§. 270. Es falle das Perpendikel außerhalb des Dreiecks, so ist < Z die Ergänzung zu 180°, oder Fig. 43. Nebenwinkel von T, und beide haben einerlei Sinus.

Es sey Seite A = 70°
Seite C = 60°
< M = 30°
} man sucht < T.

Hier sind nun 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, man sucht den einer Seite gegenüber liegenden Winkel. (Vergl. Anhang Tafel XIII. 2. 9ten Fall; wo B = M; A = T; C = p gesetzt ist.)

r : Tang.

r : Tang. A = Cos. M : Tang. ab

log. Cos. M = 30° = 9,9375306
— Tang. A = 70° = 10,4389341

20,3764647
log. r = 10,0000000

log. Tang. ab = 10,3764647 = 67° 12′ = ab.

Da nun Seite C nur 60° hat, so ist da = 7° 12′ und das Perpendikel fällt außerhalb.

Ferner: Sin. da : Sin. ab = Tang. M : Tang. T

log. Tang. M = 30° = 9,7614394
— Sin. ab = 67° 12′ = 9,9646665

19,7261059
— Sin. da = 7° 12′ = 9,0980662

log. Tang. T = 10,6280397 = 76° 45′

Weil das Perpendikel außerhalb liegt, so ist M und T ungleichartig, also der gefundene Winkel = dem Nebenwinkel von T, oder = z, und T = 180° — 76° 45′ = 103° 15′, folglich stumpf.

§. 271. Sechstes Gesetz. Aus 3 gegebenen Seiten einen Winkel zu finden.

Das Product der Sinus der beiden, den gesuchten Winkel einschließenden, Seiten, verhält sich zum Product der Sinus beider Überschüsse der halben Summe der 3 Seiten über jede von beiden Seiten, wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des halben gesuchten Winkels. Fig. 44. Aus 3 Seiten <M zu finden:

Sin. A. Sin. C : Sin. $\frac{1}{2}$ (B + A — C) . Sin. $\frac{1}{2}$ (B + C — A) = r^2 : Sin.^{2} $\frac{1}{2}$ M.

Diese in der Astronomie häufig vorkommende Formel läßt sich folgendermaßen auflösen:

Es sey = A = 65° 31′ halbe Summe 85° 52′
B = 39° 29′ A = 65° 31′ abgez.
C = 66° 45′
Summe = 171° 45′ Diff. I = 20° 21′ = $\frac{B+C-A}{2}$
halbe Summe 85° 52′ } halbe Summe 85° 52′
C = 66° 45′ abgez.
Diff. II = 19° 7′ = $\frac{B+A-C}{2}$

Diff. I = log. Sin. 20° 21′ = 9,5412721
Diff. II = log. Sin. 19° 7′ = 9,5152017
Adec. Erg. log. Sin. 65° 31′ = 0,0409195
Cdec. Erg. log. Sin. 66° 45′ = 0,0367832
19,1341765
√ ausgez. durch 2 :)
log. $\frac{1}{2}$ M = 9.5670882 = 21° 40′ = $\frac{1}{2}$M
(2
43° 20′ = M

§. 272. Siebentes Gesetz. Aus 3 gegebenen Winkeln eine Seite zu finden.

Das Product der Sinus der Winkel, welche die gesuchte Seite einschließen, verhält sich zum Product der Cosinus beider Überschüsse der halben Summe über jeden von beiden Winkeln, wie das Quadrat des Halbmessers, zum Quadrat des Cosinus der halben Seite. Nach Fig. 45., wenn Seite A gesucht wird,

Sin. M . Sin. N : Cos. $\frac{1}{2}$ (T + M − N) . Cos. $\frac{1}{2}$ (T + N − M) = r², Cosin.² $\frac{1}{2}$ A.

Es sey M = 50° 36′ halbe S. 104° 22′
T = 75° 58′ < N = 82° 10′
N = 82° 10′
Summe 208° 44′ Diff. I = 22° 12′ = $\frac{T+M-N}{2}$
halbe S. = 104° 22′ halbe S. 104° 22′
< M = 50° 36′
Diff. II = 53° 46′ = $\frac{T+N-M}{2}$

log.

log. Diff. I = Cos. 22° 12′ = 9,9665503
log. Diff. II = Cos. 53° 46′ = 8,7716426
∢M decad. Erg. log. Sin. 50° 36′ = 0,1119702
∢N — — — Sin. 82° 10′ = 0,0040716

19,8542347

√ ausgez. durch 2:)

log. Cosin. ½ A = 9,9271173 = 32° 16′ = ½ A

(2

ganze Seite = 64° 32′ = A

§. 273. Zur bequemen Auflösung der schiefwinklichten Kugeldreiecke befindet sich im Anhange die zweite Abtheilung der XIII. Tafel. Man hat bei ihrem Gebrauch nur nöthig, zu untersuchen, was in einem Dreieck bekannt oder gegeben, und was das Gesuchte sey. Was man weiter zu thun habe, enthält die jedem Fall beigefügte Auflösung sehr deutlich. Caille ist der Verfasser derselben.

Die sphärische Trigonometrie wird denen, die geographische und astronomische Rechnungen zu machen haben, eine unentbehrliche Wissenschaft seyn; jedoch beschränken sich die Meisten darauf, eine Fertigkeit im Gebrauch der Tafel XIII. zu erlangen, mit der sie auch ziemlich ausreichen.

X. Von den Kegelschnitten.

§. 274. Zu den krummen Linien, welche ihren Ursprung aus dem senkrechten Kegel haben, gehören: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Lehre vom Kreis rechnet man mit zur Geometrie; die aber von der Parabel, Ellipse und Hyperbel gehört zur höhern Geometrie, von welcher wir die vorzüglichsten Lehren anführen wollen.

Der Kreis entsteht, wenn eine schneidende Ebene einen Kegel so durchdringt, daß die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche parallel wird.

§. 275. Wird ein senkrechter Kegel ABC Fig. 46. so durchschnitten, daß die Durchschnittsfigur mit der

Seite

Seite AB parallel wird, so entsteht auf der Oberfläche eine krumme Linie GLEFS, welche Parabel heißt.

Es sey EF die schneidende Ebene. Man lege da, wo sie in den Kegel dringt, die Ebene ED, und an einem andern beliebigen Orte eine zweite Ebene KH, beide mit der Grundfläche parallel, durch den Kegel, so werden ihre Durchschnittsfiguren Kreise seyn. Wo der Parabelschnitt die Kreisfläche HJKL trifft, entsteht ein Durchschnitt, der zur Hälfte in der Figur angedeutet, und JL ist. Diese JL steht auf dem Diameter HK in J, und auch auf der Mitte des Parabelschnitts EF, welche Axe heißt, senkrecht, und berührt in L sowol den Kreis HLK, als die parabolische Linie ELG, welche letztere durch den Abstand JL von der Axe bestimmt wird. Da die Ebene HK beliebig gelegt ist, so wird der Werth, den wir für JL ausmitteln, allgemein gelten, die HK mag liegen, wo sie will; man sieht bald, daß JL größer wird, je weiter HK von E entfernt ist.

Die Dreiecke ADE und EJK sind einander ähnlich, daher gilt

$$AD : DE = EJ : JK, \text{ und } JK = \frac{DE \cdot EJ}{AD}$$

Weil HK der Diameter eines Kreises ist, und JL senkrecht darauf steht, so gilt

$$HJ : JL = JL : JK, \text{ und } JK = \frac{JL^2}{HJ}; \text{ und } JL^2 = HJ \cdot JK$$

Da $DE = HJ$, so kann auch DE für HJ gesetzt werden, dann ist $JL^2 = DE \cdot JK$; und für JK hatten wir den Werth $\frac{DE \cdot EJ}{AD}$ gefunden, wird nun dieser für JK gesetzt, so ist

$$JL^2 = \frac{DE \cdot DE \cdot EJ}{AD} = \frac{DE^2\, EJ}{AD}$$

In einer und derselben Parabel ist AD und DE beständig; EJ und JK aber hängen von der Höhe der Ebene HK ab; folglich ist $\frac{DE^2}{AD}$ eine beständige Größe, und

heißt

heißt der Parameter. Man bezeichnet ihn mit a, b oder p; wir wählen das letztere Zeichen, und nennen den Parameter = p.

Die veränderliche JL heißt y; und die veränderliche EJ heißt x; dann ist obige Gleichung $JL^2 = \frac{DE^2}{AD} . EJ$ auch gleich: $y^2 = p . x$, welche man die Gleichung für die Parabel nennt.

§. 276. In Fig. 47. ist die Parabel außer dem Kegel zu sehen. Die krumme Linie SELG ist sie; in E ist der Scheitel; EB heißt Axe; ES, und EG sind ihre Arme, die unendlich lang seyn können. Ein beliebiges Stück EJ von der Axe heißt Abscisse = x; eine auf J senkrecht stehende Linie JL heißt Ordinate = y.

Wenn zwei von den Größen y, x, und p bekannt sind, so ist die dritte leicht zu finden. Denn

$$y^2 = x . p$$

$$\text{Also } y = \sqrt{(x . p)} = \text{Ordin.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } x = \frac{y^2}{p} = \text{Abscisse.} \\ \text{und } p = \frac{y^2}{x} = \text{Parameter.} \end{array}\right\}$$

§. 277. Die Gleichung für die Parabel läßt sich auch aus dem Kreise ableiten.

Es sey BmfD der eine Arm einer Parabel, BA die Axe; Ba = x = Abscisse; ad = p = Parameter; am = y = Ordinate. Man sehe Bd als den Diameter eines Kreises an, aus dessen Mittelpunct c sich der Halbkreis dmB beschreiben läßt. Dann gilt nach §. 196.

da : am = am : AB: in unsern Zeichen

p : y = y : x

folglich $p . x = y^2$

Dasselbe wird auch in dem Halbkreise gfB der Fall seyn, worin Be Abscisse, ef Ordinate, eg Parameter ist. Man bemerke, daß Abscisse und Ordinate wachsen, je weiter letztere vom Scheitel B absteht, aber ad = eg bleibt, weil sie Parameter ist; und daß man jede der 3 Größen x, y und p durch Zeichnung finden kann, sobald zwei von ihnen bekannt sind.

Wäre

Wäre z. B. x und y gegeben, so findet man den Parameter, wenn man an den Punct m einen rechten Winkel setzt, dessen einer Schenkel in B liegt. Der andere Schenkel wird die Axe in d schneiden, und dadurch den Parameter ad bestimmen.

Wäre p und y, oder da und am gegeben, so fände man aB oder x eben so, weil die Lage des rechten Winkels an m durch die des einen Schenkels dm bestimmt wird, und der andere die Axe in B schneiden muß.

Die Ordinate y findet man, wenn man x und p in einer geraden Linie an einander setzt, im Endpunct von x (hier in a) ein Perpendikel am errichtet, dessen Länge durch den Kreis bestimmt wird, der sich aus der Mitte der x + p durch B und d ziehen läßt.

§. 278. Wenn die Parabelarme glattpolirte Flächen wären, so würden alle mit der Axe parallel einfallende Lichtstrahlen SR Fig. 49. nach der Brechung in dem Punct F zusammen kommen, welcher Brennpunct heißt.

Der Abstand des Brennpuncts vom Scheitel ist $\frac{1}{4}$ p (Parameter), und die Ordinate auf demselben ist $\frac{1}{2}$ p; nach Fig. 49. ist

$FM = \frac{1}{2} p$; und $TM = p$
$AF = \frac{1}{4} p$.

§. 279. Aus der Abscisse und zugehörigen Ordinate findet man den Brennpunct. $AF = \frac{y^2}{4x} = \frac{PR^2}{4 . AP}$.

§. 280. Eine Linie FR vom Brennpunct der Parabel an den Arm derselben ist allezeit so groß, als die Abscisse der Ordinate, die aus diesem Punct R auf die Axe herabgelassen, plus der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel, d. h. Fig. 49.

$FR = AP + AF = x + \frac{1}{4} p$.

§. 281. Eine Linie AM, vom Scheitel zur Ordinate in der Parabel Fig. 50. heißt Chorde. Sie ist

$AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(x^2 + px)}$.

Jede gerade Linie, welche die Parabel in 2 Puncten schneidet, heißt Chorde, oder Sehne. Da alsdann die Seh-

nen mit der Axe nicht parallel laufen können, so wird die Axe oder ihre Verlängerung von den Sehnen unfehlbar getroffen werden.

§. 282. Tangente heißt eine Linie LF Fig. 51., welche die Parabel nur in Einem Puncte L berührt. Sie kann nie der Axe parallel werden, und muß also ihre Verlängerung durchschneiden.

§. 283. Die Linie, oder der Theil der Axe, FP, welche durch die auf den Berührungspunct der Tangente gezogene Ordinate PL bestimmt wird, heißt Subtangente.

§. 284. Ein Perpendikel auf der Tangente im Punct L, die LR, Fig. 51., heißt Normale; das Stück der Axe PR ist Subnormale.

§. 285. Die Werthe für diese Linien sind:

FA = AP = x; folglich ist FP = 2x = Subtangente; also liegt die Hälfte derselben innerhalb, und die andere außerhalb der Parabel.

Die Tangente $FL = \sqrt{(FP^2 + PL^2)} = \sqrt{(4x^2 + px)}$.

Die Subnormale $PR = \frac{1}{2}p$, = dem halben Parameter, also beständig.

Die Normale $RL = \sqrt{\left(\frac{p^2+4px}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(p^2+4px)}}{2}$.

Man kann sich FR als den Diameter eines Kreises vorstellen, in dessen Peripherie die drei Puncte F, L und R liegen.

§. 286. Wenn nun Fig. 51. in f der Brennpunct, so ist $Ff = x + \frac{1}{4}p$; fL ist auch $\frac{1}{4}p + x$; $AR = x + \frac{1}{4}p$, und $fR = x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p$, folglich $\triangle$ FfL gleichschenklicht. Der Mittelpunct des Kreises FLR ist daher im Brennpunct f, woraus folgt, daß mit Hülfe eines Kreises, dessen Radius fL ist, sich Tangente, Subtangente und Normale mechanisch finden lassen.

§. 287. Eine mit einer Tangente TM Fig. 52. parallele Sehne GL wird durch eine mit der Axe parallel gezogene, und durch den Berührungspunct M der Tan-

gente

gente TM gehende Linie NS in zwei gleiche Theile getheilt, so daß up = pL.

§. 288. Die Linie NS, welche mit der Axe parallel läuft, heißt Diameter; up und pl sind seine Ordinaten, und der Punct M sein Scheitel; Mp Abscisse auf dem Diameter.

Es sind unzählig viele Diameter und Sehnen in einer Parabel möglich. Zieht man zwei oder mehrere parallele Sehnen, und theilt sie in 2 gleiche Theile, so wird man Puncte finden, durch welche der Diameter geht. Errichtet man auf dem Diameter mehrere senkrechte Linien und verlängert sie bis zur Parabel, so findet man auf ihrer Mitte die Puncte, durch welche die Axe derselben geht.

§. 289. Das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten auf der Axe ist:

$$x : y = y : p;\ \text{also}\ y^2 = x.p;\ \text{oder} = x\frac{y^2}{p}$$

$$x' : y' = y' : p;\ \text{also}\ y'^2 = x'\,p;\ \text{oder}\ x' = \frac{y'^2}{p}$$

also verhalten sich x zu x' wie die Quadrate von y und y'. Sind nun Mp und Mv zwei verschiedene Abscissen, und = u, u'; up und wv dazu gehörige Ordinaten auf dem Diameter, und = z, z': so verhält sich auch hier

$$u : u' = z^2 : z'^2$$

d. h. die Abscissen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Ordinaten.

Die 3te Proportionalgröße zur Abscisse und Ordinate ist allezeit gleich dem Parameter, x : y = y : p; und bei dem Diameter u : z = z : t. Diese 3te Proportionalgröße ist constant oder beständig. Bei dem Diameter ist

der Parameter $t = \frac{z^2}{u}$

die Ordinate $z = \sqrt{(t.u)}$

die Abscisse $u = \frac{z^2}{t}$.

§. 290. Vergleicht man den Parameter t des Diameters mit dem Parameter p der Axe, so findet sich, daß $\frac{1}{4}$ t

$\frac{1}{4}$ t = x + $\frac{1}{4}$ p, folglich ist t gleich der aus dem Brennpunct zum Durchschnittspunct des Diameters gezogenen geraden Linie FR (Fig. 49. §. 280.) viermal genommen; d. h. t = 4 (x + $\frac{1}{4}$ p). Jeder Diameter hat seinen eignen Parameter.

§. 291. Jede Linie Fm oder FM, Fig. 53., vom Brennpunct zur Parabel heißt Radius vector, oder Vector, oder Zuglinie.

Wenn nun FR und Fr Perpendikel auf die Tangenten TM und tm sind, so verhalten sich FR : Fr = |/FM : |/Fm, d. h. die Perpendikel aus dem Brennpunct auf die Tangenten verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Zuglinien.

§. 292. Den Flächenraum, welchen die parabolische Linie einschließt, kann man nur dann angeben, wenn die Fläche durch eine doppelte Ordinate CB Fig. 55. geschlossen ist.

Der Triangel BAC ist in der paraboliſchen Fläche der größtmögliche. Nimmt man seinen Flächenraum $\frac{4}{3}$mal, so hat man den Flächenraum des paraboliſchen Abſchnitts CGAHB. Die Grundlinie CB = 2y; die Höhe des △ ist DA = x, sein Inhalt $\frac{2y \cdot x}{2}$ = yx = Fläche des größten Dreiecks, und $\frac{4yx}{3}$ = Inhalt des paraboliſchen Abſchnitts.

§. 293. Der paraboliſche Raum muß sich, wie jeder andere, in jede andere geometriſche Figur verwandeln laſſen, wozu der Abſchnitt Verwandlung der Figuren Anleitung geben wird.

§. 294. Ein Parallelogramm auswärts um die Parabel verhält sich zur Fläche derſelben, wie 3 zu 2; daher verhalten sich die paraboliſchen Räume zu einander, wie die Parallelogramme, die um sie beſchrieben sind. Nach Fig. 55. verhält sich Parallelogramm JKBC zur paraboliſchen Fläche CGAHBC wie 3 zu 2.

§. 295 Parabeln sind einander ähnlich, wenn die darin beſchriebenen größten Triangel einander ähnlich sind;

sind; daher ist es leicht, ähnliche Parabeln zu zeichnen, wenn man ähnliche Dreiecke beschreibt, aus der halben Grundlinie (= y) und Höhe (= x) nach §. 276. den Parameter sucht, und darnach die Parabeln construirt.

§. 296. Wenn der Parameter bekannt ist, so läßt sich die Parabel folgendermaßen zeichnen. Fig. 54.

Ziehe die gerade Linie dK, und auf derselben sey Bd = Parameter, BK = Axe, in B der Scheitel, auf dem das Perpendikel BN errichtet wird.

Mit dem Parameter Bd beschreibe aus B den Bogen a1d und mehrere Bogen aus andern beliebigen Puncten der Axe, so, daß sich die Bogen alle in d vereinigen und die aufgerichtete BN schneiden. In den Puncten a, e, h, i, wo die Kreise die Axe treffen, errichte senkrechte Ordinaten, und trage auf sie von der Axe aus die Weiten B1, B2 B3 ꝛc., so erhält man auf den Ordinaten die Puncte m, f, r, s ꝛc., durch welche sich der Parabelarm BD ziehen läßt. Es ist dann B1 = am, B2 = ef, B3 = hr ꝛc.

§. 297. Die richtigste Parabel erhält man aber, wenn man für die Abscissen Ba, Be, Bh ꝛc. die Ordinaten am, ef, hr ꝛc. berechnet, und nach dem Maaßstabe aufträgt. Je näher die Ordinaten an einander stehen, desto näher liegen die Puncte m, f, r, s an einander und desto genauer läßt sich der Parabelarm ziehen. Es versteht sich von selbst, daß die Ordinaten auch auf die andere Seite der Axe getragen werden müssen, um den andern Arm zu bekommen. Je größer man den Parameter Bd nimmt, desto weiter sperren sich die Parabelarme aus einander.

§. 298. Es bewege sich die Parabel, 55te Fig., um ihre Axe AD, so entsteht ein parabolischer Afterkegel, dessen unterster Durchmesser CB, dessen Höhe DA ist. Durch diese Bewegung beschreibt das Parallelogramm JKBC einen Cylinder, dessen Diameter CB und dessen Höhe DA ist. Dieser Cylinder ist doppelt so groß an körperlichem Inhalt, als der Afterkegel.

Nun ist AD = x; DB = y, folglich der Inhalt des Cylinders $y^2 px$; und des Afterkegels CGAHB $= y^2$

$= \frac{y^2 px}{2}$, wobei p die bekannte Zahl 3,14.... bedeutet.

§. 299. Es ist gut, wenn Anfänger sich an der Berechnung und Zeichnung einer Parabel üben, daher wird ihnen folgende Berechnung nicht unwillkommen seyn.

Es sey der Parameter = p = 30, die erste Abscisse = x = 5, die zweite = 10 ꝛc., so finden wir die dazugehörigen Ordinaten durch

$y = \sqrt{(xp)} = \sqrt{(5.30)} = \sqrt{150} = 12{,}24.....$

Wenn x = 5, so ist y = 12,247.....

10	—	—	17,320
15	—	—	21,213
20	—	—	24,495
25	—	—	27,386
30	—	—	30,000
35	—	—	32,404
40	—	—	34,641
50	—	—	38,730
60	—	—	42,426
70	—	—	45,826
80	—	—	48,990
90	—	—	51,962
100	—	—	54,772
110	—	—	57,446
120	—	—	60,000
130	—	—	62,450
140	—	—	64,807
150	—	—	67,092.

Diese Werthe für x und y trägt man nach §. 297. auf eine gerade Linie von einem Punct, dem Scheitel, aus, und bekommt für jeden Arm 20 Puncte, durch welche er sich schon genau genug ziehen läßt.

§. 300. Um mit einem Blicke die Formulare für alle parabolische Linien übersehen zu können, sammeln wir sie in folgender Tabelle, in welcher auch die Zahlenwerthe, wie sie die Rechnung und Zeichnung in der Fig. 71. übereinstimmig gegeben haben, befindlich sind. Das Maaß ist $\frac{1}{2}$ Rheinl. Decimalzoll = 100.

Formeln und Berechnung für alle Linien in der Parabel Fig. 71.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
LA = Parameter	$p = \frac{y^2}{x}$ (gegeben).	30.
AP = Abscisse	$x = \frac{y^2}{p}$ (gegeben).	60.
PM = Ordinate	$y = \sqrt{(x \cdot p)}$.	42,426
TP = Subtangente	$= 2x$	120.
TA = AP =	x	60.
TM = Tangente	$= \sqrt{(4x^2 + y^2)}$	127,279
F = Brennpunct	$AF = \frac{1}{4} p = \frac{y^2}{4x}$	7,5
Fd = Ordinate in F	$= \frac{1}{2} p$	15.
PR = Subnormale	$= \frac{1}{2} p$	15.
PF — —	$= x - \frac{1}{4} p$	52,5
MR = Normale	$= \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}$	45.
FM = Radius vector	$= x + \frac{1}{4} p$	67,5
AM = Chorde	$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$	73,484
KL = Diameter		
Parameter d. Diam.	$t = 4\left(x + \frac{p}{4}\right)$ oder $= \frac{z^2}{v}$	270.
NO = Abscisse des Diameters	$= v = \frac{z^2}{t}$ (gegeben)	20,4
SO = OH = Ordinate des Diameters	$= z = \sqrt{(t \cdot v)}$	74,219
NE	$= \frac{y \cdot y}{2x}$	7,212
OE (oder auch durch)	TP : PN = NO : NE TP : TM = NO : OE	21,72
SE =	SO — OE =	52,6

PE

Linien.	Formeln.	Zahlen-Werth.
PE =	$y - NE =$	35,2
AQ eine größere Abscisse	x' (gegeben)	150.
BQ größere Ordinate	$y' = \sqrt{(x' \cdot p)}$	67,082
Fläche des größten △ ABH	$= AQ \cdot BQ = x' \cdot y'$	10062,3 □Maaß.
Fläche des parab. Abschnitts HNAMB	$= \frac{4}{3}(AQ \cdot BQ) = \frac{4x'y'}{3}$	13416,4 □Maaß.
Inhalt des Afterkegels AMBHNA	$= \frac{y'^2 \cdot x' \cdot 3,14\ldots}{2}$	1060275. Kubikmaaß.

Von der Ellipse.

§ 301. Es dringe bei E eine schneidende Ebene in den senkrechten Kegel ABC Fig. 56., und spalte denselben nach der Richtung EKH so, daß die Axe mit getroffen wird, so entsteht die Durchschnittsfigur EKHL, welche Ellipse heißt, und in der Figur zur Hälfte sichtbar ist.

Man lege die mit der Grundfläche BC parallelen Ebenen DE und HJ da durch den Kegel, wo die Ellipse anfängt und endigt, so wie auch eine schneidende parallele Ebene FG irgendwo durch die Ellipse. Alsdann wird FG der Durchmesser eines Kreises, dessen Hälfte FLG; KL wird sowol auf EH als FG senkrecht stehen, und die Ordinate der Ellipse, EH Axe, und EK Abscisse derselben seyn. Aus der Beschaffenheit des Kegels und der Lage der schneidenden Ebenen suchen wir eine Gleichung für die Ordinate KL.

△ DEH ist ähnlich △ FKH, daher gilt

$$EH : DE = HK : FK, \text{ und } FK = \frac{DE \cdot HK}{EH},$$

△ EHJ ist ähnlich △ EKG, daher gilt

$$EH : HJ = EK : KG, \text{ und } KG = \frac{EK \cdot HJ}{EH}.$$

Aus

Aus dem Kreise gilt

$FK : KL = KL : KG$, und $KL^2 = FK \cdot KG$.

Wenn nun in der letzten Gleichung für FK und KG das gefundene Gleiche untergelegt wird, so ist

$$KL^2 = \frac{HK \cdot DE \cdot EK \cdot HJ}{EH \cdot EH}.$$

Nennt man $EH = a$, so wird $KL^2 = y^2 = \frac{DE \cdot HJ \cdot HK \cdot EK}{a \cdot a}$;

und $EK = x$, so ist $HK = a - x$; $\frac{DE \cdot HJ}{a}$ ist eine beständige Größe und heißt Parameter $= b$. Diese Zeichen untergelegt, giebt:

$$\frac{b.(a-x)x}{a} = \frac{b.(ax-x^2)}{a} = bx - \frac{bx^2}{a} = y^2 = \text{Ordinate.}$$

In der Ellipse ist also das Quadrat der Ordinate gleich der Abscisse, multiplicirt mit dem Parameter, minus dem Parameter multiplicirt mit dem Quadrat der Abscisse, dividirt durch die große Axe, d. h. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

§. 302. Die Fig. 57. ist eine Ellipse; in derselben ist $EH = a =$ große Axe, $JK =$ kleine Axe $= c$. Beide Axen theilen die Ellipse in 4 gleiche Quadranten; in C ist der Mittelpunct; E und H heißen Scheitel der Ellipse. EP ist eine Abscisse auf der großen Axe, und PM die dazu gehörige Ordinate, desgleichen PN.

Man bemerkt leicht, daß die Ordinaten immer kleiner werden, je näher sie am Scheitel stehen; in E und H werden sie $=$ Null, im Mittelpunct C aber am größten, d. h. gleich der kleinen Axe seyn. Eine Ellipse ist vollkommen bestimmt, wenn ihre beiden Axen bekannt sind; wenn beide Axen einander gleich werden, so ist die Ellipse ein Kreis; je mehr beide Axen verschieden sind, desto länglicher wird die Ellipse.

§. 303. Ist die halbe kleine Axe die größte Ordinate, so ist $x = \frac{1}{2} a$ und die Gleichung für die Ellipse wird

$$\frac{ba}{2} - \frac{baa}{4a} = y^2$$

$$\frac{ba}{2} - \frac{ba}{4} = y^2 \quad (4$$

$$2ba - ba = 4y^2$$

$$ba = 4y^2$$

$$\frac{ba}{4} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{ba}{2}} = y = \tfrac{1}{2} C = \text{halben kleinen}$$

Axe, folglich ist die ganze kleine Axe $= \sqrt{ba} = c$; und $c^2 = ba$, also $a : c = c : b$, d. h. die kleine Axe ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 304. Beide Axen und der Parameter sind beständige Größen, und aus zweien von ihnen ist allezeit die 3te zu finden.

Die große Axe $a = \frac{c^2}{b}$; die kleine Axe $c = \sqrt{ab}$;

der Parameter $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 305. In jeder Ellipse sind zwei Brennpuncte F und f Fig. 58., welche gleich weit von den Scheiteln abstehen, und in den Puncten der großen Axe liegen, auf welchen die Ordinaten so groß sind, als der halbe Parameter. Folglich ist der ganze Parameter so groß, als die doppelte Ordinate auf dem Brennpunct. In Fig. 58. ist PM = Parameter.

§. 306. Man findet die Brennpuncte, wenn man die halbe große Axe, vom Endpunct der kleinen Axe an, auf die große Axe trägt. Denn $FD = \frac{1}{2} a = AC$.

Der Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte ist CF, und $CF^2 = FD^2 - CD^2$, oder

$$CF^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} c^2; \text{ also } CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}},$$

§. 307.

§. 307. In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zu einander, wie die Rechtecke, die aus der Multiplication der beiden zugehörigen Stücke der großen Axe entstehen.

Nach Fig. 57. $PM^2 : QN^2 = EP.PH : EQ.QH$

$y^2 : z^2 = x.(a-x) : v.(a-v)$

wobei z eine zweite Ordinate und v ihre Abscisse ist. Eigentlich hat jede Ordinate 2 Abscissen, z. B. zu y oder oder PM gehören die Abscissen EP und HP; daher kann man auch sagen:

die Quadrate der Ordinaten verhalten sich, wie die Rechtecke aus ihren Abscissen.

§. 308. Zeichnung der Ellipse.

1. Man befestige in den beiden Brennpuncten einen Faden, welcher länger, als der Abstand der Brennpuncte von einander, und allemal gleich der großen Axe ist. Mit einem schreibenden Stift ziehe man den Faden gleichmäßig an, und führe denselben um die Brennpuncte herum, so wird der Stift die krumme elliptische Linie beschreiben. Wenn in Fig. 58. in F und f die Brennpuncte, so ist FDf der Faden und in D der schreibende Stift; rückt D nach M, so ist fMF der Faden. Folglich ist $fD + DF = fM + MF =$ der großen Axe.

Anmerk. Diese Zeichnungsart ist zwar sehr leicht, hat hat aber doch ihre Schwierigkeiten, denn der Faden wird während der Zeichnung durch das Anziehen länger. Bei großen Figuren, als elliptische Gewölbebogen, Stubendeckenmalerei u. dgl. ist sie indessen immer noch die anwendbarste.

2. Mühsamer, aber auch genauer, ist folgende Verfahrungsweise: Für die gegebene große Axe und den Parameter berechne man aus den willkührlich genommenen Abscissen die dazu gehörigen Ordinaten und trage sie rechtwinklicht von den Scheiteln an auf beide Seiten der großen Axe.

Je weniger die Abscissen von einander verschieden sind, desto enger liegen die Ordinaten an einander, und desto mehr

mehr Puncte erhält man, durch welche sich die krumme Linie aus freier Hand ergänzen läßt. Da beide Axen die Ellipse in 4 völlig gleiche Quadranten theilen, so ist die Berechnung für einen hinlänglich. Weiter unten theilen wir eine solche Berechnung mit.

§. 309. Wenn die Abscissen vom Mittelpunct C Fig. 57. genommen werden, welches gewöhnlich geschieht und bequem ist, so erhält man folgende Gleichung für die Ordinaten y

$$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)},$$

worin $u = CP$, Abscisse vom Mittelpunct, $c =$ kleine, $a =$ große Axe.

Der Parameter b ist nach dieser Formel $= \frac{a\,y^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$.

Die Abscisse $u = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$.

Anmerk. u ist das Stück der halben großen Axe, was x übrig läßt, also $U = \frac{1}{2}a - x$.

§. 310. Linien aus den Brennpuncten nach irgend einem Punct M in der Ellipse Fig. 58. sind zusammengenommen so groß, als die große Axe. $FM + fM = a$, der Punct M mag liegen, wo er will; FM und fM heißen Vectoren oder Zuglinien.

§. 311. Liegt M nicht in D, so sind FM und fM ungleich. Ihr Unterschied wird gefunden:

$$fM = \tfrac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}; \quad FM = \tfrac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

$$\text{Die Differenz} = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}.$$

§. 312. Die Puncte F und f heißen deshalb Brennpuncte, weil die Winkel, welche die Linien FM und fM mit der Ellipse machen, einander gleich sind, Fig. 58. ist $< m = < n$. Wenn daher in dem einen Brennpunct ein leuchtender Körper stände, und die innere Seite einer Ellipse eine glatte Ebene wäre, so würden die auf den Um-

kreis

heis fallenden Lichtstrahlen von allen Puncten nach dem andern Brennpuncte hin zurück fallen, und sich dort sammeln.

§. 313. Eine gerade Linie durch das Centrum, wie mH Fig. 59., heißt ein Diameter, und theilt die Ellipse in 2 gleiche Hälften. Die Ordinaten vom Endpunct des Diameters zur Axe sind gleich groß, Pm = GH.

§. 314. Eine Linie, welche die Ellipse nur in einem Puncte berührt, als OM, heißt Tangente des Puncts M. Sie wird folgendermaßen gezogen:

Aus den Brennpuncten F und f ziehe gerade Linien an den Punct, den die Tangente berühren soll, hier an M, Fig. 59., verlängere fM bis R, daß MR = FM wird, und ziehe RF zusammen. Nun theile RF in 2 Theile in L, und ziehe ML, welche verlängert die Axe in O schneidet, so ist OM die Tangente.

§. 315. Zieht man mit der Tangente OM parallel einen Diameter Hm, so schneidet derselbe von fM ein Stück fT ab. Das übrige Stück TM ist der halben großen Axe gleich.

$TM = \frac{1}{2}a$; weil nun $fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$

so ist das Stück $fT = \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$.

Das Stück fR = a = der großen Axe.

§. 316. Ein Perpendikel auf der Tangente am Punct M, nach der Axe, theilt den Winkel, den die Vectoren an M machen, in zwei gleiche Theile. Winkel $n = < r$, und dM ist Perpendikel. Der Abstand des Perpendikels vom Brennpunct, oder

$$Fd = \frac{fF \cdot FM}{fR} = \frac{\sqrt{(a^2-c^2)} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)}{a}.$$

§. 317. Die OP heißt Subtangente und macht mit der Ordinate PM und Tangente OM einen rechtwink-

winklichten Triangel. Sieht man od als den Durchmesser eines Kreises an, so lassen sich die 3 Puncte O, M und d in die Kreislinie bringen.

$$PO = \frac{a^2 - 4u^2}{4u}; \quad Pd = \frac{c^2 u}{a^2}.$$

§. 318. Die Tangente ist im rechtwinklichten Dreieck OPM die Hypotenuse, daher ist $OM = \sqrt{(PM^2 + OP^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 - 4u^2}{4u}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)}$.

§. 319. Die Subtangente OP giebt auch die Proportion Fig. 59. und 60.

$$CP : AP = BP : OP$$

$$u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a + u : OP, \text{ und } OP = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}.$$

Die Entfernung des Puncts O vom Centro C giebt

$$CP : AC = AC : OC$$
$$= u : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a : OC$$
$$\text{und } OC = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u}.$$

§. 320. Den Abstand OA giebt die Proportion

$$CP : AP = CA : OA$$

$$\text{d. h. } u : \tfrac{1}{2}a - u = \tfrac{1}{2}a : OA; \text{ und } OA = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \tfrac{1}{2}a.$$

§. 321. Subtangente und Abscisse, mit einander multiplicirt, geben ein Rechteck, welches eben so groß ist, als dasjenige, was aus der Multiplication der beiden Stücke der großen Axe, die die Abscisse trennt, entsteht.

$$OP \cdot PC = PB \cdot AP.$$

§. 322. Das Perpendikel auf der Tangente in M heißt Normale; in Fig. 59. ist Md die Normale; Pd die Subnormale.

Die Subnormale $Pd = u - dC$, oder $\frac{c^2 u}{a^2}$.

Die Normale $Md = \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.

§. 323.

§. 323. Man ziehe Fig. 60. durch M einen Diameter MCV; und einen andern QCN mit der Tangente OM parallel, so hängen beide Diameter von der Tangente ab, und heißen conjugirte Diameter. Berührte die Tangente den Endpunct einer Axe, so müßte ihr die andere Axe parallel seyn; folglich sind beide Axen auch conjugirte Diameter.

§. 324. Wenn von den Endpuncten der Diameter Perpendikel auf die Axe fallen, NJ und PM, so ist

$$CJ^2 = AP.PB; \text{ und } CP^2 = AJ.JB$$

und es sey $CJ^2 = v^2 = \frac{a^2}{4} - u^2$ $\qquad u^2 = \frac{a^2}{4} - v^2$.

§. 325. Weil hiedurch die Abscisse $CJ = v$ gefunden ist, so ist auch NJ und NC zu finden.

$$NJ \text{ (Ordinate in J)} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)},$$

$$NC \text{ (Hypotenuse in } \triangle NCJ) = \sqrt{(CJ^2 + CJ^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}; \quad CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)}$$

$$= \sqrt{(u^2 + y^2)} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}.$$

Anmerk. Die durch die conjugirten Diameter und ihre Ordinaten gebildeten Dreiecke NJC und PMC sind einander der Fläche nach gleich.

§. 326. Wenn die Puncte P und J in einander fallen, so sind die Diameter einander gleich. Dann ist Abscisse $u = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$.

§. 327. Reicht die Tangente OM bis zur verlängerten kleinen Axe in R, so ist $MR = \frac{NC^2}{OM}$, Fig. 60.

§. 328. Derjenige Diameter, der auf der Tangente steht, theilt den conjugirten Diameter und jede Parallele HK in z in 2 gleiche Theile. Es verhält sich

$$MZ.ZV : HZ^2 = MC^2 : CN^2.$$

Die

Die Linien HZ oder ZK heißen Ordinaten auf dem Diameter. Nennt man sie w, und ihre Abscissen MZ = r; MV = d, so ist $w^2 = \frac{r \cdot (d - r) \cdot CN^2}{\frac{1}{4} d^2}$.

§. 329. Aus dem Vorhergehenden läßt sich nun die Aufgabe lösen: in einer gegebenen Ellipse zu finden

1. jeden Diameter. Man ziehe zwei parallele Sehnen, wo man will, theile jede in 2 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilpuncte eine gerade Linie, welche ein Diameter seyn und durch's Centrum gehen wird. Es sey Fig 63. die Sw, und TJ eine Chorde, so ist LO der Diameter.
2. Das Centrum. Es liegt auf der Mitte des Diameters.
3. Die große Axe. Beschreibe aus dem Mittelpunct C mit willkührlicher Zirkelöffnung den Bogen GH, ziehe die Chorde GH und theile sie in 2 gleiche Theile. Durch ihre Mitte und durch das Centrum ziehe eine gerade Linie, welche die große Axe seyn wird.

   Rechtwinklicht auf der Mitte der großen Axe steht die kleine Axe DD.
4. Die Brennpuncte. Trage die halbe große Axe vom Endpunct der kleinen nach der großen Axe, also daß DF und Df Fig. 58. = AC.
5. Die beiden gleichen conjugirten Diameter. Ziehe AD und Ad, theile jede in m und n, Fig. 63., in 2 gleiche Theile, und ziehe durch C und m, so wie durch C und n die beiden Diameter MV und NQ.

§. 330. Die Lage der Ordinaten zu bestimmen, wenn der Diameter gegeben ist.

Es sey MV der gegebene Diameter, Fig. 62. Nimm w willkührlich, ziehe wM und verlängere sie bis MG = Mw. Von G ziehe eine Parallele mit dem Diameter, bis sie die Ellipse in A erreicht. Von A ziehe die Aw, welches die doppelte Ordinate seyn wird, welche die Lage aller andern bestimmt.

Parallel mit Aw geht NQ durch das Centrum und ist conjugirter Diameter.

§. 331.

§. 331. Das Parallelogramm RSFU, Fig. 64., welches die beiden Axen einer Ellipse bilden, hat eben so viel Fläche, als dasjenige, was sich aus den conjugirten Diametern MP und QN bilden läßt, und hier WXYZ ist. Überhaupt sind alle um die Ellipse beschriebene Parallelogramme der Fläche nach einander gleich.

§. 332. Die bis zur Tangente verlängerten Perpendikel auf den Endpuncten der großen Axe geben mit einander multiplicirt ein Rechteck, das dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich ist.

$AQ \cdot BS = cd^2$; $AQ = \frac{a \cdot y}{a + 2u}$; $BS = \frac{a \cdot y}{a - 2u}$ Fig. 61.

§. 333. Wenn man aus den Brennpuncten Perpendikel auf die Tangente fallen läßt, so ist das Product dieser Linien ebenfalls dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich. $FH \cdot fh = cd^2 = \frac{c^2}{4}$, folglich sind die Rechtecke QA.SB und FH.fh einander gleich, Fig. 61.

§. 334. Bewegte sich ein Körper in der Ellipse um den Brennpunct F, Fig. 58., so würde sich seine Geschwindigkeit in einem Puncte M zu der Geschwindigkeit in D (der mittlern Entfernung von F) verhalten, wie $\sqrt{FM} : \sqrt{fM}$ d. i. wie die Quadratwurzeln aus den Vectoren.

§. 335. Beschreibt man mit der halben großen Axe aus dem Centrum einen Kreis, Fig. 65, und errichtet auf derselben die willkührlichen Ordinaten Pm, Qn, Ro, Cd, und verlängert sie bis zum Kreise in a, b, c, e, so verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die Ordinaten des Kreises; d. i.

$Pm : Pa = Qn : Qb$ u. s. w.

und $Pm : Pa = Cd : Ce$, d. h. wie die halbe kleine Axe zur halben großen Axe.

§. 336. Die Fläche der Ellipse = E verhält sich zur Fläche des Kreises (dessen Radius die halbe große Axe), = K, wie die kleine Axe zur großen Axe; d. i.

$E : K = c : a$, und die Fläche der Ellipse

$E = \frac{K \cdot c}{a}$

§. 337. Ist der Kreis mit der halben kleinen Axe beschrieben, so ist

$$E : K = a : c$$

und $E = \frac{K.a}{c}$.

§. 338. Die elliptische Fläche ist auch gleich einer Kreisfläche, deren Diameter die mittlere Proportionalgröße zwischen beiden Axen ist. $a : d = d : c$, also ist $a . c = d^2$, weil $\frac{d^2p}{4}$ = Kreisfläche, so ist die elliptische Fläche $= \frac{a . c . p}{4}$, welches Formular das bequemste ist ($p = 3{,}14159.....$).

§. 339. Bei Ellipsen, in denen die Brennpuncte nahe am Centro liegen, ist △ COM der Fläche nach fast gleich dem △ QCM, Fig. 65., wobei Q der Brennpunct der Ellipse. Dies giebt ein Mittel, die Ellipse nach einem gegebenen Verhältniß zu theilen. Wenn im Kreise BO der achte Theil der Peripherie wäre, so wäre Sector BCO $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche. Zieht man nun aus dem Brennpunct Q die Linie QO, und zu ihr die Parallele CM, so ist auch BmQ $\frac{1}{8}$ der elliptischen Fläche.

Anmerk. Dieser Satz findet in der Astronomie Anwendung.

§. 340. Die Flächen der Ellipsen verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Axen; und wenn sich gleichnamige Axen gleich sind, wie die andern Axen.

§. 341. Wenn sich eine halbe Ellipse um die feststehende Axe bewegt, so entsteht eine Art Kugel, Sphäroid, die aber nach der Richtung der kleinen Axe eingedrückt erscheint. Ein solcher Körper heißt Ellipsoide. Der körperliche Inhalt derselben $= \frac{ac^2p}{6}$, wobei $p = 3{,}14159...$

§. 342. Auch aus dem Cylinder läßt sich eine Ellipse schneiden. Der Durchmesser desselben wird dann jedesmal der kleinen Axe gleich. Die große Axe hängt von dem Winkel ab, unter welchem die schneidende Ebene den Cylinder trifft.

Diesen Winkel = w findet man durch

$\text{Sin. } w = \frac{\text{Sin. tot. } c}{a}$; und wenn w gegeben ist

$a = \frac{\text{Sin. tot. } c}{\text{Sin. } w}$.

§. 343. Wenn beide Axen bekannt sind, so läßt sich die Ellipse berechnen und zeichnen.

Es sey Fig. 72. AB die große Axe = a = 176; ED die kleine Axe = c = 154, und CP die eine Abscisse = 51 = u, vom Mittelpunct angenommen, so lassen sich alle in dieser Figur sichtbare gerade Linien darnach berechnen, welches in der weiterhin folgenden Tabelle geschehen ist. Allein die Ellipse selbst zu zeichnen, oder Puncte zu finden, durch welche die krumme Linie gezogen wird, nehme man u willkührlich, und nach und nach immer größer, bis es der halben großen Axe gleicht, und berechne dazu die Ordinaten. Weil sich aber die Ellipse in der Gegend der großen Axe schnell krümmt, so nehme man auch auf der kleinen Axe mehrere Abscissen und berechne dazu die Ordinaten, welche man gehörigermäßen auf beiden Seiten des Centrums und der Axe, auf der die Abscissen genommen, rechtwinklicht nach dem Maaßstabe (hier 1 Zoll = 100 Theile) aufträgt.

Formular für die Ordinaten auf der großen Axe

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 \cdot u^2}{a^2}\right)},$$

auf der kleinen Axe $\sqrt{\left(\frac{a_2}{4} - \frac{a^2 \cdot u^2}{c^2}\right)}$.

Wenn CP oder u =	5,	so ist PM oder y =		76,9
	10	— — —		76,5
	15	— — —		75,9
	20	— — —		75,0
	25	— — —		73,8
	30	— — —		72,4
	35	— — —		70,7
	40	— — —		68,6
	45	— — —		66,2

Wenn CP oder u =	50,	so ist PM oder y =			63,5
	55	—	—	—	60,3
	60	—	—	—	56,5
	65	—	—	—	52,1
	70	—	—	—	47,0
Abscissen auf der kleinen Axe = u	5	—	—	—	87,8
	10	—	—	—	87,3
	15	—	—	—	86,3
	20	—	—	—	84,9
	25	—	—	—	83,2
	30	—	—	—	81,1
	35	—	—	—	78,4
	40	—	—	—	75,2

Diese für 1 Quadranten berechneten Ordinaten gelten für alle vier, und sind völlig hinreichend, die Ellipse zu ziehen.

Formeltafel zur Berechnung aller Linien in der Ellipse Fig. 72.

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
AB = große Axe	$a = \frac{c^2}{b}$	176.
AC = halbe große Axe	$\frac{1}{2}a = \frac{c^2}{2b}$	88.
DE = kleine Axe	$c = \sqrt{ab}$ . . .	154.
DC = halbe kleine Axe	$\frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ . . .	77.
CF = Cf Brennpuncte	$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	42,6
Ff = Abstand der Brennpuncte	$= 2\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$	85,2
Parameter . .	$b = \frac{c^2}{a}$	134,75

Beständige Größen.

PC

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
PC = Abscisse, gegeben,	$u = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 y^2}{c^2}\right)}$	51.
PM = Ordinate zu u	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}$	62,75
PO = Subtangente	$= \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$ . . .	100, 84
OM = Tangente	$= \sqrt{(OP^2 + PM^2)}$ $= \sqrt{\left(\frac{(a^2-4u^2)^2}{4u} + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)\right)}$	118,77
FM = Radius vector	$= \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$	63,31
fM = Radius vector	$= \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$	112,69
Fd	$= \frac{\sqrt{(a^2-c^2)} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)}{a}$	30,65
Cd = — —	$= \frac{u(a^2-c^2)}{a^2}$ . .	11,95
AP — —	$= \frac{1}{2}a - u$ . . .	37.
PF — —	$= u - \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	8,4
Pf — —	$= u + \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	93,6
AF, Brennpunct vom Scheitel	$= \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{4}\right)}$	45,4
Ad — —	$= \frac{1}{2}a - \frac{u(a^2-c^2)}{a^2}$ oder $\frac{1}{2}a - Cd$	76,05
Pd = Subnormale	$= \frac{c^2 u}{a^2}$	39,05

Co

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
CO = — —	$= \frac{\frac{1}{4}a^2}{u}$	151,84
OA — —	$= \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \frac{1}{2}a$ . .	63,84
Md = Normale	$= \sqrt{(y^2 + Pd^2)}$.	73,89
CM — —	$= \sqrt{(u^2 + y^2)}$.	80,86
MV = Diameter	$= 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$.	161,72
AZ — —	$= \frac{PM \cdot OA}{OP}$ . .	39,63
BS — —	$= \frac{PM \cdot OB}{OP}$ . . .	149,24
CR — —	$= \frac{PM \cdot OC}{OP}$ . .	94,48
CJ = Abscisse des Diameters	$v = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	71,71
NJ = Ordinate darauf	$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2v^2}{a^2}\right)}$	44,63
NC = halber conjugirter Diamet.	$= \sqrt{(JC^2 + JN^2)}$	
oder	$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	84,47
NQ = conjugirter Diameter	$2\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2v^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} - u^2\right)}$	168,93
MR — —	$= \frac{NC^2}{OM}$	60,07
OS — —	$= \frac{OM \cdot OB}{OP}$ . .	282,48
OZ — —	$= \frac{OM \cdot OA}{OP}$ . .	75,19

OB

Linien.	Formeln.	Werth in Zahlen.
OB = — —	$= a + \left(\frac{\frac{1}{4}a^2}{u} - \frac{1}{2}a\right)$	239,84
VX = Abscisse auf dem Diameter	gegeben	22,5
XM — —	$MV - VX$	139,22
GX = WX Ordinate a. d. Diameter	$= \sqrt{\left(\frac{MX.XV.NC^2}{MC^2}\right)}$	58,46
Eh Perp. auf die Tangente aus d. Brennpunct	$= \frac{dM \,.\, OF}{Od}$ . . .	57,7
OF — —	$= OP + PF$ . .	109,24
Od — —	$= OP + Pd$ / $= OC - dC$ . .	139,89
fH Perpendikel a. d. Tangente	$= \frac{dM \,.\, Of}{Od}$ . . .	102,75
Of — —	$= OC + Cf$ . . .	194,44
Fläche der Ellipse	$= \frac{a.c.3,1415....}{4} =$	21786,8 □Maaß
Inhalt der Ellipsoide	$= \frac{a.c^2.3,1415....}{6} =$	2185445 Kubik-Maaß

Von der Hyperbel.

§. 344 Wenn zwei Kegel ECD und RCS Fig. 66. mit den Spitzen gegen einander stehen, und eine schneidende Ebene VABQ durch beide Kegel dringt, so entstehen auf den Oberflächen der Kegel zwei krumme Linien UMAN und ZBQ, welche Hyperbel heißen. In A und B sind die Scheitel derselben; QB und BZ sind die Arme der Hyperbel im obern, und OA und AN im untern Kegel. Die Figur im obern Kegel ist stets der im untern gleich, der Schnitt mag liegen, wie er will, wenn er nur beide Kegel trifft.

Der

Der Abstand der Scheitel von einander, also die Linie AB heißt die große Axe oder Zwergaxe, die verlängert beide Hyperbeln in gleiche Hälften theilt.

Eine mit der Grundfläche parallel gelegte Ebene HG durchdringt nun auch die Axe AV in P und die ganze Hyperbel, und bildet einen Kreis, der hier zur Hälfte GMH zu sehen ist. Die MP ist auf der Axe AV und auf dem Diameter GH in P senkrecht, mißt den Abstand des Puncts M von der Axe in P, und heißt Ordinate. Der Abstand vom Scheitel, die AP, heißt Abscisse und wird durch x, so wie die Ordinate mit y bezeichnet, weil beide veränderliche Größen sind, und von der Lage der GH abhängen.

Die Gleichung für die Ordinate PM = y finden wir folgendermaßen.

Man lege da, wo die schneidende Ebene in die Kegel bringt, die parallelen Ebenen BL, und AF durch die Kegel, dann ist △ BFA ähnlich dem △ BGP; und △ BAL ähnlich dem △ APH, daher

$$BA : AF = BP : PG, \text{ und } PG = \frac{AF \cdot BP}{BA}$$

$$AB : BL = AP : PH, \text{ und } PH = \frac{BL \cdot AP}{AB}$$

$$GP : PM = PM : PH, \text{ und } PM^2 = GP \cdot PH.$$

Setzt man nun für GP und PH die eben gefundenen Werthe, so wird $PM^2 = y^2 = \frac{AF \cdot BP}{BA} \cdot \frac{BL \cdot AP}{AB}$.

In einer und derselben Hyperbel sind beständige Größen AB = a, AF und BL, und bringt man sie zusammen, so ist $\frac{BL \cdot AF}{AB} \cdot \frac{AP \cdot BP}{AB} = y^2 = PM^2$. Die Größe $\frac{BL \cdot AF}{AB}$ heißt Parameter = b; da nun AP = x; BP = a + x; AB = a, so wird die Gleichung für die Ordinate der Hyperbel:

$$y^2 = b \cdot \left(\frac{a+x}{a}\right) x = \frac{bax}{a} + \frac{bx^2}{a} = bx + \frac{bx^2}{a},$$

folg-

folglich ist $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$.

§. 345. Die Wurzel kann + und − haben, folglich giebt es auch zweierlei Ordinaten, wovon man eine positiv und die andere negativ nehmen kann. Auf der Zwergaxe AB kann es keine Ordinaten geben. Die Arme der Hyperbel können unendlich lang seyn.

§. 346. Wenn man auf der Mitte der großen Axe in C ein Perpendikel errichtet, welches die halbe Quadratwurzel aus dem Product der großen Axe und des Parameters ist, so heißt diese CD, Fig. 67., die halbe kleine Axe; folglich ist $Dd = \sqrt{a \cdot b}$ = der kleinen Axe, welche daher die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Axe und dem Parameter ist. Bezeichnen wir sie mit c, so gilt $a : c = c : b$. Und $a = \frac{c^2}{b}$; $b = \frac{c^2}{a}$.

§. 347. In der Hyperbel giebt es zwei Brennpuncte. Sie liegen, wie in allen Kegelschnitten, da auf der Axe, wo die doppelte Ordinate dem Parameter gleicht. Fig. 67. ist mn = Parameter, in F und f sind die Brennpuncte.

Den Abstand der Brennpuncte von den Scheiteln giebt das Formular $AF = Bf = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.

Mechanisch findet man die Brennpuncte, indem man an den Scheiteln Perpendikel AE = halben kleinen Axe CD errichtet, und mit dem Radius CE einen Kreis beschreibt, welcher durch F und f gehen wird.

§. 348. Wäre große Axe und Brennpunct F bekannte, so würde durch einen Kreis, dessen Radius CF ist, auf dem Perpendikel AE im Scheitel, die halbe kleine Axe gefunden. Der Abstand der Brennpuncte $e = \frac{\sqrt{(a^2 + ab)}}{2}$.

§. 349. Das Rechteck aus AF und BF ist dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich; oder $AF \cdot BF = c^2 = CD^2$.

§. 350.

§. 350. In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten y und z zu einander, wie $(a+x)\,x : (a+v)\,v$ oder $ax+x^2 : av+v^2$, wobei v die Abscisse zu z ist.

§. 351. Wenn große Axe und Parameter gegeben sind, so wird sich die Hyperbel zeichnen lassen, indem man die x willkührlich nimmt, nach der Formel $y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$ die dazugehörigen Ordinaten berechnet, und gehörigermaßen auf die Axe trägt. Die Endpuncte zieht man aus freier Hand zusammen, und daher müssen die x nicht sehr von einander verschieden seyn.

Gesetzt, man habe die große Axe $AB = 100 = a$; den Parameter $= 50 = b$, und die Abscissen vom Scheitel an folgendermaßen genommen:

x = 3,	so ist y = 12,43	x = 50,	so ist y = 61,24
6 —	— 17,83	55 —	— 65,28
9 —	— 22,15	60 —	— 69,28
12 —	— 25,92	65 —	— 73,23
15 —	— 29,35	70 —	— 77,13
18 —	— 32,59	75 —	— 81,01
21 —	— 35,64	80 —	— 84,85
24 —	— 38,57	85 —	— 88,67
27 —	— 41,41	90 —	— 92,46
30 —	— 44,16	95 —	— 96,24
33 —	— 46,84	100 —	— 100.
36 —	— 49,48	u. s. w.	
39 —	— 52,06	Hiernach sind die Hyperbeln Fig. 69, 70 und 73 gezeichnet; 1 Zoll = 100.	
42 —	— 52,61		
45 —	— 57,12		

§. 352. Werden die Abscissen vom Mittelpunct C an genommen, so ist die Gleichung für die Ordinate

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2, \text{ wobei } u = CP.$$

Dann ist das Verhältniß der Ordinaten y und z also:

$$y^2 : z^2 = \left(u - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(u + \frac{a}{2}\right) : \left(v - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(v + \frac{a}{2}\right).$$

Die

Die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel

$$AF = -\tfrac{1}{2}a + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2},$$

und vom Mittelpunct $CF = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.

§. 353. Der Unterschied zweier geraden Linien aus den Brennpuncten an irgend einem Punct N Fig. 67. ist allemal der großen Axe gleich. D. i. $NF - fN = AB$ oder $= a$.

Anmerk. In der Ellipse war die Summe dieser Linien $= a$.

§. 354. Wird die kleine Axe an die Scheitel senkrecht gesetzt, wie Fig. 68. AE und BE, und durch ihre Endpuncte E und durch's Centrum eine gerade Linie CELS, die verlängert CEWg, desgleichen nNCEV ist, so heißen diese Linien gCS und nCV Asymptoten, Niezusammenfallende. Sie nähern sich zwar den Hyperbelarmen immer mehr, erreichen sie aber nie.

§. 355. Nennt man die bis zur Asymptote verlängerte Ordinate $PL = Z$, und $PM = y$, so ist $Z - y = \frac{c^2}{4(Z-y)} = ML$.

In den ähnlichen Dreiecken CAE und CPL gilt

$$CA : AE = CP : PL$$

d. i. $\frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : z$

oder $a : c = u : z$, und $z = \frac{cu}{a}$.

Was von dem einen Arme gilt, wird für alle 4 Arme gelten.

§. 356. Das Rechteck $NM \cdot ML = AE^2 = \frac{c^2}{4}$.

Zieht man vom Endpunct einer Ordinate eine gerade Linie mit der großen Axe parallel, die Linie Md Fig. 68., bis zur gegenüberstehenden Asymptote, so ist das Rechteck

$Mq \cdot Md = CA^2 = \frac{a^2}{4}$.

§. 357. Man kann auch auf der Asymptote CL Ordinaten, als Fig. 68., JA, RT, QM errichten, welche mit der zweiten Asymptote Cn parallel laufen. Nimmt man die Abscisse auf der Asymptote, die CQ = u, und QM = y, so ist $CQ = u = \frac{a^2 + c^2}{16y}$; und $QM = y = \frac{a^2 + c^2}{16u}$.

§. 358. Eine Ordinate JA auf der Asymptote nach dem Scheitel A ist besonders merkwürdig. Sie ist $= CJ = JE = \sqrt{(QC \cdot QM)} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{16}}$. Das Quadrat von CJ, also $CJ^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$ heißt die Potenz der Hyperbel.

§. 359. Die außer den Hyperbelarmen zwischen diesen und den Asymptoten befindlichen Linien LM und mN sind einander gleich, LN mag liegen, wie sie will.

§. 360. Wenn die Lage der Asymptoten, und ein Punct M in der Hyperbel gegeben ist, so läßt sie sich zeichnen.

Halbire Fig. 68. den Asymptotenwinkel SCn, und ziehe die CH, welche die Axe vorstellt; suche die Potenz der Hyperbel, welche $= CJ^2 = CQ \cdot QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$. Die Puncte Q, und M sind gegeben; und QM ist parallel CN. Es ist also $CJ = \sqrt{(CQ \cdot QM)}$. Die Größe CJ trage auf die Asymptote CS, und ziehe JA = CJ, mit CN parallel, so ist in A der Scheitel, CA die halbe große Axe, ein Perpendikel AE auf A ist die halbe kleine Axe. Nun nehme man die CQ nach Belieben = x, und suche dazu die QM = y. Aber $x \cdot y = CJ^2$, folglich $y = \frac{CJ^2}{x}$. Berechnet man auf diese Weise recht viele nahe an einander liegende y, und trägt sie auf die Puncte der Asymptote, für welche sie berechnet sind, so, daß sie mit der andern Asymptote parallel laufen, zieht darauf ihre

ihre Endpuncte zusammen, so erhält man den Hyperbelarm ATM, und auf gleiche Art auch die andern Arme.

§. 361. Die Lage der Asymptoten ist eine Hauptsache, und hängt von der Größe der beiden Axen ab. Es ist aber

$$CA : AE = \text{Sin. tot.} : \text{Tang. } o.$$

§. 362. Wenn, was oft der Fall ist, der Asymptotenwinkel nCS und ein Punct M in der Hyperbel, also CQ und QM, gegeben sind, so findet man:

die kleine Axe $c = 4 \text{ Sin.} < o \cdot \sqrt{(CQ \cdot MQ)}$,
die große Axe $a = 4 \text{ Cos.} < o \cdot \sqrt{(CQ \cdot MQ)}$.

§. 363. Wenn in einer Hyperbel beide Axen gleich sind, so ist auch der Parameter jeder Axe gleich, und die Hyperbel heißt gleichseitig.

Die Gleichung ist dann $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$; oder $y^2 = x^2 + ax$, je nachdem die Abscisse vom Mittelpunct oder vom Scheitel an genommen worden. Der Asymptoten-Winkel ist $= 90°$; der halbe, oder $< o = 45°$.

Die Ordinaten in der gleichseitigen Hyperbel verhalten sich, die Abscissen vom Mittelpunct an genommen,

$$y^2 : z^2 = u^2 - \tfrac{1}{4}a^2 : v^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$

wobei v Abscisse zu z. Wenn aber die Abscissen vom Scheitel an genommen werden:

$$y^2 : z^2 = x^2 + ax : t^2 + at$$
$$= (a+x).x) : (a+t).t, \text{ wobei t und x}$$

Abscisse zu z und y.

§. 364. Eine Tangente Tm Fig. 68. berührt die Hyperbel nur in einem Punct m, und trifft verlängert sowol die große Axe in T, als auch beide Asymptoten in t und g.

Man zieht die Tangente folgendermaßen:

Ziehe aus dem Punct m eine mit der andern Asymptote parallele Linie mh nach der nächsten Asymptote; trage Ch nach hg, so sind g und m zwei Puncte, durch welche die Tangente geht. Dann gilt in den ähnlichen Dreiecken ghm und gCt

$$gh : gC = gm : gt; \text{ oder } gh : hC = gm : mt;$$

weil

weil nun gk = hC, so ist auch gm = mt, und die zwischen den Asymptoten eingeschlossene Tangente wird durch den Berührungspunct m stets in 2 gleiche Theile getheilt.

§. 365. Man fälle in m ein Perpendikel mp auf die Axe, ein Perpendikel Vm auf die Tangente, so ist Tp Subtangente, mV Normale, pV Subnormale; pm Ordinate = y; Bp Abscisse = x und Cp Abscisse = u.

Die Subnormale $Vp = \frac{ab + 2bx}{2a}$, oder $\frac{c^2u}{a^2}$.

Die Subtangente $Tp = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x}$, oder $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, oder $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$.

Die $TB = \frac{ax}{a+2x}$, oder $\frac{2au - a^2}{4u}$ = Abstand der Tangente vom Scheitel.

Die $CT = \frac{a^2}{4u}$ oder $= \frac{a^2}{2a+4x}$ = Abstand der Tangente vom Centro.

Die Tangente Tm ist Hypotenuse im △ Tpm, also $= \sqrt{(Tp^2 + y^2)}$.

Die Normale $Vm = \sqrt{\left(y^2 + \left(\frac{c^2 \cdot u}{a^2}\right)^2\right)}$

$= \sqrt{(pm^2 + pV^2)}$.

§. 366. Eine Linie, welche durch das Centrum C geht, sich innerhalb der Asymptoten hält, und also beide entgegengesetzte Hyperbeln in H und h Fig. 70. schneidet, heißt ein Diameter, und der Theil hH der Zwergdiameter.

Zieht man vom Punct H eine Linie Hp, parallel mit der Asymptote CL, verlängert sie, bis pG = Hp; und eine andere Hn mit der Asymptote CQ parallel, und verlängert sie bis ng = Hn, so ergeben sich zwei Puncte G und g, durch welche und durch das Centrum sich die gerade Linie Gg ziehen läßt, die zweiter, oder conjugirter Diameter genannt wird.

GC ist dann gleich gC. Die Tangente zum Punct H, also die Linie SQ ist gleich dem zweiten Diameter gG; SH = CG, und HG = CS; HQ = Cg = GC = HS. Die $CH = \sqrt{(u^2+y^2)}$.

§. 367. Sind die beiden Diameter hH und gG gegeben, so findet man die Lage der Asymptoten, indem man HG halbirt, und durch C und p die Asymptote CpQ zieht.

§. 368. Eine mit der Tangente SH parallel gezogene Linie tw durchschneidet die Hyperbel in zwei Puncten in v und w. Der Diameter ZO theilt sie in r in 2 gleiche Theile, so daß vr = rw. Die Linien vr und rw heißen Ordinaten des Diameters. Nennt man eine Ordinate des Diameters z, den Diameter hH = a, Gg = b, und Cr Abscisse vom Centro an auf dem Diameter = s, so ist $Z^2 = \frac{b^2 s^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$, welches die Gleichung für die Ordinaten des Diameters ist.

§. 369. Zieht man beliebige gerade Linien von einer Asymptote zur andern, z. B. HJ und LT Fig. 69. und wo beide die Hyperbel schneiden, mit der andern Asymptote Parallelen, wie nK und No, so sind die Rechtecke Hn . nK, und LN . NO einander, und auch dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich.

§. 370. Das Parallelogramm aus den beiden Axen AB (Fig. 73.) und EE, oder a . e ist gleich dem Parallelogramm der beiden conjugirten Diameter hM und gG.

§. 371. Wenn man von beiden Brennpuncten F und f an einen Punct M Fig. 70. gerade Linien fM und MF zieht, und den Winkel fMF durch eine gerade Linie MT halbirt, so ist die Linie TM eine Tangente; und

$$fM : FM = fT : FT$$

$$\text{Aber } fM = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} + \frac{a}{2}$$

$$\text{und } FM = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} - \frac{a}{2}$$

GT

$$CT = \frac{a^2}{4u}; \; fC = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

$$\text{also } fT = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{4u} \frac{2u + a^2}{} ; \text{ und } FT = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{4u} \frac{2u - a^2}{}.$$

§. 372. Weil die Winkel $r = y = n = o$, so würde ein Lichtstrahl bM Fig. 70., dessen Richtung nach dem Brennpunct f geht, vom Hyperbelarm AM so gebrochen werden, daß er in den Brennpunct F gelangen müßte. Daher heißen F und f die Brennpuncte.

§. 373. Eine Linie aus dem Brennpunct an den Berührungspunct M der Tangente TM heißt Radius vector, Zuglinie oder Träger. Ihr Werth ist §. 371. angegeben.

§. 374. Eine hyperbolische Fläche läßt sich nur dann berechnen, wenn die beiden Arme durch eine doppelte Ordinate rs Fig. 68. abgeschnitten sind. Es müssen dann bekannt seyn beide Axen, Abscisse CD, und Ordinate Dr nebst deren Verlängerung rV und sw. Nun findet man DV

$$CB : BE = CD : DV$$

$$= \frac{a}{2} : \frac{c}{2} = u : DV, \text{ und } DV = \frac{cu}{a}.$$

Zieht man davon $Dr = y$ ab, so bleibt rV.

Auf gleiche Weise läßt sich aa, bb, cc, dd ꝛc., die man mit BE parallel zieht, finden. Die dadurch entstehenden kleinen Trapezia BEaa, aabb u. s. w., worin die krumme hyperbolische Linie für gerade anzunehmen ist, lassen sich berechnen, ihre Summe vom Trapezio BEVD abziehen, so wird der Raum BrDB $= \frac{1}{2}$ Hyperbel übrig bleiben.

Diese Verfahrungsweise ist mühsam, aber der einzige Weg, ohne die Kunstgriffe der Integralrechnung zu einem erträglichen Resultat zu gelangen.

Aus der Integralrechnung findet man für die Hyperbel eine ziemlich brauchbare Formel:

$\frac{a}{c}V$

$\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}$ = halben hyperbol. Fläche,

hiebei ist x eine Abscisse vom Scheitel.

§. 375. Wenn sich der Hyperbelarm Br mit der Asymptote EV um die Axe BD bewegt, so entsteht ein abgekürzter Kegel VEEW, in welchem die Hyperboloide rBsr steckt, deren körperlicher Inhalt gefunden wird durch

$$\frac{(2R^2 + cR - c^2) \cdot P \cdot H}{6},$$

wobei R = DV; c = kleinen Axe; P = 3,141 . . . ,
H = BD = Höhe.

§. 376. Wir sammeln nun die sämmtlichen Formulare in eine Tafel, und fügen ihre Zahlenwerthe, welche in der Fig. 73. Zeichnung und Rechnung übereinstimmig gegeben haben, bei. Diese Figur ist nach der Berechnung §. 351. gezeichnet, 1 Decimalzoll = 100 Theile.

Formeltafel für die hyperbolischen Linien.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
AB = großen Axe gegeben	$= a = \frac{c^2}{b}$ . . .	100.	Beständige Größen.
ECE = kleinen Axe	$= c = \sqrt{(ab)}$.	70,71	
Parameter — gegeben .	$= b = \frac{c^2}{a}$ . . .	50.	
AC = CB = halben großen Axe	$= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\frac{c^2}{b}$ . .	50.	
CE = AE = BE = halben kl. Axe	$= \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{(a \cdot b)}}{2}$	35,355	
AF = Bf = Abst. d. Brp. v. Scheitel	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2} - \frac{1}{2}a$	11,237	
CF = Cf = Abst. d. Brp. v. Centro	$= \frac{\sqrt{(ab + a^2)}}{2}$.	61,237	

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.	
Oder AF = Bf, in Werthen der Axen	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - \frac{1}{2}a$	11,237	Bestandine Größen.
CF = Cf, in Werthen der Axen	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$.	61,237	
HCR und WCK, lich, wie Hyperbel	Asymptoten sind unendarme.		
JB = EJ = CJ	$= \sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{16}\right)}$.	30,618	
CJ^2 = Potenz der Hyperbel	$= \frac{a^2+c^2}{16}$ . . .	937,5	
Winkel R C W = Asymptoten-Winkel	$\frac{1}{2}$ Tang. RCW $= \frac{c \text{ . Sin. tot.}}{a}$	35°16′	
	und < RCW	70°32′	
AP = Abscisse vom Scheitel	= x, gegeben . .	25.	
PM = Ordinate dazu	$= y = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)}$	39,528	
CP = Abscisse vom Mittelpunct	= u, gegeben, oder $= \frac{a^2 y^2}{c^2} - \frac{a^2}{4}$	75.	
PM, Ordinate zur Abscisse v. Centro	$y = \sqrt{\left(\frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2\right)}$	39,528	
Fm Radius vector	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} - \frac{a}{2}$	41,855	
fm — —	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)u}}{a} + \frac{a}{2}$	141,855	
PF Abst. d. Brennpuncte v. d. Ordin.	$= \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} - u$	13,763	
Pl verlängerte Ordinate z. Asympt.	$= \frac{cu}{a}$	53,032	

Linien.

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Ml, Verlängerung der Ordinate	$= \frac{cu}{a} - y$, oder $\frac{cu}{a} \sqrt{\left(\frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$	13,504
Rechteck vM, Ml	$= \frac{c^2}{4}$	
vM . . .	$= \frac{\frac{1}{4}c^2}{Ml}$	92,561
Ci = Abscisse auf der Asymptote	$u' = \frac{a^2 + c^2}{16y'}$, gegeben	78.
Mi = Ordinate auf der Asymptote	$y' = \frac{a^2 + c^2}{16u'}$ . .	12,019
TM Tangente zum Punct M	$= \sqrt{\left(\left(\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$	57,433
TP Subtangente	$= \frac{(a+x) \cdot x}{\frac{1}{2}a + x}$ oder $= \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$.	41,666
MR Normale	$= \sqrt{\left(\left(\frac{c^2u}{a^2}\right)^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}\right)}$ . .	54,486
PR Subnormale	$= \frac{c^2u}{a^2}$	37,5
TA Abst. d. Tang. vom Scheitel	$= \frac{ax}{a+2x}$ oder $\frac{2au - a^2}{4u}$	16,667
CT Abst. d. Tang. v. Mittelpunct	$= \frac{a^2}{2a+4x}$ oder $\frac{a^2}{4u}$.	33,3
ZD Diam., unendl.		

Linien.	Formeln.	Zahlenwerth.
Mh Zwergdiamet.	$x = 2\sqrt{(u^2 + y^2)}$.	169,556
CM halber Zwergdiameter	$\frac{x}{2} = \sqrt{(u^2 + y^2)}$	84,778
Gg conjugirter Diameter	$\beta = Vt = \frac{2Mt}{2 \cdot Sin.\ i \cdot Mi}{Sin.\ tot.}$	149,691
VM = Mt = gC = CG = $\frac{1}{2}\beta$ $\frac{Sin.\ i \cdot Mi}{Sin.\ tot.}$	jede dieser Linien = Mt, und im △ Mti ist Mi und it (= Ci) so wie < Mit (= Asymptot. Wink.) bekannt.	
op = pq, Ordinate auf d. Diameter	$= z = \sqrt{\left(\frac{\beta^2 s^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4}\right)}$	71,186
Cp Abscisse auf dem Diameter	= s, gegeben, oder $= \sqrt{\left(\frac{a^2 z^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$	117.
Die Rechtecke QN . NO, Lw . wU, xr . rs, Od . dL (wovon immer e. Größe gegeben.)	$= \frac{c^2}{4}$	
Der Winkel CVt	$= \frac{Sin.\ VCt \cdot Ct}{Vt}$.	100° 43′
Wink. CtV = 180° − (< VCt + < CVt) das ist im gegenwärtigen Fall	$= 180° - (100°\ 43' + 70°\ 32')$	8° 45′
Hyperbolische Fläche MAPM	$= \frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}$	601,57
Ganze hyperbol. Fläche MAmPM	$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{bx^3} + \sqrt{\frac{bx^2}{2a}}\right) \cdot 2$	1203,14 □Maaß

Linien

Linien.	Formeln.	Zahlen. werth.
Körperlicher Inhalt der Hyperboloide MAmM	$\frac{(2R^2+cR-c^2).P.H}{6}$ wob. R = vl; c = kl. Axe P = 3,14...; H = AP = x.	327075,8 Kubikmaaß.

XI. Von den Linien höherer Ordnungen.

§. 377. Unter diesem Namen versteht man solche Linien, in deren Gleichung eine höhere Potenz von x und y, als die zweite vorkommt. Wir wollen einige derselben betrachten und ihre Zeichnung und Berechnung kennen lernen.

§. 378. Die Cissoide Fig. 74. entsteht also:

In einem Kreise nehme man 2 gleich weit von A und B entfernte Puncte D und F, und ziehe die Linien PDh und GHF senkrecht auf den Diameter AB. Die Chorden DA und AFh durchschneiden die Perpendikel in H und h. Durch die Puncte h, H und L (auf dem Endpunct des senkrechten Diameters CL) geht eine krumme Linie AHLh, welche der eine Arm der Cissoide ist. Der andere Halbkreis enthält den andern Arm AMIN.

Der Diameter AB ist die Abscissenlinie = a; AG eine Abscisse = x, und GH die dazugehörige Ordinate = y. Zur Abscisse AP gehört die Ordinate Ph; zu AC gehört CL. Nimmt man nun mehrere von A und B gleich weit abstehende Puncte im Kreise, so findet man auch mehrere Puncte, die in der krummen Linie liegen, und die endlich zusammen gezogen, die krumme Linie darstellen.

Die Ordinate y findet man durch folgendes Formular: $y = \sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}$. Die Fig. 74. ist auf diese Weise construirt. AC = 50, also AB = a = 100; die Abscis-

scissen fangen in A an, und sind Am = 10; Av = 20, AG = 30 ꝛc. = x, wozu die Ordinaten mn, vg, GH ꝛc. = y berechnet, und rechtwinklicht auf ihre Abscissen getragen worden.

Wenn Am = x = 10,	so ist	mn	= y	= 3,33
Av = x = 20	—	vg	= y	= 10
30	—		=	= 19,64
40	—		=	= 32,66
50	—		=	= 50
60	—		=	= 73,5
70	—		=	= 106,9
80	—		=	= 160
90	—		=	= 270
100	—	BR	=	unendlich.

Jenseits der Linie Rr ist also nichts von der Cissoide, deren Erfinder Diokles ist. Alle Cissoiden sind einander ähnlich. Wenn man daher die Ordinaten für eine solche Figur berechnet hat, so gelten sie für alle besondere Fälle, und man hat nur nöthig, den Diameter a in 100 Theile zu theilen, und die Ordinaten in solchem Maaße rechtwinklicht aufgetragen.

§. 379. Die Conchoide oder Muschellinie entsteht so:

Auf der geraden Linie AB Fig. 75. errichte das Perpendikel CD, nimm C willkührlich, und mache EF = ED. Aus C, dem Pol dieser Linie, ziehe willkührliche gerade Linien, Cc, Cf, Cg, CM, welche alle die Linie AB durchschneiden. Nimm die Weite ED = EF, und trage sie auf jede der aus C gezogenen Linien, so, daß de = dc, hm = hf, on = og, pB = BM, jede = ED = EF wird. Die zusammengezogenen Endpuncte D, c, f, g, M geben die obere Hälfte, und die Puncte F, e, m, n, p die untere Hälfte der Muschellinie. Durch die Linie CD wird sie in zwei gleiche Hälften getheilt.

Aus der Construction dieser Linie ersieht man, daß die Arme DG und FJ die Linie AB nur dann erreichen werden, wenn die aus C gezogenen Linien mit den Theilen pM ganz in AB fallen, welches eigentlich nie geschehen kann. AB heißt daher die Asymptote, der sich die Arme ewig nähern, ohne sie je zu erreichen.

§. 380.

§. 380. Zur Berechnung gehört, daß CE = b, und ED = EF = a bekannt sind: EP ist dann eine Abscisse = x, und PM eine dazu gehörige Ordinate = y. In der auf Null gebrachten Gleichung erscheint x in der 4ten Potenz

$$x^4+2bx^3+(y^2+b^2-a^2)\,x^2-2a^2bx-a^2b^2=0.$$

Um aber die Ordinaten, z. B. PM = y zu finden, ist folgendes Formular sehr bequem:

$$y=\frac{b+x\,.\,\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}=PM$$

und für die y in der untern Hälfte der Conchoide, die x von E an, ist

$$y=\frac{b-x\,.\,\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}=HM$$

Ist x = 0, so wird y unendlich und fällt auf AB; ist x = a, so wird y = 0; für negative x bekommt man positive Werthe von y, woraus sich ergiebt, daß unterhalb AB noch eine Muschellinie JFJ statt findet.

In Fig. 75. ist CE = b = 75; FE oder ED = a = 50, und die x von E aus nach D positiv, und von E nach F zu negativ genommen.

Wenn + x = 10, so ist y = 416,41
15 — — = 286,17
20 — — = 217,67
25 — — = 173,20
30 — — = 140.
33 — — = 122,93
36 — — = 106,98
39 — — = 91,46
42 — — = 75,57
45 — — = 58,12
47 — — = 44,28
48 — — = 35,87
49 — — = 25,18
50 — — = 0.

Trägt man diese Werthe von y und die zugehörigen x auf ED und zieht die Endpuncte zusammen, so erhält man die

die Muschellinie. Nikomedes, welcher 150 Jahre vor Christo lebte, erfand diese Linie, um mit Hülfe derselben die berühmte Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, zu lösen.

§. 381. Die Schnecken- oder Spirallinie des Archimedes entsteht so:

Der Punct C im Kreise Fig. 76. bewege sich gleichförmig auf dem Halbmesser CA nach der Peripherie, während CA selbst sich gleichförmig um den Mittelpunct C bewegt, so daß der bewegte Punct z. B. in M ist, wenn der Halbmesser in der Lage CP liegt. Dann gilt

$$CM : CA = \sphericalangle ACP : 360° \ (= p).$$

Nennt man nun $CM = y$, und $AP = x$; $CA = r$; die Peripherie $= p$, so ist obige Proportion

$$y : r = x : p; \text{ und } y = \frac{r \cdot x}{p},$$

welches die Gleichung für die Spirallinie ist.

Die Abscissen werden demnach auf der Peripherie und die Ordinaten vom Mittelpunct an genommen. Wenn $x = 0$, so ist $y = 0$ und M noch in C; so lange x kleiner, als die Peripherie p, so lange bleibt M innerhalb des Kreises und beschreibt die Spirallinie MNA; ist $x = p$, so ist $y = r$ und M in A, und man sagt: der beschreibende Punct M hat den ersten Gang gemacht; wird x größer, als p, so wird y größer, als r. und M beschreibt die krumme Linie außerhalb des Kreises. Ist nun CA zum zweitenmale in der Lage CP, so ist der Winkel $= p + x$, und

$$p : p + x = r : CM'; \text{ und } CM' = \frac{(p+x) \cdot r}{p}.$$

§. 382. Alle Schneckenlinien dieser Art sind einander ähnlich, und daher nach folgender Berechnung allemal zu zeichnen. Der Radius $r = CA = 50$; die Peripherie $= 360°$ und die x von 10 zu 10° genommen, wozu die y oder der jedesmalige Abstand CM berechnet ist.

Wenn

Wenn x = 10°, so ist y = 1,38
20 — — = 2,77
30 — — = 4,16
40 — — = 5,55
50 — — = 6,94
60 — — = 8,33
70 — — = 9,72
80 — — = 11,11
90 — — = 12,50
100 — — = 13,88
110 — — = 15,28
120 — — = 16,67
130 — — = 18,05
140 — — = 19,44
150 — — = 20,83
160 — — = 22,22
170 — — = 23,61
180 — — = 25
190 — — = 26,39
200 — — = 27,78
210 — — = 29,17
220 — — = 30,55
230 — — = 31,95
240 — — = 33,33
250 — — = 34,72
260 — — = 36,11
270 — — = 37,78
280 — — = 38,89
290 — — = 40,28
300 — — = 41,67
310 — — = 43,05
320 — — = 44,44
330 — — = 45,83
340 — — = 47,22
350 — — = 48,61
360 — — = 50
370 — — = 51,39
380 — — = 52,77
390 — — = 54,17
400 — — = 55,55.

Die Fläche, welche die Spirallinie einschließt, findet man durch

durch $\frac{rx^3}{6p^2}$ = einem unbestimmten Raum derselben, je nachdem x einen größern oder kleinern Bogen bedeutet. Wenn $x = p$ wird, so ist dieser Raum $\frac{rp}{6}$ oder $= \frac{1}{3}$ von der Kreisfläche, darin die Spirale beschrieben werden.

§. 383. Mechanisch erhält man eine Art Spirallinie, indem man um eine runde Scheibe einen Faden, dessen Länge dem Umfange der Scheibe gleicht, legt, den einen Endpunct an der Scheibe bevestigt, und den straff angezogenen Faden um die Scheibe bewegt, oder abwikkelt. Der zweite Endpunct des Fadens beschreibt dann die Spirallinie.

Der Umfang derjenigen Scheibe, von der sich oben berechnete Schneckenlinie mit einem Faden beschreiben läßt, muß gleich r seyn, folglich ist $\frac{50}{3{,}14} = 15{,}9$ der Diameter, und 7,96 der Radius der erwähnten Scheibe.

§. 384. Cykloide oder Radlinie. Sie entsteht, wenn sich ein Punct A Fig. 77. in einem beweglichen um C beschriebenen Kreise durch's Fortrollen desselben auf der Ebene AM, durch N, F, P ꝛc. bewegt. Die krumme Linie ANFPZ heißt deshalb Radlinie, weil ein Radnagel A im Rade C beim Fortrollen dieselbe in der Luft beschreibt. Die Linie AM heißt Grundlinie, der Kreis um C, der beschreibende Kreis; der Punct A der beschreibende Punct.

Der beschreibende Punct A berührt die Ebene AB zum zweiten Male, wenn alle Theile der Peripherie sie berührt haben, folglich ist die Linie AZ der ganzen Peripherie, und AD, wenn der Punct A sich in F befindet, der halben Peripherie gleich.

Der zurückgelegte Weg des Rades heiße u, die Peripherie = 2rp, so verhält sich

$$u : 2rp = \sphericalangle ACG\ (= NCE) : 360$$

Steht nun z. B. das Rad in E, so ist der Punct A in N, und G in E, folglich $u = AG = AE$.

§. 385.

§. 385. Die Zeichnung einer Radlinie geschieht am leichtesten also: Mache AD der halben Peripherie, DF dem Durchmesser des beschreibenden Kreises gleich. In dem um DF beschriebenen Kreis nehme man den Punct R willkührlich, und ziehe durch R die NRLSP mit AM parallel und also auf DF senkrecht. Die Länge des Bogens FR = FS trage auf die Parallele von R nach N, und von S nach P, so sind N und P zwei Puncte in der Radlinie. Viele auf diese Weise gefundene Puncte zusammengezogen stellen endlich die verlangte Radlinie dar. Bei dieser Verfahrungsweise ist aber immer die Länge des Bogens RF zu berechnen nöthig.

Legt man an AM ein Lineal und rollt an demselben eine runde Scheibe, deren Radius AC, so läßt sich der bezeichnete Punct A genau verfolgen, und auf dem Papiere nachzeichnen.

Genauer und sicherer, obgleich mühsamer, ist die algebraische Construction dieser Linie.

Nennt man den Bogen FR = x, und RN = y, so ist y = x, welches die Gleichung der Cykloide ist.

Will man aber die y von der Linie DF an rechnen, so ist $y = x + \sqrt{(r^2 - z^2)}$, wobei z = QL = dem Abstand der Ordinate vom Centro. Die x oder Bogenstücke müssen in Theilen des Halbmessers genommen werden. Nun ist QL = Cosinus, und SL = Sin. $<$FQS, dessen Bogen FS ist. Nimmt man QL willkührlich, so findet man dazu in den trigonometrischen Tafeln LS und FS, und FS = SP, also FS + LS = PL = y = Ordinate.

§. 386. Daraus folgt:

Man theile QF in 100, und also DF, als Abscissenlinie in 200 Theile, so werden die Angaben der trigonometrischen Tafeln keiner weitern Rechnung bedürfen. Nimmt man z. B. QL = 30 = Cosin. $<$FQS, so findet man LS = 95,39 und Bogen FS = 126,53, ihre Summe = 221,92 = y = PL. Folgende Berechnung ist auf diese Weise gemacht. Die Abscissen fangen in F an, ihre Ordinaten stehen rechtwinklicht zu beiden Seiten.

Ist

Ist FL =	1,	so ist LP	=	28,23
	5	— —	=	62,91
	10	— —	=	88,66
	15	— —	=	108,17
	20	— —	=	124,32
	30	— —	=	150,99
	40	— —	=	172,66
	50	— —	=	191,32
	60	— —	=	207,54
	70	— —	=	221,93
	80	— —	=	234,88
	90	— —	=	246,54
	100	— —	=	257,08
	110	— —	=	266,62
	120	— —	=	275,13
	130	— —	=	283,02
	140	— —	=	289,92
	150	— —	=	296,04
	160	— —	=	301,45
	170	— —	=	305,98
	180	— —	=	309,75
	185	— —	=	311,33
	190	— —	=	312,64
	195	— —	=	313,65
	199	— —	=	314,11
	200	— —	=	314,16

Weil alle Cykloiden einander ähnlich sind, so ist vorstehende Berechnung für alle Fälle brauchbar. — Man empfiehlt die Cykloide zu Brücken- und Gewölbbogen.

§. 387. Die logarithmische oder logistische Linie acfghiklmb Fig. 78. entsteht, wenn man auf der geraden Linie AB in gleichen Abständen senkrechte Ordinaten errichtet, welche eine geometrische Progression bilden.

Dies zu bewerkstelligen, nehme man Bb willkührlich, multiplicire sie mit einer Zahl, grösser, als 1, so bekommt man Mm; multiplicirt man Mm wieder mit jener Zahl, so erhält man Li. Heißt nun der Multiplicator oder Exponent = n; die Ordinate Bb = y, so ist Mn = ny.

Es

Es sey z. B. $n = \frac{4}{3}$ und Bb oder $y = 16{,}85$; so ist $ny = \frac{4}{3} . 16{,}85 = 22{,}5 = Mm$; und setzt man die Rechnung fort, so bekommt man folgende Ordinaten:

Bb	= 16,85	Gg	= 94,81
Mm	= 22,5	Ff	= 126,42
Ll	= 30	Cc	= 168,56
Kk	= 40	Aa	= 224,75
Ji	= 53,33	u. s. w.	
Hh	= 71,11		

Anmerk. Fängt man von Aa an, die Ordinaten zu berechnen, so muß der Exponent kleiner, als 1 (hier $\frac{3}{4}$) seyn.

Die Krümmung dieser Linie hängt von dem Unterschied der Ordinaten, und ihrem Abstande von einander ab. Weil die Abscissen Bm, BL, BK ꝛc. in arithmetischer, und die Ordinaten in geometrischer Progression zunehmen, so stellt diese Linie eigentlich ein logarithmisches System dar, wovon ihr Name entstanden ist.

§. 388. Eine krumme Linie von angenehmer Biegung ist die Schlangenlinie oder, wie ich sie lieber nennen mögte, die Glockenlinie EASBF Fig. 76. b., deren Entstehung folgende ist.

In einem Parallelogramm ACDB soll das Rechteck AP . PB gleich seyn PM . AC. Nennt man $AB = a$; $AC = b$, weil es beständige Größen sind, und $PM = y$; $PB = x$, so ist AB die Abscissenlinie, und

AP . PB = PM . AC einerlei mit $(a - x) . x = by$

$$ax - x^2 = by$$

$$\text{und } \frac{ax - x^2}{b} = y$$

welches die Gleichung für die Ordinaten dieser Linie ist. Die Ordinate wird am größten seyn, wenn $x = \frac{1}{2} a$; wird x größer, als $\frac{1}{2} a$, so wird das Parallelogramm $(a - x) . x$ kleiner, folglich, weil b beständig, y anfangen, abzunehmen. Man braucht daher nur die Ordinaten zu den Abscissen von A bis Z, oder B bis Z zu berechnen, und wenn Ap = BP, so wird auch pm = PM. seyn.

Setzt

Setzt man die Abscissenpuncte in A und B, so können die Abscissen sowol positiv, als negativ, oder von A nach Z, und von A nach q zu, genommen werden. Ist $Aq = Ap$, und $PB = Br$, so wird auch $qn = pm$, und $rz = PM$.

Wenn $b = \frac{1}{2}a$, so wird die größte Ordinate $= b$, und s fällt in v; je näher der Werth von b dem von a kommt, desto flacher wird der Bogen, und die krumme Linie windet sich um HJ, wie eine Schlange; je mehr hingegen b von a unterschieden ist, desto höher steigt der Bogen, oder desto größer wird die mittelste Ordinate ZS. Überhaupt gestattet diese Linie die größte Mannichfaltigkeit, und ahmt mancherlei Gestalten der Körper nach.

Mittelst der Integralrechnung findet man die Fläche BPM oder für jedes beliebige Stück durch folgendes Formular $\frac{ax^2}{2b} - \frac{x^3}{3b}$, wobei die x von A oder B nach Z hin genommen werden müssen. Ist $x = a$, so giebt das Formular die Fläche ABSA. Eben so viel betragen die Flächen AHE + JBF; werden nun diese vom Parallelogramm HJFE abgezogen, so bleibt die Fläche $ABFE = AHGS + SgJB$, und daher ist die ganze Fläche der Glockenlinie EASBF dem Parallelogramm GgHJ gleich, dessen Grundlinie $HJ = 2a$, dessen Höhe = der größten Ordinate. Diese aber steht da, wo $x = \frac{1}{2}a$, folglich wird anstatt $\frac{ax - x^2}{b}$ stehen können $\frac{a \cdot a}{2b} - \frac{a^2}{4b}$ $= \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{b} = \frac{a^2}{4b} = ZS$. Daher ist die Fläche des Parallelogramms $HG \cdot HJ = \frac{a^2}{4b} \cdot 2a = \frac{2a^3}{4b}$ $= \frac{a^3}{2b} =$ der ganzen Fläche der Glockenlinie EASBF.

Die Fig. 76. b. ist nach folgender Berechnung gezeichnet: $AB = a = 100$; $AC = b = 30$; die x sind von den Abscissenpuncten A und B vor- und rückwärts, und die Ordinaten oder die $y = PM = rz = pm = qm$ gehörigermaßen senkrecht auf und unter AB, AH und BJ getragen.

Wenn

Wenn x oder Ap = 5, so ist y = 15,84
10 — — — 30,
15 — — — 42,5
20 — — — 53,33
25 — — — 62,5
30 — — — 70,
35 — — — 75,83
40 — — — 80,
45 — — — 82,5
50 — — — 83,33.

Die Fläche der ganzen Glockenlinie $= \frac{a^3}{2b} = \frac{1000000}{60}$

$= 16666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 389. Die Blattlinie Fig. 78. b. entsteht, wenn man folgende Proportion construirt:

$$AB^2 : PA^2 = PB : PM$$

Nennt man $AB = a$; $AP = x$; $PB = a - x$; und $PM = y$, so ist $a^2 : x^2 = a - x : y$

und $a^2 y = x^2 \cdot (a - x)$

$$y = \frac{ax^2 - x^3}{a^2}.$$

Ist in A der Anfang der Abscissen, und werden die y zu beiden Seiten der Axe AB rechtwinklicht aufgetragen, so entsteht die krumme Linie AMBmA, die ich Blattlinie genannt habe, weil ihre Gestalt mit einem Blatt die meiste Ähnlichkeit hat.

Anmerk.

Differenziirt man die Gleichung $a^2 y = ax^2 - x^3$

$a^2 dy = 2axdx - 3x^2 dx$

und setzt das Differenzial dy = Null $= dy = \frac{2axdx - 3x^2 dx}{a^2}$

so ist $0 = 2axdx - 3x^2 dx : xdx$

$0 = 2a - 3x$

$3x = 2a$

und die größte Ordinate ist da, wo $x = \frac{2}{3}a$.

Die

Die Fläche, welche die Blattlinie einschließt, giebt das Formular $\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2}$, wodurch man ein Stück APM findet. Setzt man $x = a$, so wird das Formular $\frac{a^3}{3a} - \frac{a^4}{4a^2} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} =$ der Fläche ABMA; und doppelt $= \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{a^2}{6} =$ der ganzen Fläche.

Die Fig. 78. b. ist nach folgenden Angaben gezeichnet: $AB = a = 100$, und $AP = x = 5, 10, 15$ u. genommen, die so gefundenen Ordinaten über und unter AB rechtwinklicht aufgetragen, und die Endpuncte zusammengezogen.

Ist x =	5,	so ist y =	0,23	größte Ordin., wenn x =	66,6, ist y = 14,81
	10	— —	0,9	70 — —	14,7
	15	— —	1,91	75 — —	14,06
	20	— —	3,2	80 — —	12,8
	25	— —	4,68	85 — —	10,84
	30	— —	6,3	90 — —	8,1
	35	— —	7,96	93 — —	6,05
	40	— —	9,6	95 — —	4,51
	45	— —	11,14	97 — —	2,82
	50	— —	12,5	98 — —	1,92
	55	— —	13,61	99 — —	0,89
	60	— —	14,4	100 — —	0.
	65	— —	14,78		

Die ganze Fläche dieser Linie $= \frac{a^2}{6} = \frac{10000}{6} = 1666\frac{2}{3}$ Quadratmaaß.

§. 390. Die Quadratrix des Dinostratus.

Diese krumme Linie entsteht also:

Der Halbmesser CB im Quadranten BAC Fig. 79. bewege sich um C und komme nach und nach in die Lage CE, CJ, CK bis in CA; mit ihm parallel bewege sich eine andere Linie längs CA hinauf, die nach und nach in die Lage NP, kp, mn komme. Der beständige Durchschnitt der beiden sich bewegenden Linien erzeugt die krumme Linie DFGHA, welche Quadratrix heißt.

Die

Die geometrische Construction besteht darin, daß man CA in beliebige gleiche Theile theilt, und durch die Theilpuncte Parallelen mit CB zieht; darauf den Bogen AB in eben so viele Theile theilt, als CA hat, und nach den Theilungspuncten die Halbmesser CE, CJ, CK zieht. Die erhaltenen Durchschnittspuncte F, G, H liegen in der Quadratrix. Nennt man CA die Abscissenlinie, so sind CN, Ck, Cm ꝛc. Abscissen, und NF, kG, mH die dazu gehörigen Ordinaten. Weil nun z. B. in △ CmH drei Stücke, nämlich Cm = x, Winkel mCH = Bogen AK, und der rechte Winkel bekannt sind, so findet man mH oder y durch

Sin. tot. : Cm = Tang. HCm : mH

d. i. Sin. tot. : x = Tang. C : y

$$\text{und } y = \frac{x \cdot \text{Tang. C}}{\text{Sin. tot.}}.$$

Durch dies leichte Formular sind für einen angenommenen Radius CA = 100 und Bogen AB in 100 Theilen, folgende Ordinaten berechnet, wornach jede Quadratrix gezeichnet werden kann.

Wenn CN = x 1,111, so ist y oder NF = 63,65 u. s. w.

x = 1,111,	y = 63,65	x = 70,	y = 35,67
5 —	— 63,53	80 —	25,99
10 —	— 63,14	90 —	14,25
20 —	— 61,55	95 —	7,47
30 —	— 58,88	100 —	0
40 —	— 55,06		
50 —	— 50.		
60 —	— 43,59		

§. 391. Die Spirallinie, Radlinie und Quadratrix heißen auch zuweilen transcendente Linien, im Gegentheil von den algebraischen, deren Ordinaten durch algebraische Formeln gefunden werden. — Es sind unzählig viele krumme Linien möglich, und es ist eine angenehme Beschäftigung, sich sowol im Construiren und Berechnen, als auch im Erfinden derselben zu üben. Daher wird man die ausführlichere Betrachtung der krummen Linien, welche als Verzierungen in der Baukunst, als

mechanische Krümmungen bei bewegten Körpern häufig vorkommen, gern verzeihen.

Wer sich in der Berechnung und Zeichnung solcher krummen Linien üben will, versuche z. B. nach der Formel

$$a : x = a^3 - x^3 : y^3, \text{ worin } y = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 x - x^4}{a}\right)}$$

für eine beständige Größe $a = 100$, die x willkührlich genommen, die dazu gehörigen Ordinaten zu berechnen, und auf a, worauf die Abscissen genommen, rechtwinklicht zu setzen. Er wird eine krumme Linie, fast dem steigenden Bogen Fig. 137. ähnlich, bekommen, worin die größte Ordinate hk, da auf der $bc = a$ steht, wo bh, oder $x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} = 63$ ist. Werden die Ordinaten zu beiden Seiten der Linie a (in der Figur bc) aufgetragen, und ihre Endpuncte zusammengezogen, so bekommt man eine geschlossene krumme Linie, die einer gedrückten Ellipse gleicht.

Zweite Abtheilung.

Practische Geometrie.

1. Zeichnung geometrischer Figuren.

§. 392. Zur Zeichnung geometrischer Figuren gehört ein gutes Reißzeug.

Anmerk. Das Unentbehrlichste in demselben ist:

1. ein Federzirkel, welcher an dem einen Schenkel eine leicht bewegliche Schraube hat; vermittelst derselben sind die feinsten Bewegungen der Schenkel möglich.
2. Ein anderer Zirkel, von dem der eine Schenkel abgenommen, und dem dafür eine Blei- oder Reißfeder angeschraubt werden kann.

   Die Spitzen der Zirkel müssen nicht gehärtet, sehr spitz, wie Nadeln, und rund seyn; die Schenkel schlank, dünn, und nach der Spitze hin piramydenförmig zulaufen; die Gewinde so gearbeitet, daß die Schenkel beim Auf- und Zumachen nicht Rückungen machen, sondern in jeder Stellung gleich vest stehen. Eckige Spizzen geben beim Umdrehen des Zirkels dicke Puncte und verderben die Zeichnung; plumpe Schenkel hindern das Auge, die Puncte zu sehen.
3. Eine Reißfeder muß wohl polirte, an dem schreibenden Ende zart abgerundete, vermittelst einer feinen Schraube leicht zusammenhängende Backen haben; vor und nach dem Gebrauch sauber abgewischt, und die Tinte ihr mit einer

Schreibfeder oder einem Pinsel zugefüllt werden, damit die äußere Seite nicht schmutzig wird, und ungeschickte Linien macht. Je zarter und gleichförmiger die Linien sind, desto besser ist die Reißfeder. — Die Tinte oder Tusche muß sehr flüssig seyn.

4. Eine kurze Reißfeder mit einem Gelenk, zum Einsetzen in den zweiten Zirkel, um Kreise zu beschreiben, muß ein gutes Gewind im Gelenk haben, und niemals zu leicht beweglich seyn.

5. Ein Transporteur ist ein messingner Halbkreis, der in 180° getheilt ist. Die Theilungslinien sind zart und laufen am abgedachten Umkreise scharf aus. Dies nothwendige Instrument ist nur dann brauchbar, wenn die Grade gleich groß sind, und der Mittelpunct durch eine scharfe Spitze angegeben ist.

6. Der tausendtheilige oder verjüngte Maaßstab ist ein messingnes oder hölzernes Lineal, auf welchem eine Zeichnung Fig. 80. befindlich ist, mittelst welcher man allerlei Linien messen, und verjüngt oder verkleinert aufs Papier tragen kann. Die Linie AB ist gleich und parallel CD, jede in 10 Theile getheilt, wie in der Figur zu sehen ist. Die Theilpuncte werden durch die Transversalen 1D, 2—1, 3—2 ꝛc. zusammen gezogen. Hiedurch ist die Linie B1 in 10 Theile, folglich BA in 100 Theile getheilt worden. So ist z. B. ab = 1; mn = 3; qr = 88 solcher Theile; und ur = 188; vr = 288. Verlängert man die Parallelen AG, 8w, C300, bis sie 10mal AB sind, so hat man einen tausendtheiligen Maaßstab; die Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. auf AB und CD bedeuten also 10, 20, 30, 40, 50 ꝛc. und die auf den Linien CA und DB die einzelnen Theile. Will man z. B. eine Linie = 31 auf's Papier tragen, so öffne man den Zirkel von a bis p. — Der Gebrauch des Transporteurs und des Maaßstabes ist äußerst wichtig, wird Anfängern zuweilen schwer, und

die

die Übung damit müssen wir sehr empfehlen. Man thut wohl, wenn man seine Geschicklichkeit im Verfertigen derselben versucht.

7. Ein Winkelmaß, Winkelhaken, bildet an seiner äußern und innern scharfen Kante rechte Winkel, und ist bequem, Perpendikel und rechte Winkel zu errichten. Mit Hülfe eines Peripheriewinkels §. 196. Fig. 30., dessen Schenkel AD und DB auf dem Diameter stestehen, läßt sich das Winkelmaß prüfen und berichtigen.

Außer diesen unentbehrlichsten Werkzeugen enthalten gute Reißzeuge noch manche andere recht nützliche, als

8. einen hölzernen oder messingenen rechtwinklichten Triangel, welcher sehr bequem ist, Parallellinien zu ziehen. Man legt ihn zu diesem Zweck z. B. mit der großen Catheten an ein vestliegendes Lineal, und verschiebt ihn an demselben, dann werden alle an der Hypotenuse oder der kleinen Cathete beschriebene Linien mit einander parallel. Das Parallellineal, welches aus zwei mit Windungen versehenen Linealen besteht, die einander näher und entfernter gebracht werden können, dient zu gleichem Zweck.

9. Eine feine Punctirnadel; ein Bleistift zum Anschrauben an einen Zirkel, wenn sogenannte blinde (wieder auszulöschende) Linien gezogen werden sollen, gehören auch in ein gutes Reißzeug. — Gute Bleistifte bröckeln beim Anschneiden nicht ab, schneiden sich weich, erlauben feine Spitzen, und geben zarte, leicht wieder auszulöschende Linien.

10. Oft findet man auch in den Reißzeugen einen Compaß, der aber, wenn er brauchbar seyn soll, folgende Einrichtung haben muß.

Auf einer viereckigen rechtwinklichten Messingplatte abgd Fig. 81. ist eine runde Büchse, in deren Mittelpunct C auf einem feinen Stahlstift eine (wo möglich 3 bis 4 Zoll lange) sehr em-

empfindliche Magnetnadel schwebt. Am innern Umkreise der Büchse ist da, wo die Spitze der Nadel hintrifft, ein Kreis beschrieben, und in seine 360 Grade getheilt; aber 0° liegt allemal auf einer Linie, die mit einer Seitenfläche der Messingplatte parallel und durch ihren Mittelpunct c geht. Diese Linie SN heißt Meridian oder Mittagslinie. Nun weist die eine Spitze der Nadel bekanntlich beinahe nach Norden, jedoch hier nicht ganz, sondern 19° westlich, welchen Unterschied vom Nordpunct man ihre Abweichung nennt. Wenn man daher diese kennt, so stellt man die Messingplatte so auf eine Ebene, daß die Magnetnadel auf den Punct ihrer Abweichung einspielt, und zieht an einer Seitenfläche ad oder bg eine gerade Linie, welche die Mittagslinie, und eine andere ab oder dg, welche die Abend- und Morgenlinie ist. Hat man auf eine andere Weise eine Mittagslinie erhalten, so kann man mittelst derselben leicht die Abweichung der Magnetnadel finden, wenn man die Messingplatte an die Mittagslinie schiebt, und den Punct bemerkt, auf dem die Nadel stehen bleibt.

Ein solcher Compaß ist beim Anlegen der Grundrisse und Landcharten nicht nur, sondern auch zur Aufstellung der Sonnenuhren, ja selbst zum Winkelmessen sehr brauchbar, zu welchem letztern Zweck man ihn mit 2 Absehen (Dioptern) in N und S versehen muß. — Dieses Instrument gehört eigentlich nicht in ein Reißzeug.

Das Gelingen einer Zeichnung hängt zu sehr von der Güte der Reißgeräthschaften ab, als daß man das Verweilen bei denselben mißbilligen sollte. — Für den Preis von 3½ Rthlr. erhält man vom Mechanikus Krafft in Halle sehr elegante Reißzeuge, die das Nothwendige, und für 5 bis 8 Rthlr. dergleichen, die alles Nützliche und Bequeme enthalten.

§. 393.

§. 393. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 82.

Aufl. Öffne den Zirkel über die Hälfte der gegebenen Linie ab, und beschreib aus a und b über und unter der ab kleine Bogen in d und f, mit einerlei Zirkelöffnung; ziehe die Bogendurchschnitte d und f durch eine gerade Linie zusammen, dann ist ac = cb.

Wäre die Linie ab Fig. 83. am untern Rande einer Fläche, und daher unter ihr kein Bogendurchschnitt möglich, so beschreibe man über der ab aus a und b mit verschiedener Zirkelöffnung die kleinen Bogen f, d, g; eine gerade Linie durch diese Durchschnitte und zur ab verlängert, ist die fc, welche ab in c halbirt.

Oft pflegt man durch Versuche mit dem Zirkel die Theilung zu bewerkstelligen, wobei einige Übung manchmal schnell zum Ziele führt, ohne daß man eine Zeichnung durch Hülfslinien beschmutzt.

Die durch Hülfe der Bogen gefundene Linie cd steht allemal auf der Mitte der ab senkrecht.

(Man erhält, wenn man ad und bd Fig. 82. zusammenzieht, zwei völlig gleiche rechtwinklichte Dreiecke, und eben so viel unterhalb der ab. Vergl. §. 171.)

§. 394. Auf einer gegebenen Linie ab ein Perpendikel zu errichten.

Aufl. Es kommen verschiedene Fälle vor.

1. Soll das Perpendikel auf der Mitte der Linie stehen, so ist das Verfahren, wie in §. 393.
2. Soll das Perpendikel am Ende der Linie b Fig. 84. stehen, so setze den Zirkel in b, thue ihn ungefähr auf bis in c. Aus c ziehe den Kreis bde, und den Diameter dce; aus e aber die gerade Linie eb, so ist < dbe ein rechter Winkel, weil er ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf dem Diameter stehen, und eb senkrecht auf ab in b.
3. Wenn das Perpendikel auf einem gegebenen Punct Fig. 85. der Linie ab in c stehen soll, so setze den Zirkel in c, ziehe die Bogen ef und gh,

gh, daß fe = eh werde. Aus den Durchschnitten beschreibe, wie in §. 393., die Bogen in d, ziehe dc zusammen, so ist dc das Perpendikel. Kann man sich auf die Richtigkeit des Winkelmaßes verlassen, so löst man alle diese Aufgaben mittelst desselben weit einfacher und schneller.

§. 395. Zu einer gegebenen Linie AB Fig. 86. eine Parallellinie zu ziehen.

Aufl. Mit der Öffnung des Zirkels, die dem Abstande der Parallelen gleich ist, beschreibe aus beiden Enden der AB, oder wo es sich sonst paßt, Bogen fg, hi, und lege ein Lineal so daran, daß es die Bogen berührt, so wird die Linie CD auf jedem Puncte von AB gleich weit abstehen.

Oder: errichte in A und B Perpendikel von gleicher Länge, und ziehe ihre Endpuncte CD zusammen.

Ist ein Punct P gegeben, durch welchen die Parallele gehen soll, so setze den Zirkel in P, öffne ihn bis er AB berührt, und beschreibe mit derselben Öffnung aus A und B Bogen, wie fg und hi, durch welche sich die Parallele ziehen läßt. Sehr bequem zieht man Parallelen mit Hülfe eines Parallellineals, oder körperlichen Dreiecks. Siehe §. 392, 8.

§. 396. Eine gegebene gerade Linie AB Fig. 87. in verlangte gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ist die Anzahl der Theile eine gerade Zahl, z. B. 12, so theile die AB erst in zwei Theile, jede Hälfte wieder in zwei Theile, so hat jeder so gefundene Theil noch $\frac{3}{12}$ in sich. Will man nun die Linie durch Hülfslinien oder Puncte nicht verletzen, so trage man $\frac{1}{4}$ von AB auf ein besonderes Blatt Fig. 87. nach ab, ziehe dazu die größere Parallele cd, und trage mit willkührlicher Zirkelöffnung 3 Theile auf cd. Ziehe dann durch die Endpuncte die geraden Linien cad und dbd, und von den Theilpuncten 1 und 2 die geraden Linien 1hd und 2gd, so wird ah = hg = gb, und also ab in 3 gleiche Theile getheilt seyn, welche man nun leicht auf die AB zwischen Ab, bC, Cg, gB tragen kann.

Daß

Daß aber ab = hg = gb ist, geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke adh und cdi u. s. w. hervor. Siehe §. 186.

Ist die Anzahl der Theile ungerade (oder eine durch 2 nicht theilbare Zahl, als 7 oder 11 ꝛc.), so muß man entweder durch vielerlei Versuche mit Zirkelöffnungen, oder durch eine größere Parallele cd, wie eben gezeigt, oder durch Rechnung die Theilung bewerkstelligen. Im letztern Fall mißt man AB mit dem Zirkel, hält diese Zirkelöffnung an einen tausendtheiligen Maaßstab, und sieht also, wie lang sie in diesen Theilen ist. Die Anzahl derselben theilt man, wie verlangt, durch Rechnung, und trägt den Quotienten mit dem Zirkel vom Maaßstabe auf die AB, so erhält man den Werth eines verlangten Theils, den man so oft, als man will, neben einander setzen kann.

§. 397. Auf einer gegebenen Linie ab Fig. 88. einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Aufl. Nimm die Weite ab mit dem Zirkel, und beschreib aus a und b die kleinen Bogen dd und cc. Von ihrem Durchschnitt ziehe die Linie fa und fb.

Daß △ afb gleichseitig sey, ergiebt sich aus der Construction; denn zöge man statt der kleinen Bogen ganze Kreise, so würden die Seiten des △ Radien derselben.

§. 398. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 89. einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben.

Aufl. Nimm eine der gegebenen Linien z. B. ab zur Grundlinie; mit der Länge cd beschreibe aus a und b kleine Bogen, und von ihrem Durchschnitt in c ziehe Linien nach a und b, so sind die Schenkel ca und cb einander gleich.

§. 399. Aus drei gegebenen Seiten ab, cd, fg Fig. 90. ein Dreieck zu bilden.

Aufl. Nimm eine der gegebenen Linien z. B. ab zur Grundlinie; mit cd beschreib von a aus einen Bogen;

gen;

gen; mit fg von b aus ebenfalls, und vom Durchschnitt h ziehe Linien nach a und b.

§. 400. Einen rechtwinklichten Triangel Fig. 91. zu beschreiben.

Aufl. Auf dem Ende einer Linie ab errichte ein Perpendikel ac, und ziehe cb zusammen.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, daß die Größe der ab und ac auch gegeben seyn könne. Wäre aber ab und bc (die Hypotenuse) gegeben, so würde man mit bc von b aus einen Bogen in c beschreiben, wodurch die Größe des in a errichteten Perpendikels bestimmt wird.

§. 401. Zu einem gegebenen Dreieck ein gleich großes zu zeichnen.

Aufl. Verfahre wie §. 399. gewiesen, denn alle drei Seiten sind bekannt.

§. 402. Ein Dreieck Fig. 92. in mehrere gleich große Dreiecke zu theilen.

Aufl. Theile eine Seite des Dreiecks in die verlangten gleichen Theile, z. B. in drei, und ziehe von den Theilpuncten d und e gerade Linien nach der gegenüberstehenden Winkelspitze C, so ist △ ACd = △ dCe = eCB, weil sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

§. 403. Auf einer gegebenen Linie ab Fig. 93. ein Quadrat zu errichten.

Aufl. Errichte das Perpendikel ac = ab, und beschreibe mit derselben Zirkelöffnung aus c und b Bogen, die sich in d durchschneiden werden; ziehe cd und db, so ist abdc ein Quadrat.

§. 404. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 95. ein Rechteck zu bilden.

Aufl. Nimm ab zur Grundlinie; in a errichte ein Perpendikel = cd, und beschreibe aus c mit der Zirkelöffnung ab, so wie aus b mit ac kleine Bogen, die sich in d schneiden. Ziehe cd und db zusammen. Oder errichte in a und b gleiche Perpendikel = der

2ten

ten gegebenen Linie, und ziehe ihre Endpuncte zusammen, so ist acdb das verlangte Rechteck.

§. 405. Zu einer gegebenen Linie ab Fig. 94. und dem daran liegenden Winkel fae einen Rhombus zu zeichnen.

Aufl. Verlängere den Schenkel af bis c, daß ac = ab wird. Von c und b aus beschreibe mit der Zirkelöffnung ab die Bogen in d, und ziehe cd und db.

§. 406. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 96. einen Rhomboides zu zeichnen.

Aufl. Setze ab und cd spitzwinklicht zusammen. Mit ab beschreibe von d aus, und mit cd von b aus, Bogen, die sich in f schneiden werden. Ziehe fd und fb.

Es könnte auch ein Winkel dab, oder abf gegeben seyn. Im letztern Fall müßte Seite bf einen stumpfen Winkel mit ab machen. $< dab + < abf = 2$ rechten.

§. 407. Aus zwei gegebenen Linien ab und cd Fig. 97. ein Trapezium zu beschreiben.

Aufl. Setze die beiden gegebenen Linien parallel gegenüber, und ziehe ihre Endpuncte durch ca und db zusammen.

Wenn die Höhe des Trapeziums oder die gf gegeben ist, so muß man die Parallelen in diesem Abstande ziehen. Vergl. §. 395.

Es kann auch hier ein Winkel acd gegeben seyn; dann wird der Schenkel ca erst willkührlich lang, darauf das Perpendikel gf, und endlich ab und bd gezogen.

§. 408. Aus 4 ungleichen Seiten ab, cd, ef und gh einen Trapezoides zu bilden. Fig. 98.

Aufl. Nimm ab zur Grundlinie, setze cd schräg daran; von d aus beschreibe mit ef, und von b aus mit gh Bogen, die sich in g schneiden. Ziehe gd und gb. — Der $<$ bad kann gegeben seyn.

§. 409.

§. 409. Zu jeder geradlinigen Figur eine gleiche ähnliche zu zeichnen.

Aufl. Zerlege sie durch Diagonalen in Dreiecke, und zeichne eines nach dem andern, wie sie neben einander liegen, auch so wieder hin, so wird die zweite Figur der erstern gleich und ähnlich seyn.

§. 410. Einen Kreis zu beschreiben. Fig. 99.

Aufl. Setze den einen Zirkelfuß in den Mittelpunct c; öffne den Zirkel um die Größe des Radius, und bewege den andern Schenkel, an dem eine Reißfeder angeschraubt ist, um den ersten in c feststehenden, so wird die Reißfeder die krumme Linie abed beschreiben, welche Kreis, zuweilen auch, wiewol mit Unrecht, Zirkel, genannt wird.

§. 411. Eine Schlangenlinie Fig. 100. zu zeichnen.

Aufl. Ziehe die blinde Linie ab, setze den Zirkel in c, und beschreibe den Halbkreis ade; mache ef = ce; setze den Zirkel in f und beschreibe den Halbkreis egh; mache hi = fh, und beschreibe aus i den Halbkreis hkl. Dies Verfahren beliebig fortgesetzt, giebt die krumme Linie adeghkl, welche man Schlangenlinie nennt. — Vergleiche aber §. 388., wo die Zeichnung und Berechnung einer ähnlichen krummen Linie angegeben wird.

§. 412. Eine Schneckenlinie zu zeichnen. Fig. 101.

Aufl. Auf der blinden ab nimm die beiden Puncte c und d. Aus c beschreibe den Halbkreis def; aus d den Halbkreis fgh ꝛc. so, daß alle Halbkreise über der ab aus c, und die unter der ab aus d beschrieben werden. Die Gestalt hängt von cd ab. — Eine Schneckenlinie höherer Ordnung ist die §. 381. beschriebene.

§. 413. Eine Linsenlinie Fig. 102. zu beschreiben.

Aufl. Aus a und b beschreibe zwei gleiche Kreise, die sich in e und d schneiden; ziehe die geraden Linien

cae,

cae, daf, ebg, dbg. Setze nun den Zirkel in e, öffne ihn bis g und beschreibe den Bogen gc; setze ihn in d und beschreibe den Bogen hf, so legen sich die Bogen gc und hf an die Kreise an, und die krumme Linie cghf ist die Linsenlinie, welche mit der Ellipse, deren Zeichnung und Berechnung von §. 301. an gelehrt ist, Ähnlichkeit hat, ohne ihr an Schönheit gleich zu kommen.

§. 414. Eine Eierlinie zu beschreiben. Fig. 103.

Aufl. Mit ac beschreibe aus c einen Kreis, ziehe den Diameter ab, und den senkrechten Halbmesser cf. Durch f ziehe aus a die afh, und von b die bfg. Nun setze den Zirkel in a, öffne ihn bis b und beschreibe den Bogen bh; setze ihn in b und beschreibe den Bogen ag; setze ihn endlich in f, öffne ihn bis g, und ziehe den Bogen gh. Die so entstandene krumme Linie adbhg ist die Eierlinie (Ovale).

§. 415. Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe willkührlich eine Sehne ab Fig. 104., theile sie in 2 Theile, und ziehe auf ihre Mitte die senkrechte ch, welche durch den Mittelpunct gehen muß (Siehe §. 191. und 192.). Theile ch in zwei gleiche Theile, so ist cm = mh, und m der Mittelpunct.

§. 416. Aus einem gegebenen Bogenstücke abc Fig. 106. den Mittelpunct des zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Nimm den Punct b auf dem Bogenstücke willkührlich, und beschreibe aus demselben die Bogen r, v, t und z; mit gleicher Zirkelöffnung aus a die Bogen s und u; und aus c die Bogen w und x. Die Durchschnitte ziehe durch gerade Linien zusammen, welche sich im Mittelpunct m durchschneiden werden, aus welchem sich der Kreis vollenden läßt.

Hiedurch geschieht eigentlich weiter nichts, als daß auf der Mitte zweier Sehnen ab und bc Perpendikel errichtet werden, die sich, nach §. 415., im

Centro

Centro schneiden. — Drei, nicht in gerader Linie liegende Puncte a, b, c lassen sich also jedesmal in eine Kreislinie bringen.

§. 417. Um ein Dreieck cbc Fig. 105. einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Errichte auf der Mitte jeder Seite oder auch nur zweier Seiten Perpendikel fh, eh und dh, welche sich im Mittelpunct h schneiden. Aus h ziehe mit der Öffnung ha = hc = hb den Kreis.

Die Seiten des Dreiecks sind hier als Sehnen zu betrachten, und es gilt, was §. 191. und 192. gesagt ist.

§. 418. Einen Winkel cab Fig. 107. in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Ziehe mit willkührlicher Zirkelöffnung ag einen Bogen durch beide Schenkel, ziehe gh durch eine gerade Linie zusammen, theile sie in 2 Theile, und ziehe durch ihre Mitte d die gerade Linie da, so ist $< y = < x$. Denn gh ist als Sehne, und Bogen gh als das Maaß des Winkels cab, folglich gd = dh, und ein halb so großer Bogen mißt nur einen halb so großen Winkel.

§. 419. Innerhalb eines Dreiecks einen Kreis, der alle Seiten berührt, zu beschreiben. Fig. 108.

Aufl. Theile zwei Winkel des △ in zwei gleiche Theile durch die Linien dc und bc, so wird der Durchschnitt das Centrum, und ein Perpendikel cp aus c nach einer Seite der Radius des zu beschreibenden Kreises seyn.

Anmerk. Hier sind die Seiten des ▽ als Tangenten des Kreises zu betrachten, die in ihn den Puncten p, m, n berühren, auf den Radien c aus senkrecht stehen, und es ist bp = bm; ap = an; du = dm. Zöge man nun die Berührungspuncte p, m, n durch gerade Linien zusammen, so würden diese Chorden vorstellen, die durch dc und bc halbirt werden, und die Aufgabe wäre mit §. 417. einerlei.

§. 420

§. 420. Ein regelmäßiges Vieleck zu beschreiben.

Aufl. In jedem Kreise läßt sich sein Radius 6 mal herum tragen, folglich erhält man ein regelmäßiges Sechseck Fig. 109., wenn man ab = bd = df = fg = gh = ha = Radius macht.

Man erhält ein gleichseitiges Dreieck adg, wenn man den ersten, dritten und fünften Theilpunct zusammenzieht.

Ein Viereck erhält man aus dem Kreise Fig. 110., wenn man zwei senkrechte Diameter ab und fd. und ihre Endpuncte durch gerade Linien zusammen zieht.

Man erhält ein Achteck, wenn man die Bogen ad = db ꝛc. halbirt, und nach den Theilpuncten die Linien ah, hd, dm, mb ꝛc. zieht. Überhaupt zeichnet man jedes Vieleck mit Hülfe eines Kreises, den man mechanisch in so viele Theile theilt, als das Vieleck Seiten haben soll, und die Theilpuncte durch gerade Linien zusammen zieht. So erhält man z. B. das Fünfeck Fig. 111. durch fleißiges Probiren, bis sich eine Zirkelöffnung 5 mal im Kreise herum tragen läßt. Allein man kann auch die Theilpuncte 1, 2 ꝛc. finden, wenn man $< x = 36°$, oder $< y = 72°$ macht, so wie auch durch Rechnung, wovon weiter unten.

§. 421. Wenn die Seite eines Vielecks gegeben ist, das Vieleck selbst zu zeichnen, z. B. auf ab Fig. 112. ein Fünfeck zu beschreiben.

Aufl. Mache ad = ab und beschreibe aus a den Halbkreis dfg, hib, und theile ihn in so viel Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, hier in 5. Von a ziehe eine gerade Linie nach dem 2ten Theilpunct von d an gerechnet, hier nach g, so hat man 2 Seiten ab und ag des Vielecks in richtiger Lage. Ein Perpendikel aus der Mitte einer jeden, wie kc und lc, giebt den Mittelpunct c, aus dem der Kreis, worin das Vieleck agmnb völlig beschrieben werden kann, sich ziehen läßt. ($< gad$ = Centriwinkel, $< gab$ = Polygonwinkel. Siehe §. 199.) Die Zeichnung

der

der Sieben-Neunecke u. s. w. ist jedem Anfänger ziemlich schwer, allein Übung macht alles leichter, daher ist sie auch hier recht sehr zu empfehlen.

§. 422. Einen Würfel oder Kubus zu zeichnen. Fig. 113.

Aufl. Beschreibe ein Quadrat abcd, dann die Linie be = ab unter einem spitzen Winkel x; ziehe damit parallel an, ch, do; und mit ab parallel die ne und ho, so daß jede dieser Linien = ab wird. Ziehe an, nh, ne blind, weil sie die dem Auge abgewendeten Seitenlinien des Würfels sind.

Das Parallelogramm chod ist die oberste, abcd die vorderste, bsod die Seitenfläche, welche schattirt wird; aneb die Grundfläche; chna die andere Seiten-, und hoen die hinterste Fläche. — Der Winkel x hängt von der Stellung des Auges gegen den Würfel ab.

§. 423. Das Netz eines Würfels zu zeichnen.

Unter dem Netze eines Körpers verstehen wir die gesammte Oberfläche oder Umgebung. Das Netz des Würfels besteht in sechs gleichen Quadraten Fig. 114., die zwischen die Parallelen hh und oo sehr leicht gezeichnet werden können.

Man lege die 6 Quadrate so zusammen, daß abcd Vorderfläche, bdeo und achn Seitenflächen, nhoe Hinterfläche, und cdho die Decke wird, so bleibt aneb Grundfläche. —

(Gute Pappe ist sehr geschickt, die Netze der geometrischen Körper, welche beim Unterricht unentbehrlich sind, darzustellen. Des bessern Ansehens wegen überzieht man sie mit buntem Papier. Das Formen aus Pappe ist für Kinder eine eben so angenehme, als nützliche Beschäftigung.)

§. 424. Ein Parallelopipedon zu zeichnen. Fig. 115.

Aufl. Zeichne zum Rechteck abcd ein gleich großes hefg dessen Seiten mit denen des erstern parallel sind, und ziehe cg, df, be; aber ah, gh und he blind,

blind, weil sie die hintern Seitenlinien vorstellen. Schattire, wie in der Figur zu sehen ist.

Von der Lage des Körpers gegen das Auge hängt die Länge der be oder $< x$ ab.

§. 425. Das Netz eines Parallelopipedons zu zeichnen. Fig. 116.

Aufl. Auf einer geraden Linie bb errichte ein Parallelogramm bacd, daneben das kleinere ahgc; Rechteck hefg = bacd und Rechteck ebdf = ahgc. Verlängere gh und fe oben und unten, bis gc = fd = eb = ha = der Breite des Rechtecks ahgc, und ziehe cd und ab. — Man erhält auf diese Weise dreierlei Rechtecke, die zusammengefügt den Körper einschließen. Wenn hegf Unterfläche, so sind abgc und ebdf Seitenflächen; abeh Vorderfläche, gfdc Hinterfläche und bacd Oberfläche oder Decke.

§. 426. Ein Prisma, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 117.

Aufl. Auf jeder Spitze des △ acb errichte die senkrechten Linien ad = cr = be. Ziehe dr, re; die de blind, und schattire die dem Licht abgewendete Seite.

Man könnte auch erst das Rechteck deba, und dann die gleichen Dreiecke acb und dre zeichnen.

§. 427. Das Netz eines Prismas, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 118.

Aufl. Beschreibe ein Rechteck abdc, und theile es durch die Parallelen ge und fh in 3 gleiche Rechtecke, welche die 3 Seiten vorstellen. Die gleichseitigen Dreiecke hke und fgm bilden die Decke und den Boden. Legt man diese 5 Stücke so zusammen, daß ked, und amb einander berühren, so erhält man ein 3seitiges Prisma.

Wenn das Prisma mehrere Seiten haben soll, so muß ab cd in so viel Rechtecke getheilt werden, als es Seiten giebt, und statt der Dreiecke hke und fgm, müssen 2 Vielecke von so viel Seiten, als das Prisma hat, stehen.

§. 428. Eine Piramyde, z. B. von 3 Seiten, zu zeichnen. Fig. 119.

Aufl. Beschreibe ein Dreieck abc; wähle senkrecht über der Mitte von ab, den Punct d, und ziehe von a, c und b gerade Linien nach d. Schattire die Seite bcd ganz, und acd ein wenig. — Sie heißt abgekürzt, wenn ein Stück dno daran fehlt. — Wenn der Punct p gegeben ist, so findet man die Lage des Puncts n oder o in einer solchen perspectivischen Zeichnung durch cd : ad = dp : dn.

§. 429. Das Netz einer Piramyde, z. B. einer dreiseitigen, zu zeichnen.

Aufl. Aus a beschreibe den Bogen bc Fig. 120. blind, und trage auf denselben die gleichen Sehnen bf, fg, gc. Von den Theilpuncten ziehe gerade Linien nach a, und auf fg errichte den gleichseitigen △ fgo, welcher die Grundfläche wird.

Bei der abgekürzten fehlt das Stück anm; an = ar = at = am. Sollte die Piramyde mehr Seiten, z. B. 6 erhalten, so müßten auf den Bogen bc 6 Sehnen getragen, und aus dem Dreieck fgo ein Sechseck gemacht werden, wovon fg eine Seite wäre. In allen Fällen wird man durch das Zusammenlegen der Triangelflächen an die Grundfläche eine Piramyde bekommen.

§. 430. Einen Kegel zu zeichnen. Fig. 121.

Aufl. Beschreibe einen Triangel abc, worin ba = bc; ac blind. Das Perpendikel bm ist seine Höhe, ac der Diameter der Grundfläche, die bei dem niedergelegten Kegel elliptisch erscheint. Mit beliebiger Zirkelöffnung ai beschreibe aus i den Bogen acc, und aus dem Punct d auf der verlängerten Axe mit gleicher Öffnung den Bogen abc. Schattire ihn, wie die Figur zeigt.

Am abgekürzten Kegel fehlt das Stück bno.

§. 431. Das Netz eines Kegels zu zeichnen. Fig 122.

Aufl Mit dem Radius ba beschreibe aus b den Bogen ad, welcher so lang seyn muß, als die Peripherie der Grundfläche des Kegels (Fig. 123). Den Kreissector bad rolle man so zusammen, daß ab an bd

bd streift, so hat man den Mantel, zu welchem die Grundfläche c Fig. 123. paßt.

Beim abgekürzten Kegel fehlt an dem Mantel das Stück bno.

§. 432. Einen Cylinder zu zeichnen Fig. 124

Aufl. Im Parallelogramm abdc ziehe ab und cd blind. Nimm eine schickliche Zirkelöffnung, auf der Axe fm den Punct f und beschreibe den Bogen ab blind; aus g den gleichen Bogen ab; thue dasselbe aus den Puncten h und m, und schattire, wie die Figur zeigt.

§. 433. Das Netz eines Cylinders zu zeichnen. Fig. 125.

Aufl. Zeichne ein Rechteck, in welchem ab = dem Umfange, und ac = der Höhe des Cylinders ist. Rolle nun abcd so zusammen, daß ac an bd streift; zeichne noch 2 Kreise n, n, deren Umfang = ab ist, die zu Boden und Decke dienen, und setze alles gehörig zusammen, so ist der Cylinder fertig.

§. 434. Eine Kugel oder Sphäre zu zeichnen. Fig. 126.

Aufl. Beschreibe mit dem Halbmesser der Kugel einen Kreis, und schattire ihn auf der dem Licht abgewendeten Seite.

§. 435. Das Netz einer Kugel zu zeichnen.

Aufl. Suche für den Diameter der Kugel den Umfang eines größten Kreises §. 226. Er ist Dp, wobei D = Diameter, p = 3,14.....; fasse die gefundene Länge mit dem Zirkel, und trag sie auf eine gerade Linie Fig. 127., wo AB den Umfang vorstellt. Theile nun AB in 12 gleiche Theile, und trage 11 solcher Theile noch von B nach Z, und von A nach x hin. Mit dem Radius AB beschreibe aus B durch A den Bogen MAN; aus F (dem 1sten Theilpunct neben B) den Bogen OPQ u. s. w. Ferner aus A ziehe den Bogen DBC; aus J den Bogen dmc; aus k den Bogen fgh ꝛc.

Auf diese Weise erhält man 12 gleiche Kugelstreifen, deren Spitzen in den beiden Polen der Ku-

gel zusammen kommen, und deren Mitte AB der Aquator ist.

§. 436. Ein Tetraedrum zu zeichnen. Fig. 128.

Aufl. Zeichne einen gleichseitigen Triangel adb, wähle in der Mitte den Punct c, und ziehe aus jedem Winkel gerade Linien nach c. Schattire die dem Licht abgewendeten Seiten. Dieser Körper ist in 4 gleichseitige Dreiecke eingeschlossen.

§. 437. Das Netz eines Tetraeders zu zeichnen. Fig. 129.

Aufl. Theile jede Seite des gleichseitigen △ abc in zwei Theile, und ziehe die Theilpuncte d-g zusammen. Aus der Zusammenlegung der so erhaltenen 4 gleichen Dreiecke entsteht ein Tetraeder.

§. 438. Ein Octaedrum zu zeichnen. Fig. 130.

Aufl. Beschreibe ein Quadrat abdc, ziehe die Diagonalen ad und cb, und schattire zwei Seiten.

Dieser Körper ist in 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen.

§. 439. Das Netz eines Octaeders zu zeichnen. Fig. 131.

Aufl. Zeichne zwei gleichseitige Dreiecke abc und bgo; theile jede Seite in 2 Theile und ziehe die Theilpuncte durch gerade Linien zusammen, so erhält man 8 gleich große Dreiecke, die, gehörig zusammengelegt, das Octaeder bilden.

§. 440. Ein Dodecaedrum zu zeichnen. Fig. 152.

Aufl. Beschreibe ein gleichseitiges Fünfeck abcde, und und ziehe aus dem Mittelpunct r durch a die Linie raf, so daß af der halben Seite des Fünfecks gleich ist. Mit rf beschreibe einen Kreis, theile ihn in 5 Theile und ziehe die Theilpuncte f, g, h, i, k mit a, b, c, d, e zusammen. Theile die Bogen fg, gh, hi ꝛc. noch einmal in 2 Theile, und ziehe fl, lg, gm, mh u. s. w.. Der Kreis ist Hülfslinie und wird wie-

wieder ausgelöscht. Schattire die dem Licht abgewendeten Seiten des Dodecaeders, welches in 12 gleichen Fünfecken eingeschlossen ist.

§. 441. Das Netz eines Dodecaeders zu zeichnen. Fig. 133.

Aufl. An jede Seite des regulären Fünfecks abcde zeichne ein gleich großes Fünfeck, welches so mühsam nicht ist, als es scheint, wenn man nur die Seiten ba und de verlängert, die sich in f schneiden, wo die Spitze eines solchen Fünfecks liegt. Diese so gezeichneten 6 Fünfecke sind nur die Hälfte der Oberfläche; folglich ist noch eine solche Zeichnung von 6 Fünfecken nöthig, um aus ihrer Zusammenlegung ein Dodecaeder zu bilden.

§. 442. Ein Icosaedrum zu zeichnen. Fig. 134.

Aufl. Mit der einen Seite des gleichseitigen Dreiecks ors beschreibe aus seinem Mittelpunct a einen Kreis und theile ihn in 6 gleiche Theile. Von den Theilpuncten im Kreise ziehe nach den Spitzen des Dreiecks die Linien go, bo, co; cr, dr, er u. s. w., und schattire die dem Licht abgewendeten Seiten. Dieser Körper ist in 20 gleiche Dreiecke eingeschlossen.

§. 443. Das Netz eines Icosaeders zu zeichnen. Fig. 135.

Aufl. Beschreibe das gleichseitige Dreieck abc, und verlängere ac noch 4 mal, bis in e. Durch b lege eine Parallele bd = ae; theile sie in 5 Theile, und ziehe durch die Theilpuncte gerade Linien ai, hg u. s. w., so wie nb, mi ꝛc., wodurch 20 gleich große Dreiecke entstehen, welche dieses Icosaeder einschließen.

§. 444. Einen steigenden Bogen zu zeichnen. Fig. 136.

Aufl. Dieser Bogen aqprsn ist mit dem Zirkel aus 5 Puncten d, c, t, z, k zu ziehen, die man also findet:

Zeichne ein Quadrat tvga und theile es durch kn und uw in 4 andere. ai = gh ist $\frac{1}{12}$ von ak; kb

kb = hc = $\frac{1}{2}$ kt. Hierdurch ist der Punct c gefunden, woraus das Bogenstück iq gezogen wird.

Mache ef = fh und die senkrechte fd = ef, wodurch der Punct d gefunden ist, aus dem sich das Bogenstück qp ziehen läßt. Mache no = ef, ziehe oz parallel mit nk, und oz = gx, so wird z gefunden seyn; ziehe fr durch z, und aus f das Bogenstück pr, so wie aus z den Bogen rs; endlich aus k den Bogen sn.

In der Baukunst wird der steigende Bogen bei Gewölben, auf welchen steinerne Treppen ruhen, angewendet, und in r der Ruhepunct angelegt. Das Quadrat ist um $\frac{1}{6}$ höher, als der steigende Bogen. Wenn daher die Höhe des Bogens gegeben ist, so findet man die Höhe des Quadrats, indem man $\frac{1}{5}$ der Bogenhöhe zu derselben addirt.

Man erhält diesen Bogen beinahe, wenn man ak, nv, vp und pk jede in 8 Theile theilt, und die gleichnamigen Puncte durch gerade Linien zusammen zieht, wodurch aber die Figur etwas eckig wird. Die Theile werden von a nach k; von k nach p; von p nach v, und von v nach n hin gezählt.

§. 445. Einen steigenden Bogen anderer Art zu zeichnen. Fig. 137.

Aufl. In dem Quadrat abcd ziehe die Diagonale ac, und aus dem Punct c den Bogen bg.

Nimm ch = $\frac{1}{4}$ cb, und hf parallel mit dc, so giebt der Durchschnitt m den Mittelpunct für den Bogen gk. Nimm kn = ch = $\frac{1}{4}$ bc und ziehe aus n den Bogen kp, so ist bgkp der steigende Bogen, welcher etwas steiler, als der vorige, aber auch noch mehr geeignet ist, große Lasten besonders in k zu tragen. Vergl. §. 391.

Wie andere krumme Linien, als parabolische, elliptische, hyperbolische, so wie die Linien höherer Ordnungen und transcendenten zu zeichnen sind, ist an seinem Orte gewiesen. In der Baukunst werden Keller- und Thorwegsgewölbe, die viel Raum enthalten sollen, nach elliptischen Bogen; sollen große Lasten darauf ruhen, nach parabolischen oder hyperbolischen Bogen, wie in der gothi-

thischen Bauart, geformt. Der sogenannte gothische Bogen, dessen Zeichnung sehr leicht ist, wird in der Baukunst zu Fensterbogen, Gewölbebogen ꝛc. häufig angetroffen, und bei der Flächenmessung vorkommen. —

Hierüber ist nachzusehen:
Zeichnung der Parabel §. 296, 297 und 299,
— — der Ellipse §. 308, 329 und 343,
— — der Hyperbel §. 351, 360,
— — der Cissoide §. 378.
— — der Muschellinie §. 379 und 380,
— — der Spirallinie §. 381, 382 und 383,
— — der Radlinie §. 384 bis 386,
— — der logarith. Linie §. 387.
— — der Glocken- oder Schlangenlinie §. 388.
— — der Blattlinie §. 389.
— — der Quadratrix §. 390.

II. Linienmessung.

§. 446. Die Länge einer Linie wird nach Ruthen und deren Unterabtheilungen, oder im Großen nach Meilen gemessen. Die Preußische Ruthe hat 12 Fuß, wovon jeder 139,13 pariser Linien lang ist; 2000 Ruthen sind eine Preußische Meile. Mit Ellen (zu 2 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll) mißt man nur im Handel; eine Klafter ist eine Linie von 6 Fuß, und heißt beim Seewesen Faden. Ein Lachter beim Bergbau enthält 80 Zoll, wird in Achtel zu 10 Lachterzolle, zu 10 Primen, jede zu 10 Sekunden getheilt. Alle diese Maaße der Längen sind leider in verschiedenen Ländern auch verschieden, und die Angaben der Schriftsteller oft so abweichend, daß ich eine Tabelle zur Vergleichung nicht mitzutheilen wage. Wer sie bedarf, wird in Vega's trigonometrischen Tabellen, und in andern Rechenbüchern sich einstweilen Raths erholen müssen, bis die Zeit kommt, da alle Deutsche nach einerlei Maaß, Gewicht und Münze messen, wägen und handeln.

§. 447.

§. 447. Wie kleine Linien von einigen Zollen, Fußen, Ellen u. s. w. gemessen werden, weiß jedermann; zur Messung größerer Linien, von welcher wir nun reden wollen, gehören einige Geräthschaften, die man Meßgeräthschaften nennt. Zu den gebräuchlichsten gehören folgende:

1. die Meßkette ist gemeiniglich 2 auch wol 5 Ruthen lang, hat an jedem Ende einen Ring, durch den ein spitzer Pfahl oder Stab gesteckt wird, um straff anziehen zu können, und Gelenke, jedes 1 Fuß lang, von starkem Drath.
2. Die Meßschnur ist eine hanfene Schnur, die wegen ihrer Leichtigkeit an 5 Ruthen lang, und auch an jedem Ende mit einem Ringe und Stabe versehen seyn kann. Die Abtheilung der Fuße und Ruthen an derselben geschieht durch kleine Bänder von verschiedener Farbe. Bei feuchtem Wetter quillt sie und wird kürzer, bei trocknem länger. Daher pflegt man sie mit Öl zu tränken, und vorsichtig vor und nach dem Gebrauch zu prüfen.
3. Die Meßstange giebt unstreitig ein sehr sicheres und brauchbares Maaß, ist aber nicht so bequem, als die Meßschnur, welche oft noch nöthig ist, um mit der Meßstange in gerader Linie zu bleiben.
4. Mit einem 6 Fuß langen in Zoll und Linien eingetheilten Stabe mißt man kleinere Entfernungen von einigen Fußen oder Zollen.
5. Eine hinlängliche Anzahl weißer, glatter, 1 bis 2 Zoll dicker, 4 bis 6 Fuß hoher, unten zugespitzter Stäbe, dienen dazu, in merkwürdigen Puncten senkrecht in der Erde befestigt zu werden, um danach in beträchtlichen Entfernungen sehen zu können.
6. Einige Fahnen, die halb weiß und halb roth oder schwarz seyn können, und auf ziemlich hohen Stangen an den Endpuncten der Standlinien aufgerichtet werden.
7. Ein Senkblei, ein hölzerner Schlegel, um die Meßstäbe senkrecht in die Erde zu treiben.
8. Ein Compaß, die Himmelsgegenden beim Grundlegen zu bezeichnen.

9. Ein

9. Ein Winkelmesser, geometrisches Scheibeninstrument von Holz oder Messing, um die Neigung der Linien oder die Winkel zu messen.

§. 448. Das Wesentlichste an einem Winkelmesser ist folgendes:

Auf einer ebenen Fläche von 1 bis 2 Fuß im Geviert Fig. 138. ziehe aus dem Mittelpunct C einen 3fachen Kreis und theile ihn in 4 Quadranten, jeden wieder in 90°, den Grad in halbe, und wenn es die Deutlichkeit erlaubt, in Viertelgrade, oder von 5 zu 5 Minuten. An den Rand schreibe von 10 zu 10 Grad die Zahlen dabei. Im Mittelpunct C wird ein Stift bevestiget, um den sich ein hölzernes oder messingnes Lineal LN bewegen läßt. Die Mitte des Stifts liegt mit der Schärfe des Lineals in einerlei Linie. An beiden Enden des Lineals in L und N sind aufrechtstehende Messingbleche angebracht; in dem an L ist ein feines Loch, in dem an N ein Fenster, über welches zwei Haare kreuzweis so ausgespannt sind, daß der Kreuzpunct der Haare und das kleine Loch im Blech an L über der Schärfe des Lineals senkrecht stehen. Diese Bleche heißen Diopter (Absehen) und daher nennt man das Lineal LN Diopterlineal. Wenn man in unebenen Gegenden Winkel messen will, so müssen die Diopter 6 bis 8 Zoll hoch und auf beiden Seiten mit Spalten oder Ritzen versehen seyn, in denen ein Pferdehaar ausgespannt ist.

§. 449. Soll das Instrument die Winkel richtig angeben, so muß nicht nur die ganze Kreistheilung äußerst zart und genau gemacht seyn, sondern auch für die wagerechte Stellung gesorgt werden, welche vermittelst einer Setzwage, oder einer Libelle (Wasserwage), und eines passenden Stativs bewirkt wird. Dies Stativ ist Fig. 139. abgezeichnet.

Unter dem Punct C Fig. 138. befindet sich eine starke Messingscheibe von 3 bis 4 Zoll im Durchmesser, in deren Mitte eine cylindrische Röhre A Fig. 139. bevestigt ist, in welcher sich der Zapfen Z des dreibeinigen Stativs genau hineinpassen läßt. Die Schraube B dient zum

Vest-

Vestellen des Zapfens, und die Schrauben s s zum Vestellen der beweglichen Füße, die nach Beschaffenheit des Bodens und des wagerechten Standes des Instruments enger und weiter aus einander gestellt werden können. D ist von Holz und rund, aber da, wo die Füße angeschraubt werden, dreieckig. (Stative mit einer sogenannten Nuß sind noch besser.)

§. 430. Beim Winkelmessen stellt man das Stativ zuerst nach dem Augenmaaß, löst alle Schrauben, und legt die viereckte Platte Fig. 138, woran unter C die Messingplatte mit 4 Schrauben (deren Plätze neben C Fig. 139 angedeutet sind), bevestigt ist, mit der cylindrischen Röhre auf den Zapfen Z, und zieht die Schraube B an; dann richtet man das Instrument mit der Setzwage gehörig ab, wobei man die Füße verrückt oder mehr in den Boden drückt, und endlich die Schrauben s s anzieht; so steht das Ganze vest. Löst man die Schraube B ein wenig, so ist der Kreis mit der Röhre A um den Zapfen Z horizontal beweglich, und nach Bedürfniß zu drehen und zu stellen.

§. 431. Die genaue Eintheilung der Grade und ihrer Unterabtheilungen ist bei jedem Winkelmesser ein Haupterforderniß. Daher wird es zweckmäßig seyn, dabei noch ein wenig zu verweilen. Gemeiniglich sehen Nichtkenner die Gradtheilung für sehr leicht an; allein die geübtesten Mechaniker gestehen, daß es ein sehr schwieriges Geschäft sey, einen Kreisbogen richtig in seine Grade zu theilen. Wir wollen eine Theilungsweise mittheilen, die sich unter allen durch Sicherheit und Leichtigkeit in der Ausführung auszeichnet, und sich auf den Satz gründet, daß die Tangente eines Winkels von 45° dem Radius gleich ist.

Man verfertige sich ein Lineal AB Fig. 140. von Holz oder Messing, das etwa 3 Fuß lang und so dick ist, daß es dem Werfen oder Krummwerden nicht leicht unterworfen ist. Auf dasselbe trage vom Punct b an die Tangententheile, wie sie in allen trigonometrischen Tafeln stehen, für den Radius ba = 1000 oder 10000, nach einem richtigen Maaßstabe.

stabe. (Man kann schon bei einem Radius ba von 3 Fuß einzelne Minuten bekommen.)

Soll nun ein Kreis, oder Kreisbogen od in Grade getheilt werden, so bringt man das Lineal AB mit der Gradtheilung, das wir die Tangente nennen wollen, in eine solche Entfernung vom Mittelpunct des Kreises, daß bc = ba, und ab mit bc einen rechten Winkel macht. Um das Centrum c des zu theilenden Kreises ist ein Lineal CD beweglich, und also auf AB verschiebbar. Stellt man nun z. B. CD über 15° auf der Tangente, so schneidet die Schärfe desselben einen Punct m im Kreise ab, der 15° von o entfernt ist; in der Lage 30° C theilt es in n auf dem Kreise auch 30° ab; ruht es in der Lage aC, so ist der Bogen od = 45°. So ist es leicht, alle Grade und ihre Theile auf den Kreis zu tragen, ohne ihn mit Hülfslinien zu verderben.

Ist der Octant od völlig abgetheilt, so dreht man den Kreis so, daß d nach o, und f nach d kommt, und verfährt wie vorher. — Die Tangententheile sind größer, als die Bogentheile; daher wird jeder Theilungsfehler der erstern auf dem Kreise immer kleiner und unmerklicher werden, welches ein wesentlicher Vorzug dieser Theilungsart ist.

§. 452. Wer in seine Messungen Genauigkeit zu bringen bemüht ist, wird seinen Instrumenten gern eine noch größere Vollkommenheit geben wollen, wozu folgende Winke dienen.

Die Diopter sind bei sehr entfernten Gegenständen nicht recht mehr brauchbar, und die Winkel sind mit dem unbewaffneten Auge nur höchstens bis auf 2 Minuten sicher zu bestimmen, welcher Umstand oft beträchtliche Fehler in die Messung bringt. Darum ist es gut, wenn man auf dem Diopterlineale AB einen Tubus TS Fig. 141. anbringt, in dessen Augenglases Brennpunct ein Fadenkreuz, oder ein Kreuzschnitt auf einem Planglase, befindlich ist. Es liegt wenig daran, wenn der Tubus nur 2 Gläser hat, und die Gegenstände verkehrt vorstellt, denn man gewöhnt sich bald daran. Beim Gebrauch vertritt

der

der Kreuzschnitt im Tubus die Stelle des Diopters. Um ihn auch auf unebenem Boden benutzen zu können, ist an dem Diopter C ein verschiebbares Messingblech, worauf der Tubus liegt, und vermittelst dessen er höher gestellt werden kann. Vergrößert der Tubus z. B. 10 Mal, so kann man auch auf eine 10malige Verminderung der Fehler rechnen.

§. 453. Soll ein Winkel acb Fig. 138. mit dem Winkelmesser gemessen werden, so verfährt man also: Nachdem der Kreis horizontal gestellt ist, drehe man ihn so, daß o° oder die Linie co nach dem Gegenstand b gerichtet ist, und befestige ihn in dieser Stellung. Darauf drehe das Diopterlineal um C und richte es so, daß das an das kleine Loch L gelegte Auge den Gegenstand a hinter dem Fadenkreuz im Diopter N sieht. Auf dem Bogen ON lassen sich dann die Grade des Winkels acb ablesen; und so wird es leicht seyn, die Winkel, welche alle im Horizont herum liegende Gegenstände mit der Linie cb machen, zu bestimmen, wenn man nur dafür sorgt, daß co immer nach b hin gerichtet bleibt.

§. 454. Eine brauchbare Setzwage muß 1 bis 2 Fuß hoch, und mit einer Bleikugel an einem Haar oder Silberfaden, so wie mit einer feinen Directionslinie versehen seyn. Bequem ist es, wenn ihre Grundfläche so breit ist, daß sie auf einer Ebene von selbst stehen bleibt, und die Bleikugel in einer Höhlung spielt, damit die Luft sie nicht so leicht bewege. — Man bedient sich auch einer genau runden Kugel statt der Setzwage; oder einer runden messingnen Büchse mit einer Glasdecke, deren Mittelpunct angedeutet ist. Die Büchse wird mit reinem Wasser, oder mit Spiritus ganz angefüllt, und durch eine seitwärts angebrachte Öffnung ein Tropfen wieder herausgelassen, wodurch eine Luftblase in die Büchse dringt, die dann immer über der Flüssigkeit schwebt und bei horizontaler Stellung gerade unter dem Mittelpunct der runden Glasscheibe stehen bleibt. Man nennt dies sehr brauchbare Instrument Wasserwage, und benutzt sie bei windiger Witterung mit weit mehr Sicherheit, als die Setzwage, jedoch muß sie nicht unter 4 Zoll Durchmesser haben, und sehr genau gearbeitet seyn.

§. 455.

§. 455. Zur Messung der Vertikal- oder Höhenwinkel bedient man sich der Quadranten, Sextanten u. s. w. Wir wollen nur die Einrichtung eines Instruments, das auch zum Tiefenmessen brauchbar ist, und des Sextanten beschreiben, und anmerken, daß alle dergleichen Instrumente ähnliche Einrichtungen haben.

Der Halbkreis Fig. 142. hat folgende Einrichtung:

Auf der Mitte des ebenen Brettes ag erhebt sich senkrecht ein zweites khc. Um den Punct c ist das eiserne Lineal ACB, an welchem ein messingner Halbkreis 90°, 0, 90°, beweglich. Wenn AB wagerecht steht, so muß der am Bogenstück JN angebrachte Zeiger JO, der in einer zarten Linie besteht, auf Null Grad zeigen, woraus folgt, daß der Halbkreis von Jo an nach beiden Seiten in 90° getheilt wird. Die senkrechte Stellung giebt ein Loth, das auf der andern Seite des Brettes khc angebracht seyn kann, und dessen Bleikugel in der Höhlung b zu sehen ist. Die Diopter D, d, können so eingerichtet werden, daß man von beiden Seiten abvisiren, und oben darauf einen Tubus anbringen kann. Das am Brett bevestigte Bogenstück JN kann als Nonius oder Vernier dienen, und muß bei jeder Stellung des Kreises genau anschließen.

§. 456. Der Nonius oder Vernier JN dient dazu, sehr kleine Gradtheile zu bestimmen, und muß zu dem Ende folgendermaßen eingerichtet werden:

Wenn der Halbkreis z. B. in Viertelgrade getheilt ist, so nehme man einen Bogen von 14 Viertelgraden auf dem Nonius, und theile diesen Bogen in 15 gleiche Theile, so wird, wenn sich der Halbkreis am Nonius wegschiebt, jeder Viertelgrad des Halbkreises durch die Theilung auf dem Nonius in 15 kleinere Theile getheilt, welche Minuten sind. Man sieht nämlich zu, welcher von den Theilstrichen, von J an gezählt, mit einem des Nonius zusammen trifft, und erfährt, wie viel Minuten über einen gewissen Viertelgrad der Winkel mißt. Es betrage z. B. ein Winkel $30\frac{3}{4}$ Grad und so viel, daß der 9te Theilstrich

strich des Nonius mit einem Theilstrich des Halbkreises zusammenträfe, noch darüber, so würde das Maaß desselben seyn: 30° 45′ + 9′ = 30° 54′. – Ist die Theilung gut, so trifft nur 1 Theilstrich mit dem des Nonius zusammen, es sey denn, daß der Winkel genau n Grade und 15′, 30′ oder 45′ ausmache, in welchem Falle der erste und letzte zusammentreffen.

Zum wagerechten Stellen des Halbkreises sind im Fußbrette ag an 3 Orten Schrauben angebracht, die durchgehen, und das auf eine Ebene (Tisch u. dgl.) gesetzte Instrument nach Verlangen höher oder tiefer heben.

§. 457. Der Sextant Fig. 143, welcher einen Bogen von 60° enthält, ist zum Höhenwinkelmessen gleichfalls sehr gebräuchlich, und auf mancherlei Weise eingerichtet. Eine sehr einfache Einrichtung ist folgende:

Aus dem Puncte C in dem gleichseitigen Dreieck ABC beschreibe den Bogen AB und theile ihn von A an in 60° und Unterabtheilungen. Die Seite AC theile in zwei Theile, und befestige auf der Mitte d ein Messingblech als Diopter D, senkrecht, das in der Mitte ein Fensterchen mit einem Fadenkreuz und senkrecht darunter ein feines Loch hat. In B ist ein ähnliches Diopter, aber ohne Fenster, mit 2 kleinen Löchern in r und r (die Diopter sind seitwärts abgebildet in D und b), wodurch man sieht.

Wenn man den Sextanten um den Punct m vermittelst eines starken Metallstiftes, auf den eine Schraube s wirkt (und der an einem Stativ agC Fig. 142, in C befestigt ist), beweglich macht, und ihn so dreht, daß Bd horizontal wird, so fällt das Loth Cp in Null-Grad auf CA. Folglich dienen die Diopter in B und d zum Visiren, und der Lothfaden Cp zum Anzeigen der Grade.

Man scheue sich nicht, den Sextanten von gutem, feinem, recht trocknem Holze machen zu lassen, und gebe ihm eine Größe von 2 Fuß im Radius, wodurch es schon möglich wird, die Winkel bis auf Minuten zu bestimmen, welches für Liebhaber bei irdischem Gebrauch genau genug ist.

Auf

Auf der Rückseite des Sextanten läßt sich ein Fernrohr in der Lage Bd anbringen, wodurch vielmehr Genauigkeit erhalten wird, als durch bloße Diopter. Zum Lothfaden muß man ein Menschenhaar, oder recht feinen Silberfaden nehmen.

§. 458. Das Stativ zum Sextanten kann eben so, wie das des Halbkreises seyn. Die Schrauben im Fußbrett können zugleich als Mikrometer dienen, d. h. Maaßstäbe für sehr kleine Bogentheile, als Sekunden, vorstellen, und deshalb folgendermaßen beschaffen seyn:

Am vorstehenden Ende der Schraube ist ein Zeiger, welcher beim Umdrehen derselben mit seiner Spitze einen Kreis beschreibt, den man in beliebige z. B. 100 Theile theilt. Hat man nun den Sextanten gehörig gestellt, so drehe man den Zeiger einmal herum, und sehe zu, um wie viel Minuten der Lothfaden seine Lage auf dem Bogen oder Limbus verändert hat. Gesetzt, ein ganzer Umgang des Zeigers verändere den Lothfaden um 6 Minuten, und man habe einen Winkel gemessen, wobei der Lothfaden 20° 15′ und noch etwas darüber gezeigt; um zu finden, wie viel über 15′ der Winkel betrage, drehe man den Zeiger rückwärts, bis der Lothfaden genau auf 15′ einspielt, und merke, vor wie viele Theile der Zeiger vorbei ging. Er sey vor 25 Theilen vorbei gerückt, so giebt die Proportion

$$100 : 6 = 25 : x, \text{ und } \frac{6 \cdot 25}{100} = 1' 30'' = x.$$

Der gemessene Winkel betrug also 20° 15′ + 1′ 30″, d. i. 20° 16′ 30″.

§. 459. Wenn es bloß darauf ankommt, die Neigung zweier Linien zu bestimmen, ohne sie in Graden angeben zu wollen, so ist das Fig. 143. b angegebene Instrument wegen seiner großen Bequemlichkeit sehr zu empfehlen.

Auf dem geraden Stabe AB ist ein anderer CD rechtwinklicht verschiebbar, so daß CD näher an A und B gebracht, und überall festgestellt werden kann,

kann. In A ist ein Diopter, durch welches man sieht, in B ein anderes mit einem Fadenkreuz; auf dem Stabe CD ist gleichfalls ein Diopter verschiebbar. Um nun die Neigung zweier Linien AO und AG angeben zu können, halte man das Instrument so, daß der Gegenstand O durch die Diopter A und B, und der Gegenstand G durch die Diopter A und n gesehen wird, wobei man n auf CD nach Bedürfniß verschiebt. AB und CD sind mit einer feinen Scale versehen, die in Form eines tausendtheiligen Maßstabes eingerichtet seyn, und daher sehr kleine Theile angeben kann. Jetzt liest man ab, wie lang Am und mn, die beiden Catheten im rechtwinklichten Dreieck Amn sind, und trägt sie nach beliebigem Maaße auf das Papier, so giebt die Hypotenuse An den zweiten Schenkel des Winkels OAG.

Wird der Winkel OAG in Graden verlangt, so findet man ihn durch die Proportion

Am : Sin. tot. = mn : Tang. OAG (Siehe Tafel XII. im Anhang.)

Dividirt man mit mn in Am, so erhält man die natürliche Cotangente, welche in den trigonometrischen Tafeln aufgesucht, den Winkel immer bis auf Sekunden giebt. —

In m und o lassen sich Nonien anbringen, mit welchen man die kleinsten Theile sehr bequem ablesen kann.

Wir wollen dieses einfache und überall auch zum Höhenmessen brauchbare Instrument Neigungsmesser nennen, und uns seiner zur Auflösung verschiedener Aufgaben bedienen. Es kann mehrere Fuß lang, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dick, und zum Auseinandernehmen eingerichtet seyn. Die beiden Diopter in A und n können auf kleinen runden drehbaren Säulen ruhen, welches bei großen Winkeln sehr nützlich ist, wie man bald bemerken wird. Beim Gebrauch legt man es auf eine Wand, einen Stamm, oder Meßstab ꝛc. oder schraubt es an einem Tische vest und hält es mit der Hand in A an's Auge. Weiß man

den

den Abstand des Gegenstandes O vom Auge, so findet man, wenn G senkrecht über O liegt, wie es bei Höhen der Fall ist, die Höhe OG durch die leichte Regel de tri

$$Am : mn = AO : OG.$$

Und wenn die Höhe OG bekannt wäre, so findet man den Abstand AO durch

$$mn : Am = OG : AO,$$

denn die Dreiecke Amn und AOG sind unter der angenommenen Bedingung stets einander ähnlich, und deswegen die ähnlichen Seiten einander proportional.

Sehr brauchbar wird dies Instrument bei der Aufnahme des Details einer Gegend dadurch, daß man einen Stab von bekannter Höhe, z. B. 10 Fuß, in O senkrecht befestigt, von A nach ihm visirt, und durch $mn : Am = OG : AO$ seinen Abstand von A findet, darauf den Stab nach andern Puncten tragen läßt, und ihre Entfernung auf gleiche Weise bestimmt. Die Winkel, welche die horizontalen Linien von zwei Gegenständen an A machen, bestimmt man durch die horizontale Haltung des Instruments.

Anmerk. Herr Dr. Rommershausen hat einen Diastimeter (Entfernungsmesser) in Form eines Taschenfernrohrs erfunden, der ähnliche Einrichtung zu haben scheint, und sehr empfehlenswerth ist. Schade, daß dies Instrument nicht verbreiteter ist. Weil es hier auf Bestimmung sehr kleiner Theile ankommt, so wird die Anfertigung desselben viel Genauigkeit erfordern.

§. 460. Eine gerade Linie zu messen.

Aufl. Nimm eine Meßkette, Meßschnur oder Meßstange und schlage sie auf der Linie so oft um, als es angeht; multiplicire die Umschläge mit der Länge der Meßkette, so erscheint im Product die Größe der Linie.

Beim Umschlagen der Meßkette müssen zwei Personen seyn, sie straff anziehen, die Stäbe senkrecht halten, und beständig nach den beiden Endpuncten der Linie sehen.

§. 461. Eine gerade Linie über einen Berg zu messen. Fig. 144.

Aufl. Es kommen drei Fälle vor. Entweder man mißt die Krümmungen oder Unebenheiten mit, und dann ist die Messung, wie auf der Ebene (man bekommt eine Linie auf dem Netz des Berges); oder man verlangt die Größe einer geraden Linie mn = ah; oder man sucht mx. Um ah zu messen, stecke man die Stäbe der Meßkette in a und b ein, und visire nach der Fahne in h, wobei man die am Stabe b verschiebbare Kette auf h richtet. Eben so verfahre bei jedem folgenden Umschlage. Aus der Summe der Umschläge ab, bd, df, fh ergiebt sich die Hypotenuse ah.

Will man aber den horizontalen Abstand des Puncts h von a, oder die mx finden, so sehe man darauf, daß bei jedem Umschlage die Meßkette in horizontaler Richtung ac, be, dg, fi sey, welches durch eine auf die Meßkette gehaltene Setzwage leicht erforscht werden kann. Die Summe von ac, be, dg, fi = mx.

Die Linie mx ist beim Grundlegen unentbehrlich. Aus ah und mx ergiebt sich die Höhe des Berges; denn $ah^2 - mx^2 = hx^2$, und $\sqrt{(ah^2 - mx^2)} = hx$ = der Höhe des Berges.

§. 462. Den Abstand zweier Puncte a und b, zu denen man nicht in gerader Linie kommen kann, zu messen. Fig. 145.

Miß von a bis d. In d setze einen rechten Winkel adc auf ad, bis zur Brücke; miß cf; mache < dcf und < cfg rechtwinklicht; miß gb, und addire die Linien ad + cf + gb, so erhält man ab. — In d, c, f und g werden Meßstäbe eingeschlagen.

§. 463. Einen rechten Winkel abzustecken. Fig. 146.

Nimm auf jeder Seite des Puncts a, wenn auf db in a das Perpendikel stehen soll, ba = ad. Befestige in b und d gleichlange Schnuren bc und dc; gehe mit den Endpuncten derselben so weit zurück, bis

bis die Schnuren gleich straff sind und in c zusammen fallen, so liegt c senkrecht über a, und < cad = < cab = rechten Winkel, denn ad = ab, bc = dc, und ca gemeinschaftlich, also die Winkel an a gleiche Nebenwinkel.

§. 464. Zu einem gegebenen Winkel einen gleichgroßen abzustecken. Fig. 147.

Auf jedem Schenkel des gegebenen Winkels miß gleiche Stücke ad und ag, so wie auch die Sehne dg. — Nimm zwei Schnuren = ad und ag, und bevestige beide in a, so läßt sich das Ende g so halten, daß eine dritte Schnur, in d bevestigt, mit dem andern Endpuncte in g zusammen trifft. Der Winkel an a muß, von gleichen Schenkeln und gleicher Chorde eingeschlossen, nothwendig wieder so werden, als er war. — In a, g und d stehen Stäbe.

§. 465. Einen Winkel dag Fig. 147. in verlangte gleiche Theile zu theilen, z. B. in 2.

Mache die Schenkel ad und ag einander gleich, theile die Chorde dg in zwei Theile (durch Rechnung) und ziehe aus a durch den Theilpunct eine gerade Linie.

§. 466. Aus drei gegebenen Seiten bc, ad und db Fig. 146. einen Triangel zu bilden.

Bevestige in b an einem Stabe zwei Schnuren be und bd, die den gegebenen Seiten gleich sind, und mache das Ende von bd in d eben so vest. An d bevestige nun auch die Schnur cd mit dem einen Ende in d, und gehe mit den Endpuncten so weit zurück, bis beide straff angezogene Schnuren in c zusammen kommen.

Reichen die Schnuren nicht, wie es mehrentheils der Fall ist, so mache den Winkel b = gleich dem gegebenen, und verlängere die Seiten bc und bd, bis auch sie den gegebenen gleich werden, so liegen die Endpuncte d und c in der richtigen Entfernung. Da sich jede geradlinigte Figur in Dreiecke zerlegen

läßt, so wird man sie auch auf dem Felde mit Hülfe der letzten 7 §§. darstellen können.

§. 467. Die Entfernung ab Fig. 148. zu finden, wenn ein Hinderniß dazwischen, aber von einem Puncte c nach a und b zu messen ist.

Aufl. I. Wähle den Standpunct c, miß cb und ca; nimm von jeder Linie einen gewissen Theil, als $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ ꝛc. und trage ihn von c nach m und n, endlich miß mn. Dann sprich:

$$cm : mn = ca : ab,$$

denn die Dreiecke cmn und cab sind einander ähnlich. Z. B. Es sey ca = 48; cb = 30 Ruthen, und cm = $\frac{1}{3}$ ca, also = 16; cn = $\frac{30}{3}$ = 10; mn aber 18 Ruthen gefunden, so ist

16 : 18 = 48 : ab, und ab = $\frac{18.48}{16}$ = 54 Ruthen.

Diese Auflösungsweise wollen wir die arithmetische nennen.

Aufl. II. Miß die beiden Schenkel ca und cb, und mit einem Winkelmesser den Winkel z, so sind im △ abc drei Stücke, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, wonach das Dreieck verjüngt auf's Papier zu tragen, und ab mit dem Zirkel und Maaßstabe zu messen ist.

Nämlich: trage mit Hülfe des Transporteurs den Winkel z auf das Papier, und verlängere seine Schenkel, bis sie nach dem verjüngten Maßstabe die gemessene Länge haben; ziehe dann die Endpuncte zusammen, so ist ab die gesuchte Linie, und mit dem Zirkel zu messen.

Die Neigung der beiden Linien ca und cb kann auch mit dem §. 459. beschriebenen Neigungsmesser leicht gefunden und auf's Papier getragen, übrigens, wie vorher verfahren werden.

Weil diese Auflösung mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen ist, so heiße sie die geometrische.

Aufl.

Aufl. III. Durch eine trigonometrische Rechnung, wenn $< z$ in Graden bekannt ist. Es sind im $\triangle$ abc zwei Seiten und ihr eingeschlossener Winkel bekannt, daher ist die dritte Seite nach §. 244. 2, wo ein Exempel ausgerechnet ist, das hier paßt, folgendermaßen zu finden.

$(ac+bc) : (ac-bc) = \text{Tang.} \frac{1}{2}(a+b) : \text{Tang.} \frac{1}{2}(b-a)$, oder Differenzwinkels; und addirt man den gefundenen Winkel zur halben Summe der unbekannten Winkel, so erhält man $< b$, welcher der größten Seite gegenüber steht. Darauf

$$\text{Sin. } b : ac = \text{Sin. } z : ab.$$

Man bemerkt leicht, daß es bei allen solchen Aufgaben darauf ankommt, in einem Dreieck drei bekannte Stücke zu erhalten, woraus die übrigen auf mancherlei Art gefunden werden.

§. 468. Die Entfernung zweier Puncte bd Fig. 149. zu finden, zu deren einem b man nur kommen kann.

Aufl. I. Errichte in b auf bd einen rechten Winkel und verlängere den Schenkel bc beliebig bis in c. Miß cb, und nimm den Punct e willkührlich, etwa so, daß $ce = \frac{1}{3} cb$ sey. Darauf errichte in e das Perpendikel ef, so daß f mit c und d in gerader Linie steht; miß ef und sprich:

$$ce : ef = cb : bd.$$

Sollte sich in b kein rechter Winkel errichten lassen, so nehme man den Winkel x willkührlich, mache aber $< y = < x$, damit fe parallel bd wird, und die Dreiecke cef und cbd ähnlich bleiben.

Aufl. II. Erforsche, welche Stücke im $\triangle$ bcd bekannt sind, und zeichne einen ähnlichen $\triangle$ auf Papier. Nun sind aber außer bc auch noch die beiden Winkel x und z zu messen. Wenn man daher die bc verjüngt aufs Papier trägt, und die Winkel x und z daran setzt, so durchschneiden sich die Schenkel in d. Man messe mit dem Zirkel die bd, halte die Öffnung an den verjüngten Maaßstab, so giebt dieser dieser die Entfernung an.

Mit

Mit dem Neigungsmesser sind gleichfalls die Winkel x und z zu messen.

Aufl. III. Außer der arithmetischen und geometrischen Auflösung führen wir noch die trigonometrische an.

Zieht man nämlich $\angle x + \angle z$ von 180° ab, so bleibt $\angle d$. Und Sin. d : bc = Sin. z : bd giebt die Entfernung.

Wenn $\angle x$ ein rechter ist: r : bc = Tang. z : bd.

Z. B. Es sey

bc = 480 Fuß.	log. Tang. 48°	=	10,0455626
x = 90°	—	480 =	2,6812412
z = 48°	log. bd	=	12,7268038 = 533,1

folglich ist die gesuchte Entfernung 533 Fuß 1 Zoll.

§. 469. Diese drei Auflösungsweisen halte ich von den vielen möglichen für die sichersten, einfachsten und überall anwendbarsten. Sind die Winkel gut gemessen, so ist die trigonometrische Auflösung die genaueste; die geometrische ist zwar sehr leicht, und bei den meisten Feldmessern die gewöhnlichste, erfordert aber einen guten richtigen Maaßstab und Transporteur, so wie sehr genaue Zeichnung. Wenn mehrere Personen einerlei geometrische Zeichnung machen, so stimmen sehr selten die Resultate vollkommen überein, woraus folgt, daß ein guter Geometer ohne Trigonometrie nicht bestehen kann. Die arithmetische Auflösung ist so genau, als die trigonometrische, wenn man sich beim Visiren eines Diopters bedient, die Stäbe senkrecht stellt, und sich keine Nachläßigkeiten im Abmessen der Linien zu Schulden kommen läßt. Überdies hat sie den Vorzug, daß sie mit Stäben und Meßschnuren auf der Stelle auszuführen ist. Nur bei sehr großen Messungen, dergleichen die Aufnahme einer ganzen Landschaft ist, bleibt die trigonometrische die einzig brauchbare.

§. 470. Weil das Messen und Auftragen der Winkel immer seine Schwierigkeiten hat, so sann man auf Mittel, beides zu ersparen, und dennoch eine getreue Zeichnung von den betreffenden Linien zu erhalten. Spanne über ein Reißbrett rits Fig. 150. einen Bogen Papier, stelle

stelle es horizontal auf ein Stativ (Fig. 139.), und wähle auf dem Reißbrett den Punct c, lege an denselben das Diopterlineal, richte es nach dem Gegenstand B, und ziehe mit einer feinen Bleifeder an der Schärfe desselben die Linie cb. Bei veststehendem Reißbrett richte das Diopterlineal von c nach dem Gegenstand A, und ziehe die Linie ca, so ist der Winkel bca = < BCA. In c pflegt man der Bequemlichkeit wegen eine feine Nadel senkrecht zu bevestigen, um daran das Diopterlineal legen zu können.

Sind die Schenkel cB und cA gemessen, so trägt man ihre Größe verjüngt auf die Linien ca und cb, und zieht ab zusammen. Alsdann hat man auf dem Reißbrett ein Dreieck cab, welches dem großen cAB vollkommen ähnlich ist, und die Entfernung AB verjüngt auf dem Papier in der ab, welche sich mit dem Zirkel messen läßt. Dieses Instrument heißt Meßtisch oder Mensel und ist zur Auflösung vieler Aufgaben, besonders zum Grundlegen der Feldmarken äußerst bequem; sein Gebrauch erfordert aber auch Vorsichtsmaßregeln, zu denen vorzüglich eine völlige Ebenheit des übergespannten Papiers, horizontale Stellung, feine Linien, vester Stand, einerlei Temperatur der Atmosphäre, damit das Papier einerlei Spannung behalte, gehören. Wenn alle Vorsichtsmaßregeln angewendet werden, so kann auf keine andere Weise ein Winkel richtiger auf's Papier gebracht werden, als es mit dem Meßtisch geschieht, welcher daher unstreitig zu den besten und wohlfeilsten Meßgeräthschaften gehört.

§. 471. Eine Entfernung cd Fig. 151. zu finden, zu deren Endpuncten man nicht messen kann.

Aufl. I. Miß eine Standlinie ab; setze den Winkelmesser auf den Punct a, richte o° nach b hin, und bevestige so den Kreis; dann miß den Winkel bad, und < bac; setze den Winkelmesser nun über b, richte ihn so, daß Null-Grad nach a hinsteht, und miß den Winkel abc und < abd. Trage alles Gemessene in eine Schreibtafel vorläufig ein.

Die

Die Zeichnung fange mit dem Auftragen der Standlinie ab an; setze an a die Winkel bad und bac; und an b setze die Winkel abe und abd, wie sie auf dem Felde gemessen worden sind, so werden sich die nach den Puncten c und d laufenden Schenkel in c und d schneiden. Miß mit dem Zirkel die Linie cd.

Z. B. Es sey ab = 150 Ruthen; ∠ bad = 50°; ∠ bac = 100°; ∠ abe = 45° 30′; ∠ abd = 101°.

Trägt man diese Angaben gehörig auf's Papier, so findet man die Linie cd = 232 Ruthen. Auch die Linien ac, ad, bc und bd sind auf der Zeichnung verjüngt dargestellt, und mit dem Zirkel zu messen.

Aufl. II. Mit dem Fig. 143 b. abgebildeten Neigungsmesser kann man nicht nur die Neigung der Linien ad, ac ꝛc. gegen die Standlinie ab finden, sondern sie auch viel genauer, als mit dem Transporteur, auf's Papier tragen. Die Neigung zweier Linien wird dabei durch Am und mn bestimmt. Macht man nun ao (Fig. 151.) = Am; und og = mn, so ist ad in der richtigen Lage auf der Zeichnung. Die Lage der ac wird am besten nach ad zu bestimmen seyn, und auf ähnliche Weise auch bei b verfahren werden müssen. Aus den Durchschnitten der Schenkel ergeben sich die Puncte c und d, wie vorher.

Aufl. III. Trigonometrisch. Im △ abc sind die beiden Winkel an der Standlinie, folglich auch der dritte ∠ acb bekannt, also gilt

Sin. ∠ acb : ab = Sin. ∠ cab : cb.

Im △ adb sind bekannt ∠ dab, ∠ abd, also auch ∠ adb; daher

Sin. ∠ adb : ab = Sin. ∠ dab : db.

Nun sind im △ cdb zwei Seiten cb, db und der von ihnen eingeschlossene Winkel cbd bekannt, woraus sich die Seite cd finden läßt. Nämlich

cb + bd : cb − bd = Tang. $\frac{1}{2}$ (∠ bcd + cdb) : Tang. des Differenzwinkels.

Der Ausdruck $\frac{1}{2}(\sphericalangle bcd + \sphericalangle cdb$ ist $= \frac{180° - \sphericalangle cbd}{2}$

= der halben Summe der beiden unbekannten Winkel. Addirt man den Differenzwinkel zur halben Summe der unbekannten Winkel, so erhält man den Winkel cdb, welcher der größten Seite gegenüber steht; subtrahirt man den Differenzwinkel von jener halben Summe, so bekommt man $\sphericalangle$ bcd. Weil nun im $\triangle$ cdb alle Winkel und 2 Seiten bekannt sind, so findet man endlich die cd durch

Sin. $\sphericalangle$ bdc : bc = Sin. $\sphericalangle$ cbd : cd.

Es sey, wie vorher, die Standlinie ab = 150 Ruthen; $\sphericalangle$ bad = 50°; $\sphericalangle$ bac = 100°; $\sphericalangle$ abc = 45° 30′; $\sphericalangle$ abd = 101°;

so ist $\sphericalangle$ bac = 100°	Sin. 34°30′ : 150 = Sin. 100° : cb
+ $\sphericalangle$ abc = 45°30′	= Sin. 80°
180° — 145°30	log. Sin. 80° = 9,9933515
= $\sphericalangle$ acb = 34°30′	— 150 = 2,1760913
	12,1694428
	— 34° 30′ = 9,7531280
	log. cb = 2,4163148
	= 260,8 = cb.

Ferner um db zu finden: $\sphericalangle$ abd = 101°
$\sphericalangle$ bad = 50

180° — 151

= $\sphericalangle$ adb = 29°.

Sin. 29° : 150 = Sin. 50° : db.
log. Sin. 50° = 9,8842540
— 150 = 2,1760913
12,0603453
log. Sin. 29° = 9,6855712
log. db = 2,3747741 = 237,02 = db.

Nun ist cb = 260,8	und $\sphericalangle$ abd = 101°	und 180°
bd = 237,02	— $\sphericalangle$ abc = 45°30′	— 55°30′
Summe = 497,82	= $\sphericalangle$ cbd = 55°30′	Summe 124°30′
Unterschied = 23,78		halbe Summe = 62°15′

497,82 : 23,78 = Tang. 62° 15′ : Tang. des Differenzw.
log. Tang. 62° 15′ = 10,2789107
log. 23,78 = 1,3762119
11,6551226
log. 497,82 = 2,6970723
log. Tang. = 8,9580503 = 5° 11′ 10″ = Diff.w.
halbe Summe 62° 15′
+ 5° 11′
∠ cdb = 67° 26′
∠ bcd = 57° 4′

Daher Sin. 57° 4′ : bd = Sin. 55° 30′ : cd
log. Sin. 55° 30′ = 9,9159937
log. bd = 237,02 = 2,3747741
12,2907678
log. 57° 4′ = 9,9239191
log. cd = 2,3668487 = 232,72 = cd.

Die gesuchte Entfernung ist also = 232 Ruthen, 7 Fuß, 2 Zoll.

Im Verfolg der Rechnung fanden wir
bc = 260 Ruthen 8 Fuß
und db = 237 Ruthen 0 Fuß 2 Zoll.

Die Linie ac giebt die Proportion:

Sin. acb : ab = Sin. abc : ac.

und die Linie ad

Sin. adb : ab = Sin. abd : ad.

Obgleich eine solche Rechnung etwas mühsam ist, so belohnt doch die große Genauigkeit den darauf verwendeten Fleiß reichlich. Der Lehrer wird sie oft bedürfen, um die verschiedenen Resultate der Zeichnungen seiner Schüler zu berichtigen.

Aufl. IV. Mit dem Meßtisch ist das Geschäft viel einfacher. Setze ihn über den Punct a und bezeichne auf dem Meßtisch ghki Fig. 152. den Punct a; richte nun das Diopterlineal auf b, auf d und c, und ziehe die dazu gehörigen Linien ab, am, az.

Setze

Setze nun den Meßtisch in b, drehe ihn so, daß a nach a hinsteht, trage die Standlinie verjüngt auf ab, leg das Diopterlineal an b und richte es nach c und d, und ziehe über den Meßtisch Linien bz und bm. Jetzt ist die Zeichnung zmba auf dem Meßtisch der Figur cdba vollkommen ähnlich, und die Entfernung cd verjüngt in der zm zu messen.

§. 472. Eine Gegend aufzunehmen oder in den Grund zu legen. Fig. 153.

Aufl. I. Unter Grundlegen versteht der Geometer die Zeichnung einer Charte von einer Gegend (Grundriß), wobei alle Entfernungen im richtigen verjüngten Verhältniß stehen. Wenn c, d, e, g, h, k, l hervorstehende Puncte einer Gegend sind, so wähle in einer passenden Lage die Standlinie ba und miß sie. Setze den Winkelmesser in b, richte o° auf a, bevestige ihn, und miß nun die Winkel cba, dba, eba, gba, hba, kba, lba. Setze nun das Instrument in a, richte o° auf b, bevestige es, und miß die Winkel cab, dab, eab, gab, hab, kab, lab. Notire das Maaß aller Winkel vorläufig in der Schreibtafel.

Die Zeichnung beginne mit dem Auftragen der Standlinie ab. Setze an b mit dem Transporteur die dahin gehörigen Winkel, und eben so an a, so durchschneiden sich die nach einerlei Punct gehenden Linien in c, d, e, g, h, k, l, und diese Puncte sind in der richtigen Lage, und ihre Abstände mit dem Zirkel zu messen. Die minder wichtigen Puncte, die sich im Umfange der Gegend befinden, werden aus freier Hand gezeichnet, oder durch Ordinaten, Perpendikel auf geraden Linien bestimmt.

Aufl. II. Jeder der gemessenen Puncte macht mit der Standlinie ab ein Dreieck, in welchem die beiden Winkel an derselben (folglich auch der dritte) bekannt sind; und man kann daher leicht die Entfernungen der Puncte c, d ꝛc. von dem Puncte a, oder b, trigonometrisch finden. So ist z. B. die Entfernung gb durch

Sin. g : ba = Sin. ∠ gab : bg

und Sin. g : ba = Sin. ∠ gba : ag zu finden.

Wie

Wie die Abstände ge, ed, dc u. s. w. zu finden sind, ist in der vorigen Aufgabe schon vorgekommen.

Aufl. III. Mit dem Meßtisch. Setze ihn in a, wähle auf demselben einen (über a liegenden) schicklichen Punct a, und ziehe eine nach b hin gehende Linie mit der Bleifeder, welche die Standlinie ab verjüngt vorstellt. Richte nun das Diopterlineal von a aus nach den Gegenständen g, f, e, d, c rc. und ziehe jedesmal eine Linie willkührlich lang über den Meßtisch nach dem betreffenden Puncte.

Setze nun den Meßtisch in b, richte den Punct a auf dem Papier nach dem Endpunct a der Standlinie, und das Diopterlineal von b aus nach den genannten Puncten, so schneidet die Schärfe desselben auf den zugehörigen Linien Puncte g, e, d, c, l, k, h ab, welche im richtigen verjüngten Verhältniß liegen. Diese Puncte werden bezeichnet, die Hülfslinien ausgelöscht, und so bekommt man die Hauptpuncte einer Gegend richtig aufs Papier, ohne Winkel zu messen, oder zu rechnen.

Zur Bezeichnung der Himmelsgegenden setze den Compaß an die Standlinie auf dem Meßtisch, drehe ihn so, daß er in seine Abweichung einspielt, und ziehe an der Seite desselben die Mittagslinie.

§. 473. Die Boussole, deren sich manche Feldmesser, die es mit der Genauigkeit nicht strenge nehmen, bei ihren Arbeiten bedienen, ist ein mit bequemen Dioptern und passendem Stative versehener Compaß. Sobald man sie nur zum Auftragen gemessener Linien, zur Bestimmung der Himmelsgegend, und zu oberflächlichen Entwürfen benutzt, leistet sie gute Dienste; allein bei geforderter größerer Genauigkeit ist sie deshalb nicht als Winkelmesser zu empfehlen, weil man höchstens nur bis auf Viertelgrade die Winkel genau damit angeben kann, und sie also eben nicht mehr leistet, als der gemeine Transporteur. Weil aber alle Winkel, die mit der Boussole gemessen werden, sich auf die magnetische Mittagslinie beziehen, so hat auch dieses Instrument seine eigenen Vorzüge, zu denen folgender gehört:

Es sey Fig. 154. die Lage und Entfernung ab bekannt, und man befinde sich mit der Bouſſole in c, so läßt sich der Punct c finden. Denn $< p$, welchen die Mittagslinie cM mit cN macht, ist $= < o$; und $< r = < q$, weil es Wechselswinkel sind. Legt man daher an a und b (auf der Zeichnung) Mittagslinien ag und bh, und die Winkel q und $o = r$ und p, so durchschneiden sich die Schenkel in c.

Ferner ist die Bouſſole in Waldungen, wo man nicht weit um sich sehen kann, sehr vortheilhaft zu gebrauchen.

Die Aufnahme einer Gegend mit der Bouſſole von den Standpuncten a und b Fig. 153. geschieht am leichtesten dadurch, daß man mittelst derselben den Winkel bestimmt, den eine Linie ac oder ad mit der magnetischen Linie in a, und dann in b macht. Darauf trägt man die Standlinie auf's Papier, setzt in a und b Mittagslinien, und daran die im Felde gemessenen Winkel, so erhält man in den Durchschnitten c, d ꝛc. die gesuchten Puncte.

Anmerk. Siehe hierüber: Große Korollarien zur praktischen Geometrie. S. 26 ꝛc.

§. 474. Einen Wald, oder eine Stadt, ein Dorf, Gewässer u. dgl. in den Grund zu legen. Fig. 155.

Aufl. Da man innerhalb der bezeichneten Puncte a, b, c, d ꝛc. keine Standlinie wählen kann, so setze man den Winkelmesser in a, miß den $< iab$, die Linien ia und ab; setze das Instrument in b, miß $< abc$ und die Linie bc; setze es in c, miß $< dcb$, und Linie cd; in d miß $< edc$ und de; in e miß $< fed$; in f miß $< gfe$, und jedesmal die folgende Linie, bis endlich wieder nach a.

Trägt man nun sowol Linien als Winkel so auf's Papier, wie sie auf dem Felde gemessen worden, so erhält man die Puncte a, b, c, d, e, f, g, h, i in übereinstimmiger Lage auf dem Papier.

Sind Straßen, Alleen u. dgl. wie mit aufzuzeichnen, so bestimmt man am Umfange die Endpuncte derselben, und mißt hervorstehende Puncte, als Ecken, Plätze ꝛc. eben so, wie vorher.

Wenn

Wenn man mit diesem Verfahren nicht die größte Genauigkeit verbindet, so pflegt die Figur am Ende nicht zu schließen, ein Umstand, der dem Feldmesser oft begegnet, und den er dadurch beseitigt, daß er hie und da etwas verändert, bis die Figur schließt. — Mit dem Meßtisch erhält man die Zeichnung, wenn man ihn über a setzt, ab mißt, verjüngt aufträgt; ihn über b setzt, ba nach a richtet, aus b nach c visirt, cb mißt und aufträgt u. s. w. Die Winkel erhält man völlig genau, ohne sie in Graden angeben zu können, und daher schließt auch die Figur, wenn man nach i kommt. — Oft aber soll die Zeichnung (der Grundriß) größer seyn, als die Oberfläche des Meßtisches seyn kann, dann ist entweder ein frischer Bogen Papier über den Meßtisch zu spannen, oder der Winkelmesser nothwendig. — Die Boussole leistet auch hierbei gute Dienste, besonders wenn man Gewandheit im Auftragen der Declinationen besitzt.

Trigonometrisch findet man zwar auch alle diese Linien, allein eine solche Rechnung wird zweckmäßiger angewendet werden können, unzugängliche Puncte, dergleichen Thürme, Bäume ꝛc. u. s. w. darbieten, zu bestimmen, wozu man sich außerhalb der Stadt eine passende Standlinie wählt.

§. 475. Eine Zeichnung zu copiren.

Aufl. Jede erste Zeichnung (Original) wird wegen der vielen Hülfslinien selten recht sauber gerathen, daher vervielfältigt man sie bequem auf folgende Art.

Lege die Originalzeichnung auf ein feines ebenes Papier, und bevestige sie am Rande mit Mundlack oder Stecknadeln; dann stich mit einer feinen englischen Nähnadel durch alle bemerkenswerthe Puncte so, daß die Nadel auch das darunter liegende Papier mit trifft. Nimm nun die Zeichnung ab, so lassen sich alle auf dem reinen Papier befindlichen Puncte ohne Hülfslinien zusammen ziehn, wie es nach der Originalzeichnung verlangt wird. Kann das Durchstechen nicht angehen, so müssen zuerst die wichtigsten Puncte mit dem Zirkel gemessen, und auf die

Weise,

Weise, wie bei der Dreieckconstruction gezeigt ist, auf das reine Blatt gebracht, und dazwischen die übrigen Puncte und Linien eben so getragen werden.

§. 476. Eine gegebene Zeichnung zu reduziren, oder zu verkleinern.

Aufl. I. Theile die Zeichnung durch Bleistift-Linien in kleine Quadrate oder Rechtecke. Theile die Fläche, worauf die verkleinerte Zeichnung kommen soll, in eben so viele, aber kleinere Quadrate oder Rechtecke, die jenen ähnlich sind, und das Verhältniß der Verkleinerung haben. Numerire die Quadrate durch leicht verlöschbare Zahlen; und zeichne nun in jedes der kleinern Rechtecke das, was in dem gleichnamigen Rechtecke auf der größern Zeichnung enthalten ist, wobei Genauigkeit zu empfehlen ist.

Die Größe der kleinern Zeichnung ergiebt sich aus dem gegebenen Reductionsverhältniß nach §. 188. Es sey eine Zeichnung, die 12 Zoll lang, und 10 Zoll breit ist, auf eine Fläche zu bringen, die nur $\frac{3}{5}$ der erstern enthält. Wie lang und breit muß letztere seyn?

Der Quadratinhalt der großen Zeichnung ist $= 120$; der der kleinern $= \frac{3}{5} . 120 = 72$ Quadratzoll; nach §. 188. gilt

$120 : 72 = 12^2 : l^2$; und $l = \sqrt{\frac{72 . 144}{120}} = 9{,}3$ Zoll

$= 5 : 3 = 144 : l^2$ in der Länge.

Und um die Breite zu finden:

$5 : 3 = 10^2 : b^2$, und $b = \sqrt{\frac{3 . 100}{5}} = 7{,}74$ Zoll

in der Breite.

Aufl. II. Mit Hülfe eines Reducirlineals. Fig. 156. Das Lineal AB ist um die Nadel in C beweglich; der Theil CA ist von C aus in 100 oder 1000 Theile, der Theil CB in eben so viel, aber kleinere Theile getheilt, die an der abgedachten Kante des Lineals scharf auslaufen. Die Zeichnung abcd lege unter den Theil des Lineals, auf dem die größern Theile,

das

das Papier fghm unter den, auf dem die kleinern befindlich sind, und beide Zeichnungen so, daß Null an cd, und unterhalb e Null an fg trifft; cd aber fg parallel bleibt; und bevestige die Zeichnungen in dieser Lage.

Soll nun z. B. der Punct P von der großen Zeichnung auf die kleinere gebracht werden; so schiebe das Lineal auf P und zähle den Abstand CP nach den Theilen auf CA; es mag hier CP = 75 seyn. Zähle darauf auf CB ebenfalls 75 Theile = cp ab, und bezeichne p mit einem Punct. Der Punct N wird nach n kommen u. s. w.

Man muß zwar für jedes geforderte Reductionsverhältniß ein anderes Lineal haben; allein das Geschäft ist auch dafür äußerst schnell und genau zu vollenden, welches für diejenigen, die dergleichen Reductionen zu machen haben, ein wichtiger Umstand ist.

Aufl. III. Das Verjüngen und Vergrößern einer Zeichnung nach dem Maßstabe ist mühsam und erfordert für jeden überzutragenden Punct eine kleine Rechnung. Man muß nämlich den Abstand eines Puncts N von ab und bp messen, denselben mit dem gegebenen Verhältniß multipliciren, das Erhaltene als Abstand von fg und lh ansehen, und so auf die neue Zeichnung bringen.

§. 477. Eine gegebene Zeichnung zu vergrößern.

Aufl. Alle drei im vorigen §. mitgetheilte Auflösungsweisen sind dabei ebenfalls anwendbar, wie man ohne Erinnern bemerken wird; allein man verbinde die größte Genauigkeit mit diesem Geschäft, weil geringe Fehler im Vergrößerungsverhältniß auf der neuen Zeichnung wachsen.

§. 478. Geometrische Zeichnungen zu illuminiren, oder auszumalen.

Aufl. Hiezu sind Tuschfarben nöthig: Carmin, das schönste Roth, wird mit etwas Gummi oder Zucker oder Citronensaft auf Glas oder Tuschnäpfchen

den gerieben. Gummigutt, eine sehr sanfte, unendlich theilbare, gelbe Farbe, wird mit reinem Wasser aufgerieben. Nußbraun, Liliengrün, Grünspan werden mit reinem Wasser, oder besser mit Essig abgerieben. Berlinerblau am besten mit Gummiwasser; Hellblau, mit reinem oder Gummiwasser; Zinnober, mit Branntwein oder Gummiwasser aufgerieben; schwarze Tusche. Alle diese Tuschfarben sind dann am besten, wenn sie sich leicht abreiben und, naß gemacht und auf die Hand gestrichen, reine Striche geben. Durch Vermischung derselben erhält man alle mögliche Farben, z. B. Violett entsteht aus Carmin und Blau; alle Sorten von Grün aus der Vermischung der gelben und blauen Farbe. Aschgrau ist dünne schwarze Tusche. Das Anstreichen einer Fläche mit Farbe heißt Auftragen. Wenn das Auftragen gut gelingen soll, so müssen alle Farben sehr dünn oder recht flüssig seyn; will man die Farbe hervorstechender haben, so überstreiche man sie mehr, als einmal. Zum Schattiren gebraucht man jederzeit etwas dunklere Farbe, z. B. zur Schattirung des Gelben nimmt man Braun, des Hellblauen das Dunkelblaue, des Hellgrünen das Dunkelgrün, des Hellrothen das Dunkelrothe ꝛc. Die Lage der Schatten ist allemal bei geometrischen Zeichnungen auf der rechten Seite, weil das Licht von der linken herkommt, folglich haben Vertiefungen ihren Schatten auf der linken Seite.

Zum Auftragen der Farben nehme man einen nicht zu kleinen Pinsel, der die feinen Haare in eine Spitze vereinigt, viele Flüssigkeit faßt, und egale Striche macht; sehe sich vor, daß man mit dem Pinsel nicht wieder zurück in die schon rein aufgetragene Farbe komme, weil dadurch eine Ungleichheit in ihrer Stärke entsteht; und wenn sich etwa die Farbe auf einem Orte mehr anhäufen sollte, drücke man den Pinsel aus, und halte ihn an die angehäufte Farbe, so wird er sie wieder einziehen.

Alle Grundrisse stellen das Bild einer Gegend oder eines Platzes so vor,

wie es erscheinen würde, wenn sich das Auge in unendlicher Ferne senkrecht darüber befände.

---

§. 479. Zur Linienmessung gehört die Altimetrie oder Höhenmessung, welche gleichfalls auf dem Grundsatze, daß die ähnlichen Seiten ähnlicher Figuren einander proportional sind, beruht. Es kommen dabei mehrere Fälle, und allerlei Auflösungsweisen vor, wovon wir die vornehmsten anführen wollen. Ist eine Höhe so beschaffen, daß man vom höchsten Punct derselben eine Schnur senkrecht herab lassen kann, so giebt das Maaß dieser Schnur die Höhe an. Dies würde z. B. anwendbar seyn, die Tiefe eines Brunnens zu erforschen.

§. 480. Eine Höhe zu finden, zu deren unterstem Punct man kommen kann. Fig. 157.

Aufl. I. Nimm zwei Stäbe von verschiedener, aber bekannter Länge ba und dc, und stelle sie senkrecht so hinter einander, daß das Auge in a den höchsten Punct der Höhe BA über dem Stabe dc in gerader Linie erblickt. Dann sind die Dreiecke age und aDA einander ähnlich; daher gilt:

ag : cg = aD : DA, wozu noch DB = ab addirt wird.

In Worten: der Abstand der beiden Stäbe von einander verhält sich zu ihrem Unterschiede in der Länge, wie der Abstand des kleinen Stabes von der Höhe zur Höhe selbst.

Es sey ab = 3; cd = 8, ag = 4, aD = 16 Fuß; so ist

$$4 : 5 = 16 : DA, \text{ und } DA = \frac{5 \cdot 16}{4} = 20 \text{ Fuß.}$$

Hiezu DB oder ab = 3 —

Gesuchte Höhe 23 Fuß.

Diese arithmetische Auflösung ist genau, wenn die Stäbe nicht zu kurz im Verhältniß zur Höhe AB sind, und man in a ein Diopter hält, um die Nebensicht (Parallaxe) des Auges zu vermeiden.

Hat

Hat man nur einen Stab cd, so lege man das Auge da in R an die Erde, wo die Linie Ac verlängert hintrifft, und schließe:

$$Rd : dc = RB : BA.$$

Aufl. II. Mit dem Neigungsmesser läßt sich diese Aufgabe ebenfalls sehr genau lösen. Lege ihn auf den Stab dg so, daß das Auge in a am Diopter desselben ruht, die aufrechtstehende Cathete gc (am Instrument mn) senkrecht steht, und das verschiebbare Diopter in c mit a und A in einer Linie ist, so läßt sich ag und gc am Instrument ablesen, und aD = bB messen. Darauf schließe auch hier

$$ag : gc = aD : DA.$$

Es sey ag = 15 Zoll, gc = 18 Zoll 7 Linien 5 Scrupel = 1,875 Fuß, so wird 15 Zoll ($1\frac{1}{2}$) = 1,5 Fuß : 1,875 Fuß = 16 Fuß : DA und

$$DA = \frac{1{,}875 \cdot 16}{1{,}5} = 20 \text{ Fuß gefunden.}$$

Die senkrechte Stellung der Cathete mn am Instrument kann sehr leicht durch einen feinen Faden, an dem eine Bleikugel hängt, erhalten werden.

Anmerk. Um ihm die sanfteste Bewegung zu geben, bringe man in S eine Schraube (oder Wirbel) an, um welche sich eine mit CD verbundene Saite wickelt.

Aufl. III. Auch mit einem Spiegel kann man diese Höhe finden. Es sey Fig. 158. BA die zu messende Höhe, so lege in einer schicklichen Entfernung BS den Spiegel S wagerecht auf die Erde, und halte den Stab ba senkrecht so weit zurück, bis das an a gehaltene Auge die Spitze des Gegenstandes BA im Spiegel an einem darüber gelegten Faden erblickt. Weil nun nach optischen Grundsätzen der Zurückstrahlungswinkel aSb dem Einfallswinkel ASB gleich ist, und in beiden Dreiecken abS und ABS rechte Winkel, also die △ einander ähnlich sind, so gilt auch hier die Proportion Sb : ba = SB : BA.

Aufl. IV. Geometrisch. Nimm in einiger Entfernung den Standpunct S Fig. 158., miß mit einem

nem Sextanten oder Halbkreise (Fig. 142.) den Winkel BSA und den Abstand BS.

Trage nun BS verjüngt auf's Papier, errichte in B ein Perpendikel, und setze an S den gemessenen Winkel, so muß der Schenkel SA das Perpendikel BA in A durchschneiden, und BA mit dem Zirkel sich messen lassen. Zur so gefundenen Höhe addirt man alsdann noch die des Winkelmessers, oder des Stativs, weil der Punct B in gleicher Höhe mit den horizontalgestellten Dioptern Dd (Fig. 142.) angenommen werden muß.

Wenn der $< ASB = 50°$, und der Abstand $BS = 70$ Fuß gemessen ist, so giebt eine geometrische Construction die $AB = 83$ Fuß.

$+ 4$ — Höhe d. Instruments,

Summe 87 Fuß.

Aufl. V. Trigonometrisch. Im rechtwinklichten Dreieck ABS sind alle Winkel und die Seite BS bekannt, daher findet man BA durch

Sin. tot. : 70 = Tang. 50° : AB

log. Tang 50° = 10,07618

— 70 Fuß = 1,84509

1,92127 = 83,42

dazu Höhe des Stativs = 4

Höhe des Gegenstandes 87,42 Fuß.

Nennt man den Abstand $BS = a$, den Winkel $BSA = w$ und die gesuchte Höhe $= H$, so hat man die allgemeine Formel $\frac{a \cdot \text{Tang.} w}{\text{Sin. tot.}} = H$, welche für alle solche Fälle gilt.

Wie man die Höhe eines Gegenstandes aus seiner Schattenlänge finden könne, wird in der Lehre vom Licht §. 666. vorkommen.

§. 481. Eine Höhe zu messen, zu deren unterstem Punete man nicht kommen kann. Fig. 159.

Aufl. I. Geometrisch. Miß in einiger Entfernung eine Standlinie cd, und mit einem Winkelmesser in c den Winkel m, und in d den Winkel n.

Trage nun die Standlinie verjüngt auf's Papier, setze an c den Winkel m, an d den $< n$, und verlängere die Schenkel, bis sie sich in A schneiden. Von A fälle ein Perpendikel auf die verlängerte Standlinie, so ist dies Perpendikel = der gesuchten Höhe.

Die Neigung der Linien cA und dA kann auch mit dem Neigungsmesser gemessen, und auf die bekannte Weise auf's Papier getragen werden, wobei sich eine hohe Genauigkeit erreichen läßt.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im $\triangle$ cAd ist $< m$, $< o$ als Ergänzung zu 180° von n, folglich auch $< p$, und cd bekannt. Daher gilt Sin. p : dc = Sin. m : dA.

Im rechtwinklichten $\triangle$ ABd ist nun Seite dA und $< n$ bekannt, folglich

Sin. tot : dA = Sin. n : AB.

Daraus ergiebt sich, daß man AB geradezu durch folgendes Formular finden können:

$$AB = \frac{dc \,.\, \text{Sin. } m \,.\, \text{Sin. } n}{\text{Sin. } (n - m)}.$$

Von der Kennziffer des kommenden Logarithmen werden die Zehner abgestrichen, weil eigentlich noch mit Sin. tot. dividirt werden sollte.

Es sey die Standlinie cd = 76 Fuß, $< m = 40°$, $< n = 56°$, dann ist $n - m = 56 - 40 = 16°$, und

log. dc = 76 = 1,88081
— Sin. m = 40° = 9,80806
— Sin. n = 56° = 9,91857

21,60744

log. Sin. (n — m) = 16° = 9,44033

log. AB = 2,16711 = 146,9 Fuß
Höhe des Stativs = +3

Höhe des Gegenstandes = 149 Fuß 9 Zoll.

Aufl.

Aufl. III. Mit dem Neigungsmesser. Da wir hiemit die Neigung der Linien nach dem Abstand des verschiebbaren Stabes CD und des Diopters n (Fig. 143. b) bestimmen, so heiße der Kürze wegen $Am = b$ und $mn = c$, und wenn man auf dem zweiten Standpuncte mißt, mögen diese Abstände b' und c', die Standlinie $= a$, die Linie AB Fig 159. vom 2ten Standpuncte bis zur Höhe aber $= x$, und die Höhe $= y$ heißen, weil diese letztern beiden Linien unbekannt sind.

Nachdem man das Instrument horizontal gelegt, und alles gehörig gemessen hat, schließt man:

$$b : c = a + x : y, \text{ und } x = \frac{by - ac}{c};$$

auf dem zweiten Standpunct schließt man:

$$b' : c' = x : y, \text{ und } y = \frac{b'y}{c'}.$$

Die beiden abgesonderten Werthe von x sind sich gleich, und darum ist aus der Gleichung

$$\frac{by - ac}{c} = \frac{b'y}{c'} \text{ die y, oder Höhe BA zu finden}$$

$$\frac{bc'y - acc'}{c} = b'y \quad (c'$$

$$bc'y - acc' = b'cy \quad (c$$

$$bc'y - b'cy = acc'$$

$$(bc' - b'c)y = acc', \text{ und } y = \frac{acc'}{bc' - b'c} = BA.$$

Nimmt man $c = c'$, was sehr wohl angeht, indem man den Stab CD am Instrument nur allein verschiebt, bis das Diopter n gehörig mit dem Auge und dem höchsten Punct der Höhe in gerader Linie steht, so ist die

beständige Formel für jede Höhe $= \frac{ac}{b - b'}$.

Will man mit zwei Stäben diese Aufgabe lösen, so bedeutet c den Unterschied ihrer Länge, b den

Ab-

Abstand beider Stäbe am ersten, und b' den Abstand beider Stäbe am zweiten Standpunct; a gleichfalls die Standlinie.

§. 482. Eine Höhe AB von zwei Standpuncten a und b, die nicht in einer wagerechten Linie liegen, zu messen. Fig. 160.

Aufl. I. Geometrisch. Untersuche, wie viel der zweite Standpunct b tiefer, als a liegt. Der Unterschied sey hier db = ac. Nachdem die Standlinie ab, Winkel m bei a, und < n bei b gemessen, ziehe auf dem Papiere eine wagerechte Linie aB; und in dem Abstand db = ac eine Parallele cG; dann trage die Standlinie von a nach b.

Den Winkel m setze in a auf die Linie aB; < n aber in b auf die Linie cG; denn die gemessenen Höhenwinkel beziehen sich auf horizontale Linien.

Die Schenkel der Winkel m und n durchschneiden sich in A; und ein Perpendikel von A auf aB oder cG giebt die gesuchte Höhe.

Aufl. II. Trigonometrisch. Wäre die Standlinie = ag, und < n in g gemessen worden, so würde die Rechnung, wie im vorigen §. 481. seyn. Man muß also untersuchen, welche Standlinie für die gemessenen Winkel m und n gehört, wenn sie horizontal läge, und = ag wäre. Die ag kann im △ abg, wo wir ab schon kennen, aus dieser und < gab und gba gefunden werden.

Es ist nun im rechtwinklichten △ acb die ab, und ac bekannt, folglich ab : Sin. tot. = ac : Sin. abc; und < abc = < gab; und 180° — (< n + < abc) = < gba.

Im △ gab sind jetzt zwei Winkel (folglich auch der 3te) und die Seite ab bekannt; daher

Sin. < agb : ab = Sin. < gba : ga.

Nun bringe man anstatt der ab die ag in die Rechnung, und verfahre wie §. 481; nämlich

$$AB = \frac{ga \cdot \text{Sin. } m \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. } (n - m)}.$$

§. 483.

§. 483. Die Höhe eines auf einem unzugänglichen Felsen befindlichen Gegenstandes AB zu messen. Fig. 161.

Aufl. I. Miß eine Standlinie ab, und in a die Winkel m und n, welche die Gesichtslinien aA und aB mit der Horizontallinie aD machen, so wie in b die Winkel o und p.

Trage nun die Standlinie verjüngt auf's Papier, setze an a die Winkel m und n; an b aber die Winkel o und p, so werden sich die Schenkel in A und B schneiden. Der Abstand der Durchschnitte ist die Höhe des Gegenstandes, und das Perpendikel BD die Höhe des Berges.

Aufl. II. Trigonometrisch.

$$DA = \frac{ab \,.\, \text{Sin. } m \,.\, \text{Sin. } o}{\text{Sin. } (o - m)},$$

$$DB = \frac{ab \,.\, \text{Sin. } n \,.\, \text{Sin. } p}{\text{Sin. } (p - n)}$$

und $DA - DB = AB$; wobei $< m = AaD$, und $< o = AbD$.

Es ist leicht einzusehen, daß die im §. 482. und 483. gegebenen Aufgaben auch mit dem Neigungsmesser oder zwei Stäben (wie §. 481. Aufl. III.) gelöst werden können.

§. 484. Aus zwei Fenstern a und b Fig. 162. die Höhe des Gegenstandes DC zu messen.

Aufl. I. Miß den Abstand der Beobachtungspuncte b und a in den Fenstern, und in jedem den Winkel, den die horizontale Linie aF oder bE mit der Gesichtslinie nach der Spitze C macht, also $< m$ und $< n$.

Trage nun die Linie ab verjüngt auf Papier, errichte in a und b die Perpendikel aF und bE, und setze in a den $< m$, und in b den $< n$ an, so werden sich die Schenkel in C schneiden. Von C fälle auf Fa oder Eb ein Perpendikel; miß mit dem Zirnach dem verjüngten Maßstabe die CF oder CE. Addirt man dazu $ED = bd$, so giebt die Summe die DC.

Aufl. II.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im △ baC ist $< baC = 90° + m$ und $< abC = 90° - n$, folglich auch $< o$, und Seite ab bekannt. Daher gilt Sin. o : ab = Sin. < baC : bC, wodurch im rechtwinklichten Dreieck EbC die Seite bC, und < n bekannt sind, und also Sin. tot : Cb = Sin. n : CE; und CE + bd = CD gefunden wird.

Aufl. III. Mit dem Neigungsmesser. Nennen wir hier, wie §. 481. Aufl. III., die beständige Linie (ab) = a; den Abstand des verschiebbaren Stabes vom Auge = b und b′ in beiden Endpuncten der Standlinie; die Höhe des Gegenstandes y = FC: so finden wir für y auf eine ähnliche Weise, wie §. 481, die sehr bequeme Formel $\frac{b'a}{b-b'} = FC$; und FC + ad = DC.

Nämlich im Fenster a gilt: b : c = x : y, und $x = \frac{b \cdot y}{c}$

und im Fenster b gilt: b′ : c = x : y + a, und $x = \frac{b' \cdot y + b' \cdot a}{c}$, also ist $\frac{b \cdot y}{c} = \frac{b' \cdot y + b' \cdot a}{c}$,

und daraus $y = \frac{b' \cdot a}{b - b'}$, wozu noch die Höhe da addirt wird, um DC zu erhalten.

§. 485. Die Tiefe eines Thales adb Fig. 163., dessen tiefster Punct d ist, zu messen.

Aufl. I. Miß von b aus eine passende Standlinie bc in's Thal hinab, und mit einem Halbkreis, oder andern zum Tiefenmessen schicklichen Instrumente, die Winkel x, y und w, indem man Nullgrad auf der senkrechten bg annimmt, und nach a und d visirt. In a kann < o eben so gemessen werden.

Unter einem Winkel m = n trage nun die Standlinie bc auf's Papier, lege in b den < x, in c den Winkel y an, so durchschneiden sich die Schenkel in a, folglich hat man hiedurch die Breite des Thales. Setze in a den Winkel o an, so schneidet der Schen-

kel ad die bd in d. Ein Perpendikel aus d auf ab, hier dp, ist die Tiefe des Thales.

Aufl. II. Trigonometrisch. Im △ abc ist Sin. z : bc = Sin. x : ac; oder Sin. z : bc = Sin. y : ab.

Im △ abd gilt Sin. adb : ab = Sin. dab : bd, und < o + z = < dab; und < o + z + x von 180° abgezogen, giebt < adb.

Die Tiefe pd giebt die Porportion:

Sin. tot. : bd = Sin. x : pd.

III. Flächenmessung.

§. 486. Die Flächen sind entweder von geraden oder krummen Linien, oder von beiden zugleich eingeschlossen. In allen Fällen suche man sie in regelmäßige geometrische Figuren zu zerlegen, welches durch Hülfslinien, Diagonalen ꝛc. geschieht, und bei einem nur einigermaßen geübten Scharfblick nicht schwer wird. Zu den regelmäßigen Figuren gehören Parallelogramme, Triangel, gleichseitige Vielecke, Trapezia, Kreise, Parabeln, Ellipsen und andere krumme Linien. Wir beschäftigen uns nun damit, die Flächen der regelmäßigen Figuren zu berechnen, und Formeln dazu zu geben. Vergleiche §. 190., wo vom Flächenmaaß das Nöthigste gesagt ist.

§. 487. Den Flächenraum eines Quadrats zu finden.

Aufl. Multiplicire eine Seite (= l) mit sich selbst. Der Flächenraum (= F) ist = l^2 oder l . l.

Z. B. Es sey eine Seite 12,5 Fuß, so ist F = 12,5 . 12,5 = 156,25 Quadratfuß; oder (weil 100 Quadratfuß = 1 Quadratruthe) = 1 Quadratruthe, 56 Quadratfuß, 25 Quadratzoll. Der Kürze wegen werden wir schreiben □ Rth. □ F. □ Z.

§. 488. Die Fläche eines Rechtecks zu finden.

Aufl.

Aufl. Multiplicire die Länge mit der Breite; daher ist F = l . b.

Z. B. Es sey ein Garten 15 Ruthen lang und 4 Ruthen breit, so ist sein Flächenraum = 15 . 4 = 60 □ Ruthen.

§. 489. Die Fläche eines jeden Parallelogramms zu finden.

Aufl. Nimm eine der 4 Seiten zur Grundlinie (= g), errichte auf dieser ein Perpendikel bis zur gegenüberstehenden Seite, welches die Höhe der Figur (= h) angiebt, und multiplicire Grundlinie und Höhe mit einander. Formel F = g . h.

Diese Regel gilt für das Quadrat, in welchem h = g ist, für das Rechteck, in dem die Höhe oder Breite das Perpendikel ist, für den Rhombus und Rhomboides Fig. 19. und 20, in denen der senkrechte Abstand der Parallelen = dem Perpendikel.

§. 490. Den Flächenraum eines Trapezium's zu finden. Fig. 17.

Aufl. Addire die beiden parallelen Seiten ab und cd und halbire die Summe; multiplicire das, was kommt, mit dem senkrechten Abstande. Das ist $\left(\frac{ab + cd}{2}\right)$. ac; und wenn wir allgemein die Parallelen G und g, ihren Abstand h nennen, so kommt die Formel $F = \frac{(G + g) . h}{2}$.

Es sey ab = G = 12′; cd = g = 8′, und ac = h = 6′, so ist die Fläche $= \frac{(12 + 8) . 6}{2}$

$= \frac{20 . 6}{2} = \frac{120}{2} = 60$ □ Fuß.

§. 491. Die Fläche eines jeden Dreiecks zu finden. Fig. 6, 7 und 8.

Aufl. I. Nimm eine Seite zur Grundlinie, fälle aus der gegenüberstehenden Winkelspitze ein Perpendikel auf die, nöthigenfalls verlängerte, Grundlinie, und mul-

multiplicirè Grundlinie und Perpendikel, oder Grundlinie und Höhe mit einander; endlich dividire das Product durch 2. Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Es sey Fig. 8. die $ac = g = 12'$; die $bp = h = 6',2$, so ist die Fläche $= \frac{12 \cdot 6,2}{2} = \frac{74,4}{2} = 37,2$ □ Fuß.

Im rechtwinklichten Dreieck ist die eine Cathete die Grundlinie und die andere die Höhe.

Aufl. II. Wenn alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sind, und a, b, c heißen, so giebt folgendes Formular den Flächenraum

$$F = \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+c-b).(a+b-c).(b+c-a)}}{4}.$$

Es sey Seite $a = 6$, so sind die 4 Factoren $6+5+4 = 15$
$b = 5$ $6+4-5 = 5$
$c = 4$ $6+5-4 = 7$
$5+4-6 = 3$

und $15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$; $\sqrt{1575} = 39,68$; und $\frac{39,68}{4} = 9,92$ □ Maaß.

Sind die Seiten groß, so verrichtet man die Multiplication und Ausziehung der Wurzel sehr bequem mit Logarithmen.

§. 492. Die Fläche jeder geradlinichten Figur zu finden.

Aufl. Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes besonders, und addire alle Dreiecke zusammen, so ist die Summe = dem Flächenraum.

§. 493. Den Flächenraum einer in einem Kreise beschriebenen gleichseitigen Figur zu finden.

Aufl. Im Kreise lassen sich gleichseitige Drei- Vier- Fünf- Sechs- und andere Vielecke zeichnen, deren Flächen dann vom Radius des Kreises, worin sie beschrieben sind, abhängen.

Es

Es sey das Vieleck, welches es wolle, so läßt es sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, und berechnen. Allein durch algebraische und trigonometrische Kunstgriffe kann man aus einer Seite und der Anzahl derselben den Flächenraum viel genauer und ohne Zeichnung finden. Sucht man aus Fig. 188., worin DF eine Seite eines Vielecks $= m$, $GD = \frac{1}{2} m$; $< x = \frac{1}{2}$ Centriwinkel; $< y = \frac{1}{2}$ Polygonwinkel, Werthe für GD und CG, aus deren Multiplication der Flächenraum des $\triangle$ DCF hervorgeht, so findet man Sin. tot. : $\frac{1}{2} m =$ Tang. $< y$: CG; und $CG = \frac{\frac{1}{2} m \cdot \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$, und multiplicirt man dies mit $DG = \frac{1}{2} m$, so kommt $\frac{\frac{1}{4} m^2 \cdot \text{Tang.} < y}{\text{Sin. tot.}}$ $= \frac{m^2 \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2} \text{Polygonwinkel}}{4 \text{ Sin. tot.}}$; und also ist Fläche eines Vielecks von n Seiten $= \frac{m^2 . n . \text{Tang.} \frac{1}{2} p}{4 \text{ Sin. tot.}}$, worin $m =$ einer Seite, $n =$ Anzahl der Seiten, und $p =$ Polygonwinkel. Den Polygonwinkel p findet man, indem man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt, und den Quotienten von 180° abzieht. Also ist $p = 180° - \frac{360}{n}$.

Daraus entsteht folgende Tafel für die Flächen der Vielecke, deren Seiten bekannt sind.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 . 3 . \text{Tang. } 30°}{4 . \text{Sin. totus}}$,

des Vierecks $= \frac{m^2 . 4 . \text{Tang. } 45°}{4 . \text{Sin. tot.}} = m^2$,

denn Tang. 45° = Sin. tot.

des Fünfecks $= \frac{m^2 . 5 . \text{Tang. } 54°}{4 . \text{Sin. tot.}}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 . 6 . \text{Tang. } 60}{4 . \text{Sin. tot.}}$,

Fläche

Fläche des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot \text{Tang. } 64°17'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot \text{Tang. } 67°30'}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot \text{Tang. } 70°}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot \text{Tang. } 72°}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$ u. s. w.

Z. B. Es sey die Seite eines Fünfecks $= 4{,}312$ Fuß $= m$, so ist $n = 5$, und das Formular $= \frac{4{,}312^2 \cdot 5 \cdot \text{Tang. } 54°}{4 \cdot \text{Sin. tot.}}$.

Nun ist log. Tang. $54° = 10{,}1387390$
log. $5 = 0{,}6989700$
log. $4{,}312° = 1{,}2695184$
$12{,}1072274$
log. $4 = 0{,}6020600$
log. Sin. tot. $= 10{,}$

log. der Fläche $= 1{,}5051674 = 32$ □ Fuß.
(Der log. 4 Sin. tot. ist beständig $= 10{,}6020600$).

§. 494. Will oder kann man nicht mit Logarithmen rechnen, so dient folgende bequeme Tafel, in welcher die Zahl mit dem Decimalbruch nichts anders ist, als die Tangente des halben Polygonwinkels, und m die gegebene Seite.

Fläche des Dreiecks $= \frac{m^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4}$,

des Vierecks $= m^2$,

des Fünfecks $= \frac{m^2 \cdot 5 \cdot 1{,}376}{4}$,

des Sechsecks $= \frac{m^2 \cdot 6 \cdot 1{,}732}{4}$,

des Siebenecks $= \frac{m^2 \cdot 7 \cdot 2{,}0763}{4}$,

des Achtecks $= \frac{m^2 \cdot 8 \cdot 2{,}4142}{4}$,

Fläche

Fläche des Neunecks $= \frac{m^2 \cdot 9 \cdot 2,7475}{4}$,

des Zehnecks $= \frac{m^2 \cdot 10 \cdot 3,0777}{4}$,

des Zwölfecks $= \frac{m^2 \cdot 12 \cdot 3,732}{4}$,

des Funfzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 15 \cdot 4,7046}{4}$,

des Sechzehnecks $= \frac{m^2 \cdot 16 \cdot 5,0273}{4}$.

Z. B. Es sey die Seite m eines Achtecks = 2 Fuß, so ist seine Fläche $= \frac{2^2 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 2,4142}{4}$

$= 8 \cdot 2,4142 = 19,3136$ d. i. 19 □ Fuß, 31 □ Zoll, 36 □ Linien.

§. 495. Es ist ein Kreis gegeben, man sucht die Seite eines in demselben beschriebenen Vielecks. Fig. 188.

Aufl. Wenn DF die Seite m des Vielecks, so ist CD = CF = R; < x = $\frac{1}{2}$ Centriwinkel = $\frac{1}{2}$ c; und

Sin. tot. : CD = Sin. x : DG

= Sin. tot. : R = Sin. $\frac{1}{2}$ c : $\frac{1}{2}$ m; also $\frac{1}{2}$ m $= \frac{R \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} C}{\text{Sin. tot.}}$.

Weil nun der Sin. tot. = 1, so ist die allgemeine Formel = m = 2 R . Sin. $\frac{1}{2}$ C; und $C = \frac{360°}{n}$,

wenn n = Anzahl der Seiten.

Daraus entsteht folgende kleine Tafel, welche angiebt, wie groß die Seite eines Vielecks, wenn der Halbmesser = R gegeben ist. Die Zahl 2 R = D = Diameter, und Sin. $\frac{1}{2}$ c = dem Decimalbruch.

Die Seite des Dreiecks = D. 0,866, oder $\sqrt{3 R^2}$,
des Vierecks = D. 0,7071 oder $\sqrt{2 R^2}$,
des Funfecks = D. 0,5878 oder
$\sqrt{(R^2 + \frac{6}{4} R^2 - R \sqrt{\frac{5}{4} R^2})}$

Die

Die Seite des Sechsecks = D. 0,5 oder R,
des Siebenecks = D. 0,4339,
des Achtecks = D. 0,3827 oder $\sqrt{(2R^2 - 2R\sqrt{\frac{1}{2}R^2})}$,
des Neunecks = D. 0,342,
des Zehnecks = D. 0,309 oder $\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot R^2 - \frac{1}{2}R$,
des Eilfecks = D. 0,2818,
des Zwölfecks = D. 0,2588,
des Funfzehnecks = D. 0,2079,
des Sechzehnecks = D. 0,1994,
des Vierundzwanzigecks = D. 0,1305.

Z. B. Man sucht die Seite eines Neunecks in einem Kreise, dessen Diameter = 4, so giebt die Tafel 4 . 0,342 = 1,368 als die Größe derselben an. — Die Seite eines Dreiecks in demselben Kreise = 4 . 0,866 = 3,464 = m.

§. 496. Den Flächenraum eines Vierecks zu finden, in welchem nur 1 rechter Winkel ist, und dessen sämmliche Seiten bekannt sind. Fig. 164.

Aufl. Die Seiten heißen a, b, c, d; bei A ist der rechte Winkel; BD eine Diagonale = f.

Die $f = \sqrt{(d^2 + a^2)}$, nach dem pythagorischen Lehrsatz; die Fläche des $\triangle BAD = \frac{ad}{2}$; und weil nun im $\triangle BCD$ alle Seiten bekannt sind, so ist der Inhalt nach §. 491. zu finden. Die Fläche vom ganzen Viereck ist also

$$= \frac{ad}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+f) \cdot (b+c-f) \cdot (b+f-c) \cdot (f+c-b)}.$$

§. 497. Die Fläche eines Kreises zu finden.

Aufl. Multiplicire den Halbmesser mit sich selbst und mit der Zahl 3,14159 (oder bei weniger Genauigkeit nur mit 3,14), welche wir stets, wenn vom Kreise die Rede ist, mit p benennen wollen. Im Formular ist $F = r^2 p$, wo r = Radius ist,

oder $F = \frac{d^2 p}{4}$, wo d = Diameter ist.

Es

Es sey der Durchmesser d eines Kreises = 6 Zoll, also der Radius = 3 Zoll = r; und $r^2 = 3^2$, folglich $r^2 . p = 9 . 3,14.... = 28,26$ d. i. 28 □ Zoll 26 □ Linien. Nach dem 2ten Formular ist $\frac{d^2 p}{4}$ $= \frac{6^2 . 3,14....}{4} = \frac{36 . 3,14}{4} = 28,26$, wie vorher.

§. 498. Die Fläche eines Kreissectors zu finden.

Aufl. Ist die ganze Kreisfläche $= r^2 p$; so ist die Fläche eines Halbkreises $= \frac{r^2 p}{2}$; eines Quadranten $= \frac{r^2 p}{4}$; eines Sextanten $= \frac{r^2 p}{6}$; eines Octanten $= \frac{r^2 p}{8}$ u. s. w. Überhaupt aber ist der Bogen jedes Sectors als die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Höhe der Halbmesser ist, anzusehen, wobei der Bogen = b, der gewöhnlich in Graden gegeben wird, in Theilen des Radius gesucht werden muß. Nun ist die ganze Kreislinie = d . p (siehe §. 202.); also für n Grade

$360° : d . p = n : b$, und der Bogen $b = \frac{d . p n}{360}$

Multiplicirt man den Bogen mit $\frac{r}{2}$, so kommt $\frac{d . p . n . r}{2 . 360}$, und (weil $d = 2r$) $= \frac{r^2 . p . n}{360}$ = Fläche jedes Sectors von n Graden.

Z. B. Es sey der Radius = 3 = AC, Fig. 165.; und der Bogen AB = n = 60°, so ist

Fläche des Sectors BCA $= \frac{3^2 . 314 . 60}{360} = 4,71$.

§. 499. Die Fläche eines Sehnenabschnitts AnBs zu finden. Fig. 165.

Aufl. Berechne den Flächeninhalt des Sectors AnBC, und ziehe davon den Inhalt des △ ABC ab, so bleibt der Inhalt vom Abschnitt AnBsA.

△ ABC hat zur Grundlinie AC = r, und zur Höhe GB, welche gefunden wird durch

Sin. tot. : CB = Sin. x : GB,

d. i. Sin. tot. : r = Sin. n : GB, und GB $= \frac{r \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. tot.}}$;

Fläche des △ BCA $= \frac{r^3 \cdot \text{Sin. } n}{2 \cdot \text{Sin. tot.}}$

Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA $= \frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} - \frac{r^2 \cdot \text{Sin. } n}{2 \text{ Sin. tot.}}$.

Z. B. Es sey, wie vorher, r = 3; n = 60°, so war $\frac{r^2 \cdot p \cdot n}{360} = 4{,}71$ nach §. 498.; und $\frac{r^2 \cdot \text{Sin. } n}{2 \text{ Sin. tot.}}$

$= \frac{3^2 \cdot \text{Sin. } 60^\circ}{2 \text{ Sin. tot.}}$, und log. 3^2 = 0,9542425

Sin. 60° = 9,9375306

10,8917731

log. 2 = { 0,3010300

Sin. tot. = { 10

log. △ ACB = 0,5907431

Fläche ACB = 3,8971.

Aber 4,71 = Fläche des Sectors

und 3,8971 = Fläche des △ ACB

bleibt 0,8129 = Fläche des Sehnenabschnitts AnBsA.

§. 500. Die Fläche eines Kreisabschnitts ABED Fig. 166. zu finden.

Aufl. Ziehe die Radien CD, CE, und die Perpendikel DH und GC; alsdann besteht das Kreisstück ABED aus den beiden gleichen Sectoren ACD und BCE, und dem △ DCE, dessen halbe Grundlinie DG = HC, und dessen Höhe CG ist.

Im rechtwinklichten △ HCD, in welchem < n und Seite CD = r bekannt sind, findet man durch

Sin. tot. : r = Cos. n : HC oder DG

und Sin. tot. : r = Sin. n : DH oder CG.

Nun

Nun ist DG . CG = Fläche des △ DCE, d. h. $\frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}$ und die Fläche eines Sectors

$$ACD = \frac{r^2 . p . n}{360}.$$

Aber 2. ACD + △ DCE = ABED; in vorigen Zeichen ist

$$\text{Fläche ABED} = \frac{2r^2 . p . n}{360} + \frac{r^2 . \text{Sin. } n . \text{Cos. } n}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}.$$

Z. B. Es sey r = 96; n = 30°; so ist Sector

$$ACD = \frac{96^2 . 3{,}14 . 30}{360} = 2412{,}7 \text{ Fläche.}$$

$$\text{Fläche des △ DCE} = \frac{96^2 . \text{Sin. } 30° . \text{Cos. } 30°}{\text{Sin. tot. Sin. tot.}}.$$

log. 96^2 = 3,9645424
− Sin. 30° = 9,6989700
− Cos. 30° = 9,9375306

23,6010430

Sin. tot. = 10
Sin. tot. = 10 abgezogen

3,6010430 = 3990,7 = △ DCE.

Sector ACD = 2412,7
Sector BCE = 2412,7
Dreieck DCE = 3990,7

Fläche des Kreisstücks = 8816,1 □ Maaß.

Das Stück
AHD = Sector ACD − △ HCD.
und
ACGD = Sector ACD + △ CGD.

§. 501. Aus dem gegebenen Sehnenabschnitt FBEM Fig. 167. den Durchmesser AB eines zugehörigen Kreises zu finden.

Aufl. Ziehe die Linien FB und BE nach der Mitte des gegebenen Bogens FE, so geht die gerade Linie BMA durch das Centrum und die Mitte der Sehne FE. Ziehe in Gedanken die EA; dann sind die

Dreiecke MBE und BEA einander ähnlich. Daher gilt

$$MB : ME = ME : MA, \text{ und } MA = \frac{ME^2}{MB}$$

und der Diameter $BA = \frac{ME^2}{MB} + MB.$

Z. B. Es sey MB = 10; ME = 50, so ist MA $= \frac{50^2}{10} = \frac{2500}{10} = 250$, und BA = 250 + 10 = 260.

Der Bogen BE kann auch in Graden gefunden werden; denn er ist = 2 < n, weil n ein Peripheriewinkel, dessen Maaß bekanntlich der halbe Bogen BE ist.

MA : Sin. tot. = ME : Tang. n; und 2n = BE in Graden.

§. 502. Die Fläche eines Ringes gggg Fig. 168 zwischen zwei concentrischen Kreisen zu finden.

Aufl. Ziehe die Fläche des kleinern Kreises, dessen Radius CD, von der Fläche des größern, dessen Radius CA ist, ab. Der Rest ist die Fläche des Ringes.

Wenn R und r die Halbmesser, p = 3,14..., bedeutet, so ist das allgemeine Formular für jede Ringfläche

$$F = (R^2 - r^2) . p.$$

Z. B. Es sey CD = r = 30; CA = R = 40, so ist $(40^2 - 30^2) . 3,14 = (1600 - 900) . 3,14$ = 700 . 3,14 = 2198 □ Maaß Fläche.

§. 503. Die Fläche zu berechnen, welche von den gothischen Bogen AC und BC und deren Radius AB eingeschlossen wird. Fig. 169.

Aufl. In der gothischen Bauart findet man diesen Bogen recht häufig zu Fenster- Thür- und andern Gewölbebogen angewendet. Mit dem Radius AB wird aus A und B der Bogen BC und AC beschrieben; folglich ist △ ACB gleichseitig, und <a = < m = 60°, der Anzahl Grade des Bogens.

Die

Die Fläche, welche die beiden Bogen und der Radius AB einschließen, besteht aus dem Sector BAGCHB, und dem Sehnenabschnitt AJCGA; oder auch aus zwei gleichen Sectoren, weniger dem △ ACB. Daher paßt das allgemeine Formular $\frac{2 \cdot r^2 \cdot n \cdot p}{360} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = F$, wobei $r = AB$; $n = 60°$; $p = 3{,}14$ ist, und weil n beständig $= 60°$, so erhält man das Formular etwas abgekürzter

$$F = \frac{2 \cdot r^2 \cdot p}{6} - \frac{r^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773}{4} = r^2 \cdot 0{,}61422.$$

Z. B. Wenn AB $=$ 5 Fuß $= r$, so ist

$$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 3{,}14\ldots}{6} = 26{,}1797$$

und $\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 0{,}5773\ldots}{4} = -\ 10{,}8243$

Fläche des Bogens 15,3556,

d. h. 15 □ Fuß, 35 □ Zoll, 56 □ Linien.

(Vergl. §. 494. und §. 498.).

§. 504. Die Fläche CABD Fig. 170, die von 2 krummen und 2 geraden Linien eingeschlossen ist, zu berechnen.

Aufl. In kurzen Entfernungen miß die Stücke cb, bi, fb, so wie ba, fd, hg ꝛc., wodurch die Trapezia chaD, bfda, fhgd u. s. w. entstehen, worin die krummen Seiten für gerade gelten können, und zerlege sie durch Diagonalen ca, bd, fg in Dreiecke, so läßt sich jedes leicht berechnen, und ihre Summe finden, welche $=$ der sich schlängelnden Fläche ist.

Von dieser Beschaffenheit sind viele Ackerstücke auf einer Feldmark, das Bette eines Stroms u. dgl.

§. 505. Die Fläche, welche ein paraboli-scher Bogen CGAHB Fig. 55. einschließt, zu finden.

Aufl. Multiplicire die Höhe DA mit der halben Breite DB, und nimm das Product $\frac{4}{3}$ mal. Im allge-

allgemeinen Formular $= \frac{b \cdot h \cdot 2}{3}$, worin b = Breite CB; und h = DA = Höhe.

Z. B. Es sey b = 134; h = 150; dann ist $\frac{134 \cdot 150 \cdot 2}{3} = 13400$ Quadratmaaß.

Zu Gewölbebogen, auf denen große Lasten ruhen, ist der parabolische Bogen sehr zu empfehlen.

§. 506. Eine elliptische Fläche zu berechnen.

Aufl. Multiplicire die große Axe = A mit der kleinen Axe = a, und mit p = 3,1415...; dividire das Product durch 4.

Formular. $F = \frac{A \cdot a \cdot p}{4}$.

Z. B. Es sey die große Axe A = 145; die kleine a = 105 Zoll, so ist $\frac{145 \cdot 105 \cdot 3{,}1415....}{4}$ = 11955,431 □ Zoll, d. h. 1 □ Ruthe, 19 □ Fuß, 55 □ Zoll, 43 □ Linien, 1 □ Scrupel Decimalmaaß; nach zwölftheiligem Maaße müßte 11955 □ Zoll durch 144 zu □ Fußen, diese wieder durch 144 zu □ Ruthen gemacht werden.

Vielerlei Anwendung der Ellipse findet man in der Baukunst, bei Gefäßen, als Bottichen, Wannen, Becken ꝛc.

§. 507. Die Fläche der Eierlinie Fig. 100. zu finden.

Aufl. Diese Fläche besteht

1. in dem Halbkreis adcb, dessen Fläche $= \frac{R^2 \cdot p}{2}$,
2. in dem Sector abg, dessen Radius ab = D, dessen Fläche $= \frac{D^2 \cdot p}{4}$,
3. in dem Sector bah, der dem vorigen gleich ist,
4. in dem Quadranten gfh, dessen Radius fg = r,

dessen

dessen Fläche $\frac{r^2 p}{4}$; ($r = D - \sqrt{2R^2}$, weil bf Hypotenuse, und $cb = cf = R$).

Von der Summe dieser Flächen muß das $\triangle$ abf, dessen Fläche $= R^2$ abgezogen werden, weil sie zweimal mit gerechnet worden.

Wenn man diese verschiedenen Flächen zusammen setzt, und möglichst einfach ausdrückt, so erhält man folgendes

Formular $\frac{3R^2 \cdot p}{2} + \frac{r^2 \cdot p}{4} - R^2 =$ Fläche.

Z. B. Es sey $ab = 200 = D$; $R = cb = 100$; dann ist $r = 200 - \sqrt{2 \cdot 100^2} = 200 - \sqrt{20000}$ $= 200 - 141{,}42 = 58{,}58$.

und $\frac{3 \cdot 100^2 \cdot 3{,}14 \ldots}{2} + \frac{58{,}58^2 \cdot 3{,}14}{4} - 100^2 =$ Fläche $= 47100 + 2694 - 10000$; $= 49794 - 10000$ $= 39794$ Quadratmaaß.

§. 508. Den Flächenraum, den die Schnekkenlinie §. 411. fig. 101 einschließt, zu finden. Aufl. Es sey $r = cd =$ Radius des kleinsten Halbkreises, so ist der Radius des untern Halbkreises $tgh = 2r$; des obern Halbkreises $him = 3r$; des untern $mka = 4r$; des obern $alb = 5r$. Aber vom Halbkreis mih muß def; von mka muß tgh; und von alb muß him abgezogen werden. Hiernach ist die Fläche des

1sten Halbkr. $= \frac{r^2 p}{2} \ldots\ldots = \frac{r^2 p}{2}$

2ten Halbkr. $= \frac{2^2 r^2 p}{2} \ldots\ldots = \frac{4r^2 p}{2}$

1. Halbrings $= \frac{3^2 r^2 p}{2} = \frac{9r^2 p}{2} - \frac{r^2 p}{2} = \frac{8r^2 p}{2}$

2. Halbrings $= \frac{4^2 r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2} - \frac{4r^2 p}{2} = \frac{12r^2 p}{2}$

3. Halbrings $= \frac{5^2 r^2 p}{2} = \frac{25r^2 p}{2} - \frac{9r^2 p}{2} = \frac{16r^2 p}{2}$

Summe $= \frac{41r^2 p}{2} =$ Fläche.

Man bemerkt leicht, daß die ersten Glieder in dieser Reihe allemal Halbkreise, die folgenden aber Halbringe sind; und daß die Werthe in der Progression 4, 8, 12, 16 ꝛc. beständig zunehmen, wornach für jeden vorkommenden Fall die Anwendung leicht zu machen ist.

Diese Schneckenlinie ist von der des Archimedes §. 382. verschieden.

§. 509. Die Fläche jeder Figur, sie mag von geraden oder krummen Linien begränzt seyn, zu finden.

Aufl. Zerlege durch Hülfslinien die Figur in bekannte geradlinichte oder krummlinichte Figuren, berechne jede einzeln, und addire dieselben.

Wenn die Krümmung sich auf keine der bekannten krummen Linien bringen lassen will, so zerlege man sie in sehr kleine Dreiecke und berechne sie. Denn alsdann kann der Theil, der in einen solchen Triangel fällt, ohne großen Irrthum für geradlinicht gelten. Dabei ist zu vergleichen, was über die krummen Linien höherer Ordnungen gesagt worden ist.

IV. Vermischte Aufgaben über Linien- und Flächenmessung.

§. 510. Über einer gegebenen Linie AB Fig. 171. ein rechtwinklichtes Dreieck zu zeichnen, in welchem der rechte Winkel der gegebenen Seite gegenüber steht, und dessen Fläche einem gegebenen Quadrat Q gleich ist.

Aufl. Aus der Mitte der AB beschreibe einen Halbkreis, so wird jeder Peripheriewinkel ACB die verlangte Eigenschaft haben. Allein der Punct C ist hier zu finden, durch welchen die Höhe des Dreiecks bestimmt wird. Nennt man die Seite des Quadrats a; AB = b; die Höhe des Dreiecks = z, so soll nach der Bedingung $\frac{bz}{2} = a^2$; also $bz = 2a^2$, und

$z = \frac{2a^2}{b} = AD$. Von AD ziehe eine Parallele mit AB, so wird der Durchschnitt mit dem Kreise den Punct C geben; und $CP = z =$ Höhe seyn. Den Abstand $AP = v$ findet man also:

Nach der Gleichung für den Kreis ist $AP : PC = PC : PB$, oder

$v : z = z : b - v$; $z^2 = bv - v^2$

$v^2 - bv = -z^2$

$v^2 - bv + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - z^2$ (Siehe quadrat Gleich. §. 147. u. f.)

$\sqrt{\left(v - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}$

$AP = v = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right)}$.

Um die Seite x zu finden: $v^2 + z^2 = x^2$, und $x = \sqrt{(v^2 + z^2)}$. Weil $y \cdot x = a^2$, so ist $y = \frac{a^2}{x}$.

Z. B. Es sey $a = 4$, $b = 10$; so ist $z = \frac{2 \cdot 4^2}{10} = \frac{32}{10} = 3{,}2$; $v = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10^2}{4} - 3{,}2^2\right)} = 5 - \sqrt{(25 - 10{,}24)} = 5 - \sqrt{(14{,}76)} = 5 - 3{,}84 = 1{,}16 = v$.

§. 511. Wenn in einem rechtwinklichten △ ABC Fig. 172. die eine Seite $AC = b$, und der Unterschied der beiden andern $= d$ bekannt ist, die Cathete $BC = x$ und die Hypotenuse zu finden.

Aufl. Mit BC beschreibe aus B den Bogen CD, so ist $BD = BC = x$, und $AB = x + d$.

Nun

Nun ist nach dem pythagorischen Lehrsatz:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

d. i. $= b^2 + x^2 = (x + d)^2$

$$b^2 + x^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

$$b^2 = d^2 + 2dx$$

$$b^2 - d^2 = 2dx$$

$$\frac{b^2 - d^2}{2d} = x = BC$$

und $d + \frac{b^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 + b^2}{2d} = AB.$

Es sey $b = 9$; $d = 4$; so ist $\frac{9^2 - 4^2}{8} = 8{,}125 = x$

$+ 4 \quad = d$

$12{,}125 = AB.$

§. 512. Aus der Hypotenuse im △ ABC Fig. 173. und dem Unterschiede der beiden Catheten $AC - BC = d$, die Seite $AC = x$ und $BC = y$ zu finden.

Aufl. Nenne die Hypotenuse $AB = c$, und mache $CD = CB$, so ist $d = x - y$. Nun ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d. i. $c^2 = x^2 + y^2$, und $x^2 = c^2 - y^2$. Aber $d = x - y$, also $x = d + y$

und $x^2 = d^2 + 2dy + y^2$

diese beiden Werthe von x^2 geben eine neue Gleichung:

$$c^2 - y^2 = d^2 + 2dy + y^2$$

$$c^2 = d^2 + 2dy + 2y^2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} = dy + y^2 \quad (:2$$

$$\frac{c^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{4}} = \frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4} = y^2 + dy + \frac{d^2}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{2} - \frac{d^2}{4}\right)} - \frac{d}{2} = y = BC.$$

Z. B. Es sey $c = 36$; $d = 10$, so ist BC

$= \sqrt{\left(\frac{36^2}{2} - \frac{10^2}{4}\right)} - \frac{10}{2} = \sqrt{(648 - 25)} - 5$

$= 25 - 5 = 20 = y$, und $AC = d + y = 30$.

§. 513. Aus der Hypotenuse $AB = d$ Fig. 174., und der senkrechten $CD = p$, die auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke x und y, so wie beide Catheten zu finden.

Aufl. Weil sich durch die 3 Puncte ACB ein Kreis ziehen läßt, worin $AB = d$ = Diameter, so ist $DB = d - x$, und

$x : p = p : y$ od. $d - x$; und $p^2 = dx - x^2$

$x^2 - dx = -p^2$

das Quadrat ergänzt $x^2 - dx + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} - p^2$

$x - \frac{d}{2} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$

$AD = x = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} - p^2\right)}$.

Es sey $AB = d = 36$

$CD = p = 16{,}8$; so ist $\frac{36}{2} - \sqrt{\left(\frac{36^2}{4} - 16{,}8^2\right)}$

$= 18 - \sqrt{(324 - 282)} = 18 - \sqrt{42}$

$= 18 - 6{,}5 = 11{,}5 = x = AD$

und $18 + 6{,}5 = 24{,}5 = y = DB$.

Die Catheten ergeben sich leicht, denn die durch das Perpendikel entstandenen 3 Triangel sind einander ähnlich; und

$d : AC = AC : x$, folglich ist $AC = \sqrt{dx}$;

und $d : CB = CB : y$, daher ist $CB = \sqrt{dy}$.

Man wird nach vorigen Werthen die $AC = 20{,}3$

und die $CB = 29{,}7$ finden.

§. 514. Wenn außer der Hypotenuse AB $= c$ Fig. 175. das Verhältniß der beiden Catheten $AC : CB = m : n$ gegeben ist, die beiden Catheten zu finden.

Aufl.

Aufl. Nenne die gesuchten Catheten x und y, und suche auch hier aus den Umständen 2 Gleichungen zu bekommen, woraus sich dann jede unbekannte Größe wird absondern lassen.

Nach der Bedingung ist $x^2 = c^2 - y^2$, weil $\triangle$ ABC rechtwinklicht; und

$x : y = m : n$

$xn = yn$

$x^2n^2 = y^2m^2$ die Gleichung in's Quadrat erhoben.

$x^2 = \frac{y^2m^2}{n^2}$; nun die Werthe für x^2 in die Gleichung gebracht.

$c^2 - y^2 = \frac{y^2m^2}{n^2}$

$c^2n^2 - y^2n^2 = y^2m^2$; $c^2n^2 = y^2m^2 + y^2n^2$

$c^2n^2 = (m^2+n^2)\,y^2$

$\frac{c^2n^2}{m^2+n^2} = y^2$

die Cathete $BC = \sqrt{\frac{c^2n^2}{m^2+n^2}} = y = \frac{cn}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

Sondert man aus den beiden Hauptgleichungen für y^2 die Werthe ab und setzt sie gleich, so findet sich

$x = \frac{cm}{\sqrt{(m^2+n^2)}} = AC$.

Es sey $c = 36$; $m = 3$; $n = 2$; so ist

$\frac{36 \cdot 2}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{72}{3{,}6} = 20 = BC$

und $\frac{36 \cdot 3}{\sqrt{(3^2+2^2)}} = \frac{108}{3{,}6} = 30 = AC$.

§. 515. Die Hypotenuse $AB = c$ Fig. 175. und die Summe der Catheten sind gegeben; man will die Catheten x und z selbst finden.

Aufl.

Aufl. Im rechtwinklichten △ ABC ist $c^2 = y^2 + z^2$;
also $c^2 - z^2 = x^2$.
und nach der Bedingung $x + z = a$ (Summe);
also $a - z = x$
und $(a - z)^2 = x^2$,

woraus die Gleichung entsteht:

$$c^2 - z^2 = a^2 - 2az + z^2$$
$$c^2 = a^2 - 2az + 2z^2$$
$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = z^2 - az \quad (:2$$

$\frac{1}{4}a^2$ addirt. $\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4}a^2$

$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = z^2 - az + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = z - \tfrac{1}{2}a.$$
$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = z = BC$$
und $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = x = AC.$

Nimmt man $a = 50$; $c = 36$, so erhält man $z = 20{,}2$, und $x = 29{,}8$.

§. 516. Aus dem gegebenen Flächeninhalt $= a$ eines rechtwinklichten Dreiecks Fig. 176., und der Summe seiner Seiten, oder dem Perimeter $= p$, seine Seiten zu finden.

Aufl. Inh. des Dreiecks $= 2a = xz$, und $4a = 2xz$
und weil das Dreieck rechtwinklicht, so ist $y^2 = x^2 + z^2$
beide Gleichungen addirt $4a + y^2 = x^2 + 2xz + z^2$
Nach der Aufgabe ist $x + y + z = p$
$$x + z = p - y$$
in's Quadrat erhoben $x^2 + 2xz + z^2 = p^2 - 2py + y^2$.

Da in zwei Gleichungen zwei Seiten einander gleich sind, so müssen es die andern auch seyn; daher

$$4a + y^2 = p^2 - 2py + y^2$$
$$4a = p^2 - 2py$$
$$4a - p^2 = -y\,2p$$
$$y\,2p = p^2 - 4a$$
$$y = \frac{p^2 - 4a}{2p} = AC.$$

Um

Um die Catheten zu finden, nenne $p - y = m$, so ist

$m = x + z$, und die $x \cdot z = 2a$, also $x = \frac{2a}{z}$

$m = \frac{2a}{z} + z$ (z

$mz = 2a + z^2$

$-2a = z^2 - mz$

$\frac{1}{4}m^2 - 2a = z^2 - mz + \frac{1}{4}m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2a)} = z - \frac{1}{2}m$

$\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2a)} = z = BC$, wenn das Minuszeichen,

und $= x = AB$, wenn das Pluszeichen gilt.

Z. B. Wenn die Fläche $a = 6$; die Summe aller Seiten $p = 12$; so findet man $y = 5$; also $p - y = m = 7$; $x = 4$; $z = 3$.

§. 517. In dem Catheten BA des rechtwinklichten Dreiecks CAB Fig. 177 soll der Punct D gefunden werden, auf welchem die senkrechte DE die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken $BD = x$ und DA ist.

Gegeben sind beide Catheten $BA = a$ und $AC = b$.

Es soll sich verhalten $x : DE = DE : a - x$

also ist $DE^2 = ax - x^2$

und in den ähnlichen Dreiecken gilt $x : DE = a : b$

also $DE = \frac{bx}{a}$

und $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$

Diese beiden Werthe für DE^2 geben die Gleichung:

$$ax - x^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$a^3x - a^2x^2 = b^2x^2$$

$$a^3 - a^2x = b^2x \quad (:x$$

$$a^3 = b^2x + a^2x = (b^2 + a^2)x$$

$$\frac{a^3}{b^2 + a^2} = x = BD.$$

§. 518. Der Flächeninhalt eines schiefwinklichten △ ABC Fig. 178, die senkrechte Höhe CD = h, und das Stück BD = d ist gegeben; man sucht die Seiten.

Aufl. Weil die Auflösung nur leicht, so setzen wir nur die Resultate her. Der Flächeninhalt = a genommen.

$$BC = \sqrt{(d^2 + h^2)}$$

$$AB = \frac{2a}{h}; \text{ und } x = AB - d$$

$$AC = \sqrt{(x^2 + h^2)}.$$

§. 519. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel den Flächenraum zu finden. Fig. 180.

Aufl. Gegeben ist AB = a; AC = b; < BAC = m.

Sin. tot. : a = Sin. m : BD; und $BD = \frac{a \cdot \text{Sin. } m}{\text{Sin. tot.}}$

Der Flächenraum = $\frac{AC \cdot BD}{2}$ oder $\frac{a \cdot b \cdot \text{Sin. } m}{2}$.

Wenn nun in einem andern Dreiecke die nämlichen Stücke A, B, M heißen, so ist auch seine Fläche = $\frac{A \cdot B \cdot \text{Sin. } M}{2}$ und $\triangle : \triangle' = \frac{a \cdot b \cdot \text{Sin. } m}{2} : \frac{A \cdot B \cdot \text{Sin. } M}{2}$,

und wenn m = M, so ist $\triangle : \triangle' = a \cdot b : A \cdot B$,

d. h.

d. h. die Inhalte zweier Dreiecke oder Parallelogramme, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

§. 520. Das Dreieck ABC. Fig. 181 soll aus dem Puncte D durch die Linie DE so getheilt werden, daß sich das ganze Dreieck zum abgeschnittenen Theil, wie m : n verhalte.

Aufl. Da die △ ABC, und DBE einen gleichen Winkel B haben, so gilt nach vorigem §.

$$m : n = AB \cdot BC : DB \cdot BE$$
$$= a \cdot d : d \cdot x$$

und $\frac{a \cdot b \cdot n}{d \cdot m} = x = BE.$

Wenn BE größer würde, als BC, so fiele DE auf AC.

Z. B. nach DF. Dann nenne man $AF = z$; $AC = c$; $AB = a$; $DB = d$, und $z = AF = \frac{(m-n) \cdot a \cdot c}{m \cdot (a-d)}$.

§. 521. Das Dreieck ABC Fig. 182. nach einem gegebenen Verhältniß m:n so zu theilen, daß die Theilungslinie de mit einer Seite parallel bleibt.

Aufl. Weil hier immer ähnliche △ bleiben, so kommt es nur darauf an, die Bd zu finden.

$$\triangle ABC : \triangle dBe = AB^2 : Bd^2$$
d. i. $m : n = AB^2 : Bd^2$; und $Bd = \sqrt{\frac{n \cdot AB^2}{m}} = AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$.

Soll das Dreieck in mehrere Theile getheilt werden, so wird nur n sich ändern, und für jedes n ein anderer Abstand Bd gefunden.

Z. B. Ein Ackerstück, welches die Form eines Dreiecks hat, solle durch Paralleln in 5 gleich große Theile

Theile getheilt werden. Der Flächenraum betrage 120 Quadratruthen, folglich $\frac{1}{5} = 24$ □ Ruthen; die Seite AB = 12 Ruthen.

Wendet man nun das Formular $AB \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$ an, so ist bei der ersten Parallele de die n = 24; m immer = 120, also $12 \cdot \sqrt{\frac{24}{120}} = 12\sqrt{\frac{1}{5}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$,

$= \frac{12}{\sqrt{5}} = 5{,}36 = Bd$,

und $12\sqrt{\frac{48}{120}} = 7{,}6.. Bf$, wobei n = 48,

und $12\sqrt{\frac{72}{120}} = 9{,}3.. Bh$, wobei n = 72,

und $12 \cdot \sqrt{\frac{96}{120}} = 10.7.. Bk$, wobei n = 96.

Oder durch die Proportionen:

$5 : 1 = 12^2 (= 144) : Bd^2$, und $Bd = \sqrt{\frac{144}{5}}$,

$5 : 2 = 144 : Bf^2$, und $Bf = \sqrt{\frac{2 \cdot 144}{5}}$,

u. s. w. $Bh = \sqrt{\frac{3 \cdot 144}{5}}$,

$Bk = \sqrt{\frac{4 \cdot 144}{5}}$.

§. 522. Von einem Trapezium ABEF Fig. 183. mit zwei parallelen Seiten ein Stück FECD von gegebenem Inhalt = m abzuschneiden.

Nenne AB = a; EF = b; DC = y; die senkrechte Höhe FG = h. Es kommt darauf an, die FJ = x, oder den Punct J zu finden, durch welche die Parallele gelegt werden muß. Daher ziehe man nach FH parallel mit AB; und dann gilt in ähnlichen △

AH : DK = FH : FK, oder wie FG : FJ

d. i. $a-b : y-b = h : x$.

$$\frac{(y-b) \cdot h}{a-b} = x.$$

Nun ist die Fläche DFEC bekanntlich $= \frac{b+y}{2} \cdot x = m$

und $x = \frac{2m}{b+y}$,

Diese Werthe von x geben eine neue Gleichung, woraus $y = \sqrt{\left(\frac{(2m\,(a-b)}{h} + b^2\right)}$; und $x = \frac{2m}{y+b}$

gefunden wird.

Es sey $h = 93$, $a = 162$, $b = 86$, $m = 3844$ } dann kommt für $y = DC = 117$ und für $x = FJ = 37{,}87$.

§. 523. Vom Trapezium ABCD Fig. 184., worin 2 parallele Seiten, soll aus dem Puncte T durch die Linie TE ein Stück von gegebenem Inhalt = n abgeschnitten (also der Punct E oder die BE = x) gefunden werden.

Nenne $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$, $BE = x$, Höhe $= H$ } Inhalt des Trapeziums ABCD $= \frac{(a+b)}{2} \cdot H = m$,

Inhalt des Trapeziums ABET $= \frac{f+x}{2} \cdot H$,

und nach der Bedingung ist

$$\frac{a+b}{2} \cdot H : \frac{f+x}{2} \cdot H = m : n$$

$$a+b : f+x = m : n$$

$$\frac{(a+b) \cdot n}{m} = f+x; \text{ und } \frac{(a+b) \cdot n}{m} - f = x,$$

Wenn

Wenn $x = o$ oder $= b$ wird, so fällt E in B oder in C; wird x negativ, oder größer als b gefunden, so fällt die Theilungslinie auf BA oder CD, und das abzuschneidende Stück ist ein Dreieck, entweder AFT, oder TDG; wobei AF oder DG zu suchen ist. Man wird für

$$AF = \frac{(a+b)\,nc}{fm}; \text{ und } DG = (m-n)\,\frac{(a+b)\,d}{(a-f)\,m} \text{ finden.}$$

Z. B. Wenn $a = 162$, $b = 86$, $c = 98$, $f = 29$, $h = 93$, $m = 3$, $n = 1$, so ist $x = \frac{(162+86)\cdot 1}{3} - 29 = 53{,}6 = BE$.

Nimmt man $m = 20$, und $n = 1$, so findet man die $AF = 41{,}9$.

Wenn $n = 15$ genommen wird, und $m = 20$ bleibt, so ist $DG = 45{,}7$.

§. 524. Jedes Trapezium (Fig. 185.) durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Puncte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ zu theilen.

Im Trapezium ABCD sey E der Theilungspunct, durch den die Linie EF so gelegt werden soll, daß

$$ABCD : CDEF = m : n.$$

Man bestimme auf irgend eine Weise die $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$, $CG = d$, und nenne $EG = f$; der Punct F wird gesucht, oder sein Abstand $GF = x$.

Nach §. 519. gilt:

$$\triangle ABG : \triangle CDG = AG \cdot BG : DG \cdot CG = a \cdot b : c \cdot d$$

daher $\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

d. i. $ABCD : \triangle CDG = a.b - c.d : c.d$

Und $\triangle EFG : \triangle CDG = f.x : c.d$

$\triangle EFG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$

$= CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd$

Also $ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$

$= m : n$

Folglich $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus x zu finden.

$$(ab - cd)\,n = (fx - cd)\,m$$

$$\frac{(ab - cd)\,n}{m} + cd = fx$$

$$\frac{(ab - cd)\,n}{fm} + \frac{cd}{f} = x = GF.$$

§. 525. Eine gerade Linie $AB = a$, in G so zu theilen, daß das Rechteck aus den Stücken AG und GB einem gegebenen Quadrat gleich sey. Fig. 186.

$AB = a$

$AG = x$

$BG = a - x$

Seite des Quadrats $= b$.

Nach der Bedingung soll $(a-x) \cdot x = b^2$

$$x^2 - ax = b^2$$

$$a^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \qquad x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

§. 526. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist gegeben $= a$; man sucht eine Seite $= x$, das Perpendikel $= p$. Fig. 187.

Aufl. Im gleichseitigen Dreieck (nach §. 495.) verhält sich eine Seite zum Perpendikel, wie

$$1 : 0{,}866 = x : p$$

Also ist $x = \dfrac{p}{0{,}866}$

und $p = x \cdot 0{,}866$.

Der

Der Inhalt des Dreiecks $= \frac{x \cdot p}{2} = a$; und $x = \frac{2a}{p}$

und $p = \frac{2a}{x}$.

Nimmt man nun die Werthe für $x = \frac{p}{0{,}866} = \frac{2a}{p}$

so findet man das Perpend. $= p$. $\left\{ \begin{array}{l} p^2 = 2 \cdot a \cdot 0{,}866 \\ p = \sqrt{(2a \cdot 0{,}866)}. \end{array} \right.$

Auf gleiche Weise ergiebt sich x, wenn man die Werthe für p in eine Gleichung setzt. Nämlich:

$$x \cdot 0{,}866 = \frac{2a}{x}$$

$$x^2 = \frac{2a}{0{,}866}.$$

Z. B. Es sey der Inhalt $a = 32$ □ Fuß gegeben, so muß jede Seite

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{0{,}866}} = \sqrt{73{,}9} = 8{,}6$$

$$p = \sqrt{(2 \cdot 32 \cdot 0{,}866)} = \sqrt{55{,}424} = 7{,}447$$

= dem Perpendikel.

§. 527. Zwei Linien (x und y) zu finden, deren Quadrate zusammen genommen einem gegebenen Quadrate $= a^2$, und deren Rechteck einem gegebenen Rechteck $= b \cdot c$ gleich sind.

Aufl. $\frac{y^2 + x^2 = a^2}{x^2 = a^2 - y^2}$; und $\frac{x \cdot y = bc}{x = \frac{bc}{y}}$, u. $x^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}$

$$\frac{a^2 - y^2 = \frac{b^2c^2}{y^2}}{a^2y^2 - y^4 = b^2c^2 = y^4 - a^2y^2 = -b^2c^2}$$

$$y^4 - a^2y^2 + \tfrac{1}{4}a^4 = \tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2$$

$$\sqrt{y^2 - \tfrac{1}{2}a^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)})}$$

Die x hat das — Zeichen vor $\sqrt{}$, und gleiches Formular.

§. 528. Diese Beispiele mögen hinreichend seyn, zu zeigen, wie man bei ähnlichen Aufgaben zu verfahren habe. Es kommt hier, wie bei jeder algebraischen Aufgabe, hauptsächlich darauf an, daß man das Gegebene und Gesuchte gehörig unterscheide, aus den Umständen so viel Gleichungen herleite, als unbekannte Größen darin vorkommen, und einige Gewandheit in Auflösung der Gleichungen besitze. Wer sich aber in der Entwickelung solcher Aufgaben, in welchen die Algebra auf die Geometrie zweckmäßig angewandt ist, gefällt, dem ist zu empfehlen:

Thomas Bugge Anleitung zur mathematischen Geometrie, Trigonometrie und höheren Geometrie; übersetzt von Tobiesen. 436 Seiten, 4 Kupfertafeln. Preis 1 Rthlr. 16 Gr.

aus welchem trefflichen Werke die vorstehenden Aufgaben genommen sind.

Weil es im gemeinen Leben oft vorkommt, Flächen von bekannter Größe in andere geometrische Figuren zu verwandeln, so wollen wir darüber in dem folgenden Abschnitte noch die nothwendigsten Formeln mittheilen, mittelst deren jede dahin gehörige Aufgabe leicht zu lösen ist.

V. Verwandlung der Figuren.

§. 529. Unter Verwandlung einer Figur verstehen wir die Veränderung, die sich mit der Form oder Umfassung einer Fläche machen läßt, ohne ihren Quadratinhalt zu vermehren oder zu vermindern. Die zu verändernde Fläche ist allemal bekannt; und von derjenigen, in welche sie verwandelt werden soll, ist die eine Bedingung, oder eine Größe gegeben, und die andere durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Das Aufsuchen der unbekannten Größe durch Zeichnung ist oft sehr weitläuftig und nicht einmal bei allen Figuren möglich; mittelst der Rechnung aber findet man sie nicht nur sehr bald, sondern

dern auch viel genauer. — Bei dieser Verwandlung beobachte man folgende Regel: Auf die eine Seite einer Gleichung schreibe man den gegebenen Flächeninhalt = F, oder die Größen, woraus er besteht; auf die andere Seite schreibe man die Formel für den Flächenraum derjenigen Figur, in welche die Verwandlung geschehen soll; lege dann den bekannten Größen ihre Werthe unter, und sondere die unbekannten gehörig ab. Z. B.

Ein Garten von 120 □ Ruthen, der sehr winklicht ist, und daher viel Umzäunung braucht, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite 10 Ruthen ist; so ist

Gegebener Inhalt 120 = Formel für das Rechteck (s. §. 488.) l . b

Man fragt, wie lang muß der Garten werden, wenn er 10 Ruthen breit ist? und sucht also l, oder die Länge.

Jetzt ist $120 = l \cdot 10$ und l abgesondert

$$\frac{120}{10} = 12 = l$$

d. h. der Garten muß bei einer Breite von 10 Ruthen 12 Ruthen lang werden.

Die folgenden Formulare sind auf diese Weise gefunden, und für diejenigen, die nicht selbst die Gleichung lösen können oder wollen, als eine Hülfstafel anzusehen.

§. 530. Den Flächenraum F zu verwandeln

in ein Quadrat. Formel $\sqrt{F} = a$.

Die Quadratwurzel aus dem gegebenen Flächenraum ist die Größe einer Seite des Quadrats.

§. 531. in ein Rechteck. Formel. $\frac{F}{a} = b$.

Mit der gegebenen oder gewählten Seite a des Rechtecks dividire den gegebenen Flächenraum, so ist der Quotient die andere gesuchte Seite b.

§. 532.

§. 532. in einen Rhombus oder Rhomboides. Formel $\frac{F}{g} = h$; $\frac{F}{h} = g$.

Mit der gegebenen Seite g dividire in den Flächenraum, so erhält man die senkrechte Höhe h; dividirt man mit der Höhe, so kommt die Grundlinie g.

§. 533. in ein rechtwinklichtes Dreieck. Formel: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Dividire die doppelt genommene Fläche mit der Grundlinie g, so giebt der Quotient die Höhe h, oder die andere Cathete; dividirt man aber mit der Höhe, so ist der Quotient = g = der Grundlinie.

§. 534. in ein schiefwinklichtes Dreieck. Form: $\frac{2F}{g} = h$; und $\frac{2F}{h} = g$.

Verfahre, wie vorher §. 533., und bemerke, daß h immer die Größe des aus der gegenüberstehenden Winkelspitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikels bedeutet.

§. 535. in ein Trapez, mit 2 Parallelen G und g. Form: $G + g = \frac{2F}{h}$ und $h = \frac{2F}{G+g}$; ferner $G = \frac{2F}{h} - g$; und $g = \frac{2F}{h} - G$.

Dividire die doppelte Fläche durch die Höhe, so ist der Quotient = der Summe der beiden Grundlinien; dividirt man mit dieser Summe G + g die doppelte Fläche, so erscheint die Höhe h.

Wenn eine der Grundlinien unbekannt ist, so wird sie gefunden, indem man die doppelte Fläche durch die Höhe dividirt, und vom Quotienten die gegebene Grundlinie abzieht.

§. 536. in ein jedes Vieleck von n Seiten.

Formeln. Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)}$,

das Perpendikel $p = \sqrt{\left(\frac{2F \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{n \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}\right)}$,

der Halbmesser $r = \sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 + p^2\right)}$.

Multiplicire den doppelten Flächenraum mit dem doppelten Sinus des halben Centriwinkels c; dividire dies Product durch die Anzahl der Seiten, die mit dem Cosinus des halben Centriwinkels multiplicirt sind; ziehe nun aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man die Seite m des Vielecks.

Der Centriwinkel wird gefunden, wenn man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt; oder

$c = \frac{360}{n}$.

Die Seite eines Vielecks = dem doppelten Sin. des halben Centriwinkels; der Cosinus desselben Winkels = dem Perpendikel p. Und die Fläche eines Vielecks $= \frac{m \cdot p \cdot n}{2} = F$; also ist $\frac{2F}{n} = mp$;

und $\frac{2F}{m,n} = p$. Ferner $p : \frac{1}{2} m = \text{Cos.} \frac{1}{2} c : \text{Sin.} \frac{1}{2} c$;

d. i. $p : m = \text{Cos.} \frac{1}{2} c : 2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} c$, folglich ist

$p = \frac{m \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}$. Setzt man diese Werthe von p in eine Gleichung, so hat man

$$\frac{2F}{m,n} = \frac{m \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}{2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c},$$

$$2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \tfrac{1}{2} c = m^2 \cdot n \cdot \text{Cos.} \tfrac{1}{2} c$$

$$\sqrt{\left(\frac{2F \cdot 2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} c}{n \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2} c}\right)} = m.$$

Auf gleiche Weise sind die andern beiden Formulare für p und r gefunden.

In einem bestimmten Vielecke sind Sin. $\frac{1}{2}$ c und Cos. $\frac{1}{2}$ c beständige Größen. Z. B. in allen Zwölfecken

ecken ist der doppelte Sin. $\frac{1}{2}$ c = 0,5176; und Cos. $\frac{1}{2}$ c = 0,9659. Daher läßt sich eine Tafel geben, in welcher man diese Größen findet, und die bei solchen Verwandlungen besonders bequem ist, wenn man keine logarithmische Tafeln hat.

Im Dreieck ist	n = 3;	2. Sin. $\frac{1}{2}$ c =	1,732;	Cos. $\frac{1}{2}$ c =	0,5
Viereck	— 4;	— —	1,4142	— —	0,7071
Fünfeck	— 5;	— —	1,1755	— —	0,809
Sechseck	— 6;	— —	1,	— —	0,866
Siebeneck	— 7;	— —	0,8678	— —	0,901
Achteck	— 8;	— —	0,7653	— —	0,9239
Neuneck	— 9;	— —	0,684	— —	0,9397
Zehneck	— 10;	— —	0,618	— —	0,951
Eilfeck	— 11;	— —	0,5635	— —	0,9595
Zwölfeck	— 12;	— —	0,5176	— —	0,9659
Sechzehneck	— 16;	— —	0,3901	— —	0,9808
Zwanzigeck	— 20;	— —	0,3128	— —	0,9876
24eck	— 24;	— —	0,261	— —	0,9914

(Das Drei- und Viereck sind deshalb hier mit aufgenommen worden, weil sie wie Vielecke im Kreise beschrieben werden können.)

Der Gebrauch dieser Tafel ist leicht zu fassen. In das allgemeine Formular trägt man die in der Tafel befindlichen Werthe, und rechnet damit, wie es die Vorschrift fordert. Z. B. Es sey der Flächenraum 32 □ Fuß in ein reguläres Fünfeck zu verwandeln; man fragt: wie groß ist eine Seite, das Perpendikel aus dem Centro auf die Seite, und der Radius des Kreises, worin es beschrieben werden kann?

Allgemeines Formular.

$$m = \sqrt{\left(\frac{2F \,.\, 2 \,.\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\, c}{n \,.\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\, c}\right)},$$

Besonderes Formular.

mit besondern Werthen = $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 32 \cdot 1{,}1755}{5 \,.\, 0{,}809}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{75{,}232}{4{,}045}} = 4{,}3128 = \text{einer Seite des Fünfecks.}$$

$p = \sqrt{\left(\frac{2 . F \text{ Cos. } \frac{1}{2} c}{n . 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} c}\right)}$, d. i., nachdem die besond. Werthe untergelegt, $= \sqrt{\left(\frac{2 . 32 . 0{,}809}{5 . 1{,}1756}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{51{,}776}{5{,}878}\right)} = 2{,}9682 = p.$

$r = \sqrt{(\frac{1}{4} m^2 + p^2)}$, oder durch die Proportion

Cos. $\frac{1}{2} c : 1 = p : r = 0{,}809 : = 2{,}9682 : r;$

$= \frac{2{,}9682}{0{,}809} = 3{,}6687.$

Der Radius, worin das Fünfeck gezeichnet werden muß, ist also = 3 Fuß, 6 Zoll, 6 Linien, $8\frac{7}{10}$ Scrupel.

Wollte man nun den Flächenraum 32 □ Fuß in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln, so wäre das Formular

für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 . 32 . 1{,}732}{3 . 0{,}5}\right)}$

$= \sqrt{\frac{4}{3} . 32 . 1{,}732}$ u. s. w.

Anmerk. Im gleichseitigen Dreieck fällt das Perpendikel p auf die Mitte von m, folglich ist

erstlich $\frac{p \cdot m}{2} = F$, und $p = \frac{2F}{m}$,

zweitens $p^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$ nach dem pythag. Lehrsatz

$= p^2 = \frac{3m^2}{4} = \frac{m^2}{4} . 3$

$p = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$

Nun war p auch gleich $\frac{2F}{m} = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{3}$

$2F = \frac{m^2}{2} \sqrt{3}$ (. m

$4F = m^2 . \sqrt{3}$ (. 2

$\frac{4F}{\sqrt{3}} = m^2$

$\sqrt{\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)} = m =$ der Seite des gleichseitigen Dreiecks

§. 537. in ein Rechteck, in welchem sich die Grundlinie zur Höhe verhält, wie m : n z. B. wie 5 : 3. Formulare: $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$; $h = \sqrt{\frac{nF}{m}}$.

Nach der Bedingung $\frac{g : h = m : n}{g = \frac{hm}{n}}$; und $h = \frac{gn}{m}$

Fläche $= \frac{g \cdot h = F}{g = \frac{F}{h}}$ und $h = \frac{F}{g}$. Setzt man nun die gleichen Werthe für g oder h in eine Gleichung, so bekommt man die gegebenen Formeln. Z. B. für $h = \frac{gn}{m} = \frac{F}{g}$, $g^2 n = mF$, $g^2 = \frac{mF}{n}$, $g = \sqrt{\frac{mF}{n}}$.

Wenn $F = 60$ □Fuß; $m = 5$; $n = 3$, so findet man für g den Werth $= \sqrt{\frac{5 \cdot 60}{3}} = \sqrt{100} = 10$ Fuß = Grundlinie; und für $h = \sqrt{\frac{3 \cdot 60}{5}} = \sqrt{36}$ = 6 Fuß Höhe.

§. 538. in ein Dreieck, dessen Grundlinie sich zur Höhe verhält, wie m : n.

Formulare: $g = \sqrt{\left(\frac{m \cdot 2F}{n}\right)}$; in Zahlen, wie vorher,

$$\sqrt{\left(\frac{5 \cdot 2 \cdot 60}{3}\right)} = \sqrt{200} = 14{,}142,$$

und $h = \sqrt{\left(\frac{n \cdot 2F}{m}\right)}$ in Zahlen, $= \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{5}\right)}$ $= \sqrt{72} = 8{,}485$.

§. 539. in ein Dreieck, dessen 3 Seiten sich wie m : n : p verhalten.

Man berechne den Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten m, n, p sind, und nenne ihn = f.

Weil sich nun die Flächen ähnlicher Figuren zu einander verhalten, wie die Quadrate der ähnlichen Sei-

Seiten, so findet man die Seiten x, y, z des gesuch-
Dreiecks durch die Proportionen

$f : F = m^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{m^2 . F}{f}}$, wobei F = des gegebenen Fläche

$f : F = n^2 y^2$, und $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$

$f : F = p^2 : z^2$, und $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$.

z. B. Es sey der Flächenraum $50 = F$ in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Seiten sich wie 6, 7 und 10 verhalten. Der Inhalt des $\triangle = f$ ist

$$\frac{\sqrt{(6+7+10).(6+10-7).(6+7-10).(7+10-6)}}{4}$$

$6 \quad 6 \quad 6 \quad 7$
$7 \quad 10 \quad 7 \quad 10$
$10 - 7 - 10 - 6$ und $23 . 9 . 3 . 11 = 6831$, und
$23 \quad 9 \quad 3 \quad 11$

$$\frac{\sqrt{6831}}{4} = \frac{82,649}{4} = 20,662 = \text{Fläche} = f.$$

Nun ist $x = \sqrt{\frac{F . 6^2}{f}} = \frac{50 . 36}{20,662} = \sqrt{87,164}$
$= 9,333$ ersten Seite; die zweite Seite y findet man entweder nach dem Formular $y = \sqrt{\frac{n^2 . F}{f}}$ oder auch durch $m : n = x : y$, $y = \frac{nx}{m}$ d. i. $\frac{7 . 9,333}{6}$
$= \frac{65,331}{6} = 10,888 = y =$ der zweiten Seite; die dritte Seite $z = \sqrt{\frac{p^2 . F}{f}}$, oder $m : p = x : z$, und $z = \frac{p . x}{m}$ d. i. $= \frac{10 . 9,333}{6} = \frac{93,33}{6} = 15,555$
$= z =$ der dritten Seite.

Die

Die gefundenen Seiten $x = 9{,}333$ $y = 10{,}888$ $z = 15{,}555$ haben das gefundene Verhältniß 6, 7, 10.

§. 540. Ein Quadrat zu verdoppeln. Formel $\sqrt{2F} = a$.

Aus dem doppelten Flächenraum ziehe die Quadratwurzel, welche die Seite des doppelt so großen Quadrats ist.

Die Seite eines dreifachen $= \sqrt{3F} = a$

Die Seite eines halb so großen $= \sqrt{\frac{F}{2}} = a$

eines nfachen $= \sqrt{nF} = a$.

§. 541. Ein Rechteck zu verdoppeln, oder nmal zu vermehren, so daß sich die Seiten beider Rechtecke proportional bleiben.

Inhalt $= F$ des gegebenen Rechtecks; g und h seine Seiten.

und nF des gesuchten Rechtecks Inhalts; x und y seine Seiten.

Dann gilt $F : nF = g^2 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{nFg^2}{F}} = \sqrt{ng^2}$

und $F : nF = h^2 : y^2$, und $y = \sqrt{nh^2}$.

In Zahlen. Wenn $g = 8$ und $h = 4$, also $F = 32$, und $n = 3$, so ist $x = \sqrt{3 . 8^2} = \sqrt{192} = 13{,}8564$

$y = \sqrt{3 . 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}9282$.

Soll die Figur vermindert oder kleiner, als die gegebene, werden, so ist n ein ein Bruch. Wenn z. B. die Figur 3 mal kleiner seyn sollte, so wäre $n = \frac{1}{3}$, und $x = \sqrt{(\frac{1}{3} g^2)}$

Diese Formeln gelten bei jeder Vergrößerung oder Verkleinerung der Parallelogramme oder Triangel, die proportionale Seiten behalten sollen.

§. 542. Eine gegebene Fläche F in einen Kreis zu verwandeln.

Der Kreis ist bestimmt, wenn sein Radius $= r$ bekannt

kannt ist. Formel: $\sqrt{\frac{F}{p}} = r$, wobei $p = 3{,}1415\ldots$ bedeutet.

Z. B. eine Fläche von 28,2735 □ Zoll in einen Kreis zu bringen, wird $\sqrt{\frac{28{,}2735}{3{,}1415}} = \sqrt{9} = 3$ Zoll = Radius.

§. 543. Eine gegebene Fläche F in eine Ellipse zu verwandeln.

1. Wenn eine von beiden Axen gegeben ist.

Die große Axe $A = \frac{4F}{a \cdot p}$, wobei p die Zahl 3,14... bedeutet.

Die kleine Axe $a = \frac{4F}{A \cdot p}$.

2. Wenn keine von beiden Axen gegeben ist,

$$A \cdot a = \frac{4F}{p}.$$

Zerlegt man die Zahl, die $\frac{4F}{p}$ giebt, in zwei Factoren, so erhält man in denselben die beiden Axen.

3. Wenn das Verhältniß der Axen m : n gegeben ist;

die große Axe $A = \sqrt{\left(\frac{4mF}{n \cdot p}\right)}$,

die kleine Axe $a = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot n \cdot F}{m \cdot p}\right)}$.

§. 544. Eine gegebene Fläche in einen parabolischen Abschnitt zu verwandeln.

Fläche der Parabel $= \frac{4x \cdot y}{3}$, wobei $x =$ Abscisse, $y =$ Ordinate.

Formeln: $x = \frac{3F}{4y}$; und $y = \frac{3F}{4x}$.

Wenn

Wenn weder x noch y gegeben, so ist die Größe $\frac{3E}{4}$ in zwei beliebige Factoren, die x und y vorstellen, zu zerlegen.

Wenn das Verhältniß $x : y = m : n$ gegeben ist, so ist $x = \sqrt{\frac{3.m.F}{4n}}$; und $y = \sqrt{\frac{3.n.F}{4m}}$.

Der Parameter p, mit dem die Parabel gezeichnet werden kann $= \frac{y^2}{x}$.

VI. Ausmessung der Körper.

§. 545. Obgleich der regelmäßig gestalteten Körper nur wenige sind, so weiß sich der Geometer doch dadurch zu helfen, daß er die unregelmäßigen durch Ebenen in regelmäßige verwandelt, zerlegt und berechnet. Wie dies am besten geschehen könne, muß dem Scharfblick eines jeden überlassen bleiben, denn alle mögliche Fälle berühren zu wollen, ist bei der unendlichen Verschiedenheit der natürlichen und künstlichen Formen der Körper nicht thunlich. Wer die regelmäßig gestalteten Körper berechnen kann, wird beim Anblick eines Körpers bald einsehen, welche Theile desselben nach diesem oder jenem Formulare berechnet werden müssen.

Zur deutlichen Anschauung der geometrischen Körper gehört das Vorzeigen und Bilden derselben, wozu der Abschnitt I. §. 422. u. f. Anleitung gab.

§. 546. Der Raum, welchen ein Körper ausfüllt, heißt sein kubischer, oder körperlicher Inhalt, oft auch bloß Inhalt, welchen wir beständig mit J bezeichnen wollen. Er wird mit dem Würfel oder Kubus gemessen.

1 Kubikruthe = 1000 Kubikfuß; dieser = 1000 Kubikzoll; dieser = 1000 Kubiklinien, und diese = 1000 Kubikscrupel. Will man daher kleinere Theile, als z. B. Scrupel zu Linien ꝛc. machen, so schneidet man von der

Zahl derselben nur die 3 niedrigsten Stufen ab. So sind 1358906 Kubikscrupel = 1‴358‴‴906‴‴‴ d. i. 1 Kubikzoll, 358 Kubiklinien, 906 Kubikscrupel; und bei zwölftheiligem Maaße muß eine solche Division durch die Zahl 1728 geschehen, denn 1 Kubikruthe ist dann = 1728 Kubikfuß, zu 1728 Kubikzoll, zu 1728 Kubiklinien ꝛc.

§. 547. Bei Ausmessung der Gefäße bedient man sich im bürgerlichen Leben des zwölftheiligen Maaßstabes, und man thut wohl, wenn man die ganze Rechnung in Zollen und deren Decimaltheilen führt. Die durch die Rechnung erhaltenen Ganze sind alsdann Kubikzolle Duodecimalmaaß, und leicht in Scheffel, Metzen, Quart u. s. w. zu verwandeln, wenn man weiß, wie viel deren auf den Kubikinhalt dieser Gefäße gerechnet wird. In den Königl. Preuß. Ländern enthält 1 Scheffel 3072 Kubikzoll, eine Metze ($\frac{1}{16}$ Scheffel) 192 Kubikzoll oder 3 Quart, das Quart 64 Kubikzolle des zwölftheiligen Maaßes.

§. 548. Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden.

Aufl. Miß eine Seitenlinie und multiplicire sie 2 mal mit sich selbst, oder erhebe sie in die dritte Potenz.

Formel. $J = l^3$, wobei J = Inhalt, und l = Seitenlinie.

Z. B. Es sey eine Seitenlinie = 3′, so ist $J = 3 . 3 . 3 = 27$ Kubikfuß.

Die Oberfläche eines Würfels ist in 6 gleichen Quadraten enthalten.

Formel: $O = 6l^2$.

Wenn $l = 3'$, so ist $6l^2 = 6 . 3^2 = 6 . 9 = 54$ Quadratfuß = Oberfläche.

§. 549. Den Inhalt eines Parallelepipedon zu finden.

Aufl. Multiplicire Länge = l, Breite = b; und Höhe = h mit einander; oder auch die Grundfläche mit der Höhe.

Formel: $J = l . b . h$.

Die Oberfläche besteht nach Fig. 116. in 6 Parallelogrammen, wovon die beiden gegenüberstehenden einander gleich sind.

Formel. $O = 2.l.b + 2.l.h + 2.b.h.$

Z. B. Es sey eine kupferne Pfanne 6 Fuß lang, 4 Fuß breit, 3 Fuß hoch, so ist ihr Inhalt $= 6.4.3 = 72$ Kubikfuß, oder 72.1728 Kubikzoll $= 124416$ Kubikzoll; dividirt man diese Zahl durch 3072, so bekommt man $40\frac{1}{2}$ Scheffel; und dividirt man 124416 durch 64, so erhält man 1944 Quart, oder 19 Tonnen 44 Quart für den Inhalt.

§. 550. Den Inhalt eines prismatischen Körpers zu finden.

Formel. $J = g.h.$

Multiplicire seine Grundfläche mit der senkrechten Höhe, d. h. g. h.

(Im dreiseitigen Prisma ist die Grundfläche ein Dreieck, im Würfel und Parallelepipedum ein Viereck, in jedem Prisma, das mehr, als 4 Seiten hat, ein Vieleck. Gemeiniglich kann man nur die Seiten der Grundfläche messen, alsdann aber eine Zeichnung davon entwerfen, und den Flächenraum nach der in der Flächenmessung gegebenen Formel finden. Sind die Seitenlinien an der Grundfläche einander gleich, so ist die Rechnung bald gemacht; sind sie ungleich, so zerlege man die Grundfläche durch Diagonalen in Dreiecke.)

Es sey die Grundfläche ein gleichseitiges Sieneck, eine Seite 8″, die Höhe 24″, so ist

$$g = \frac{8^2.7.2{,}0763^*)}{4} = 232{,}545 = \text{Grundfläche}$$

mal $24 =$ Höhe

körperlicher Inhalt $= 5581{,}094$ Kubikzoll.

Das Netz des Prisma Fig. 118. besteht in so viel Rechtecken, als es Seiten hat, und zwei gleichen Grundflächen.

For

*) Die Zahl 2,0763 ist Tangente $\frac{1}{2}$ Polygonwinkel. S. §. 494

Formel. $O = l . h . n + 2g$.

Im vorigen Beispiel ist $l = 8''$, $h = 24''$; $n = 7$ = Anzahl der Seiten; und $g = 232{,}545$ □ Zoll; also

Oberfläche $= 8 . 24 . 7 + 465{,}09 = 1809{,}09$ Quadratzoll.

§. 551. Den Inhalt eines Cylinders zu finden. Fig. 124.

Formel. $J = r^2 p . h$, oder auch $g . h$, denn $r^2 p = g$.

Multiplicire das Quadrat des Halbmessers r^2 mit der Zahl $p = 3{,}14\ldots$ und mit der Höhe h.

Die krumme Oberfläche ist = dem Umfang mit der Höhe multiplicirt.

Formel. $O = D . p . h$; mit Boden und Decke $= D . p . h + 2r^2 p = (2r . h + 2r^2) p =$ Netz Fig. 125.

Z. B. Ein cylindrisches Gefäß habe 4 Zoll im Radius, 12 Zoll in der Höhe, so ist sein Inhalt $= 4^2 . 3{,}14 . 12 = 602{,}88$ oder 602 Kubikzoll, 880 Kubiklinien.

Das Netz $= (2 . 4 . 12 + 2 . 4^2) . 3{,}14 = 401{,}92$ oder 401 □ Zoll, 92 □ Linien.

§. 552. Den körperlichen Inhalt einer cylindrischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (R^2 - r^2) p . h$.

Von dem Quadrat des Radius (R^2) der ganzen Röhre ziehe das Quadrat des Radius (r^2) der Höhlung ab, multiplicire den Rest mit $3{,}14\ldots$ und mit der Höhe h.

§. 553. Den Inhalt einer prismatischen Röhre zu finden.

Formel. $J = (G - g) . h$.

Von der ganzen Grundfläche G ziehe die Grundfläche g der Höhlung ab, und multiplicire den Rest mit der Höhe h. Oder man berechne die Röhre als einen vollen Körper, und ziehe davon denjenigen ab,

der darin stecken könnte, so giebt der Rest den körperlichen Inhalt oder die Masse der Röhre.

§. 554. Den Inhalt einer Piramyde zu finden.

Formel: $J = \frac{g \cdot h}{3}$.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire dies Product durch 3.

Z. B. Es sey die Piramyde gleichseitig und sechseckig, jede Seite = 8 Fuß, ihre senkrechte Höhe = 50 Fuß, so ist nach §. 494. die Grundfläche $g = 166{,}27$ □ Fuß, und $\frac{g \cdot h}{3} = \frac{166{,}27 \cdot 50}{3}$ = 2771,17 d. i. 2771 Kubikfuß, 170 Kubikzoll.

Die Seitenflächen der Piramyde sind Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten der Grundfläche, und deren Höhe die schiefe äußere Höhe ist. Fällt man aus dem Centrum der Grundfläche ein Perpendikel auf eine Seite, so giebt dies den Abstand = a der Grundlinie vom Centrum an, und

$$a = \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Sin. } p}{\text{Sin. } c}, \text{ oder } \frac{\frac{1}{2} l \cdot \text{Cos. } c}{\text{Sin. } c},$$

wobei l = Seite,
p = halber Polygonwinkel,
c = halber Centrwinkel.

Nennt man die schiefe äußere Höhe = A, so ist $A = \sqrt{(a^2 + h^2)}$, wobei h die senkrechte Höhe bedeutet. Endlich giebt die Fläche eines Dreiecks an der Piramydenoberfläche die

Formel $F = \frac{A \cdot l}{2}$,

welche man mit der Anzahl der Seiten zu multipliciren hat.

Z. B.

Z. B. Es sey, wie oben
$l = 8$, Seiten $= 6$
$p = 60°$, $c = 30°$
$\frac{1}{2} l = 4$, $h = 24$

so ist log. $4 = 0{,}6020600$
log. Sin. $60° = 9{,}9375306$
$10{,}5395906$
log. Sin. $30° = 9{,}6989700$
log. $a = 0{,}8406206$ (. 2
und log. $a^2 = 1{,}6812412 - 48$.

Nun ist $a^2 = 48$
und $h^2 = 576$
und $\sqrt{624} = 24{,}98 = A$
$8 = l$
$199{,}84$
2) $99{,}92 =$ Fläche einer Seite.
$6 = u$
$599{,}52 =$ Fläche der 6 Seiten.
hiezu $166{,}27 =$ Grundfläche,
$765{,}79 =$ Netz der Piramyde.

Kann man die schiefe Höhe A messen, so ist die Rechnung viel leichter und ganz ohne Logarithmen zu führen. Auch durch eine Zeichnung läßt sich A finden.

§. 555. Den Inhalt einer abgekürzten Piramyde zu finden.

Formel: $\left(\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3}\right) \cdot h = J$.

Hiebei ist G = der Grundfläche; g = der entgegenstehenden Decke; h = senkrechten Höhe.

Z. B. Es sey $G = 16$; $g = 9$ □ Fuß; $h = 7$ Fuß; so ist

$$\frac{16 + 9 + \sqrt{(16 \cdot 9) \cdot 7}}{3} = \frac{25 + \sqrt{144}}{3} \cdot 7$$

$$= \frac{25 + 12}{3} \cdot 7 = \frac{37 \cdot 7}{3} = \frac{259}{3} = 86\tfrac{1}{3} \text{ Kubikfuß.}$$

Die Seitenflächen der abgekürzten Piramyde sind Trapezia, und der Abstand der beiden Parallelen ist

ist die schiefe Höhe = A, welche gemessen, oder aus dem Unterschied (= d) der beiden Abstände der Seitenlinien von der Axe, und der Höhe = h durch

$A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$ gefunden wird.

Wenn L und l Seiten an der Grund- und Durchschnittsfläche, und n die Anzahl derselben bedeuten, so giebt die Formel $\left(\frac{L+l}{2}\right) . A . n$ die Oberfläche der abgekürzten Piramyde; werden hiezu die beiden Grundflächen G + g addirt, so ist die Summe = dem Netz.

§. 556. Den Inhalt eines Tetraeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h}{3} = J.$

Multiplicire die Grundfläche, welche ein gleichseitiges Dreieck ist, mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

§. 557. Den Inhalt eines Octoeders zu finden.

Formel: $\frac{G . h 2}{3} = J.$

Multiplicire den Flächeninhalt des Quadrats Fig. 130. = G, als der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Piramyden, woraus das Octoeder besteht, mit $\frac{1}{3}$ der Höhe einer Piramyde, und nimm das Product doppelt.

§. 558. Den Inhalt eines Dodecaeders zu finden.

Formel. $G . h . 2 = J.$

Suche den Quadratinhalt eines Fünfecks, als einer Grundfläche = G, und multiplicire denselben mit $\frac{1}{3}$ der Höhe des halben Körpers. Das Product ist der Inhalt einer der 12 Piramyden, woraus er besteht, welches das Formular $\frac{G . h . 12}{6} = G . h . 2$ giebt,

wo-

wobei h die Höhe des ganzen Dodecaeders anzeigt.

§. 559. Den Inhalt eines Icosaeders zu finden.

Formel: $\frac{G \cdot h\,20}{6} = J.$

Multiplicire den Flächenraum einer Seite mit $\frac{1}{6}$ der Höhe des Körpers, und noch mit 20.

§. 560. Den Inhalt eines Kegels zu finden.

Formel: $\frac{r^2 \cdot p \cdot h}{3} = J$, oder $\frac{g \cdot h}{3}$, wobei

$p = 3{,}14\ldots$, $r =$ Radius.

Multiplicire die Grundfläche mit der senkrechten Höhe, und dividire das Product durch 3.

Es sey der Radius eines Kegels = 4 Zoll, die Höhe = 24 Zoll, so ist $\frac{4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 24}{3} = 401{,}94$ d. i. 401 Kubikzoll, 940 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des Kegels bildet einen Sector Fig. 122, an welchem das Bogenstück = der Peripherie der Grundfläche, und die geraden Linien von ihr zur Spitze = Radien sind. Eine solche Linie ist die schiefe Höhe = A, die sich messen, oder berechnen läßt, denn $A = \sqrt{(r^2 + h^2)}$; und die krumme Oberfläche giebt daher die

Formel: $O = \frac{D \cdot p \cdot A}{2}$, oder $\frac{D \cdot p \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)}}{2}$,

wobei D = Diameter der Grundfläche oder = $r\,p \cdot A$.

Es sey $r = 4$, $D = 8$, $h = 24$, so ist $O = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{(4^2 + 24^2)} = 12{,}56 \cdot 24{,}33 = 305{,}58$, d. i. 305 □ Zoll, 58 □ Linien.

§. 561. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot p \cdot h}{3} = J,$

wobei

wobei R = Radius der Grundfläche, r = Radius der Durchschnittsfläche ist.

Addire die Quadrate der Radien und ihr Product zusammen, multiplicire die Summe mit 3,14, und mit der senkrechten Höhe = h; dividire alles durch 3.

Z. B. Es sey R = 12″; r = 5″; h = 16″, so ist

$$\frac{(12^2+5^2+5.12).3,14.16}{3} = \frac{(144+25+60).50,24}{3}$$

$$\frac{229 . 50,24}{3} = \frac{11504,96}{3} = 3834,98$$ Kubikzoll, oder 3 Kubikfuß, 834 Kubikzoll, 980 Kubiklinien.

Die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels giebt die

Formel (R + r) . p . A,

wobei die krumme Oberfläche = Trapez, dessen Parallelen die beiden Bogen Rp und rp, und deren Abstand A = der schiefen Höhe. Die schiefe Höhe A findet sich durch: $A = \sqrt{(d^2 + h^2)}$, wobei d = R — r = dem Unterschied der beiden Halbmesser.

Es sey wie vorher R = 12″; r = 5″, h = 16″, so ist R — r = d = 7;
und $\sqrt{(d^2 + h^2)} = \sqrt{(7^2 + 16^2)} = 17,46 = A$;
folglich (R + r) . p . A = (12 + 5) . 3,14 . 17,46 = 17 . 3,14 . 17,46 = 932,0148, oder 9 □ Fuß, 32 □ Zoll, 1 □ Linie, 48 □ Scrupel = der krummen Oberfläche des abgekürzten Kegels.

Rechnet man dazu die beiden Grundflächen $R^2 p$ und $r^2 p$, so erhält man die

Formel $\left((R+r).A+(R^2+r^2)\right).p$ = dem Netz.

Die Höhe des ganzen Kegels findet man durch

R — r : h = R : H
12 — 5 : 16 = 12 : 27,43

und die Höhe des fehlenden Stückes = h′ = H — h
= 11,43 = 27,43 — 16.

§. 562. Den Inhalt schiefer Körper zu finden.

Fälle aus ihrer höchsten Spitze ein Perpendikel auf ihre (nöthigenfalls verlängerte) Grundfläche, nimm dasselbe zur senkrechten Höhe = h an, und gebrauche übrigens die gegebenen Formeln.

Allein die Oberflächen schiefstehender Körper bedürfen weitläuftigerer Rechnungen, die sich nach den Umständen allezeit verändern, und der Beurtheilungskraft eines jeden überlassen bleiben.

§. 563. Den Inhalt solcher Gefäße zu finden, die elliptische Grundflächen haben.

Formel: $\frac{A \cdot a \cdot p \cdot h}{4}$.

Multiplicire beide Durchmesser oder Axen A und a mit 3,14... und mit der Höhe h, und dividire dies Product durch 4.

Z. B. ein Bottich sey 8 Fuß lang, 6 Fuß breit, 3 Fuß hoch und elliptisch; wie viel Tonnen oder Quart enthält er?

Hier ist $8' = A = 96$ Zoll,
$6' = a = 72$ Zoll,
$3' = h = 36$ Zoll,

und $\frac{96 \cdot 72 \cdot 3{,}14 \cdot 36}{4} = \frac{781032{,}48}{4} = 195258{,}12$

Kubikzoll. Dividirt man diese Zahl mit 64, so erhält man $3050\frac{2}{10}$ Quart, oder 30 Tonnen $50\frac{2}{10}$ Quart.

Zusatz. Sind die elliptischen Flächen an einem Gefäße verschieden, z. B. wie an einer Badewanne, wo gemeiniglich die untere Fläche oder der Boden kleiner ist, als die obere offene Fläche, so dient folgende Formel

$$\frac{G + g + \sqrt{(G \cdot g)}}{3} \cdot h,$$

wobei G die größere, g die kleinere Grundfläche, h die senkrechte Höhe bedeutet.

§. 564.

§. 564. Den Inhalt eines Fasses zu finden.

Formel: $\frac{(R^2 + r^2) \cdot p \quad h}{2} = z =$ mittlerm Cylinder.

Formel zur Verbesserung $= \frac{z \cdot D - d}{3D} = c =$ Correction

und $z + c = J =$ Inhalt des Fasses.

Addire zum Quadrat des Bauchhalbmessers $= R^2$ das Quadrat des Bodenhalbmessers $= r^2$, multiplicire diese Summe mit 3,14... und mit der Länge $= h$, und dividire alles durch 2, so erhält man z oder den mittlern Cylinder.

Dieser mittlere Cylinder ist etwas zu klein, weil die Stäbe des Fasses Bogenstücke sind. Daher multiplicire man denselben mit dem Unterschied der beiden Diameter $D - d$ und dividire durch den dreyfachen Bauchdurchmesser, so erhält man c oder die Verbesserung.

Die Summe des mittleren Cylinders und der Correction, oder $z + c$, ist der Inhalt des Fasses.

Z. B. Ein Faß, Fig. 189., habe
im Bauche $ad = D = 20$ Zoll, so ist $R = 10$,
im Boden $cb = d = 16$ — — $r = 8$,
in der Länge $hk = h = 40$ — — $h = 40$,

so ist $z = \frac{(10^2 + 8^2) \cdot 3{,}14 \cdot 40}{2} = \frac{164 \cdot 3{,}14 \cdot 40}{2}$

$= 10299{,}2 =$ dem mittleren Cylinder.

Nun ist $D - d = 20 - 16 = 4$; und $3D = 3 \cdot 20 = 60$; folglich die Correction

$c = \frac{10299{,}2 \cdot 4}{60} = \frac{41196{,}8}{60} = 686{,}61;$

dazu den mittlern Cylinder $= 10299{,}2$

Inhalt des Fasses $= 10985{,}81$ Kubikzoll.

Dividirt man diesen Inhalt durch 64, so erhält man $171\frac{65}{100}$ Quart, oder 1 Tonne $71\frac{3}{4}$ Quart.

§. 565.

§. 565. Die Länge und beide Durchmesser eines Fasses, das 1 Tonne oder 100 Quart hält, zu finden.

Der Inhalt ist $100 . 64 = 6400$ Kubikzoll. Nun sind zwar sehr vielerlei Gestalten der Fässer denkbar, wovon jedes den verlangten Inhalt hat; allein da im Preußischen von den Accisebedienten die sogenannten Kreuzvisirstäbe zur leichtern Ausmessung der Fässer vorschriftsmäßig gebraucht werden, und diese nur dann richtig angeben, wenn die Länge eines Fasses doppelt so viel beträgt, als der Durchmesser des mittlern Cylinders, so ist die Gestalt nicht mehr willkührlich.

Der Kreuzvisirstab ist in Fig. 189. die Linie ab; er wird durch das Spundloch a nach dem entgegengesetzten Ende des Bodendiameters gehalten, und der Inhalt des Fasses nach Quart auf demselben abgelesen. Die ab hat in allen ähnlich gebauten Fässern zur Länge und zu den beiden Diametern einerlei Verhältniß.

Wird die Correction mit berücksichtigt, so finde ich für die gebräuchlichsten Fässer folgende Abmessungen:

	im Bauche.	im Boden	in der Länge	Länge des Visirstabs
eine Tonne hat .	17,6 Zoll	14 Zoll	30,2 Zoll	21,85 Zoll
eine halbe Tonne	14	11,1	24	17,33
ein Eimer, 60 Quart	14,84	11,8	25,47	18,43
ein Anker, 30 Quart	11,78	9,37	20,22	14,63
ein halber Anker	9,35	7,44	16,045	11,61

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlich liegenden Seiten, so findet man aus dem Verhältniß der Theile einer Tonne alle Abmessungen der Fässer von jedem Inhalt.

Z. B. die Länge und Durchmesser eines Fasses zu finden, das 1 Quart hält; schließt man:

$100 : 1 = 17{,}6^3 : D^3$; und $\sqrt[3]{\frac{17{,}6^3}{100}} = 3{,}79 = D$,

$100 : 1 = 14^3 : d^3$; und $\sqrt[3]{\frac{14^3}{100}} = 3{,}016 = d$,

$100 : 1 = 30{,}2^3 : h^3$; und $\sqrt[3]{\frac{30{,}2^3}{100}} = 6{,}506 = h$.

§. 566. Die Länge des Kreuzvisirstabes ab Fig. 189. zu finden.

Formel: $\sqrt{\left(R + r\right)^2 + \frac{1}{4} h^2} = ab$,

denn zieht man bn mit der Axe hm parallel, so ist $bn = \frac{1}{2} h$, $nm = hb = r$; $am = R$; also $an = R + r$; und

$$ab^2 = an^2 + bn^2 = (R + r)^2 + \frac{h^2}{4}.$$

Z. B. die Länge des Visirstabes ab in einem 1 Quart haltenden Fasse zu finden. Nach vorigem §.

ist $D = 3{,}79$, also $R = 1{,}9$
$d = 3{,}016$, $r = 1{,}5$
$h = 6{,}5$ $\overline{R + r = 3{,}4}$

und $3{,}4^2 + \frac{6{,}5^2}{4} = 11{,}56 + 10{,}5625 = 22{,}1225$,

woraus die Wurzel $= 4{,}703 = ab =$ der Länge des Visirstabes.

§. 567. Einen Visirstab zu verfertigen.

Theile einen Raum von 4 Zoll 7 Linien (s. §. 566.), wie einen andern verjüngten Maaßstab in 1000 Theile; nimm einen etwa 4 Fuß langen, $\frac{1}{2}$ Zoll breiten und $\frac{1}{4}$ Zoll dicken Stab aus festem Holze, AB Fig. 190., und trage auf ihn von B an die Größe Ba = 1000 Theile nach dem gemachten (4 Zoll 7 Linien langen) verjüngten Maaßstabe, so ist Ba die Größe desjenigen Theils des Stabes, der in ein Faß, das nur 1 Quart hält, paßt, und die ab Fig. 189. vorstellt. Nun ziehe man aus den Zahlen 2, 3, 4, 5 u. s. w. die Kubikwurzel bis auf 3 Decimalstellen (in trigonometrischen Tafeln stehen sie mit 7 Decimalstel-

stellen), und trage die erhaltenen Werthe nach dem angefertigten Maaßstabe allezeit von B aus auf den Visirstab AB. Auf diese Weise erhält man die Puncte cde — fghb u. s. w., welche anzeigen, daß dasjenige Faß, in welches der Visirstab so weit hineingesteckt werden kann, bei c 2 Quart, bei d 3 Quart ꝛc. enthalte. So findet man z. B.

für	2	Quart	die	Bc	$= \sqrt[3]{2} =$	1260
—	3	—	—	Bd	$= \sqrt[3]{3} =$	1442
—	4	—	—	Be	$= \sqrt[3]{4} =$	1587
—	32	—	—	Bf	$= \sqrt[3]{32} =$	3175
—	50	—	—	Bg	$= \sqrt[3]{50} =$	3684
—	64	—	—	Bh	$= \sqrt[3]{64} =$	4000
—	100	—	—	Bb	$= \sqrt[3]{100} =$	4641 u.s.w.

Man kann dies so weit fortsetzen, als es die Länge des Stabes AB erlaubt.

Die Zahlen werden auf einen Visirstab neben den zarten Theilstrichen mit Formen hinein geschlagen, damit sie durch das Einsenken in die Flüssigkeiten sich nicht so leicht verwischen. Nach einem solchen mit Fleiß bereiteten Visirstabe können nun sehr leicht viele andere angefertigt werden. Allein sowol ihr Anfertigen, als ihr Gebrauch erfordert Vorsicht und Genauigkeit. Denn oft werden absichtlich oder unwissentlich die Fässer anders gebaut, um die Officianten zu hintergehen. Ist die Axe nähmlich größer, als der doppelte Durchmesser des mittlern Cylinders, so giebt der Visirstab den Inhalt zu groß an, und ist sie kleiner, welches gemeiniglich der Fall ist, so giebt er ihn zu gering an. Aus der Summe der beiden Durchmesser, und der Länge, welche beinahe einander gleich sind, kann man vorläufig sehen, ob dieser Visirstab bei einem Fasse anwendbar sey oder nicht. Wenn es aber auf Genauigkeit ankommt, so bleibt die Rechnung §. 564. immer das zuverlässigste Mittel, den Inhalt der Fässer zu bestimmen, und der Visirstab eine Nothkrücke für den Unkundigen, mit der er zwar fein bequem, aber eben nicht sehr anständig einhergeht. Für Böttcher ist er sehr nützlich, um

um darnach Gefäße von verlangtem Inhalt anzufertigen.

§. 568. Den Durchmesser und die Höhe eines Scheffelgefäßes, das 3072 Kubikzoll enthält, zu bestimmen.

Nach höherer Verfügung soll ein rundes Scheffelgefäß 22 Zoll im Durchmesser haben; weil bei manchen Producten gehäuftes Maaß gegeben wird, und es dann nicht einerlei ist, welche Gestalt ein solches Gefäß habe.

Die Höhe desselben $= \frac{3072}{121 . 3{,}141\ldots} = 8{,}07116$ Zoll

d. h. 8 Zoll, 7 Scrupel. Dabei ist $121 = r^2$; $3{,}141\ldots = p$.

Ein Viert muß nach diesem Verhältnisse haben

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{4}} = 13'',859 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{4}} = 5'',0844 \text{ in der Höhe.}$$

Eine Metze ($= \frac{1}{16}$ Scheffel) muß haben:

$$\sqrt[3]{\frac{22^3}{16}} = 8'',7307 \text{ im Durchmesser,}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}07116^3}{16}} = 3'',203 \text{ in der Höhe.}$$

Anmerk. (Bei diesen Angaben zeigt die Zahl vor dem Komma allemal Rheinl. oder Preußische Zolle zwölftheiliges Maaß, und die Ziffer hinter dem Komma Decimaltheile dieses Zolles an. Will man die Decimaltheile in Linien, 12 auf einen Zoll, haben, so multiplicire man sie mit 12 und dividire darauf mit 10. Allein man thut sehr wohl, wenn man den Duodecimalzoll nur in 10 Theile theilt, indem dies alle Rechnungen erleichtert, und niemals schaden kann. Wer mit Decimalbrüchen rechnen kann, wird die großen Vortheile kennen, die eine zehntheilige Unterabtheilung überall gewährt.)

Zu

Zu Probemaaßen sind viereckige Gefäße am bequemsten, weil sie leichter und sicherer, als runde, anzufertigen sind. Man zerlege die Zahl 3072 in 3 beliebige Factoren, so hat man in ihnen die Länge, Breite und Höhe eines solchen Scheffels. Z B.

Er kann 16 Zoll lang, 16 Zoll breit und 12 Zoll hoch;
oder 24 — — 16 — — — 8 — —
seyn u. s. w.

§. 569. Ein Gefäß, das 64 Kubikzoll oder 1 Preußisch Quart enthält, anzufertigen.

Zu einem Probemaaße wähle man einen Würfel, der 4 Zoll lang, eben so breit und hoch im Lichten ist. Sein Inhalt ist dann genau 64 Kubikzoll.

Die gewöhnliche Gestalt solcher Gefäße, die man Quart oder Maaß nennt, ist aber die eines abgekürzten Kegels, für den das Formular $\frac{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p \cdot h}{3}$ gilt, wobei R und r Radien der Grundfläche und obern Öffnung, h aber senkrechte Höhe, und p die bekannte Zahl 3,14 ist.

Wenn von den Größen R, r und h zwei gegeben sind, so läßt sich die 3te durch Rechnung finden.

$$R = \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2} r$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3J}{p \cdot h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \tfrac{1}{2} R$$

$$h = \frac{3J}{(R^2 + r^2 + rR) \cdot p}, \text{ wobei } J = \text{Inhalt ist.}$$

Allein die Auflösung dieser Formeln ist nicht jedermanns Sache, und daher den handwerksmäßigen Verfertigern der Quartgefäße folgende Verfahrungsweise anzuempfehlen:

Man mache das Gefäß vorläufig nach Gutdünken, wiege es, fülle es mit Wasser, bis es zwei Pfund, 14 Loth, 1 Quentchen mehr wiegt, als es leer wog; darauf mache man an

der

der Oberfläche des Wassers ein Zeichen in das Gefäß. Wird es nun mit einer flüssigen Masse bis zu diesem Zeichen angefüllt, so kann man überzeugt seyn, daß man ein richtiges Quart derselben habe. Zu den Vorsichtsmaßregeln gehört, daß das Wasser entweder reines Regenwasser oder destillirtes Wasser sey, und eine Wärme von 15 Grad Reaumür habe. Denn unter diesen Umständen wiegt ein Kubikfuß reines Wasser 66 ℔, und füllt 27 Quart an.

§. 570. Den Inhalt eines paraboliſchen Afterkegels Fig. 55., zu finden.

Formel: $\frac{R^2 . p . h}{2} = J.$

Mit dem Quadrat des Halbmessers (R^2) der Grundfläche multiplicire die Zahl 3,14... und die Höhe h; endlich dividire alles durch 2, weil dieser Körper die Hälfte eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche ist.

Z. B. Es sey $CD = R = 3'',5$; $DA = 7' = h$, so ist der Inhalt $= \frac{3,5^2 . 3,14 . 7}{2} = \frac{12,25 . 3,14 . 7}{2}$

$\frac{269,255}{2} = 134,6275$ Kubikzoll.

§. 571. Den Inhalt eines elliptiſchen Körpers (Ellipsoide) zu finden.

Formel: $\frac{A . a^2 . p}{6} = J.$

Multiplicire die große Axe mit dem Quadrat der kleinen, mit 3,14..., und dividire das Product durch 6.

Z. B. Es sey die große Axe der Erde, oder der Durchmesser am Äquator = 1720, und die kleine Axe oder der Abstand der Pole = 1710 Meilen, so ist ihr kubischer Inhalt

$\frac{1720 . 1710^2 . 3,141}{6} = 263291812$ Kubik-Meilen.

Als Kugel berechnet, ist ihr Inhalt = 266256000 Kubik-Meilen.

§. 572.

§. 572. Den Inhalt einer Kugel zu finden.

1. Formel: $\frac{D^3 \cdot p}{6} = J.$

Multiplicire den kubirten Diameter mit 3,141..., und dividire das Product durch 6. Oder nach der

2. Formel: $\frac{D^3 \cdot 157}{300} = J$, denn $300 : 157 = D^3 : J.$

3. Formel: $\frac{2R^2 \cdot p \cdot D}{3} = J$ (Siehe §. 236.)

Z. B. es sey der Diameter D = 2 Fuß, so ist ihr Inhalt $\frac{2^3 \cdot 3,14}{6} = \frac{8 \cdot 3,14}{6} = \frac{25,12}{6} = 4,186$ Kubikfuß.

§. 573. Aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel ihren Diameter zu finden.

Formel: $\sqrt[3]{\left(\frac{6 \cdot J}{p}\right)} = D.$

den 6fachen Inhalt dividire durch 3,141, und ziehe aus dem Quotienten die Kubikwurzel.

§. 574. Die Oberfläche einer Kugel zu finden.

Formel: $4R^2 \cdot p$, oder $D^2 p$ = Oberfläche.

Z. B. Es sey der Diameter einer Kugel = 3 Zoll, so ist $D^2 \cdot p = 3^2 \cdot 3,14159... = 28,27431$ □ Zoll, = Oberfläche.

§. 575. Den Inhalt eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel: $(3.h.R - h^2) \cdot \frac{p \cdot h}{3} = J.$

wobei CA = R = Radius, AH = h die Höhe bedeutet.

Z. B. Es sey R = 8″; h = 2″, so ist der Abschnitt AME = $(3 \cdot 2 \cdot 8 - 2^2) \cdot \frac{3,141 \cdot 2}{3}$

$= (48-4) \cdot \frac{6{,}282}{3} = 44 \cdot 2{,}094 = 92{,}136$ Kubikzoll,

d. h. 92 Kubikzoll, 136 Kubiklinien.

Sollte das Kugelstück MBE berechnet werden, so ist HB = h, und die Rechnung, wie vorher.

§. 576. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts AME Fig. 191. zu finden.

Formel. $AE^2 . p$, oder $(AH^2 + AH . HB) . p$ = Oberfläche AME.

Die Größe der Sehne findet man durch

$AH : HE = HE : HB$, also ist $HE^2 = AH . HB$ und $AH^2 + HE^2 = AE^2$.

Für die Oberfläche des Kugelstücks MBE gilt die

Formel: $BE^2 . p = O$

und $BE^2 = BH^2 + BH . HA$.

Z. B. Es sey AH = 3; HB = 17, so ist $AE^2 = 60$ und die Fläche AME $= (3^2 + 3 . 17) . 3{,}141\ldots$ = 188,5 □ Maaß.

Nennt man den Durchmesser allgemein d, das Stück AH = x, so sind die Formeln

$(AH^2 + AH . HB) . p$

völlig gleich mit $\overline{(x^2 + x . (d-x) . p} = \overline{(x^2 + dx - x^2) . p}$

also die Oberfläche AME $= dx . p = O$, welche Formel die bequemste ist.

§. 577. Den Inhalt eines Zonenstückes DOME Fig. 191. zu finden.

Formel. $(3H . R - H^2) . \frac{p . H}{3} - (3 . h . R - h^2) . \frac{p . h}{3} = J.$

Dabei ist H = AC; R = Radius; h = AH.

Man berechnet zuerst das Kugelstück AOD, und zieht davon das Stück AME ab.

Wenn OD der Aquator und in A der Pol, so ist das Formular einfacher, und $= \frac{D^3 p}{12} - (3h . R - h^2) . \frac{p . h}{3}$.

Z. B.

Z. B. Es sey $AH = h = 3$
$AC = R = 10$
$BA = D = 20$

so ist $\frac{20^3 p}{12} = \frac{25120}{12} = 2093{,}33$

und $(3.3.10 - 3^2).\frac{3{,}14.3}{3} = 81.3{,}14 = 254{,}46$

Inhalt des Zonenstücks 1838,87

§. 578. Die Oberfläche einer Zone DOME zu finden. Fig. 191.

Formel, $D.h.p =$ Oberfläche.

Multiplicire die Peripherie eines größten Kreises $D.p$ mit der Höhe der Zone $HC = h$.

Z. B. Es sey $D = 20$; so ist $20.7.3{,}14\ldots$
$HC = h = 7$) $= 439{,}8$ □ Maaß.

§. 579. Den Inhalt eines keilförmigen Ausschnitts zu finden.

Formel: $\frac{D^3.p.n}{6.360} = J.$

Solche Ausschnitte verhalten sich zur ganzen Kugel, wie die ihnen zukommenden Bogen von n Graden, zum Umkreise der Kugel. Daher $360° : n° = \frac{D^3 p}{6} : \frac{D^3.p.n}{6.360}$.

§. 580. Die Oberfläche eines keilförmigen Ausschnittes zu finden.

Formel: $\frac{D^2.p.n}{360} = O.$

Wie 360° zur Oberfläche der Kugel ($D^2 p$), so die dem Ausschnitt zukommenden Grade (n), zur Oberfläche desselben.

§. 581. Den körperlichen Inhalt ganz unregelmäßiger Körper zu finden.

Wenn sie sich auf keine Weise in bekannte geometrische Körper zerlegen lassen, so wiege man sie, und auch einen Kubikzoll oder Fuß ihrer Masse, und suche aus dem bekannten Gewicht der Massen die Massen selbst. Z. B. eine steinerne Bildsäule wog 300 ℔; ein Kubikzoll der Steinmasse wog $\frac{1}{4}$ ℔, wie groß ist der kubische Inhalt der Bildsäule?

$\frac{1}{4}$ ℔ : 1 Kubikzoll = 300 ℔?

(4

Sie enthielt 1200 Kubikzoll.

Läßt sich kein kleinerer Theil der Masse wiegen, so stecke man den unregelmäßigen Körper in ein Gefäß von bekanntem Inhalt, und fülle dasselbe vollends mit Wasser oder Sand an; nehme den Körper wieder heraus, und berechne den leer gewordenen Raum des Gefäßes, welcher dem Inhalt des Körpers gleich seyn muß.

§. 582. Sehr oft lassen sich unregelmäßige Körper, z. B. Kornhaufen, Erdhaufen u. dgl. mit leichter Mühe in regelmäßige verwandeln und berechnen. Gemeiniglich bilden solche Haufen Piramyden oder abgekürzte Piramyden, bei denen es hauptsächlich darauf ankommt, die Grundflächen und Länge auszumitteln. Oft läßt sich eine solche Masse als Prisma berechnen, wie z. B. der Inhalt eines mit Getreide beladenen Kahns; denn die Getreidemasse bildet ein niedergelegtes Prisma, dessen Grundflächen senkrecht stehen, und leicht zu berechnen sind. Multiplicirt man eine solche Fläche mit der Länge, so erhält man den Inhalt. Die Grund- oder Durchschnittsfläche kann man in ein Trapez verwandeln, wenn man die Oberfläche des Getreides ebenen läßt; denn alsdann ist die obere Breite der untern parallel. Weil diese Aufgabe häufig vorkommt, so wollen wir sie an einem Beispiel lösen.

Es sey die untere Breite eines Schiffsraums = 4 Fuß, 2 Zoll = 50 Zoll; die obere Breite = 6 Fuß 8 Zoll = 80 Zoll; die Höhe = 5 Fuß = 60 Zoll; die Länge = 24 Fuß = 288 Zoll. Wie viel Scheffel enthält er?

B = 80 und h oder die Höhe = 60 Zoll.
b = 50
130 daher $\frac{b+B}{2}$ = 65
2:) 65
3900 = G = d. Grundfläche
multiplicirt mit 288 = l = Länge
31200
312
78
1123200 Kubikzoll.

Dividirt man diese Zahl durch 3072, so kommen 365,6 Scheffel, oder 15 Wispel $5\frac{6}{10}$ Scheffel.

Formular. $\left(\frac{B+b}{2}\right)$. h . l = Inhalt eines Schiffsraums, wobei B und b Breiten, h senkrechte Höhe, und l Länge bedeutet.

VII. Verwandlung der Körper.

§. 583. Jeder Körper kann in andere geometrische Körper, die gleichviel Inhalt haben, mittelst der Rechnung verwandelt werden. Man beobachte auch hier, wie bei der Verwandlung der Flächen die allgemeine Regel:

Setze den Inhalt des gegebenen Körpers oder sein Formular auf die eine Seite, und das Formular desjenigen Körpers, in welchen er verwandelt werden soll, auf die andere Seite einer Gleichung; lege überall die bekannten Werthe unter, und sondere die unbekannte Größe gehörig ab, so ergiebt sich ihr Werth in lauter bekannten Größen.

Würfel und Kugeln sind durch eine Größe, die Seite und den Radius; aber Prisma, Cylinder, Kegel und Piramyden durch zwei oder drei Größen zu bestimmen. Denn es kommt bei letzteren sowol auf ihre Grundflächen, als Höhen an, wobei wieder allerlei Umstände statt finden können, von denen wenigstens so viel bekannt oder gewählt werden muß, daß sich das Übrige berechnen läßt.

Zu

Zu solchen Verwandlungen gehört eine genaue Bekanntschaft mit den Formeln für die Inhalte der Körper, Gewandtheit in der Auflösung der Gleichungen, und ein richtiger geometrischer Blick. Aber kein Zweig der Geometrie gewährt auch dem talentvollen Zögling mehr Vergnügen, als gerade dieser.

Den Anfängern zum Nutzen wollen wir an einigen Beispielen die Verfahrungsweise, und die vortheilhafte Anwendung der Logarithmen zeigen.

§. 584. Einen Körper, dessen Inhalt = J, zu verwandeln:

in einen Würfel.

Formel: $\sqrt[3]{J} = l$,

wobei l die Seitenlinie des Würfels, wodurch dieser Körper vollkommen bestimmt ist.

Z. B. Wenn 64 Kubikzoll in einen Würfel zu verwandeln sind, so ist $J = 64$, und $\sqrt[3]{64} = 4$ = der Seite desselben.

§. 585. in eine Kugel.

Formel: $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot J}{p}} = D$,

wobei $p = 3{,}141\ldots$ und D = Diameter.

Hier ist $J = \frac{D^3 \cdot p}{6}$, siehe §. 572.

$$6J = D^3 \cdot p$$

$$\frac{6J}{p} = D^3, \text{ also } \sqrt[3]{\frac{6J}{p}} = D.$$

Z. B. Es sollen 64 Kubikzoll in eine Kugel verwandelt werden. Der Kürze wegen rechnen wir mit Logarithmen.

log.

log. 6 = 0,7781513
log. 64 = J = 1,8061800 addirt
2,5843313
log. 3,14... = 0,4971500 abgezogen
daraus $\sqrt[3]{}$ gezogen; 3:) 2,0871813
log. = 0,6957271 = 4,9628 = D.

und der gesuchte Diameter der Kugel ist = 4''' 9'''' 6''''' u. s. w.

§. 586. in ein Parallelepipedon.

Formel: $J = l \cdot b \cdot h$

also $\frac{J}{l \cdot b} = h$ = der Höhe,

und $\frac{J}{l \cdot h} = b$ = der Breite,

und $\frac{J}{b \cdot h} = l$ = der Länge.

Wenn z. B. auch das Verhältniß der Länge und Breite $l : b = m : n$ gegeben ist, so sondere man eine der Größen l und b ab, und setze ihren Werth in die Gleichung $J = l \cdot b \cdot h$, so wird sich ergeben, daß nach der

Formel: $\frac{nJ}{b^2 m} = h$; $\sqrt{\frac{nJ}{mh}} = b$; $\frac{mJ}{nl^2} = h$;

$\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = l$.

Es sey $J = 64$; $h = 4$; $b = 8$, man sucht die Länge l. Nach obiger Formel ist $l = \frac{J}{b \cdot h}$, d. i. $\frac{64}{3.4} = \frac{64}{12} = 5{,}333 = l$, und so würde jede andere Seite leicht gefunden seyn. Es sey aber $l : b = 16 : 9$, so ist $m = 16$; $n = 9$, und $\frac{nJ}{b^2 m} = h$, d. i.

d. i. $\frac{9.64}{9.16} = 4 = h$; ferner $\sqrt{\frac{n.J}{m\,h}} = b, = \sqrt{\frac{9.64}{16.4}}$
$= 3 = b$; so wie $\sqrt{\frac{mJ}{nh}} = \sqrt{\frac{16.64}{9,4}} = \sqrt{\frac{256}{9}}$
$= \sqrt{28,4444} = 5,333 = l.$

§. 587. in ein Prisma.

Formel: $\frac{J}{g} = h =$ Höhe,

$\frac{J}{h} = g =$ Grundfläche.

Ist aber die Anzahl der Seiten des Prisma, mithin die Gestalt der Grundfläche gegeben, so muß der Werth von g in die verlangte Figur verwandelt werden, wozu in dem Abschnitt von der Verwandlung der Flächen Anleitung gegeben ist und Formeln vorkommen.

Z. B. Es sey der gegebene Inhalt $= 64$ Kubikfuß in ein dreiseitiges Prisma, dessen Höhe auf 8 Fuß bestimmt ist, zu verwandeln. Man sucht die Seite der Grundfläche, welche $\frac{64}{8} = 8$ □ Fuß ist, und in ein gleichseitiges Dreieck nach §. 536. verwandelt werden muß.

Die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2.8.1,732}{3.0,5}\right)} = \sqrt{18,475}$
$= 4',298.$

§. 588. in einen Cylinder.

Formel: $\frac{J}{r^2 p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\frac{J}{p.h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Es soll z. B. ein Cylinder, der 1 Quart oder 64 Kubikzoll enthält, und 6 Zoll im Diameter hat, angefertigt werden, wie hoch muß er seyn?

Hier ist $J = 64$; $r = 3$; p, wie bekannt, $= 3,14...$

also $\frac{J}{r^2 p} = \frac{64}{9 \cdot 3{,}14} = 2{,}26$ Zoll, d. i. 2 Zoll, 2 Linien, 6 Scrupel = h = der Höhe (wobei 1 Duodecimalzoll in 10 Linien, zu 10 Scrupel, gerechnet, welches bei allen solchen Aufgaben sehr bequem ist.)

§. 589. in eine Piramyde.

Formel: $\frac{3J}{h} = g =$ Grundfläche,

und $\frac{3J}{g} = h =$ Höhe.

Hier ist zu bestimmen, welche Gestalt die Grundfläche haben soll, um den Werth von g darin zu verwandeln.

Z. B. der Inhalt J = 64 Kubikfuß soll in eine sechsseitige Piramyde, deren Höhe 16′ seyn kann, verwandelt werden, wie groß wird eine Seite derselben seyn?

$$\frac{3J}{h} = \frac{3 \cdot 64}{16} = 12 \square \text{ Fuß} = g.$$

Diese 12 □ Fuß nach §. 536. in ein Sechseck verwandelt, giebt für die Seite $m = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 12 \cdot 1.}{6 \cdot 0{,}866}\right)}$

$= \sqrt{\frac{4}{0{,}866}} = \sqrt{4{,}619} = 2'{,}149 =$ einer Seite.

§. 590. in einen Kegel.

Formel: $\frac{3J}{r^2 \cdot p} = h =$ Höhe.

und $\sqrt{\frac{3J}{p \cdot h}} = r =$ Radius der Grundfläche.

Hier ist die Grundfläche allemal ein Kreis und $= r^2 p$, also, wenn eine von den Größen r oder h bekannt ist, so ist die andere allzeit zu finden.

§. 591.

§. 591. in einen abgekürzten Kegel.

Formel: $\frac{3J}{(R^2+r^2+rR).p} = h =$ Höhe,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p.h} - r^2 + \frac{r^2}{4}\right)} - \frac{r}{2} = R =$ Radius der Grundfläche,

und $\sqrt{\left(\frac{3J}{p.h} - R^2 + \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{R}{2} = r =$ Radius der Durchschnittsfläche.

Z. B. es sey $R = 2$; $r = 1$; $J = 64$, so ist $h = 8{,}734\ldots$ Höhe. Legt man diesen Werth für h in den andern Formeln unter, so erhält man R und r wieder.

§. 592. Einen Würfel zu verdoppeln oder n mal zu nehmen.

Unter dieser Aufgabe verstehen wir: die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt, oder überhaupt n mal so viel Masse hat, als der gegebene.

Formel: $\sqrt[3]{nJ} = l =$ der Seite.

Z. B. es sey die Seite eines Würfels, der 3mal so groß, als der gegebene ist, welcher 64 Kubikzoll hat, zu finden. Hier ist $J = 64$; $n = 3$; und $\sqrt[3]{3 . 64} = \sqrt[3]{192} = 5'',769 =$ der Seite des 3mal größern Würfels.

Da n auch ein Bruch seyn kann, z. B. $\frac{1}{2}$, so kann man die Seite eines kleinern Würfels eben so leicht finden. $\sqrt[3]{\frac{1}{2} . 64} = \sqrt[3]{32} = 3'',1748 =$ der Seite eines halb so großen Würfels.

§. 593. Einen gegebenen Inhalt in einen Körper zu verwandeln, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, z. B. in ein Parallelepipedon, dessen Seiten sich wie $\left\{\begin{matrix}3:4:5\\m:n:q\end{matrix}\right\}$ verhalten. Der gegebene Inhalt sey 480 Kubikfuß $= J$; der, dessen Seiten m, n, q sind, $= P$, so findet man die Seiten des neuen Körpers durch folgende Proportionen:

P:

$P : J = m^3 : x^3$, und $x = \sqrt[3]{\frac{m^3 J}{P}}$ = der Seite x,

$P : J = n^3 : y^3$, und $y = \sqrt[3]{\frac{n^3 J}{P}}$ = der Seite y,

$P : J = q^3 : z^3$, und $z = \sqrt[3]{\frac{q^3 J}{P}}$ = der Seite z.

Im gegenwärtigen Falle, wo $m = 3$, $n = 4$, $q = 5$, ist $P = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$,

und $x = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{216} = 6 = x$,

und $\sqrt[3]{\frac{4^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{512} = 8 = y$,

und $\sqrt[3]{\frac{5^3 \cdot 480}{60}} = \sqrt[3]{1000} = 10 = z$.

Durch theilweise Ausziehung der $\sqrt[3]{}$ ergeben sich die

Formeln: $m \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = x$; $n \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = y$;

$q \cdot \sqrt[3]{\frac{J}{P}} = z$.

§. 594. Ein elliptisches Gefäß, dessen große Axe = 4 Fuß 8 Zoll = 56 Zoll; kleine Axe = 3 Fuß 8 Zoll = 44″; Höhe = 2 Fuß 6 Zoll = 30″, enthält 58045,68 Kubikzoll oder 907 Quart. Man soll ein kleineres, jenem ähnliches Gefäß, das nur 18 Quart enthält, anfertigen; wie groß muß jede seiner Axen und seine Höhe seyn?

Weil sich die Inhalte ähnlicher Körper zu einander verhalten, wie die Würfel der ähnlichen Seiten, so gilt die

Formel: $907 : 18 = 56^3 : A^3$, und $A = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 56^3}{907}\right)}$ = großen Axe.

log.

log. 18 = 1,2552727
log. 56^3 = 5,2445640
6,4998367
log. 907 = 2,9576073
Daraus $\sqrt[3]{}$ 3:) 3,5422294
log. A = 1,1807431 = 15″,16 = großen Axe.

Ferner 907 : 18 = 44^3 : a^3, und $a = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 44^3}{907}\right)}$
= 11″,91 = a = der kleinen Axe,

und 907 : 18 = 30^3 : h^3, also $h = \sqrt[3]{\left(\frac{18 \cdot 30^3}{907}\right)}$
= 8″,12 = Höhe.

Dergleichen Aufgaben kommen häufig vor.

§. 595. Es ist ein abgekürzter Kegel adeb Fig. 192. gegeben; man wünscht die krumme Oberfläche oder den Mantel desselben zu zeichnen und aus Pappe zu formen.

Nennt ag = R; dh = r; ad = a; und ac = A, und schließt:

af : ad = ag : ac, weil die △ adf und acg ähnlich.
= R − r : a = R : A, und $A = \frac{a \cdot R}{R - r}$.

Die ac oder A ist der Radius desjenigen Kreises, woraus der Mantel ein Sector ist, in Fig 193 ist sie die NC. Der Bogen NK des auszuschneidenden Sectors wird dem Umfange der Grundfläche des Kegels gleich seyn, folglich = Dp, oder 2R p.

Aus dem Radius A ergiebt sich die dazugehörige Peripherie = 2A . p. Daher läßt sich der Bogen NK in Graden angeben. 2A . p : 360° = D . p : NK; und $NK = \frac{D \cdot 360}{2A}$, wobei D = Diameter der Grundfläche des Kegels.

Den kleinen concentrischen Kreis, wovon LH Fig. 193 ein Bogenstück, ziehe man in einem Abstande NL = a, also mit einem Radius = A − a.

Man

Man schneide nun das Sectorstück NKHLN aus, rolle es zusammen, daß NL an KH streift, so hat man den Mantel des abgekürzten Kegels.

Das ganze Geschäft besteht demnach in Folgendem:

1. Ziehe einen Kreis mit dem Radius $A = \frac{R \cdot a}{R - r}$;
2. Von diesem Kreise nimm einen Bogen von $\frac{D.360}{2A}$ Graden.
3. Ziehe einen zweiten concentrischen Kreis mit dem Radius $A - a$.
4. Ziehe gerade Linien von jedem Endpuncte des Bogens nach dem Mittelpunct, und schneide das zwischen den Kreisen und den geraden Linien liegende Stück aus.

Z. B. Man will den Fuß einer Orgelpfeife, welcher ein abgekürzter Kegel ist, aus einer Zinnplatte schneiden. Der große Durchmesser $= D$ soll 6 Zoll, also $R = 3$ Zoll; der kleine Durchmesser de Fig. 192., soll 1 Zoll, also $r = 0{,}5$ oder $\frac{1}{2}$ Zoll; die schiefe Höhe $= a$ (in der Figur ad) soll 9 Zoll betragen. Wie sind die Kreise zu ziehen?

1. Der Radius $CN = A = \frac{R \cdot a}{R - r} = \frac{3 \cdot 9}{3 - 0{,}5} = \frac{27}{2{,}5}$ $= 10{,}8$ Zoll $= A$.
2. Der davon zu nehmende Bogen $= \frac{D.360}{2A} = \frac{6.360}{2.10{,}8}$ $= \frac{2160}{21{,}6} = 100$ Grade.
3. Der Radius des kleinen Kreises, $CL = A - a$ $= 10{,}8 - 9 = 1{,}8$ Zoll.
4. Das ausgeschnittene Stück NKHLN gehörig zusammen gerollt, giebt, wenn die breite Öffnung oben hingestellt wird, den Fuß der Orgelpfeife.

Dritte Abtheilung.

Angewandte Mathematik.

§. 596. Unter dem Namen der angewandten Mathematik begreift man eine Menge solcher Wissenschaften, bei denen die Lehrsätze der reinen Mathematik als Grundlage ihrer Theorie erscheinen. Die Gränzen der reinen und angewandten Mathematik sind nie scharf bestimmt; eigentlich gehört die practische Geometrie und Körpermessung mit zur angewandten; wir wollen darunter nur diejenigen Wissenschaften begreifen, die man gemeiniglich in der Naturlehre abhandelt, und bei denen hauptsächlich Rechnungen vorkommen. Es ist nicht wohl möglich, alle in der angewandten Mathematik vorkommende Formeln stets im Gedächtnisse zu behalten; darum sind die vornehmsten derselben, den Freunden mathematischer Beschäftigungen zum Nutzen, in der folgenden Abtheilung nach Kästner's, Euler's und Klügel's Anleitung gesammelt, und mit den nöthigen Erläuterungen und Beispielen begleitet. Die Lehrer und Schüler solcher Wissenschaften werden sie bei jedem Lehrbuche mit großem Vortheil, und jeder gebildete Mann mit Zeitersparniß benutzen können, zumal da die meisten Lehrbücher nur historisch die vorkommenden Formeln berühren, und über die Rechnungen hinwegeilen.

I. Die Statik oder Mechanik

§. 597. lehrt, wie das Gleichgewicht schwerer fester Körper zu erhalten sey. Man unterscheidet dabei fol-

folgende Kunstausdrücke: Kraft heißt, was eine Wirkung hervorbringt, oder verhindert. Der Kraft steht allemal die Last entgegen, beide sind daher entgegengesetzte Kräfte. Sind beide gleich groß, so erfolgt Stillstand, Gleichgewicht; dann nennt man sie auch todte Kräfte; sind sie ungleich, so bringt die stärkere eine Wirkung oder Bewegung hervor, und heißt lebendig.

Die Schwere ist das Streben aller Körper nach dem Mittelpunct der Erde. Die Richtung der Schwere ist daher senkrecht auf der wahren Horizontallinie, welche ein Kreis ist, und aus dem Mittelpunct der Erde gezogen, mit der Oberfläche derselben parallel läuft.

Die Statik zeigt, wie diese allgemeine Eigenschaft aller Körper zu benutzen sey, um Stillstand oder Gleichgewicht, und Bewegung hervorzubringen. Diejenige Kraft, mit welcher ein Körper auf seine Unterlage drückt, heißt sein Gewicht. Die Kräfte lassen sich durch Gewichte vorstellen.

Eine Hauptrolle spielt der Hebel, der in bürgerlichen Handthierungen unter vielerlei Gestalten erscheint. Man unterscheidet einarmichte und doppelarmichte Hebel, je nachdem der Ruhepunct, oder die Unterlage in B oder A Fig. 194. ist. Der mathematische Hebel ist eine gerade unbiegsame Linie BC, die keine Schwere hat. Wenn nun in Q und P an demselben Gewichte ziehen, so kann man über ihre Verschiedenheit und den veränderten Unterstützungspunct mancherlei Rechnungen anstellen, mit denen wir uns beschäftigen wollen.

§. 598. Wenn BC Fig. 194. ein mathematischer Hebel, in A der Unterstützungspunct, und BA = AC, und Q = P, so steht alles im Gleichgewicht, denn die Kräfte auf beiden Seiten heben einander auf, oder vernichten sich gegenseitig.

Wenn BA zu AC eben das Verhältniß hat, wie P zu Q; so steht der Hebel gleichfalls im Gleichgewicht. Denn die Gewichte verhalten sich zu einander, wie die umgekehrten Entfernungen vom Ruhepuncte A. Daher die

Formel: $Q : P = AC : AB$.

Die Summe der Gewichte verhält sich zur Länge des Hebels, wie eins der Gewichte zur entgegengesetzten Entfernung vom Ruhepuncte. D. h.

Formel: $Q+P : BC = Q : AC$ oder $P : BA$. Also ist $AC = \frac{BC \cdot Q}{Q+P}$

und $AB = \frac{BC \cdot P}{Q+P}$

woraus der Ruhepunct allezeit gefunden werden kann, wenn die Länge des Hebels und die Gewichte bekannt sind.

Z. B. Es sey BC ein 4 Fuß oder 48 Zoll langes Vorgehänge (Schere) an einem Wagen, vor den man 3 Pferde spannen will; man will den Punct A finden, um welchen das Vorgehänge beweglich wird.

Hier ist $Q = 2$ und $P = 1$, d. h. in Q sollen 2 Pferde, und in C soll 1 Pferd ziehen; man sucht AC.

Nach der Formel ist $AC = \frac{BC \cdot Q}{Q+P} = \frac{48 \cdot 2}{2+1} = \frac{96}{3}$

$= 32$ Zoll.

§. 599. Die Producte aus den Gewichten und den dazu gehörigen Theilen des Hebels müssen gleich seyn, wenn Gleichgewicht statt haben soll. Man nennt dies die Momente des Hebels.

Formeln: $Q \cdot BA = P \cdot AC$.

Also ist $Q = \frac{P \cdot AC}{BA}$, und $P = \frac{Q \cdot BA}{AC}$

$BA = \frac{P \cdot AC}{Q}$, und $AC = \frac{Q \cdot BA}{P}$.

Die Unterlage trägt $Q + P$.

§. 600. Hierbei wurde angenommen, daß die Schwere des Hebels selbst, im Vergleich mit den daran wirkenden Kräften, als unbedeutend erscheine. Wo das nicht der Fall seyn kann, so muß das eigene Gewicht der BC mit in Rechnung kommen.

Es sey A die Unterlage und in H der Schwerpunct (Fig. 195.), so ist das Moment des Hebels = dem Product

duct aus dem Gewicht des ganzen Hebels in den Abstand des Schwerpuncts von der Unterlage; welches Product zu dem Product derjenigen Seite, wo der Schwerpunct liegt, addirt werden muß.

Formel: $Q \cdot BA = P \cdot AC + G \cdot AH$, wobei G = Gewicht des Hebels.

Jede dieser 6 Größen ist durch Rechnung zu finden.

Formeln:

$$Q = \frac{(P.AC)+(G.AH)}{BA}; \text{ u. } BA = \frac{(P.AC)+(G.AH)}{Q}$$

$$P = \frac{(Q.BA)-(G.AH)}{AC}; \text{ u. } AC = \frac{(Q.BA)-(G.AH)}{P}$$

$$G = \frac{(Q.BA)-((P\ AC)}{AH}; \text{ u. } AH = \frac{(Q.BA)-(P.AC)}{G}.$$

Z. B. Es sey das Gewicht $P = 1\frac{1}{2}$ ℔; $AC = 8$ Zoll; das Gewicht des Hebels $= 2$ ℔; der Abstand $AH = 2$ Zoll; der Arm $BA = 4$ Zoll; man sucht das Gewicht Q, das den Hebel im Gleichgewicht erhalten soll. —

Nach der Formel ist $Q = \frac{1\frac{1}{2} \cdot 8 + 2 \cdot 2}{4} = \frac{12+4}{4} = \frac{16}{4}$ $= 4$ ℔.

§. 601. Es kann der Hebel QP um A Fig. 196. beweglich seyn, und in eine Lage z. B. ce gebracht werden, bei welcher Veränderung die Endpuncte des Hebels Bogen, wie Pc und Qe beschreiben, die sich wie die Abstände von A verhalten.

Formel: $Pc : Qe = AP : AQ$

Also ist $Pc = \frac{Qe \cdot AP}{AQ}$; $AQ = \frac{Qe \cdot AP}{Pc}$

$AP = \frac{Pc \cdot AQ}{Qe}$; $Qe = \frac{Pc \cdot AQ}{AP}$.

Der Körper Q ist durch die Veränderung der Lage um die senkrechte Höhe de gehoben worden.

Z. B. Die Last Q solle mittelst des Hebels PQ (dessen Länge 12 Fuß, dessen Unterlage 4 Fuß von P in A), um 3 Fuß gehoben worden, wie tief wird sich der Punct P senken müssen, d. h. wie groß ist bc?

Hier steht statt Qe die de, statt Pc die bc; Qe = 3; AP = 4 und also AQ = 8 Fuß. Nach der ersten Formel ist

$$Pc = bc = \frac{Qe \cdot AP}{AQ} = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

Bei den andern Formeln wird die Frage noch nicht gelöst: wo muß der Unterstützungspunct liegen, wenn man mit einem 12 Fuß langen Hebel die Last Q um 3 Fuß heben, und P nur um $1\frac{1}{2}$ Fuß senken will? —

Man nenne AP = x, so ist QA = 12 − x. Es verhält sich aber bc : de = x : QP − x, d. i,

$$\frac{3}{2} : 3 = x : 12 - x$$

$$3x = \frac{3}{2} \cdot (12 - x)$$

$$6x = 36 - 3x$$

$$9x = 36$$

$$x = \frac{36}{9}, \text{ also } x = PA = 4 \text{ Fuß.}$$

Formel: $\frac{t \cdot l}{h + t} = x$ = dem Abstand der Unterlage von P, wobei t = bc = Tiefe; h = de = Höhe; l = Qe = Länge des Hebels.

§. 602. Es sey AB Fig. 197. ein Hebel der 2ten Art, wo der Unterstützungspunct in A, die Last P an c hängt, in B aber eine Kraft aufwärts, wie K zieht; so trägt K nur $\frac{1}{2}$ P, wenn Ac = cB, denn die Unterlage A trägt die andere Hälfte. Je näher c an A rückt, je weniger trägt K, und je länger wird cB. Hier gilt AB : P = AC : K.

Formeln: $K = \frac{P \cdot AC}{AB}$; $P = \frac{AB \cdot K}{AC}$

$$Ac = \frac{AB \cdot K}{P}; \quad AB = \frac{P \cdot Ac}{K}.$$

Die Last kann auf c liegen, oder daran hängen. Es stelle z. B. AB einen Schiebkarren vor, in A sey die Axe des Rades, und wenn AB = 6 Fuß, in einem Abstande

Ac

Ac = 2 Fuß eine Last von 240 ℔ ruht, wie viel trägt der Mensch in K davon?

Hier ist P = 240
Ac = 2
AB = 6

und nach der Formel $K = \frac{240 \cdot 2}{6} = \frac{480}{6} = 80$ ℔.

Die 2te Formel $P = \frac{AB \cdot K}{Ac}$ zeigt, wie schwer das Gewicht P seyn könne, wenn alle Umstände bleiben.

Die 3te Formel für Ac lehrt den Punct finden, wo, bei gleichen Umständen, die Last P liegen müsse; und die 4te Formel giebt die Länge des Hebels an, wenn die andern Umstände die nämlichen bleiben.

§. 603. Ein Hebel der 3ten Art ist AB Fig. 198, wo die Kraft in c wirkt, um die Last P aufwärts zu ziehen, oder zu halten. Hier muß K um so größer seyn, je näher c an A liegt. In B würde K = P seyn; wenn Ac = cB, so so ist K = 2P.

Es verhält sich Ac : AB = P : K, daher die Formeln:

$Ac = \frac{AB \cdot P}{K}$, oder $\frac{P \cdot cB}{K - P}$, $K = \frac{AB \cdot P}{Ac}$ oder $\frac{P \cdot cB}{Ac} + P$

$AB = \frac{Ac \cdot K}{P}$; und $P = \frac{Ac \cdot K}{AB}$,

wodurch jede der 4 Größen aus den übrigen zu finden ist.

§. 604. Es ziehen an dem einarmichten Hebel cb Fig. 199. die beiden Gewichte q und p niederwärts, in a ziehe eine andere Kraft den Hebel aufwärts nach ar. Soll nun Gleichgewicht statt finden, so muß $ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{p + q}$.

Die Kraft r ist gleich der Summe der Momente der abwärts ziehenden Gewichte p und q, dividirt durch ihren Abstand von c; oder $r = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{ca}$.

Wäre ca = cb, so müßte r das Gewicht p ganz, und dann noch den Theil von q tragen, der nach Verhält-

hältniß auf db fällt. Zöge r über c, so wäre ca = o, also der Bruch $\frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{o}$ eine unendliche Größe, d. h. es ist unmöglich, den Hebel wagerecht zu erhalten.

Formeln: $ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{p+q}$; $r = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{ca}$

$cd = \frac{r \cdot ca - cb \cdot p}{q}$; $q = \frac{r \cdot ca - cb \cdot p}{cd}$

$cb = \frac{r \cdot ca - cd \cdot q}{p}$; $p = \frac{r \cdot ca - cd \cdot q}{cb}$.

Der Punct a ist der gemeinschaftliche Schwerpunct von q und p.

§. 605. An einem solchen Hebel können mehr als zwei Kräfte nach einerlei Richtung ziehen, als p, q, r, s Fig. 200., dann findet man ihren gemeinsamen Schwerpunct durch die

Formeln: $ac = \frac{ab \cdot p + ad \cdot q}{p+q}$; u. $ae = \frac{ae(p+q) + af \cdot r}{p+q+r}$

$ag = \frac{ae \cdot (p+q+r) + ab \cdot s}{p+q+r+s}$.

Man bemerke, daß bei der ersten Formel p + q für eine in c, bei der zweiten p + q + r, und bei der dritten p + q + r + s für eine Größe gelten.

§. 606. Der Winkelhebel ACB Fig. 201. ist um C beweglich. Die Kräfte P und Q wirken senkrecht auf die Hebelarme, und ihr Verhältniß ist Q : P = CA : CB, daher die

Formeln: $Q = \frac{P \cdot CA}{CB}$; und $P = \frac{Q \cdot CB}{CA}$,

$CB = \frac{P \cdot CA}{Q}$; und $AC = \frac{Q \cdot CB}{P}$.

§. 607. Auf den Winkelhebel ACB Fig. 203. wirken die Kräfte P und Q unter schiefen Winkeln. Man verlangt ihr Verhältniß.

Die

Die Kraft P wirkt auf den Arm CA nur so viel, als sie auf das Perpendikel CD; desgleichen wirkt Q auf CB nur so viel, als sie auf den Perpendikel CE wirken würde. Daher die

Formel: $P : Q = CE : CD$, übrigens wie §. 606.

Die Richtungen der Kräfte schneiden sich in M. Zieht man CT mit MQ, und CV mit MP parallel, so ist im Parallelogramm MVCT die Linie CM eine Diagonale und die mittlere Richtung und Größe der wirkenden Kräfte. Auch hier verhält sich

$$MT : MV = Q : P.$$

Durch Zeichnung und Rechnung läßt sich die mittlere Richtung und Größe CM finden, wenn die Kräfte P und Q, so wie ihre Richtung oder der Winkel TMV bekannt sind.

Z. B. Es sey $P = 9$ ℔, ihre Richtung TM; $Q = 11$ ℔ und ihre Richtung MV. $< TMV = 55°49'$. Man sucht die mittlere Kraft MC.

Aufl. An den Punct M setze die Schenkel des gegebenen Winkels, mache $MT = 9$; und $MV = 11$; $TC = MV$, und $VC = TM$, so ist die Diagonale MC im Parallelogramm MTCV die Größe der mittlern Kraft.

Durch Rechnung. Ist $< TMV = TCV$, so ist $< o = 180° - < TMV$; also im Dreieck MCV die Summe der Winkel r und n; beide Seiten MV und $VC = TM$, und $< o$ bekannt; daher CM nach Tafel XII. trigonometrisch zu finden.

Bei dem angenommenen Werthe ist $MT = 9$; $MV = 11$; $CV = 9$; $< o = 180° - 55°49' = 124°11'$.

Nun ist

$$MV + VC : MV - VC = \text{Tang.}\frac{r+n}{2} : \text{Tang. des Differenzw.}$$

d. i. $20 : 2 = \text{Tang. } 27°54' : \text{Tang. } x.$

log.

log. 27° 54′ = 9,7238436
log. 2 = 0,3010300
10.0248736
log. 20 = 1,3010300
log. Tang. x = 8,7238436 — 3° 2′
Hiezu addirt 27°54′
giebt < n = 30°56′
der Unterschied giebt < r = 24°52′

Sin. r : CV = Sin. o : MC
24°52′ : 9 124° 11
log. Sin. 124° 11′ = log. Sin. 55°49 = 9,9176336
log. 9 = 0,9542425
10,8718761
log. 24° 52′ 9,6237743
log. MC = 1,2481018 = 17,705

die Größe der mittlern Kraft MC = $17\frac{7}{10}$ ℔.

Wenn an den 3 Kräften MV, VC und MC nur zwei, nebst dem Winkel bekannt sind, so läßt sich allezeit die dritte finden.

Formeln: $MV = \frac{MC . Sin. n}{Sin. o}$; $VC = \frac{MC . Sin. r}{Sin. o}$.

§. 608. Weil bei dem Maschinenwesen die Berechnung der Hebelwerkzeuge sehr wichtig ist, so hat man die gegebenen Formeln nicht nur, sondern auch folgende durch Erfahrung ausgemittelte Sätze zu behalten:

Der Mensch kann mit seinen beiden Händen eine mittlere Kraft von 102,14 ℔ drücken; $265\frac{1}{2}$ ℔ heben; 102 ℔ im Gehen ziehen. Ein Pferd zieht etwa 771 ℔.

§. 609. Vom Räderwerk.

Es sey CB Fig 204. der Radius einer cylindrischen Welle; mit derselben sey ein Rad, dessen Halbmesser CA, so bevestigt, daß es mit der Welle umgedreht werden kann. Die Last Q bestrebt sich, B herabzuziehen; die Kraft P hält ihr an A das Gleichgewicht.

Kraft und Last wirken beim Rade und Cylinder allemal nach der Richtung der Tangente. Daher könnte auch Q in q, und P in p etwa durch ein aufgewickeltes Seil ge-

gehalten werden. Dieses Werkzeug kommt häufig, und unter vielerlei Gestalten vor, als Mühlenrad, Kreuzhaspel, Winde, Göpel ꝛc., wo dann statt des großen Rades nur Arme, wie CA, angebracht sind. Zur Erhaltung des Gleichgewichts:

Formel: $P : Q = CB : CA$, wie beim Hebel;

Kraft $P = \frac{Q \cdot CB}{CA}$; der Halbmesser $CA = \frac{Q \cdot CB}{P}$;

Last $Q = \frac{P \cdot CA}{CB}$; Halbmesser d. Welle $CB = \frac{P \cdot CA}{Q}$.

§. 610. Ein Rad, an welchem nach der Richtung der Halbmesser am äußern Umfange Zähne angebracht sind, die in ein anderes greifen und es mit bewegen, heißt Stirnrad; siehe ab Fig. 205. Sind die Zähne auf der Fläche des Rades senkrecht, wie bei cd, so heißt es ein Kronrad.

Das kleinere Rad, worin das größere mit seinem Kamme eingreift, heißt das Getriebe, Triebstock, Trilling.

Wenn mehrere Räder in einander greifen, so entsteht ein Räderwerk.

§. 611. Am Rade Q Fig. 206 hängt um die Welle A eine Last P. Das Rad Q greift in das Getriebe B des Rades R, welches wieder in das Getriebe c des Rades S eingreift. Die Kraft F braucht nur sehr gering zu seyn, um der Last P das Gleichgewicht zu halten. Man erfährt die Größe der Kraft F dadurch,

daß man den Halbmesser der Welle, oder des Getriebes jedes Rades durch den Halbmesser jedes Rades dividirt, und was herauskommt, mit der Last multiplicirt.

Wenn a, b, c Halbmesser der Wellen, und q, r, s Halbmesser der Räder bedeuten, so erhält das Rad Q an seinem Umfange die Last P mit einer Kraft $= \frac{a}{q} \cdot P$.

das Rad R erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P$.

das Rad S erhält sie durch $\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P$.

For=

Formel: $F = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P.$

Es sey $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$
$q = 12$; $r = 10$; $s = 8$
die Last $P = 10$ ℔,
so ist $F = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{6}{960} \cdot 10 = \frac{60}{960} = \frac{1}{16}$ ℔.

In der Formel sind 5 Größen: 3 Räder, die Last P, und die Kraft F, welche ihr das Gleichgewicht halten soll. Jede dieser Größen läßt sich durch Rechnung finden:

Formel:

für das Rad Q, $\frac{a}{q} = \frac{F}{\frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s} \cdot P}$, und $P = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{s}}$

für das Rad R, $\frac{b}{r} = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{c}{s} \cdot P}$

für das Rad S, $\frac{c}{s} = \frac{F}{\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{r} \cdot P}$.

Man sieht leicht ein, daß F allemal ein gewisser Theil von P, folglich kleiner als P, oder ein Bruch davon seyn muß. Ist nun P und F, d. h. Last und Kraft, also $\frac{F}{P}$ gegeben, so läßt sich das Verhältniß der Räder zu ihren Wellengetrieben durch Zerlegung des Bruchs in andere Brüche finden.

Z. B. Man wollte mit 6 ℔ vermittelst dreier Räder eine Last von 100 ℔ im Gleichgewicht erhalten, wie kann das Verhältniß der Halbmesser der Räder und Getriebe seyn?

Hier ist $\frac{F}{P} = \frac{6}{100}$. Man zerlege Zähler und Nenner in 3 Factoren, als die 6 in 3.2.1; und die 100 in 5.5.4, so ist das Verhältniß der Räder $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, d. h.
des ersten Rades Halbmesser ist 5, seines Getriebes 3,
des 2ten Rades Halbmesser = 5, seines Getriebes = 2,
des 3ten Rades Halbmesser = 4, seines Getriebes = 1,

und

und $\frac{6}{100} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$. Dies Verhältniß kann unendlich mannichfach seyn, je nachdem man den Bruch $\frac{6}{100}$ zerlegt.

§. 612. Aus der gegebenen Anzahl der Zähne = z im Rade, und der Anzahl der Triebstöcke = S im Getriebe des 2ten Rades ergiebt sich, wie oft das Getriebe umläuft, ehe das Rad einmal herumkommt.

Formel: $\frac{Z}{S} = U$ = der Anzahl der Umläufe.

Z. B. ein Rad habe 360 Zähne; das eingreifende Getriebe 8 Triebstöcke, so giebt $\frac{360}{8} = 45$ Umläufe des Getriebes. Auch kann man die Umdrehung des letzten Getriebes, die einer Umdrehung des ersten Rades gehören, leicht finden.

Formel: U . u, oder $\frac{Z}{S} \cdot \frac{z}{s}$,

d. h. dividire jedes Rades Zähne durch die Anzahl der eingreifenden Triebstöcke, und multiplicire die Quotienten mit einander.

Z. B. Das Rad Q mit 360 Zähnen treibt durch einmaligen Umlauf das Rad R 45 mal = U um; das Rad R mit 100 Zähnen treibt durch einmalige Umdrehung das Getriebe c mit 5 Triebstöcken $\frac{100}{5} = 20$ mal = u um; dann läuft das Rad S unter diesen Umständen $45 . 20 = 900$ mal um, wenn Q einmal herum kommt.

§. 613. Der Flaschenzug Fig. 207. besteht aus einer Anzahl Rollen A, B, C, a, b, c, die sämmtlich um ihren Mittelpunct beweglich sind. Vom Haken F geht ein Seil um Aa Bb Cc nach R und S, woran Kräfte ziehen. Die Last hängt unten in E.

Man gebraucht dies Werkzeug, um große Lasten in die Höhe zu ziehen, und spart dadurch viel an Kräften.

Formel: Die Kraft S: Last E = 1 : 2n, wo n die Anzahl Rollen, hier = 3 bedeutet; denn die obern 3 Rollen a, b, c dienen nur dazu, die Seile zu ordnen.

Also

Also ist $S = \frac{E}{2n}$ = der ziehenden Kraft;

und $E = S \cdot 2n$ = der zu hebenden Last;

und $n = \frac{E}{2n}$ = der Anzahl der Rollen.

Mittelst dieser Formeln sind die 3 Fragen zu lösen:

1) Wie viel Kraft gehört dazu, um durch den Flaschenzug eine gegebene Last E, z. B. 612 ℔ im Gleichgewicht zu halten? — Die erste Formel giebt $\frac{612}{2.3} = \frac{612}{6}$ = 102 ℔.

2) Wie viel kann man mit einer gewissen Kraft S (hier = 102 ℔) im Gleichgewicht halten? Die Formel für E giebt 102 . 2 . 3 = 102 . 6 = 612 ℔.

3) Wie viel Rollen sind nöthig, wenn die Last E mit der Kraft S im Gleichgewicht erhalten werden soll? — Die Formel für n giebt $\frac{612}{102.2} = \frac{612}{204} = 3$.

Da sich jedes Seil um eben so viel verkürzen muß, als die Last E gehoben wird, so beträgt die Länge, die sich von R nach S abwickelt, 2nr; wobei r die Höhe, um welche E gehoben wird, bedeutet.

Von der schrägen Ebene.

§. 614. Eine Fläche kann zur Erhebung oder Senkung einer Last gebraucht werden, wenn sie so gestellt wird, daß sie mit dem Horizonte einen schiefen Winkel macht. Z. B. AB Fig. 208. macht mit der horizontalen CB einen spitzen Winkel n. Auf AB befinde sich eine Last Q, die auf Qp senkrecht ruhen würde, wenn ihr Schwerpunct unterstützt wäre. Indessen drückt sie allerdings auf die Fläche AB nach der Richtung Qp, nur nicht so sehr, als wenn sie horizontal läge; sie wird daher auf AB herabgleiten oder rollen, mit einer Kraft, die man ihr relatives Gewicht nennt. Das relative Gewicht = r verhält sich zum ganzen Gewicht = g, wie die Höhe AC = h zur Länge AB = l.

Formel: $r : g = h : l$

Also $r = \frac{g \cdot h}{l}$ = dem relativen Gewicht;

$g = \frac{r \cdot l}{h}$ = dem ganzen Gewicht;

$h = \frac{r \cdot l}{g}$ = der Höhe
$l = \frac{g \cdot h}{r}$ = der Länge
} der schiefen Ebene.

Wenn also über die Rolle R eine Kraft F auf Q wirkt, die dem relativen Gewicht von Q gleich ist, so kann Q nicht sinken. Wenn CA = AB, so fallen beide Linien in eine zusammen, und das relative Gewicht ist dem absoluten gleich.

Z. B. wenn AC = h = 4 Fuß; AB = l = 7 Fuß; Q = 6 ℔, so ist sein relatives Gewicht $= \frac{6 \cdot 4}{7} = \frac{24}{7}$ $= 3\frac{3}{7}$ ℔.

§. 615. Vom Keile.

Ein harter Körper, der eine breite Grundfläche und schiefe Seitenebenen hat, heißt ein Keil. Er kann einfach, wie CDB Fig. 209., wo er bei D rechtwinklicht; oder doppelt, CAB Fig. 210., seyn.

Bei Fig. 209. heißt CD die Höhe = h und CB die Länge = l; die Kraft F wirkt senkrecht auf DB in beiden Arten, und verhält sich zur Last Q, wie die Höhe zur Länge.

Formel: $F : Q = h : l$; also ist $F = \frac{Q \cdot h}{l}$;

$$Q = \frac{F \cdot l}{h}; \quad h = \frac{F \cdot l}{Q}; \quad l = \frac{Q \cdot h}{F}.$$

Beim doppelten Keil gelten dieselben Gesetze und Formeln, nur ist statt CD die CA zu setzen.

Je größer die Länge CB, und je kleiner die Höhe CD, desto mehr kann man mit dem Keil bei gleicher Kraftanstrengung ausrichten.

Durch

Durch die gegebenen Formeln werden 4 Fragen gelöst.

1) Die Last Q soll mit einem Keile, dessen Höhe und Länge bekannt sind, überwunden werden, wie groß muß die Kraft F seyn?

Wenn $Q = 200$ ℔; der Keil 3 Zoll hoch und 12 Zoll lang, so giebt die Formel für $F = \frac{200 \cdot 3}{12} = \frac{600}{12} = 50$ ℔.

2) Wie viel läßt sich mit diesem Keil und einer Kraft von 50 ℔ wirken? — Die Formel für Q giebt $\frac{50 \cdot 12}{3} = \frac{600}{3} = 200$ ℔.

3) Wie hoch muß ein 12 Zoll langer Keil seyn, wenn eine Kraft von 50 ℔ die Last von 200 ℔ überwältigen soll? — Die Formel für h giebt $\frac{50 \cdot 12}{200} = \frac{600}{200} = 3$ Zoll.

4) Wie lang muß der 3 Zoll hohe Keil seyn, wenn er dasselbe wirken soll? — Die Formel für $l = \frac{200 \cdot 3}{50} = \frac{600}{50} = 12$ Zoll.

§. 616. Von der Schraube.

Ein vester Cylinder, um den ein fortlaufender Keil spiralförmig gelegt ist, heißt eine Schraube. Das Gewinde wird durch den Schraubengang getrennt. Gewinde und Schraubengang werden in eine cylindrische Höhle eingelassen, welche die Schraubenmutter heißt.

Die Kraft, welche die Schraube umzudrehen strebt, verhält sich zum Widerstande, oder zur Last, wie die Entfernung E zweier Gewinde zur Peripherie P des Cylinders.

Formel: $F : Q = E : P$

Also ist $F = \frac{Q \cdot E}{P}$ = der anzuwendenden Kraft,

$Q = \frac{F \cdot P}{E}$ = der zu bezwingenden Last,

$E = \frac{F \cdot P}{Q}$ = der Entfernung der Gewinde,

$P = \frac{Q \cdot E}{F}$ = dem Umfange der Schraube,

wodurch ebenfalls 4 Fragen, die Schraube betreffend, gelöst werden.

Es sey $Q = 375$ ℔; die Entfernung der Gewinde $E = 1$ Zoll; der Umfang $P = 10$ Zoll, wie viel Kraftaufwand ist erforderlich?

Die Formel für $F = \frac{375 \cdot 1}{10} = 37\frac{1}{2}$ ℔ = dem Kraftaufwand.

§. 617. Die Schraube ohne Ende besteht in einer Schraube, welche in ein Stirnrad greift, und es um seine Axe bewegt.

Die Kraft, welche angewendet wird, die Schraube zu drehen, verhält sich zur Last oder Wirkung, wie 1 zur Anzahl der Zähne.

Formel: $F : Q = 1 : z$

Also $F = \frac{Q}{z}$; $Q = F \cdot z$; und $z = \frac{Q}{F}$.

Z. B. Es sey die Anzahl der Zähne $= z = 200$; die Kraft $F = 8$ ℔, wie viel läßt sich damit überwinden, d. h. wie groß ist Q?

Die Formel für Q giebt $8 \cdot 200 = 1600$ ℔.

Die Formel für z giebt an, wie viel Zähne das Rad haben müsse, wenn mit 8 ℔ eine Last von 1600 ℔ im Gleichgewicht erhalten werden soll.

II. Hydrostatik
oder
Lehre vom Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper.

§. 618. Tropfbar-flüssige Körper drücken nach allen Richtungen, niederwärts und seitwärts; denn

der leicht passende Pfropfen einer leeren Bouteille wird tiefer hinein gedrückt, je tiefer man dieselbe untertaucht; ein Schiff, das im Boden ein Loch bekommt, läßt Wasser durchdringen; eine Öffnung seitwärts eines vollen Wassergefäßes zeigt den Seitendruck.

§. 619. Der Druck nach unten in einem Gefäße ist einer Wassersäule gleich, welche die Grundfläche des Gefäßes zur Grundfläche, und die senkrechte Höhe des Wassers über derselben zur Höhe hat.

In einem Gefäße cabd Fig. 211. leidet ab nur den Druck von der Wassersäule gabf.

Der Seitendruck ergiebt sich, wenn man die Fläche des gedrückten Theils mit der halben Höhe des Wassers multiplicirt. $\frac{bd \cdot bf}{2}$.

Z. B. ein 20 Fuß langer Damm ist 5 Fuß unter dem Wasser; dann ist seine dem Wasserdruck ausgesetzte Fläche $20 \cdot 5 = 100$ □ Fuß. Die senkrechte Wasserhöhe ist 4 Fuß, also $\frac{100 \cdot 4}{2} = 200$ Kubikfuß, jeden zu 66 ℔ gerechnet, macht für den Seitendruck 13200 ℔.

Der Druck auf die Seitenfläche nimmt von d nach b in arithmetischer Progression ab, denn die obern Wassertheile drücken auf die untern.

Im cubischen Gefäß ist der Druck auf die Seitenfläche dem halben Druck auf die Grundfläche, und also auf alle 4 Seitenflächen dem doppelten Druck auf die Grundfläche gleich.

Der Raum BCFG Fig. 212. leidet in allen seinen Theilen der Grundfläche FG eben so viel vom Druck,

als

als wenn eine Wassermasse FEDG über ihm stände; denn Öffnungen in H oder G angebracht, spritzen mit gleicher Gewalt. Diese Eigenschaft des Wassers giebt Wasserkünsten und Leitungen ihre Kraft. Auch gründet sich hierauf die erstaunliche Wirkung der hydraulischen Presse.

§. 620. Stillstehendes Wasser stellt sich stets in die wahre Horizontallinie (s. §. 597.).

Durch das Nivelliren erforscht man, wie viel ein Punct der Erdoberfläche weiter, als der andere vom Mittelpunct der Erde absteht. Dabei ist ein Unterschied zwischen der scheinbaren und wahren Horizontallinie zu beachten. Für einen Beobachter in n Fig. 213. ist nc die scheinbare, und nm die wahre Horizontallinie; die erstere steht senkrecht auf der Richtung der Schwere na, und ist daher allzeit höher, als die wahre. Um wie viel dies für jede Entfernung betrage, läßt sich berechnen.

Es sey EnO ein Bogenstück der Erdoberfläche; a ihr Mittelpunct; nc die scheinbare, nm die wahre Horizontallinie; mc ihr Unterschied oder die Erhöhung der scheinbaren Horizontallinie. Man findet sie durch die

Formel: $\sqrt{(nc^2 + na^2)} = ac$; und $ac - am = mc$ = Erhöhung der scheinbaren Horizontallinie wobei am Halbmesser = na; nc = der gegebenen Entfernung.

§. 621. Das Nivelliren kann auf mancherlei Weise geschehen; am einfachsten aber dadurch, daß man in kurzen Entfernungen von einigen hundert Fuß senkrechte Stäbe befestigt, und mittelst einer Setzwage, oder eines andern schicklichen Instruments, das einen Lothfaden hat, und mit Dioptern oder einem Fernrohre versehen ist, die scheinbare Horizontallinie sucht, und da, wo sie den nächsten Stab trifft, ein Zeichen macht. Der Unterschied zwischen der Höhe des Diopters und des Zeichens am nächsten Stabe von der Erde ist das Gefälle, welches angiebt, wie viel der Stab höher oder tiefer, als das Instrument, steht. Setzt man dies Geschäft auch bei

den folgenden Stäben fort, und addirt die gefundenen Unterschiede, so erfährt man das Gefälle von der ganzen Linie.

Anmerk. Zu einem solchen Geschäft sind die Fig. 142. und 143 abgebildeten Instrumente sehr brauchbar; denn stellt man sie so, daß der Lotdfaden auf Nullgrad genau einspielt, so geben die Dioptern die scheinbare Horizontallinie an. — Die sogenannten Niveaus, welche aus Glasröhren bestehen, mit Quecksilber oder anderer Flüssigkeit gefüllt und bei manchem Feldmesser sehr beliebt sind, gewähren keine vorzügliche Genauigkeit, weil ihnen der Tubus fehlt, und die Oberfläche der Flüssigkeit keine genaue Durchschnittslinie erlaubt. Vorzüglich aber sind die mit einer Libelle und einem Fernrohre versehenen Instrumente.

Von dem durch das Nivelliren gefundenen Gefälle muß der Betrag der Erhöhung der scheinbaren Horizontallinie abgezogen werden. Wie viel dies für eine Weite beträgt, giebt folgende Tafel an.

Weiten	Erhöh. der scheinb. Horizontallinie.		Weiten	Erhöh. der scheinb. Horizontallinie.	
Fuß.	Zoll.	Linien.	Fuß.	Zoll.	Linien.
300	—	$\frac{1}{3}$	3300	3	6
600	—	$1\frac{1}{3}$	3600	4	—
900	—	3	3900	4	8
1200	—	$5\frac{1}{3}$	4200	5	4
1500	—	$8\frac{1}{3}$	4500	6	2
1800	1	—	4800	7	1
2400	1	$9\frac{1}{3}$	5400	8	11
2700	2	3	5700	10	—
3000	2	9	6000	11	—

Anmerk Vergleiche über dies und das Folgende Krünitz Encyclopädie, 95. Th. S. 57. Artik. Mühle.

Durch das sogenannte Rück- und Vorwärtsvisiren wird die Verbesserung der scheinbaren Horizontallinie vermieden.

§. 622. Jede Flüssigkeit, die durch keine Schranken eingeengt wird, fließt nach den Orten hin, welche dem Mittelpunct der Erde näher liegen. Daher fließen Ströme

zum

zum Weltmeere, welches, wenn es ruhig ist, eine wahre Horizontallinie, also ein Kugelstück, bildet. Ströme und Flüsse haben ein Gefälle, wovon die Geschwindigkeit ihres Laufs abhängt; der Raum, den sie ausfüllen, ist das Bett derselben.

Unter Profilöffnung eines Flusses versteht man den senkrechten Querdurchschnitt im Quadratmaaß. Fig. 214, wo aghikb das Strombett, die Linie ab die Oberfläche des Wassers vorstellt. Der Flächenraum abkga ist die Profilöffnung. Man findet ihn folgendermaßen:

Spanne eine Schnur quer über den Fluß und lasse an verschiedenen Orten, die Perpendikel cg, dh, ei, fk ꝛc. fallen, so geben diese die Tiefen an. Hiedurch erhält man die nöthigen Angaben zur Berechnung. Denn in den Trapezien cdhg, deih, efki u. s. w. weiß man die Abstände cd, de, ef ꝛc. und die Parallelen cg, dh, ei, fk, folglich läßt sich ihr Flächenraum leicht finden und addiren. Die Summe aller Trapezien und der beiden Dreiecke bei a und b macht die Profilöffnung aus.

§. 623. Um zu erfahren, wie groß die Wassermenge ist, die in einer Sekunde durch die Profilöffnung fließt, muß man die Geschwindigkeit des Flusses messen, welche fast niemals an allen Puncten gleich ist. Daher muß sie an mehrern Orten, sowol oben auf dem Wasserspiegel, als in einiger Tiefe, und auf dem Grunde gemessen werden; die erhaltenen Resultate werden addirt, und die mittlere Geschwindigkeit ist für die allgemeine zu nehmen.

§. 624. Die Geschwindigkeit des Stroms zu finden.

Spanne eine Schnur über den Fluß. Oberhalb derselben lege eine hohle Kugel ins Wasser; sobald diese an die Schnur kommt, beobachte den Zeiger einer Sekundenuhr, und gehe damit am Ufer entlang, bis die Kugel an ein gemachtes Zeichen, welches auch eine Schnur seyn kann, kommt. Die Entfernung der beiden Schnuren durch die Anzahl der verflossenen Sekunden dividirt, giebt die Geschwindigkeit in einer Sekunde.

§. 625. Die Kraft zu finden, mit welcher der Strom auf eine gegebene Fläche wirkt.

Der geschickte Mechanikus, Herr Boutkle, bediente sich bei seinen, zu diesem Zwecke hier auf der Elbe angestellten Untersuchungen, folgender einfacher Verfahrungsweise:

An dem bei B Fig. 215. mit Blei beschwerten quadratfüßigen Brett AB, welches im Strome in allerlei Höhen und Winkeln mittelst 4 feiner Schnuren, die in C zusammen laufen, gestellt werden kann, zieht man die Schnur CRG über die Rolle R. Letztere ist am Mast eines kleinen Fahrzeugs so angebracht, daß in G ein Gefäß an die Schnur gehängt, und so lange mit Wasser beschwert werden kann, bis es das Brett AB im Stillstand erhält. Die Last G ist der Kraft gleich, welche der Strom auf das Brett AB ausübt. (Hier betrug sie an verschiedenen Stellen zwischen 20 und 49 ℔ auf 1 Quadratfuß.)

Vermindert man die Last in G, so bewegt sich G nach R hinauf mit einer leicht zu beobachtenden Geschwindigkeit in Sekunden für den Raum MR in Fußen, welches bei Maschinen, die auf dem Wasser Bewegung hervorbringen sollen, ein Umstand von Wichtigkeit ist.

Läßt man die Schnur über eine Rolle in S laufen, und das Brett im Strome fortschwimmen, so ist an der Schnur sehr leicht zu finden, wie weit sich AB in 1 Minute entfernt, und wie viel die Geschwindigkeit in 1 Sekunde beträgt.

§. 626. Die vorbeifließende Wassermenge eines Stroms zu finden.

Multiplicirt man die einem Stromstrich zukommende mittlere Geschwindigkeit mit dem Quadratinhalt der Profilöffnung, so erhält man den körperlichen Inhalt der in 1″ durch dieselbe stürzende Wassermenge.

Z. B. In einem Stromstrich, dessen Profilöffnung 8 □ Fuß, sey

obere Geschwindigkeit	= 6	Fuß	
Geschwindigk. eines tief. Str.	= 5	—	6 Zoll
untere Geschwindigkeit	= 3	—	6 —
Summe	15	in 3 Theile geth., giebt	
mittlere Geschwindigkeit	= 5	Fuß in 1 Sekunde,	
mit der Profilöffnung	= 8	multiplicirt,	
giebt	40	Kubikf. Wasser in 1 Sek.	

§. 627. Wenn man an einem mit Wasser angefüllten Gefäße unterhalb der obern Wasserfläche Öffnungen anbringt, so ist die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers allemal kleiner, als die berechnete, und zwar in dem Verhältniß $5\frac{3}{8} : 8$, oder 5,375 : 8. Bei der Höhe oder Tiefe von 1 Fuß beträgt die zugehörige wirkliche Geschwindigkeit $5\frac{3}{8}$ Fuß, und ein gleiches Verhältniß findet bei jeder andern Höhe statt.

Es sey z. B. Fig. 217. an dem Gefäß ABDC eine Öffnung F 6 Fuß tief unter der Wasserfläche AB, man sucht die Geschwindigkeit des ausströmenden Wasserstrahls.

Formel: $G = 5{,}375 \cdot \sqrt{T}$; oder $5{,}375 \cdot \sqrt{6}$
$= 5{,}376 \cdot 2{,}449 = 13{,}163$ Fuß Geschwindigkeit in 1 Sekunde.

(G = Geschwindigkeit, T = Tiefe BF.)

Die ausströmende Wassermenge findet man, wenn man die Geschwindigkeit mit der Fläche der Öffnung multiplicirt.

§. 628. Die in einerlei Zeit aus verschiedenen Höhen F und D durch gleich große Öffnungen ausfließenden Wassermengen M und m verhalten sich zu einander, wie die Quadratwurzeln aus den Wasserhöhen.

Formel: $M : m = \sqrt{DB} : \sqrt{FB}$.

Der ausfließende Wasserstrahl DS bildet beinahe eine Parabel. Seine Geschwindigkeit findet man auch durch die Division des Weges OS durch die Zeit, die der Strahl gebraucht, um DO zu durchfallen. Die Zeit aber ergiebt sich aus der Fallhöhe DO.

§. 629. Wenn die Öffnung im Vergleich zur Wasserhöhe beträchtlich ist, so ist die Geschwindigkeit am obern und untern Rande der Öffnung zu suchen, und daraus und aus dem Flächenraum derselben die Wassermenge zu berechnen.

Es bezeichne B Fig. 216. den Wasserspiegel; BA die Tiefe des obern und BD des untern Randes, also AD die Öffnung, so ist BD die Axe einer Parabel, $AC = a$, und $DG = n$ sind Ordinaten, welche die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers in diesen Entfer-

nungen vom Scheitel B vorstellen. Man suche den Flächeninhalt von dem Stück ACDG.

Nenne BA = c, } so ist für den gesuchten Flächenin-
BD = d, } halt die

Formel: $\frac{2nd}{3} - \frac{2ca}{3}$ = Fläche von ACGD; welche mit der Breite der Öffnung multiplicirt, die ausströmende Wassermenge in 1″ giebt.

Z. B. Es sey die Öffnung 2 Fuß hoch und 4 Fuß breit; der obere Rand liege 1 Fuß unter der Wasserfläche, wie groß ist die ausströmende Wassermenge in 1″?

Hier ist BA = c = 1 } man sucht erst nach §. 627. die
BD = d = 3 }

Geschwindigkeiten für die Puncte A und D, d. h. die Ordinaten a und n. Die Formel war 5,375 . $\sqrt{T}$; das ist hier = 5,375 . $\sqrt{1}$ = 5,4.. = a und 5,375 . $\sqrt{3}$ = 5,4 . 1,73 = 9,34... = n.

Nun ist $\frac{2nd}{3} - \frac{2ca}{3} = \frac{2 \cdot 9{,}34 \cdot 3}{3} - \frac{2 \cdot 5{,}4}{3}$ = 18,68 − 3,6 = 15,08 □ Fuß = ACGD

mit 4 Fuß = der Breite der Öffnung multiplicirt,

giebt 60,32 Kubikfuß Wassermenge in 1″.

§. 630. Wenn der Einschnitt im Gefäße bis an den Wasserspiegel in B reicht, so ist der senkrechte Durchschnitt einer Parabel gleich, deren Fläche man findet durch die

Formel: BD . DG . $\frac{2}{3}$, wobei DG die Geschwindigkeit für den untersten Punct D bedeutet. Die so erhaltene Zahl mit der Breite der Öffnung multiplicirt, giebt den Kubikinhalt der in 1″ ausströmenden Wassermenge.

Nach vorigem §. war BD = d = 3 Fuß, DG = n = 9,34. Also $\frac{n \cdot d \cdot 2}{3} = \frac{9{,}34 \cdot 3 \cdot 2}{3}$ = 18,68

mit 4 Fuß Breite der Öffnung multiplicirt, giebt

74,72 Kubikfuß Wassermenge in 1″.

Weil 5,4 . $\frac{2}{3}$ = 3,6, so giebt dies, wenn man die Tiefe = T, die Breite = B nennt, folgende allgemeine

Fo-

Formel: $3{,}6 \cdot T \cdot B \cdot \sqrt{T}$ = der ausströmenden Wassermenge aus einer Öffnung, die zum Wasserspiegel reicht.

§. 631. Die Berechnung des Drucks des Wassers, welchen es auf die Seite oder gegen ein Schutzbrett ausübt, läßt sich aus folgender Tabelle nehmen.

Seitendruck des Wassers bei verschiedenen Standwasserhöhen auf eine quadratzöllige Fläche, in Pfunden und Lothen.

Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □ Zoll		Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □ Zoll		Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □ Zoll	
Fuß	Zoll.	℔	Loth	Fuß	Zoll.	℔	Lth.	Fuß.	Zoll.	℔	Lth.
—	1	—	1,25	2	2	1	6	4	3	4	15
—	2	—	1,75		3	1	9		4	4	21
—	3	—	2		4	1	12		5	4	27
—	4	—	3,25		5	1	15		6	5	1
—	5	—	3,75		6	1	18		7	5	7
—	6	—	4,25		7	1	22		8	5	12
—	7	—	5,25		8	1	25		9	5	18
—	8	—	5,88		9	1	29		10	5	24
—	9	—	6,25		10	2	—		11	5	30
—	10	—	7,25		11	2	4	5	—	6	4
—	11	—	7,75	3	—	2	7		1	6	11
1	—	—	8,5		1	2	11		2	6	18
	1	—	10		2	2	15		3	6	25
	2	—	12		3	2	19		4	7	—
	3	—	14		4	2	23		5	7	7
	4	—	16		5	2	28		6	7	14
	5	—	18		6	3	1		7	7	21
	6	—	20		7	3	6		8	7	28
	7	—	22		8	3	11		9	8	3
	8	—	24		9	3	16		10	8	11
	9	—	26		10	3	21		11	8	19
	10	—	28		11	3	25	6	—	8	26
	11	—	30	4	—	3	30		1	9	2
2	—	1	—		1	4	3		2	9	10
	1	1	3		2	4	9		3	9	18

Stand=

Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □Zoll.		Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □Zoll.		Standwasserhöhe.		Seitendruck auf 1 □Zoll.	
Fuß.	Zoll	℔	Lth.	Fuß	Zoll	℔	Lth.	Fuß.	Zoll.	℔	Lth.
6	4	9	27	7	7	14	8	8	10	19	10
	5	10	4		8	14	18		11	19	22
	6	10	13		9	14	28	9	—	20	2
	7	10	22		10	15	6		1	20	14
	8	10	31		11	15	16		2	20	26
	9	11	8	8	—	15	26		3	21	6
	10	11	17		1	16	5		4	21	18
	11	11	26		2	16	16		5	21	30
7	—	12	3		3	16	27		6	22	10
	1	12	12		4	17	6		7	22	22
	2	12	22		5	17	17		8	23	2
	3	13	—		6	17	28		9	23	15
	4	13	10		7	18	7		10	23	28
	5	13	20		8	18	18		11	24	9
	6	13	30		9	18	30	10	—	24	22

Mit Hülfe vorstehender Tabelle findet man den Druck gegen eine Seitenfläche, oder ein Schutzbrett bei Mühlen, indem man alle Lothe und Pfunde in der Tabelle von 1 Zoll bis zur gegebenen Standwasserhöhe addirt, und mit der Breite der Schutzöffnung multiplicirt.

Z. B. Es sey Höhe des Standwassers = 3 Fuß 11 Zoll; die Breite = 3 Fuß 2 Zoll, oder 38 Zoll; wie groß ist der Druck?

Addirt man von 1 Zoll bis 3′ 11″ zusammen, so kommen 64 ℔, welche mit 38 Zoll multiplicirt, 2432 ℔ Druck geben.

§. 632. Wenn Druck und Gegendruck sich das Gleichgewicht halten, so erfolgt Stillstand, und die Kräfte heißen todte Kräfte. Soll nun eine Bewegung erfolgen, so muß auf einer Seite ein Übergewicht, eine lebendige Kraft vorhanden seyn. Beim Mühlenwesen nimmt man an, daß sich die lebendige Kraft zur todten verhalte, wie 9 : 4. Um nun zu finden, ob der Druck z. B. von 2432 ℔ wol im Stande sey, ein Mühlwerk zu treiben, das 1080 ℔ todte Kraft hat, setzt man

4 : 9

4 : 9 = 1080 ℔ : x

und findet, daß 2430 ℔ für die lebendige Kraft erforderlich sind, welche von 2432 noch übertroffen werden.

§. 633. Die folgenden Aufgaben lassen sich mittelst der Tabelle §. 631. lösen.

1. Die lebendige Kraft von 2430 ℔ ist gegeben, man sucht die Schutzöffnung, wenn die Standwasserhöhe 3 Fuß 11 Zoll ist.

Aufl. Addire in der Tabelle von 1 Zoll bis 3′ 11 = 64 ℔, und setze

64 ℔ : 1 Zoll breit = 2430 ℔?

Man wird 38 Zoll Öffnung finden.

2. die todte Kraft einer Maschine = 1109⅓ ℔, Höhe des Standwassers = 3 Fuß 8 Zoll; man sucht die Breite des Schutzes, die zur todten Kraft gehört, die lebendige Kraft, und die dazugehörige Schutzbreite.

Aufl. Addire in der Tafel von 1″ bis 3′ 8″, welches 52 ℔ giebt. Dann setze 52 ℔ : 1″ = 1109⅓? Man wird 21 Zoll 4 Linien Schutzbreite finden, welche hinlänglich ist, wenn der Wasserdruck die Maschine im Gleichgewicht halten soll.

Die lebendige Kraft findet man 4 : 9 = 1109⅓ : 2496 ℔. Hiezu die Schutzbrettbreite 52 ℔ : 1 Zoll = 2496 ℔ : 48 Zoll.

3. Die Breite des Schutzes ist gegeben = 4 Fuß; man sucht die Höhe des Standwassers, welche erfordert wird, eine Gewalt von 2496 ℔ auszuüben.

Aufl. Man dividire 4 Fuß oder 48 Zoll in 2496 ℔; der Quotient ist 52. Nun addire man in der Tabelle von 1 Zoll an die Lothe und Pfunde, bis man 52 ℔ hat, so findet man bei der letzten Zahl die gesuchte Standwasserhöhe = 3 Fuß 8 Zoll.

§. 634. Friction oder Reibung ist der Widerstand, den die Körper bei ihrer Bewegung äußern, und hat ihren Grund in dem Eindrücken vermöge ihrer Schwere. Die Reibung ist nicht bei allen Körpern gleich, und bei den schweren und rauhen größer, als bei den leichten und glatten. Dabei ist zu merken, daß bei Berechnung der Rei-

Reibung eine möglichst größte Glätte der sich reibenden Körper vorausgesetzt, und dann die Reibung bloß nach der Schwere derselben beurtheilt wird, die reibenden Flächen mögen groß oder klein seyn. Ein Centner Eisen wird mit einer gleichen Kraft über eine Fläche gezogen, er berühre sie mit 1 oder 100 Quadratzoll; denn im ersten Falle ruht eine große Last auf einem kleinen Raum und drückt sich um so tiefer ein.

§. 635. Um die Reibung einer Maschine z. B. einer Mühle zu berechnen, muß man zuvörderst wissen,

1. wie stark die Reibung der gebrauchten Holzart, des Stahls, Eisens und Steins auf einander ist;
2. wie schwer die reibenden Körper sind, wobei ihr Kubikinhalt und specifisches Gewicht bekannt seyn muß;
3. alsdann die Halbmesser der Räder und Zapfen mit einander vergleichen, und untersuchen, wie viel Kraft dazu am Umfange der Räder nöthig ist, um der Reibung das Gleichgewicht zu halten.

Hiebei dienen folgende kleine Tabellen.

Tafel I. 50 ℔ Hainbüchenholz auf sich selbst hat 25 ℔ 8 Lth. Reibung

50 — Stahl auf Stahl	6	18 —	—
50 — Stahl auf Stein	8	5 —	—
50 — Stahl auf Messing	7	19 —	—
50 — Eisen auf Stein	14	27 —	—
50 — gegoss. Eis. a. Stein	12	12 —	—

Wenn die Flächen aber Fett erhalten, so geben

50 — Hainbüchenholz auf selbigem, mit Wasserblei bestrichen	15	℔ 10	Lth.
50 — Stahl auf Stahl .	5	— —	—
50 — Stahl auf Messing .	4	— 2	—
50 — Stahl auf Stein .	5	— 31½	—
50 — geschmied. Eisen auf Stein	6	— 24	—
50 — dasselbe mit Wasser .	12	— 5	—
50 — gegossen Eisen auf Stein	10	— 6	—
50 — dasselbe mit Wasser .	6	— 24	—

Tafel II. Es wiegt 1 Kubikfuß Eichenholz 77 ℔
nasses . . . . 80 —
Büchenholz . . . 56 —
Hainbüchenholz . 59 —

Tannenholz . .	36 ℔
nasses	39 —
geschlagenes Eisen	514 —
Gußeisen . . .	475 —
Stahl	517 —
weißer Sandstein .	174 —
Ahornholz . . .	50 —
Erlenholz . . .	53 —
Birnbaumholz . .	44 —
Lindenholz . . .	40 —
Ulmenholz . . .	44 —
Weißdorn . . .	50 —

§. 636. Der körperliche Inhalt der reibenden Körper multiplicirt mit dem Gewicht eines Kubikfußes ihrer Masse giebt das Gewicht derselben. Aus der Tafel I. findet man durch den einfachen Dreisatz die Reibung des ganzen Körpers.

Wir wollen an einem Beispiel das Verfahren zeigen, und die Berechnung der Reibung an einer Wassermühle dazu wählen.

a. Es sey die Schwere der Wasserwelle berechnet

zu	6035 ℔	12 Loth.
die Schwere der Blattzapfen	171 —	14 —
der 6 Bänder	87 —	5 —
Schwere der Schaufeln und anderes Holzwerks des Rades .	4125 —	5 —
des Kammrades	944 —	19 —
der Kammköpfe	35 —	7 —
Summe der ganz. Last a. d. Wellzapfen	11398 ℔	29 Loth.

b. Der Mühlenstein zu 21 Kubikfuß = 3630 ℔

Schwere des Mühleneisens .	= 96 —	8 Lth.
des Getriebes	= 73 —	23 —
Schwere d. Rihns u. Warzenringes	= 24 —	19 —
Summe d. ganz. Schw. a. d. Mühleisen	= 3824 ℔	18 Lth.

Die Reibung findet nun statt:

1. an den Wellzapfen auf ihren steinernen Lagern;
2. an den Kämmen und Stöcken;
3. an der Spitze des Mühleneisens in der Pfanne;

4. an

4. an dem Mühleneisenhalse im Busch;
5. an den Mühlensteinen, wenn sie geschärft sind, und hartes Korn geschroten wird.

Der eine Wellzapfen läuft auf Stein in Wasser, der andere in Fett, folglich nimmt man das Mittel aus den Angaben der Reibungen in der Tafel.

50 ℔ Eisen auf Stein in Fett hat Reibung 6 ℔ 24 Lth.
in Wasser . . 10 — 13 —

17 — 5 —

Mittlern Zahl für die Reibung 8 ℔ 18½ Lt.

Nun setzt man auf 50 ℔ : 8 ℔ 18½ L. = 11398 ℔ 25 L.? und findet die Reibung der Wellzapfen auf ihren steinernen Lagern = 1955 ℔ 20 Loth.

Ferner: 50 ℔ Stahl auf Stahl : 5 ℔ = 3824 ℔ 18 L.? und findet die Reibung des Mühleisens auf der Spitze = 382½ ℔.

Die Reibung der Mühlensteine und des Getriebes, so wie die des Mühleisens im Busch haben Versuche bestimmt = 1507 ℔.

Man suche nun die todte Kraft, welche der Reibung das Gleichgewicht hält, aus den Halbmessern der Wellzapfen und Umfänge der Räder und Getriebe folgendermaßen:

Halbmesser des Getriebes = 6 Zoll,
— der Mühleisenspitze = ¾ —

daher setze 6 : ¾ = 1507? und findet 188¼ ℔, welche, an der Peripherie des Getriebes angewendet, der Reibung des Mühlensteins, Getriebes, Mühleneisens ꝛc. das Gleichgewicht halten.

Wenn dies Gewicht an das Kammrad gelegt wird, so findet man die Reibung, welche es in den Kämmen und Stöcken verursacht, aus

50 ℔ : 15 5/16 ℔ = 188¼ ℔? und findet beinahe
59 ℔
hiezu obige 188¼ —
Summe 247¼ ℔.

welches Gewicht an die Peripherie des Kammrades gelegt wer-

werden müßte, um das Gleichgewicht von 1507 ℔ zu erhalten.

Die Reibung der Wasserwelle betrug 1955 ℔.

Halbmesser des Zapfens = $1\frac{1}{2}$ Zoll; des Umfangs = 102 Zoll. Also 102 : $1\frac{1}{2}$ = 1955 ℔?

und findet 29 ℔

hiezu obige $247\frac{1}{4}$ —

Summe $276\frac{1}{4}$ ℔.

Halbmesser des Kammrades = 54 Zoll; des Wasserrades = 102 Zoll. Also 102 : 54 = $276\frac{1}{4}$? und findet $146\frac{3}{4}$, welche die todte oder erhaltende Kraft an der Peripherie des Wasserrades für das ganze Mühlenwerk ist.

Die lebendige Kraft, welche die Mühle in die beste Schnelligkeit bringt, findet man durch

4 : 9 = $146\frac{3}{4}$?

= $329\frac{1}{16}$ ℔, woraus sich nach §. 633. die Schutzöffnung ergiebt.

§. 637. Körper, die auf dem Wasser schwimmen, sind specifisch leichter, als eine gleich große Wassermenge; diejenigen, welche mit der von ihnen weggedrängten Menge Wasser gleiche Schwere haben, bleiben im Wasser überall stehen; und diejenigen, welche mehr specifische Schwere haben, als eine Wassermenge von gleichem Umfange, sinken mit dem Überschuß ihres specifischen Gewichts, das man respectives Gewicht nennt, unter.

Daher beträgt der Verlust am Gewicht, den ein Körper bei seinem Einsinken in Flüssigkeiten erleidet, genau so viel, als das Gewicht des aus seiner Stelle gedrängten Theils der Flüssigkeit; ein Kubikzoll Blei und ein Kubikzoll Holz verlieren beim Einsinken gleichviel an ihrem Gewicht.

§. 638. Man hat die eigenthümlichen (specifischen) Gewichte vieler Körper mit dem des reinsten Regenwassers verglichen, und letzteres zur Einheit angenommen.

Tafel

Tafel über die eigenthümlichen Gewichte der Körper.

Japanisches Kupfer	8,727	weißer Sand . .	2,631
Schwedisch gegossenes Kupfer .	8,333	Ziegelsteine . .	2,006
geschlagenes	8,784	Tannenholz . .	0,55
gegossenes Messing	8,	Ahornholz . .	0,75
geschlagenes . .	8,349	Erlenholz . . .	0,8
feines gegossenes Silber . . .	11,091	Aloeholz . . .	1,177
geschlagenes	10,5	Brasilienholz . .	1,031
feinstes Gold . .	19,64	Holländ. Buxbaum	1,328
Dukatengold, gegossen . . .	17,017	Türkisches . .	0,919
geschlagen	18,588	Campecheholz .	0,913
Wißmuth . .	9,7	Cedernholz . .	0,613
bester Stahl, weich	7,768	Kirschholz . . .	0,715
geschlagen	7,895	Citronholz . .	0,726
Roheisen . . .	7,207	Ebenholz . . .	1,209
Stangeneisen . .	7,788	Buchenholz . .	0,852
geschlagen	7,875	Fernambukholz .	1,014
reines Queckfilber	14,	Eschenholz . .	0,734
deutsches reines Blei	11,445	Mahagoniholz .	1,063
reines englisches Zinn	7,331	(manches ist leichter)	
deutsches	7,215	Weißdornholz .	0,757
gegossener Zink .	9,355	Apfelholz . . .	0,793
	(7,245)	Pappelnholz . .	0,383
Platina, gegossen	19,5	Pflaumenholz .	0,785
geschlagen	22,1	Birnbaumholz .	0,661
Achat	2,628	altes Eichenholz .	1,166
Diamant . . .	3,476	Weidenholz . .	0,585
Alabaster . . .	1,872	Kork	0,24
blauer Schiefer .	3,5	Lindenholz . .	0,604
Magnet . . .	4,585	Ulmenholz . .	0,671
italiänischer Marmor	2,7	Weißer Zucker .	1,606
Porzellan . .	2,363	Pech	1,15
Kieselstein . . .	2,542	Bernstein . . .	1,065
Smaragd . . .	2,777	Schwefel . . .	1,8
gute Gartenerde .	1,63	Alaun	1,714
weißes Glas . .	3,15	Pottasche . . .	3,112
grünes . . .	2,666	Vitriol . . .	1,88
		Rindertalg . .	0,955
		Hammeltalg . .	0,943
		Schweineschmalz .	0,954

El-

Elfenbein . . .	1,825	Scheidewasser .	1,3
Hirschhorn . .	1,875	Kuhmilch . . .	1,03
Perlen . . .	2,75	Urin	1,016
Hühnereier . .	1,09	Leindl	0,932
Honig	1,45	Baumöl . . .	0,913
Wachs . . .	0,96	Rüböl . . .	0,853
Regenwasser.	1.	Vitriolöl . . .	1,7
Seewasser . .	1,03	Alkohol . . .	0,815
Brunnenwasser .	0,999	atmosphärische Luft	0,0015
Flußwasser . .	1,009		

Mittelst vorstehender Tafel findet man das Gewicht eines Kubikfußes eines Körpers, wenn man seine eigenthümliche Schwere, mit 66 (dem Gewicht des Regenwassers) multiplicirt.

Z. B. man will wissen, wie schwer 1 Kubikfuß geschlagene Platina sey? — In der Tafel ist ihr eigenthümliches Gewicht = 22,1, d. h. sie ist $22\frac{1}{10}$ mal schwerer, als Regenwasser, wovon 1 Kubikfuß 66 Pfund wiegt, folglich 66 . 22,1 = 1458,6 Pfund = Kubikfuß Platina.

Bei vielerlei Rechnungen ist es oft zu wissen nöthig, wie schwer 1 Kubikfuß eines Körpers sey, daher ist diese Tafel eine der nützlichsten.

§. 639. Durch das Abwägen in Wasser zu erfahren, wie viel in einer Mischung zweier Metalle, z. B. Silber und Kupfer, von beiden enthalten sey.

Das specifische Gewicht einer Mischung = M,
— — — des schwerern Metalls = A, seine Menge x;
— — — des leichtern Metalls = B, seine Menge z;

Gleichungen: $x : z = A . (M - B) : B . (A - M$; und $x + z = M$, und daraus die Werthe gehörig abgesondert, giebt die

Formel: $\frac{A.M - A.B}{A - B}$, oder $\frac{(M - B) . A}{A - B} = x$,

wodurch das Verhältniß des schweren Metalls zum leichtern z gefunden wird.

Z. B.

Z. B. Es sey specifisches Gewicht des Silbers = 11,09; des Kupfers = 8,33; der Mischung = 10,24; so ist

x : z = A . (M — B) : B . (A — M)
= 1109 . (1024 — 833 : 833 . (1109 — 1024)
= 1109 . 191 : 833 . 85
= 211819 : 70805, die fast wie 3 : 1.

Die Formel $\frac{(M-B).A}{A-B}$ giebt für x = 767,46, also muß z = 256,54 seyn, denn 1024 — 767,46 = 256,54, welches auch fast wie 3 : 1 ist. Die Mischung war daher 12löthig.

Wäre nun eine gewisse Quantität = Q von der Mischung gegeben, so müßte $\frac{3Q}{4}$ = der Menge des schwerern Metalls, und $\frac{1}{4}$ Q der Menge des leichtern Metalls seyn.

§. 646. Ohne die Kenntniß der specifischen Schwere der Metalle aus den Verlusten, die sie im Wasser erleiden, zu finden, woraus eine Mischung bestehe.

Der Unterschied der Verluste bei gleicher Menge verhält sich zum Unterschied des kleinern Verlustes und des Verlustes der Mischung, wie die ganze Mischung, zum Antheil desjenigen Metalls, das im Wasser am meisten verliert.

Z. B. 37 ℔ Zinn verlieren im Wasser 5 ℔, und 23 ℔ Blei verlieren im Wasser 2 ℔; eine Mischung von Zinn und Blei, 120 ℔ schwer, verliert im Wasser 14 ℔. Wie viel Blei und Zinn ist in der Mischung?

37 : 5 = 120 ℔ : 16,216
23 : 2 = 120 — : 10,435

Unterschied der Verluste = 5,781 bei gleicher Menge.
Verlust der Mischung = 14
Verlust der leichtern Sorte = 10,435

Unterschied = 3,565

5,781 : 3,565 = 120 ℔ : 74 ℔ Zinn,
folglich 46 — Blei.

All-

Allgemein: Schwere der Mischung = p, Verlust im Wasser a ℔.
Das Metall A verliert auf p ℔ im Wasser b ℔.
Das Metall B verliert auf p ℔ im Wasser c ℔.

Formel: $\frac{(c-a) \cdot p}{c-b} = A$; und $\frac{(a-b) \cdot p}{c-b} = B$.

§. 641. Dinge, die specifisch schwerer sind, als Wasser, auf demselben schwimmend zu machen.

Man mache sie hohl, oder gebe ihnen eine solche Form, daß die von ihnen weggedrängte Wassermenge mehr wiegt, als sie wiegen. Es kommt dabei darauf an, die Menge Wasser zu finden, die mit dem schwerern Körper, der zum Schwimmen gebracht werden soll, gleichviel wiegt; die Gestalt des Körpers muß so viel Umfang erhalten, als die gleich schwere Wassermenge hat.

Formeln: rm = p = dem Gewicht des Körpers;

$\frac{p}{m} = r$ = dem Raum oder Umfange mit der Höhlung.

$\frac{p}{r} = m$ = dem Gewicht von 1 Kubikfuß Wasser.

Z. B. 30 ℔ Metall sollen in Gestalt einer Kugel auf einer Flüssigkeit, wovon 1 Kubikfuß 64 ℔ wiegt, schwimmen. Man sucht den Raum r, den sie einnehmen muß.

$$r = \frac{p}{m} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32} = 0{,}46875 \text{ Kubikfuß}$$
$$= 468{,}75 \text{ Kubikzoll.}$$

Verwandelt man 468,75 Kubikzoll in eine Kugel, so findet man nach §. 573 ihren Durchmesser = 9,6395 Zoll. Die Kugel muß demnach so weit hohl getrieben werden, bis ihr ganzer Diameter so viel beträgt.

Wäre eine solche Kugel nicht hohl, so würde sie 261,5625 ℔ wiegen, den Kubikfuß zu 558 ℔ gerechnet; sie

sie wiegt aber nur 30 ℔, folglich beträgt der hohle Raum so viel, als eine metallne Kugel, die 231,5625 ℔ wiegt. Diese letztere müßte 9,256 Zoll im Durchmesser haben.

Die hohle Kugel, deren Durchmesser = 9,6395 Zoll ist, schwimmt oder schwebt im Wasser, nicht auf demselben; soll letzteres geschehen, so muß sie noch etwas größer werden.

§. 642. Die Bestandtheile des reinen Wassers sind: 85 Theile Lebensluft und 15 Theile brennbarer Luft (dem Gewicht nach). Beide Luftmischungen durch electrische Funken entzündet, geben so viel Wasser, als die Mischung wog, weniger $\frac{1}{500}$.

Wasser wird durch das Gefrieren zu Eis und um $\frac{1}{10}$ größer oder ausgedehnter; wird es aber durch Hitze in Dampf verwandelt, so nimmt es einen 1700 bis 1800-mal größern Raum ein, als im tropfbaren Zustande.

In 24 Stunden kann das Wasser, selbst bei der Kälte, den 5ten, ja sogar den 4ten Theil, an der Luft durch Ausdünstung verlieren.

III. Von der Luft und dem Barometer.

§. 643. Wir befinden uns auf dem Grunde einer höchst feinen, durchsichtigen, elastischen, zusammendrückbaren Flüssigkeit, die wir Luft nennen, und deren Höhe vielleicht nicht über 10 Meilen beträgt. Daß die obern Luftschichten auf die untern drücken, letztere daher dichter sind, beweisen vielfache Versuche. Auch in Absicht ihrer Höhe und Dichtigkeit erleidet die Luft vielerlei Veränderungen, wie der verschiedene Barometerstand bestätigt.

Luftleere Gefäße wiegen weniger, als mit Luft angefüllte; daher hat sie eine Schwere. Ein Kubikfuß Luft wiegt etwa 2 Loth.

§. 644. In einer oben verschlossenen und unten offenen Röhre AB Fig. 218. wird eine Wassersäule von 32 bis 33 Fuß bloß durch den Druck der Atmosphäre gegen B erhalten; indem der Raum AC durch das Herab-

sinken

sinken des Wassers luftleer wird, strebt die äußere Luft nach C, und hält der Wassersäule BC das Gleichgewicht. Ist die Röhre mit Queckſilber gefüllt, so bleibt es nur 28 Zoll hoch darin hängen; woraus folgt, daß die ganze auf BC drückende Luftsäule eben so viel wiegt, als eine Wassersäule von 32 bis 33 Fuß, oder als eine Queckſilbersäule von etwa 28 Zoll Höhe.

Daher muß Queckſilber 14 mal schwerer, als Wasser, und dieses wieder etwa 802 schwerer, als Luft seyn.

Auf die Oberfläche eines Menschen, von 10 □ Fuß, drückt die Atmosphäre mit einem Gewicht von 20480 ℔; denn eine Wassersäule von 10 □ Fuß Grundfläche und 32 Fuß Höhe ist der auf ihn drückenden Luftmasse gleich, die er aber nicht fühlt, weil ihre Wirkung von allen Seiten gleich ist.

§. 645. Der Druck der Luft muß abnehmen, je höher, und zunehmen, je tiefer man steht, denn die Luftsäule wird verkürzt und verlängert durch die Höhe oder Tiefe des Standpuncts.

Das bekannte Barometer dient als Messer der Luftsäulenlänge, welche dem Queckſilber in der Röhre das Gleichgewicht hält. Im Thale steht es höher, auf hohen Bergen tiefer. In der Röhre AB Fig. 219. wird die Queckſilbersäule BC durch den Druck, welchen die Öffnung unten an der bei B gekrümmten Röhre, der Atmosphäre verstattet, gehalten. Unter dem Ausdruck Barometerstand versteht man die Länge BC, von der Oberfläche des Queckſilbers in der Kugel bis zum Anfange des luftleeren Raumes in C. Beide Puncte B und C sind veränderlich. Denn gesetzt C sinkt um eine Linie, so steigt das Queckſilber in der Kugel um etwas; um nun den Punct B so viel als möglich beständig zu haben, macht man die Kugel recht weit, damit eine Vermehrung der Queckſilbermasse in der Kugel nicht die horizontale bB zu merklich verändere. Den Raum BA theilt man in Zolle und Linien (gemeiniglich in Pariser Maaß, weil die Deutschen sich über ein allgemeines Längenmaaß bisher nicht vereinigen konnten).

Anmerk: Das vollständigste Werk über Barometer und Thermometer hat J. F. Luz in seiner Beschrei-

bung aller bekannten Barometer und Thermometer ꝛc. Leipz. 1784. geliefert. Die Heberbarometer geben nur allein eine richtige Horizontalebene, und alle andere Gefäßbarometer müssen nach ihnen berichtigt werden, denn der leztern Horizontalebene liegt stets um einige Linien tiefer, als die Oberfläche des Queckfilbers im Gefäß, woran die Adhäsion schuld ist. — Gute Barometer müssen ausgekocht und so von aller Luft gereinigt werden. Dabei ist viel Vorsicht nöthig. — Es ist gut, wenn man bei jeder Beobachtung das Barometer etwas anstößt, um der Adhäsion entgegen zu wirken. — Das Leuchten der Barometerröhren im Dunkeln ist kein sicheres Kennzeichen ihrer Güte, und beweist, daß noch Luft in der Spitze vorhanden ist.

Steigt man mit dem Barometer 78 Fuß höher, so sinkt das Queckfilber um eine Linie. Die untern Luftschichten sind in ihrem eigenthümlichen Gewicht noch nicht sehr verschieden, aber je höher man steigt, desto schneller nimmt ihre Schwere ab. Diese Abnahme geschieht in einer geometrischen Progression.

§. 646. An der See ist der mittlere Barometerstand = 28 Zoll 1 Linie, und nach andern Beobachtungen = 28″ = 336 Linien Pariser Maaß. An jedem höher gelegenen Orte wird der mittlere Barometerstand weniger betragen. Wenn man denselben an zwei verschiedenen Orten genau beobachtet, so läßt sich berechnen, wie viel der eine Ort höher liegt, als der andere. Steht das Barometer z. B. an der See 336 Linien; und 78 Fuß über der See, nur 335 Linien hoch, so machen die Barometerhöhen für jede Zunahme von 78 Fuß Höhe des Standorts eine geometrische Progression aus, deren Exponent $\frac{335}{336}$ ist. Wenn man daher die Standhöhe = h aus der Barometerhöhe = b finden will, so muß man den Unterschied der Logarithmen der Barometerhöhen b und b′ durch die Zahl 0,0012945 dividiren, und den Quotienten durch 78 multipliciren. Diese Regel giebt das

1. Formular: $\frac{\log. b' - \log. b}{0{,}0012945}$. 78 = h = Höhe des Standorts.

(wobei

(wobei die Zahl 0,0012945 der Unterschied der Logarithmen der Zahlen 336 und 335, als des Exponenten der Progression ist.)

Oder wenn man die Höhe der Toisen, zu 6 Fuß, sucht.

2. Formular: $10000 \cdot (\log. b' - \log. b) = h$ in Toisen.

Z. B. es sey Barometerstand an der See
$= 336$ Linien $= b'$
zu Leipzig $= 328{,}6$ $= b$

so ist log. 336 $= 2{,}5263393$
log. 328,6 $= 2{,}5166676$

Unterschied $= 0{,}0096717$, multiplicirt mit 10000

giebt $= 96{,}717 \ldots\ldots$ Toisen $= h$
6

$580{,}302 =$ Fuß, oder 580 Fuß 3 Zoll über der See.

Sucht man aus der bekannten Erhöhung eines Orts die Barometerhöhe, so giebt sie folgendes

3. Formular: $\log. b' - \frac{h}{10000} = \log. b = \log.$ der Barometerhöhe.

Z. B. wenn die Werthe wie vorher genommen werden, so ist

$\log. b, = 2{,}5263393$

und $\frac{h}{10000} = \frac{96{,}7..}{10000} = 0{,}0096717$

$\log. b = 2{,}5166676$, wozu die Zahl 328,6 gehört, welche die gesuchte Barometerhöhe in Linien ist.

In Vega's Handbuche finde ich folgende

4. Formel: $24887 - 9856. \log. b = h =$ Standhöhe in Toisen über der See.

Und der Höhenunterschied zweier Orte, deren mittlere Barometerstände b' und b sind, wird durch die

5. Formel: 9856. (log. b′ — log. b) = h in Pariser Toisen, oder fast
10000. (log. b′ — log. b) = h in Wiener Klaftern gefunden.

Man wähle von diesen Formeln.

§. 647. Um die mittlere Barometerhöhe eines Orts zu bestimmen, muß man ein in französische Zolle und Linien eingetheiltes Barometer lange Zeit, wenigstens einige Jahre, sorgfältig beobachten, und aus dem höchsten und tiefsten Stand des Queckſilbers den mittleren ableiten.

Z. B. Es war nach mehrjähriger Beobachtung

höchster Stand = 28″ 4‴
tiefster Stand = 26 9
Barometerveränderung = 1″ 7‴
Hälfte = —″ 9‴ 5
zum tiefsten addirt = mittl. Stand = 27″ 6‴ 5.

Also ist b, oder der mittlere Barometerstand = 330,5 Linien, welcher bei der Rechnung zu nehmen ist.

Anmerk. Genauer ist das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen.

§. 648. Man hat Barometertafeln, in denen für jeden Barometerstand die Höhe des Standpunctes über der See angegeben ist. Allein

will man aus einer einzigen Beobachtung des Barometers den Höhenunterschied zweier Orte berechnen,

so muß die Verschiedenheit der Wärme an beiden Orten, wodurch die Queckſilbersäule auch verändert wird, mit in Anschlag kommen. Bei 80° Wärme bis zum Eispunct des Thermometers wird die Queckſilbersäule von 324‴ im Barometer um 5½ Linie verkürzt, wovon nur allein die Wärme die Ursache ist. Sind nun z. B. die Barometertafeln für 10° Wärme berechnet, und das Thermometer zeigte bei der Beobachtung 13° Wärme (also + 3 mehr), so ist die Verbesserung = c einer Barometerhöhe von 327‴ folgendermaßen zu finden:

$$\frac{324}{80} : 5{,}5 = \frac{327'''}{3}$$

$$\frac{}{25920} \qquad \frac{}{981} \quad \text{und} \quad \frac{981 . 5{,}5}{25920} = 0{,}2 \text{ Linien}$$

Verbesserung, um welche 3° Wärme die Quecksilbersäule verlängert hat. Und 327 — 0,2 = 326,8 Linien wahre Barometerhöhe, wozu dann die Höhe aus den Tafeln zu finden ist. — Wäre die Wärme 7° gewesen, so müßte die Correction aus 3°, welche auch 0,2 Linien beträgt, zur Barometerhöhe addirt werden, um die wahre zu erhalten.

Formel für die Verbesserung: $\frac{b . t . 5{,}5}{25920} = c$,

wobei t den Unterschied zwischen der beobachteten und derjenigen Wärme, für welche die Tafeln berechnet sind; b den Barometerstand bedeutet.

Die Höhe der meisten Gebirge ist mit dem Barometer gemessen, und seitdem man bequeme Reisebarometer hat, ist die Höhenmessung mit demselben ein Lieblingsgeschäft fast aller Reisenden. Wer ohne Logarithmen aus den beobachteten Barometerständen die Höhe eines Berges berechnen will, dem empfehlen wir ein sehr schätzbares Werkchen:

M. v. Lori Tabellen zum Gebrauche bei Höhenmessungen mit dem Barometer ꝛc. Freiburg und Konstanz, 1811. Preis 6 Gr.

E. Garthe Tabellen für bar. Höhenmessungen ꝛc. Gießen. 12 Gr.

§. 649. Die Ausdehnung der Luft von der Wärme soll, nach einigen Naturforschern, vom Eispunct bis zum Siedepunct $\frac{2}{5}$ ihres Volumens betragen.

Die Federkraft der Luft soll in verschlossenen Gefäßen beim Übergange von der völligen Trockenheit zur völligen Nässe um $\frac{4}{761}$, und $\frac{1}{100}$ verstärkt werden. Die Luft besteht aus vielerlei Gasarten, die man einzeln gewogen hat. Das absolute Gewicht eines Kubikzolles von

Atmo-

Atmosphärischer Luft = 0,46005 Gran franz. Med.
Lebensluft = 0,50695 Gewicht.
Stickgas = 0,44444
Brennbarem Gas = 0,03539
Salpetersaurem Gas = 0,54690
Ammoniakgas = 0,27488
Kohlensaurem Gas = 0,68985
Schwefelsaurem Gas = 1,03820.

Die leichteren Luftarten steigen in schwerern in die Höhe. Die brennbare Luft ist die leichteste, und daher zur Füllung der Luftbälle sehr geeignet.

IV. Vom Thermometer und dem Wärmestoff.

§. 650. Der Wärmestoff ist in der ganzen Natur verbreitet, theils gebunden, theils frei. Im freien Zustande wirkt er auf unser Gefühl, ist expansibel, unsichtbar, geschmack- und geruchlos, dem Gesetze der Verwandtschaft folgend, alles durchdringend, nach dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate des Abstandes vom Ursprunge sich ausbreitend, zurückstrahlend (z. B. durch Hohlspiegel), die Körper ausdehnend, trennend ꝛc.

§. 651. Auf der ausdehnenden Eigenschaft der Wärme beruht die Einrichtung des Thermometers oder Wärmemessers. Dies Instrument Fig. 220. besteht in einer oben verschlossenen, luftleeren, unten mit einer Kugel versehenen Glasröhre, die bis auf einen gewissen Punct mit Quecksilber oder Weingeist, welche Massen sich durch die Wärme sehr leicht und merklich ausdehnen, angefüllt wird.

Vorzüglich wichtig sind an demselben 2 Puncte S und E. An dem sogenannten Reaumürschen Thermometer, welches am häufigsten gebraucht wird, findet man den Punct E dadurch, daß man es in gefrierendes Wasser oder Schnee setzt, und den Punct bemerkt, auf welchen das Quecksilber herabsinkt. Man bezeichnet ihn mit Null und nennt ihn Eispunct. Ferner setzt man

die

die Glasröhre in Wasser, bringt dies über dem Feuer zum Sieden, und bemerkt auch den Punct, auf welchen das Quecksilber steigt. Dieser Punct ist S und heißt Siedepunct.

Der Abstand beider Puncte E und S wird in 80 gleiche Theile getheilt, die man mit + bezeichnet und Wärmegrade nennt. Solche Grade werden auch unter E nach der Kugel hin getragen, mit — bezeichnet, und Kältegrade genannt.

Weil das Wasser nach Beschaffenheit der Schwere oder Leichtigkeit der Luft mehr oder weniger Hitze zum Sieden bedarf, so ist der Siedepunct am Thermometer etwas veränderlich. Man ist übereingekommen, den Siedepunct dahin zu setzen, wo das Quecksilber stehen bleibt, wenn das Wasser bei 27 Pariser Zoll, oder 324 Linien heftig kocht. Um bei jedem andern Barometerstand den richtigen Siedepunct zu treffen, dient folgende Tabelle, welche angiebt, wie viel Grade der Reaumürschen Scale der Siedepunct höher oder tiefer fällt, wenn das Barometer einen andern Stand hat:

Barometerhöhen.	Stand des Thermomet. in siedendem Wasser.	Unterschied.
336	80,78	— 0,78
333	80,59	0,59
330	80,40	0,40
327	80,20	0,20
324	80,	0,
321	79,80	+ 0,20
318	79,60	0,40
315	79,40	0,60
312	79,19	0,81

Anmerk. Nach de Luc's Erfahrungen erfährt man durch die Formel $\frac{89,8-78}{324} = 0,03642$, wie viel durch 1 Linie Barometerhöhe, die mehr oder weniger als 27 Zoll beträgt, die Hitze des kochenden Wassers vermehrt oder vermindert werde. Nennt man die jedesmalige Barometerhöhe in Linien ausgedrückt = b, so kann die Hitze

Hitze des in freier Luft kochenden Wassers, bei jeder vorkommenden Barometerhöhe durch die Formel:

$$78 + 0{,}03642\,b - \frac{9{,}8 \cdot 324\ (= 3175{,}2)}{b}$$ gefunden werden.

§. 652. Das Fahrenheitsche setzt Null dahin, wo am vorigen 14° Kälte steht, und theilt den Raum bis zum Siedepuncte in 212 Grade. Auch dieses Instrument ist häufig im Gebrauche.

Die Wärmegrade beider Thermometer verhalten sich zu einander, wie 80 : 212 — 14, d. h. wie 4 : 9, oder 4 Reaumürsche Grade machen 9 Fahrenheitsche. Will man daher die Angaben des einen in der Sprache des andern haben, so spricht man nach der

Formel: $4 : 9 = R : F - 32$. (denn $14° R = 32° F.$)
oder $9 : 4 = F : R + 14$, je nachdem man Fahrenheitsche oder Reaumürsche Grade sucht.

Z. B. Wie viel sind 190° Reaumür nach Fahrenheit?

$$\text{Hier ist } \frac{9\,R}{4} + 32 = \frac{9 \cdot 190}{4} + 32 = 427\tfrac{1}{2} + 32 = 459\tfrac{1}{2} = F.$$

Wie viel sind 550° Fahrenheit nach Reaumür?

$$\text{Hier ist } \frac{4\,F}{9} - 14 = \frac{4 \cdot 550}{9} - 14 = 244 - 14 = 230 = R.$$

Weil die Kältegrade das Minuszeichen erhalten, so ist R oder F eine Minusgröße in der Formel, und daher die Antwort auch verschieden. Z. B.

Wie viel betragen — 51 Fahrenheit nach Reaumür?

$$\frac{4 \cdot -51}{9} - 14 = -22\tfrac{2}{3} - 14 = -36\tfrac{2}{3} \text{ nach Reaumür.}$$

Wie viel betragen — 31 Reaumür nach Fahrenheit?

$$\frac{9 \cdot -31}{4} + 32 = -\frac{279}{4} + 32 = -69\tfrac{3}{4} + 32 = -37\tfrac{3}{4} \text{ Fahrenheit.}$$

Tafel

Tafel der Wärmegrade nach Fahrenheit und Reaumür.

	Fahrenheit	Reaumür
Gefrierender Weingeist .	— 51	— 37
Gefrierendes Queckſilber	— 39	— 31
Eis mit Salpetergeiſt .	— 39	— 31
Halb Waſſer u. rectificirter Weingeiſt gemiſcht gefriert	— 7	— 17
Schmelzender Schnee mit Salmiak .	0	— 14
Wein gefriert	+ 20	— 6
Lämmerblut friert . .	25	— 3
Weineſſig friert	28	— 2
Milch gefriert	30	— 1
Reines Waſſer gefriert .	32	0
Öl wird zähe u. undurchſichtig . . .	38	+ 2
Gemäßigte Wärme der Luft . . (Stubenwärme)	64	14
Butter ſchmilzt	88	25
Schweinefett ſchmilzt .	98	29
Wärme des Bluts . .	100	31
Gelbes Wachs ſchmilzt .	140	48
Alkohol ſiedet	176	64
Gemeiner Weingeiſt ſiedet . . .	180	66
Rother Franzwein ſiedet	199	74
Kuhmilch ſiedet	210	79
Regenwaſſer ſiedet . .	212	80
Meerwaſſer ſiedet . . .	218	82
$\frac{1}{4}$ Blei, $\frac{1}{8}$ Zinn, $\frac{1}{8}$ Wißmuth ſchmilzt	220	83
Schwefel iſt geſchmolzen .	244	94
Wißmuth und Zinn verm. ſchmilzt	283	111
Reines Zinn ſchmilzt .	420	172
Wißmuth ſchmilzt .	460	190
Blei ſchmilzt .	540	226
Vitriolöl ſiedet	546	288
Leinöl ſiedet .	600	252
Queckſilber ſiedet . . .	600	252
(nach andern Verſuchen)	709	301
Spießglaskönig mit Eiſen und Zinn zugleich. Theilen ſchmilzt	635	268

Fah-

	Fahrenheit	Reaumür.		Fahrenheit	Reaumür.
Eisen leuchtet im Dunkeln	752	320	Feines Gold schmilzt .	5237	2313
Eisen glüht roth, bei Tage sichtbar	1077	465	Größte Schweißhitze des Eisens	13427	5951
Schwedisch Kupfer schmilzt	4587	2025	Größte Hitze einer Schmiedeesse . .	17327	7687
Feines Silber schmilzt .	4717	2082	Gußeisen schmilzt .	17977	7964

Anmerk. Das sogenannte Aneinanderschweißen der Metalle ist nur bei einem gewissen Hitzegrade möglich. Eine zu große Hitze hat ein Verschlacken zur Folge. Gußstahl an einander zu schweißen, wollte bisher nicht gelingen, es kann aber folgendermaßen bewerkstelligt werden:

Man füge die zu schweißenden Stahlstücke möglichst genau zusammen zwischen eine Zange, deren Backen ein wenig über dem Stahl hervorstehen. Auf die so entstandene Rinne lege man etwas von dem Lothe, womit das Kupfer gelöthet wird, und gebe dem Ganzen eine Hitze bis zum Blaßgelbglühen, so wird der Stahl sich reinigen (abhäuten) und anfangen über einander zu fließen, und sich so innigst verbinden, daß auf der geschweißten Stelle kein Bruch wieder erfolgt.

§. 654. Man hat 3 Gesetze der Temperaturveränderungen:

1. Der Wärmestoff wird beim Übergange vom Zustande der Vestigkeit zur Flüssigkeit gebunden; umgekehrt aber entbunden. Daher erzeugen krystallinische Salze im Wasser oder mit Schnee und Eis Kälte. Eine Vermischung von rauchender Salpetersäure und Schnee erzeugt eine Kälte von 32° Reaumür. Bei der Vermischung des Kalks mit Wasser wird letzteres vest, und erzeugt Wärme.

2. Der Wärmestoff wird gebunden, wenn tropfbare Flüssigkeiten in Dämpfe übergehen; frei, wenn sich Dämpfe

Dämpfe zu tropfbaren oder vesten Körpern verdichten.

Ausdünstung erregt Kälte.

Kochendes Wasser nimmt im offenen Gefäße keine größere Wärme, als 80° R. an; alle übrige Wärme wird zur Bildung der Dämpfe verwandt.

Der Druck der Atmosphäre auf kochendes Wasser ist stark. Je niedriger das Barometer steht, desto leichter kocht das Wasser. Auf 14 Linien Barometerveränderung beträgt der Unterschied 1° am Thermometer. Im Luftleeren Raume kocht das Wasser schon bei 39° Wärme.

Wird Wasser zu Körpern geworfen, die mehr Wärme haben, als es anzunehmen fähig ist, so wird es mit Geräusch umhergeworfen, und augenblicklich in Dämpfe verwandelt.

3. Wärmestoff wird gebunden, wenn veste, oder tropfbare flüssige, oder dampfförmige Körper in Luftgestalt übergehen; umgekehrt wird er frei. (Siehe Klügel's Encyclopädie.)

§. 655. Das Verbrennen der Körper ist eine Zersetzung derjenigen Theile derselben, welche eine Verwandtschaft mit dem Wärmestoff (Oxygen) haben, und letzteren bei starker Erhitzung binden. Daher ist zum Brennen Luft nöthig.

Rauch besteht aus nicht völlig aufgelösten Theilen des Körpers.

Flamme ist glühender Rauch, und entsteht durch Zutritt des Lichtstoffs.

§. 656. Der Pyophor oder Luftzünder besteht aus ätzendem Gewächsalkali, Schwefel und Kohle. Diese werden durch Calcination von einem Theil feinen Kohlenpulvers und 5 Theilen gebrannten Alauns mit einander verbunden. Das Alkali zieht Flüssigkeit aus der Luft an und erhitzt sich, wodurch der Schwefel entzündet wird.

Schießpulver besteht größtentheils aus Salpeter, etwas Kohlen und Schwefel. Im Salpeter ist viel gebundener Wärmestoff.

Knallpulver ist eine Mischung von $\frac{3}{6}$ Salpeter, $\frac{2}{6}$ trocknem Gewächsalkali und $\frac{1}{6}$ Schwefel.

Knall-

Knallgold besteht aus Goldoxyd (Metall und Oxygen) und aus Ammoniak (Azote und Hydrogen). Durch Erhitzung über Kohlenfeuer, oder nur durch Reiben entzündet es sich selbst, und ist in seiner Wirkung entsetzlich.

Knallsilber ist in seiner Wirkung noch gefährlicher. Es besteht aus Silberoxyd und sehr reinem ätzenden Ammoniak. Es entzündet sich schon durch bloße Erschütterung.

§. 657. Entzündung wird auf mancherlei Art hervorgebracht. Z. B. Schnellgepreßte Luft zündet Schwamm an. Plötzliche und starke Ausdehnung der Luft erzeugt Kälte. Ein Luftstrom der Windbüchse macht das Thermometer um einige Grad sinken.

Schmelzen erfolgt, wenn die Wärme größer ist, als der Zusammenhang der Theile eines Körpers.

§. 658. Die Wärme dehnt von dem Eispunct zum Siedepunct des Wassers und bei $27\frac{1}{2}$ Pariser Zoll Barometerstand folgende Körper aus:

Queckſilber um	0,01850 ſeines Raums
	0,01680
Waſſer	— 0,04517
Weingeiſt	— 0,087
Leinöl	— 0,072
Glas	— 0,00083
Gold	— 0,00094
Blei	— 0,00286
Zinn	— 0,00248
Meſſing	— 0,00193
Kupfer	— 0,00170
Stahl	— 0,00122
Eiſen	— 0,00125
Silber	— 0,00189

§. 659. Über die Wärme leitende Kraft der Körper hat man folgende kleine Tabelle:

Die des Waſſers	= 1,	die des Kupfers	= 0,97
— — Bleies	= 2,5	— — Eiſens	= 0,02
— — Meſſings	= 1,02	— — Zinns	= 1,67.

V. Vom

V. Vom Licht.

§. 660. Der Lichtstoff ist eine feine, elastische, unwägbare, sehr verbreitete, oft gebundene, meist freie Materie, die auf alle Naturdinge wesentlich wirkt, und gesunden Augen das Sehen gewährt. Seine Gegenwart ist Helligkeit, seine Abwesenheit Finsterniß. Er ist auch da vorhanden, wohin kein Tageslicht dringt. Viele Thiere sehen im Finstern.

Seine Geschwindigkeit ist erstaunlich groß. Aus der Verfinsterung der Jupiterstrabanten weiß man, daß das Licht in 8 Minuten $7\frac{1}{2}$ Sekunde einen Weg von 20 Millionen Meilen, in 1 Sekunde aber 40000 Meilen zurücklegt; 976000mal schneller, als der Schall; $1\frac{1}{2}$ Millionen mal schneller, als eine Kanonenkugel, und 10310 mal schneller, als die Bewegung der Erde ist.

§. 661. Die Bewegung den Lichts ist stets geradlinicht. — Millionen Lichtstrahlen gehen durch einen Nadelstich. Ein leuchtender Punct zersplittert seine Strahlen nach allen möglichen Richtungen in unendlicher Anzahl.

Die Lehre vom gerade fortgehenden Licht heißt Optik. Strahlen, die von einem leuchtenden Puncte auf die Ebenen ab und df Fig. 221. (welche von c aus unter gleichen Winkeln erscheinen) fallen, erleuchten die entferntere weniger, als die nähere. Denn es fallen zwar auf ab eben so viel Strahlen, als auf df, allein sie liegen auf ab zerstreuter. Jeder Punct auf der nähern df erhält daher mehr Licht, als ein Punct auf der ferneren ab. Zieht man mit cd, und darauf mit ca Kreise, so verhalten sich diese Kreisflächen, wie die Quadrate der Halbmesser; und weil die Erleuchtung auf dem fernern Körper schwächer, als auf dem nähern, so gilt $cd^2 : ca^2 = E : e$, wo E die Lichtstärke auf ab, und e die auf df bezeichnet. Folglich haben wir die

Formel: $\frac{cd^2 . e}{ca^2} = E =$ der Erleuchtung auf ab,

$\frac{ca^2 . E}{cd^2} = e =$ der Erleuchtung auf df.

Z. B. es sey cd = 3; ca = 4, so ist $E = \frac{3^2 \cdot 1}{4^2}$ $= \frac{9}{16}$ = der Erleuchtung auf ab, wenn die auf df = 1 gesetzt wird.

Die Stärke der Erleuchtung auf jeder Fläche verhält sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punct. Eine 3mal größere Entfernung erlaubt eine 3 . 3 = 9 mal schwächere Erleuchtung.

§. 662. Eine schiefe Ebene ab Fig. 222. erhält vom leuchtenden Punct c nur so viel Licht, als das Perpendikel bd, das doch beträchtlich kleiner ist. Man kann db als den Sinus des Winkels acb ansehen, unter welchem von c aus die Ebene ab erscheint. Folglich hängt die Stärke der Erleuchtung vom Sinus des Winkels acb, unter welchem ab erscheint, ab.

Daher erwärmen die Lichtstrahlen im Winter und überhaupt bei niedriger Sonnenhöhe nur wenig.

§. 663. Gleich große Gegenstände ba und ed Fig. 223. erscheinen bei verschiedenen Entfernungen unter verschiedenen Sehewinkeln acb und dce.

Ist der Winkel, unter welchem ein erleuchteter Körper erscheint, kleiner, als eine Minute, so ist er nicht mehr mit bloßem Auge wahrzunehmen; leuchtende Körper sind aber bei einem Winkel unter 1 Sekunde noch sichtbar.

Im △ abc ist bei b ein rechter Winkel; ist nun der Sehewinkel acb und die Entfernung bc bekannt, so läßt sich die Größe ab finden, denn Cosin. c : bc = Sin. c : ba; oder noch kürzer Sin. tot. : bc = Tang. c : ab; daher die

Formeln: $\frac{ab}{\text{Tang. c}} = bc =$ dem Abstande des Gegenstandes.

$bc \cdot \text{Tang. c} = ab =$ der Größe des Gegenstandes.

$\frac{ab}{bc} = \text{Tang. c} =$ der Tangente des Gesichtswinkels.

Eben

Eben so können die Werthe im △ dce gefunden werden.

Der Sehewinkel nimmt mit der Entfernung ab; und ist daher 1= 2= 3mal kleiner, wenn der Gegenstand 1= 2= 3mal entfernter ist.

§. 664. Zwei Körper E und B Fig. 227. bewegen sich von E nach G, und von B nach C in gleicher Zeit gleich weit, während ein Auge in O ruht. Ihre wahren Geschwindigkeiten sind gleich, oder verhalten sich wie EG zu BC; aber ihre Winkelgeschwindigkeiten EOG und BOC sind ungleich, und der nähere B scheint einen größern Weg zurückgelegt zu haben, weil $<$BOC größer ist, als $<$ EOG. Die scheinbaren Geschwindigkeiten hängen also von den Winkeln EOG und BOC ab.

Formel: BO : EO = Tang. EOG : Tang. BOC.

Vergleicht man die Wege dh und EG, die in gleichen Zeiten gleiche Winkel machen, so gilt die

Formel: Od : dh = OE : EG.

Und wenn Winkel und Entfernungen verschieden sind:

Formel: $\frac{Od}{dh} : \frac{BC}{BO}$ = Tang. dOh : Tang. BOC.

§. 665. Man will finden, wie groß das leuchtende und erleuchtete Stück des Abstandes zweier Kugeln ist, von denen eine leuchtend, und der Halbmesser einer jeden gegeben ist. Fig. 224.

Aufl. In dem bekannten Abstande = a beschreibe mit den gegebenen Halbmessern p und q die Halbkugeln HCF und GDK; dann ziehe an die äußersten Puncte C, D eine Tangente LE, welche die AE in E durchschneiden wird. Ist nun die große Kugel leuchtend, so ist FC die Hälfte der leuchtenden Fläche, und GD die Hälfte der erleuchteten Fläche auf der kleinen Kugel in Graden.

Der $<$ CAF = 180° — $<$ GBD = 90° — $<$ ABN. Die BN ist parallel mit CD und auf AC senkrecht. Daher ist AN = AC — BD = p — q; und

AN

$$AN : AB = AC : AE$$
$$= p - q : a = p : AE$$

Also ist $\frac{a \cdot p}{p-q} = AE =$ Länge des Abstandes des Schattenkegelendpuncts vom leuchtenden Körper.

Formel: $\frac{a \cdot p}{p-q} - a = BE$, oder $= \frac{a \cdot q}{p-q} = BE$ } = der Länge des Schattenkegels vom Centro des dunkeln Körpers gerechnet.

Den Winkel ABN findet man

$$AB : \text{Sin. tot.} = AN : \text{Sin. } ABN$$
$$= a : \text{Sin. tot.} = p - q : \text{Sin.} < ABN.$$

Formel: $\text{Sin. } ABN = \frac{\text{Sin. tot.} \cdot (p-q)}{a}$;

und also ist $\frac{p-q}{a} + 90° = GBD =$ der Hälfte des erleuchteten Theils;

und $90° - \frac{p-q}{a} = FAC =$ der Hälfte des leuchtenden Theils.

Z. B. Der Abstand der Erde von der Sonne sey $= a = 22000$
der Sonne Halbmesser $= p = 100$
der Erde Halbmesser $= q = 1$.

Hier ist $p - q = 100 - 1 = 99$; der Winkel ABN so zu finden:

log. 99 = 1,9956352 + 10
log. 22000 = 4,3424227

log. Sin. ABN = 7,6532125 = 15′ 28″.

Hier ist 90° — 15′ 28″ = 89° 44′ 32″, und doppelt = 179° 29′ 4″ = demjenigen Theil der Sonne, welcher der Erde leuchtet; und 90° 15′ 28″ doppelt = 180° 30′ 56″ = dem von der Sonne erleuchteten Theil der Erdoberfläche.

Der Erdschatten reicht $\frac{a \cdot q}{p-q} = \frac{22000}{99} = 222\frac{22}{99} = BE$.

§. 666.

§. 666. Aus der Sonnenhöhe und Schattenlänge eines Körpers seine Höhe zu finden.

Aufl. Es stehe die Sonne in L Fig. 225., der Schatten des Gegenstandes TS falle in v, so ist $< m$ = der Sonnenhöhe, Tv die Schattenlänge, beides bekannt; man sucht TS.

Geometrisch. Trage Tv verjüngt auf das Papier, setze in v den Winkel m daran, und errichte in T ein Perpendikel, welches den Schenkel vL in S durchschneiden, und die verlangte Höhe verjüngt darstellen wird.

Arithmetisch. Setze einen Stab ab von bekannter Höhe senkrecht so, daß sein Schatten mit dem der Höhe TS in v zusammen fällt, und schließe: va : ab = vT : TS. Oder überhaupt gilt: die Schattenlänge des Stabes verhält sich zur Höhe des Stabes, wie die Schattenlänge des Gegenstandes zur Höhe desselben.

Trigonometrisch.

Formel: Sin. tot. : Tv = Tang. m : TS.

Also ist Tv . Tang. m = TS = Höhe des Körpers.

$\frac{TS}{\text{Tang. m}}$ = Tv = der Länge des Schattens.

$\frac{TS}{Tv}$ = Tang. m = Tangente der Sonnenhöhe.

Es sey

$< m = 27°$, u. log. Tang. $27° = 9{,}7071659$

Länge d. Schat. Tv = 10′, log. 10 = 1

so ist log. TS = $10{,}7071659 = 5{,}0952 = TS$.

§. 667. Den Halbschatten Vv zu finden.

Der leuchtende Körper Ll Fig. 226. leuchtet mit seinen äußersten Puncten L in V, und l in v; Vz wird nur von dem halben Ll erleuchtet. Der Schatten Vv wird immer lichter, bis er in v ganz verschwindet, aber TV heißt Kernschatten, weil wegen der Undurchsichtigkeit des Körpers TS daselbst gar kein Licht hinkommt. Der Punct L ist um den Durchmesser $lL = < lSL$ höher, als l. Der Winkel $x = < m - < y$.

Formel: Tang. x : TS = Sin. tot. : Tv; und Vv = Tv — TV. (Siehe §. 666.)

§. 668. Katoptrik, oder Lehre von der Zurückwerfung der Lichtstrahlen.

Eine recht glatt polirte Ebene FL Fig. 228. wirft die auf sie fallenden Lichtstrahlen AC meistentheis zurück. Der Winkel m, den ein Strahl AC mit der Fläche FC macht, heißt Einfallswinkel; er ist dem Zurückstrahlungswinkel (Reflexionswinkel) n gleich. Der Strahl AC scheint für ein Auge in B aus a C zu kommen.

Eine rauhe Ebene wirft darum die Lichtstrahlen nicht so, wie sie dieselben empfängt, zurück, und macht keine Bilder, weil sie aus vielen kleinen unregelmäßig gelegten Ebenen besteht, von denen jede den Strahl AC nach ganz andern Puncten bringt.

Wäre ein Glasspiegel eine vollkommene Ebene, so müßte er unsichtbar seyn und kein Licht seitwärts senden; allein unser Schleifen nimmt nur die größten Unebenheiten weg.

Der Ort, wo man im Planspiegel das Bild sieht, liegt eben so weit hinter demselben, als das Object vor demselben. CA = Ca; wenn in A das Object ist, so erscheint in a sein Bild.

669. Im Planspiegel ist das Bild dem Objecte vollkommen gleich, aber die rechte Seite wird zur linken, und umgekehrt.

Ein Planspiegel muß wenigstens halb so groß seyn, als eine Person, die sich ganz darin sehen will. Denn es sey ab Fig. 229. ein Planspiegel, ef eine Person, in o ihr Auge; cd das Bild derselben, so gilt cd : hk = co : ho. Aber co : ho = 2 : 1 = $\frac{1}{2}$, also ist auch cd : hk = 2 : 1, d. i. hk = $\frac{1}{2}$ cd.

In einem geraden horizontalen Spiegel ab Fig. 230. spiegeln sich senkrechte Gegenstände bz umgekehrt wie bx ab, weil ihm die untern Theile näher sind, als die obern.

Bei einer Stellung von 45° erscheint in dem ebenen Spiegel alles Liegende stehend, alles Stehende liegend. Fig. 231.

In

In 2 Planspiegeln, die unter einem einwärtsliegenden Winkel gegen einander gestellt sind, erscheint ein Gegenstand vervielfältigt. Die Zahl der Vervielfältigung findet man, wenn man den Neigungswinkel n in 360 dividirt, und vom Quotienten 1 abzieht.

Formel: $\frac{360}{n} - 1 =$ der Anzahl der Vervielfältigung.

Z. B. es sey der Spiegel $12° = n$ geneigt, so ist $\frac{360}{12} - 1 = 30 - 1 = 29$ mal der Gegenstand vervielfältigt.

§. 670. Wird mit dem Radius AL der Bogen Hh beschrieben, und derselbe um AL, wie um eine Axe, gedreht, so entsteht ein Stück einer hohlen Kugel HqAph; und wird ihre hohle innere Fläche polirt, so bekommt man einen Hohlspiegel. Fig. 232.

Die auf ihn, mit der Axe AX parallel einfallenden Strahlen Sq und Sp werden auch hier so gebrochen, daß $< m = < n$, und also in b ein Sammelplatz derselben entsteht, welcher Brennpunct, Brennraum heißt, und da auf der Axe liegt, wo $Ab = bL$ oder $\frac{1}{2}$ Radius ist.

Ist der leuchtende Punct nicht unendlich entfernt, so fallen seine Strahlen nicht parallel auf den Spiegel, und werden nicht im Brennpuncte, sondern in einem andern Puncte v vereinigt, wo sie ein Bild machen. Wenn x ein nicht sehr entfernter Punct auf der Axe ist, so gilt die Proportion $Xb : bA = XA : Av$ }. Also die
$a : b = A : B$ }

Formel: $\frac{A \cdot b}{a} = B =$ dem Abstande des Bildes vom Spiegel.

$\frac{B \cdot a}{A} = b =$ dem Abstande des Brennpuncts vom Spiegel.

$\frac{B \cdot a}{b} = A =$ dem Abstande des leuchtenden Punctes vom Spiegel.

$\frac{A \cdot b}{B} = a =$ dem Abstande des leuchtenden Punctes vom Brennpunct.

Z. B. Es sey der Radius = 100, also die Brennweite b = 50; der Abstand des leuchtenden Punctes vom Spiegel = A = 200, so ist a = 200 — 50 = 150; und nach der ersten Formel ist $\frac{A \cdot b}{a} = \frac{200 \cdot 50}{150} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ = dem Abstande des Bildes vom Spiegel.

Lichtstrahlen, die auseinander gehen, heißen divergirend; die aber zusammen kommen, convergirend.

Fallen convergirende Strahlen, wie Zp, auf den Hohlspiegel, so werden sie noch innerhalb des Brennpuncts in u vereinigt.

Wenn der leuchtende Punct X in dem Centro L ist, so ist auch sein Bild daselbst, denn alsdann ist in der Formel a = b, folglich auch A = B. Rückt X zwischen L und b, so ist sein Bild weiter vom Spiegel, als L, und kommt X in den Brennpunct, so ist sein Bild unendlich weit entfernt, denn a ist dann = Null, und der Bruch $\frac{A \cdot b}{a} = \frac{A \cdot b}{0}$ = unendlichen Größe. Bisher war das Bild auf der Axe und verkehrt.

Rückt aber X noch näher an den Spiegel, als der Brennpunct, so wird a negativ, folglich auch B, und das Bild erscheint hinter dem Spiegel, aufrecht und vergrößert.

(Um den Weg, welchen ein Lichtstrahl nach der Reflexion nimmt, zu zeichnen, ziehe man an den Berührungspunct eine Tangente, an welche sich die Winkel m und n bequem zeichnen lassen).

§. 671. Ein erhabener Spiegel Hh Fig. 233. ist es, wenn die erhabene Seite der Kugelfläche spiegelnd wird. Der mit der Axe parallele Lichtstrahl Sq wird von q nach v zurückgeworfen, und scheint aus b zu kommen, welches der eingebildete Brennpunct heißt, und wie beim Hohlspiegel ½ Radius, jedoch hinter der Spiegelfläche liegt. Da die Winkel m und n stets einander gleich seyn müssen, so wird sich auch für jede Lage des leuchtenden Puncts S seine Zurückstrahlung und scheinbarer Bildpunct bestimmen lassen.

Erhabene Spiegel verkleinern die Gegenstände und stellen sie aufrecht vor.

Wer

Wer weiß, wie Plan- Hohl- und erhabene Spiegel wirken, wird sich die Erscheinungen an Cylinder-, Kegel-Spiegeln ꝛc. erklären können.

§. 672. Die Kugelspiegel geben nur dann deutliche Bilder, wenn sie wenige Grade ausmachen. Parabolische Spiegel aber geben jederzeit sehr deutliche Bilder, und werden daher jetzt mit Recht vorgezogen.

Weil bei den Glasspiegeln sowol die belegte, als unbelegte Seite die Lichtstrahlen zurücksendet, und dadurch leicht Verwirrung entsteht, so sind sie nicht so brauchbar, als die Metallspiegel, welche diesen Fehler nicht haben.

Die beste Spiegelmasse soll aus 2 Theilen Kupfer, 1 Theil Zinn und etwas Arsenik; oder 35 Theilen Rothkupfer, 15 Theilen Zinn, 1 Theil Silber, 1 Theil Arsenik und 1 Theil Messing bestehen. Leider ist sie dem Anlaufen sehr unterworfen; die Spiegel aus Platina, welche diesen Fehler nicht haben, sind zu kostbar.

Die Hohlspiegel sind die nutzbarsten, und von Herschel zu einer hohen Vollkommenheit gebracht; seine Telescope, in welchen die paraboliſchen Hohlspiegel herrliche Wirkung thun, haben ihn unsterblich gemacht.

§. 673. Dioptrik, oder Lehre von der Brechung der Lichtstrahlen.

Wenn die Lichtstrahlen aus einer dünnen in eine dichtere Masse, oder umgekehrt, aus der dichteren in die dünnere übergehen, so werden sie beim Eintritt in das neue Mittel gebrochen.

Der Strahl SC Fig. 234. gehe bei C aus der Luft in ein dichteres Mittel z. B. in Wasser, oder Glas, so wird er nicht in gerader Linie nach T, sondern nach V gehen; tritt er bei V wieder in die Luft, so nimmt er seinen Weg nach Q, nicht nach Z, und wird mit CT parallel.

Diejenige Fläche, wo zweierlei Mittel an einander gränzen, heißt die brechende Fläche; ein Perpendikel CD das Neigungsloth des einfallenden Strahls; der Winkel TCD Neigungswinkel; der Winkel VCD der gebrochene; und < TCV der Brechungswinkel.

Der Strahl SC wird dem Perpendikel zugebrochen, wenn er aus der Luft in Wasser oder ein anderes dichteres Mit-

Mittel fährt; so daß (beim Wasser) der Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels beinahe das Verhältniß, wie 4 : 3; bei Glas aber das Verhältniß wie 3 : 2 hat.

§. 674. Die Lage des gebrochenen Strahls zu finden, wenn der Neigungswinkel und die Masse bekannt sind.

Aufl. Geometrisch. Aus dem Puncte C beschreibe mit beliebigem Halbmesser einen Kreisbogen von 90°, worin CD Fig. 235. das Neigungsloth, und < TCD den Neigungswinkel, Tt seinen Sinus vorstellt. Man mache tu = $\frac{2}{3}$ Tt (wenn das Brechungsmittel Glas ist), und ziehe uV mit CD parallel, so wird V der Punct seyn, wohin der Strahl SC gebrochen wird. Denn Vv = ut = $\frac{2}{3}$ Tt.

Trigonometrisch. Ziehe Logarithmen $\frac{3}{2}$ vom Logarithmen Sin. TCD ab, so ergiebt sich Logarithme Sin. VCD.

Formel: log. Sin. TCD — log. $\frac{3}{2}$ = log. Sin. VCD.

Z. B. es sey der Neigungswinkel des Strahls SC, oder < TCD = 70°, so ist

log. Sin. 70° = 9,9729858
log. $\frac{3}{2}$ = 0,1760912
log. Sin. VCD = 9,7968946 = 38° 47'.

Wenn das Brechungsmittel Wasser ist, so wird anstatt $\frac{3}{2}$ der Bruch $\frac{4}{3}$ genommen.

§. 675. Man hat die Eigenschaft der Lichtstrahlenbrechung auf mannigfache Weise zu benutzen gewußt, und hauptsächlich dem Glase allerlei Formen gegeben, um bestimmte Zwecke zu erreichen. In der 236sten Figur sind 6 Arten optischer Gläser vorgestellt.

No. 1 ist auf beiden Seiten erhaben, doppelt convex;
No. 2 nur auf einer Seite erhaben, plan-convex;
No. 3 auf beiden Seiten hohl, concav-concav, doppelt hohl;
No. 4 ist auf einer Seite erhaben, auf der andern hohl, aber die erhabene Seite hat einen kürzern Radius; Menisk.

No. 5

No. 5 ist wie No. 4, aber die hohle Seite hat den kürzesten Radius, concav-convex;
No. 6 ist auf der einen Seite plan oder eben, und auf der andern hohl, plan-concav.

Man kann diese Glasstücke als Kugelsegmente ansehen. Wenn parallele Lichtstrahlen auf eine Glaskugel fallen, so werden sie bei ihrem Durchgange so gebrochen, daß sie sich hinter der Kugel in einem Abstande $= \frac{1}{2}$ Radius vereinigen. Die Entfernung des Vereinigungspunctes von der Kugel heißt Brennweite, welche vom Halbmesser derselben Kugel abhängig ist. Nummer 1, 2 und 4 sammeln oder brechen die mit der Axe parallel einfallenden Lichtstrahlen in einem Punct, der der Brennpunct heißt, und machen daselbst ein Bild von dem sehr weit oder unendlich entfernten Gegenstande, und werden daher Sammel- oder Collectivgläser, erhabene Gläser genannt. Die übrigen Gläser No. 3, 5, 6 sind in der Mitte dünner, als an den Seiten, brechen parallel einfallende Lichtstrahlen aus einander, und heißen Zerstreuungsgläser. Erstere haben eine linsenförmige Gestalt, und heißen auch oft Linsen.

§. 676. Den Weg zu finden, den ein schief auffallender Strahl DP Fig. 237., nach der Brechung durch ein erhabenes Glas nimmt.

Beschreibe aus den Mittelpuncten K und C mit den gegebenen Halbmessern der beiden Glasoberflächen die Zirkelbogen MBN und MAN, welche das Glas selbst darstellen, und fälle aus C und K die Perpendikel CP und KQ auf die Puncte, wo der Strahl DP auf das Glas fällt und aus demselben geht. Der Strahl DP würde nach V gehen, wenn er nicht im Glase dem Perpendikel CP zugebrochen würde. Er wird nach Q gehen, und da, wo er wieder in die Luft tritt, vom Perpendikel KQ abwärts nach F hin fahren und die Axe in F schneiden. Sein Weg ist also DPQF. Die Winkel VPQ und TQF sind nach §. 674. zu finden.

§. 677. Die Brennweite erhabener Gläser zu finden.

For-

Formel: $\frac{2.R.r}{R+r} = b =$ Abstand des Brennpuncts vom Glase.

Hierbei ist R = Radius der Vorder- und r Radius der Hinterfläche.

Wenn R = r, oder das Glas auf beiden Seiten gleichviel erhaben ist, so ist $b = \frac{2R^2}{2R} = R$, d. h. die Brennweite ist dem Radius gleich.

Formel für No. 2; b = 2R, denn der Radius der planen Seite ist als unendlich anzusehen.

Formel für das Menisk No. 4. (Hier ist der Radius der hohlen Fläche negativ, also r = −r)

also $b = \frac{2.R.-r}{R-r} = \frac{-2.R.r}{-(R-r)}$.

Es sey R = 4″; r = 6″; so ist $\frac{2.4.-6}{4-6} = \frac{-48}{-2}$ = 24 Zoll Brennweite; und es ist in Absicht der Brennweite gleich, welche Seite dem Gegenstand zugekehrt ist.

§. 678. Die Brennweite der Zerstreuungsgläser (Hohlgläser) zu finden.

Formel: $\frac{-2R.-r}{-R-r} = \frac{+2R.r}{-(R+r)} = -b$, also b negativ, d. h. b fällt nicht hinter, sondern vor das Glas, und ist nicht wirklich, sondern nur eingebildet, eigentlich Zerstreuungspunct. Denn die Parallelstrahlen SQ Fig. 238. werden von der Axe abwärts nach V hingebrochen, und scheinen aus b (dem Zerstreuungspuncte) zu kommen. Ist das Glas auf beiden Seiten gleich viel hohl, so ist die Zerstreuungsweite = dem Halbmesser No. 3.

Formel für No. 5: Hier ist $\frac{-2R.r}{r-R}$ oder $\frac{-2rR}{R-r} = -b$. Und

Formel für No. 6: Hier ist 2R = −b, also ebenfalls ein Zerstreuungspunct.

Anmerk.

Anmerk. Die Brennweiten erhabener Gläser kann man auch dadurch finden, daß man sie in die Sonnenstrahlen hält, und rückwärts das Sonnenbild mit einer ebenen Fläche auffängt, darauf den Abstand der Fläche vom Glase mißt. Diejenige Weite, in welcher das Sonnenbild am kleinsten erscheint, ist die richtigste. — Hält man ein solches Glas in der Entfernung der Brennweite vor eine weiße Wand, so erscheinen auf derselben die verkehrten Bilder sehr entlegener Gegenstände. Bei nahen Gegenständen muß man das Glas ein wenig weiter von der Wand zurück halten.

§. 679. Diejenigen Gläser, welche wirkliche Brennpuncte haben, sammeln nur die mit der Axe parallel einfallenden Strahlen genau im Brennpunct. Die Strahlen, die nicht mit der Axe parallel kommen, werden nicht im Brennpuncte, sondern allemal hinter demselben, wenn sie divergirend, und vor demselben (zwischen dem Brennpunct und dem Glase), wenn sie convergirend auf das Glas fallen, vereinigt. Der Ort, wo diese Vereinigung geschieht, heißt der Bildpunct. Sein Abstand vom Glase ist um so größer, je näher der Gegenstand, von welchem die Strahlen kommen, dem Glase ist. Befindet sich der Gegenstand im Brennpunct, so werden seine Strahlen jenseits des Glases der Axe parallel, also nicht vereinigt; befindet er sich innerhalb der Brennweite, so werden seine Strahlen durch das Glas zerstreut.

Den Abstand des Bildpuncts vom Glase giebt die

Formel: $\frac{d \cdot b}{d - b} = a =$ Abstand des Bildpuncts.

wobei d = Entfernung des Gegenstandes,
b = Brennweite ist.

Z. B. es sey die Brennweite b = 10 Zoll, der Abstand des Gegenstandes vom Glase d = 50 Zoll, so ist der Ort des Bildes $\frac{50 \cdot 10}{50 - 10} = \frac{500}{40} = 12{,}5.$

Formel: $\frac{a \cdot d}{d + a} = b =$ Brennweite, wenn die Ent-

Entfernung d, und Bildpunct a, vom Glase bekannt sind.

Z. B. Es sey, wie vorher, $d = 50$; $a = 12{,}5$, so ist $\frac{12{,}5 \cdot 50}{50 + 12{,}5} = \frac{625}{62{,}5} = 10 = b =$ Brennweite.

§. 680. Aus der Brennweite und dem Abstande des Bildes vom Glase die Entfernung d eines Gegenstandes zu finden.

Formel: $\frac{a \cdot b}{a - b} = d =$ Entfernung des Gegenstandes vom Glase.

Z. B. Wenn auch hier $a = 12{,}5$ gefunden, $b = 10$ wäre, so müßte $\frac{12{,}5 \cdot 10}{12{,}5 - 10} = \frac{125}{2{,}5} = 50$ seyn.

Wenn der Unterschied zwischen dem Bild- und Brennpunct sehr genau beobachtet werden könnte, und, besonders bei großen Entfernungen, nicht so erstaunlich unbedeutend wäre, so gäbe eine erhabene Glaslinse den allerbequemsten Entfernungsmesser, mit dem sich jeder Abstand aus einem einzigen Standpunct sogleich finden ließe. Indessen hat schon Brander ein Instrument dieser Art angegeben, mit welchem kleine Entfernungen von einigen hundert Fuß ziemlich genau gefunden werden können.

§. 681. Die Größe des Bildes hängt vom Abstande des Objects vom Glase, und dem Abstande des Bildes $= a$ hauptsächlich ab.

Es sey Fig. 239. RP das Object; rp sein verkehrtes Bild hinter dem Glase A; so geht der Strahl Pp durch die Mitte des Glases ohne Brechung und bestimmt den Punct p, also die Größe des Bildes; Qq geht durch die Axe ebenfalls ohne Brechung. In den ähnlichen Dreiecken AQP und Aqp gilt die Proportion:

$$QP : qp = QA : Aq$$

in Zeichen $G : g = d : a$, woraus sich ergiebt die

Formel: $\frac{G \cdot a}{d} = g =$ Größe des Bildes.

Also

Also ist $\frac{gd}{a} = G =$ Größe des Gegenstandes ꝛc.

Wenn die scheinbare Größe des Gegenstandes, oder der Winkel u bekannt ist, so findet man die Größe des Bildes durch die

Formel: Sin. tot. : a = Tang. u : g

Also ist $\frac{a \cdot \text{Tang. } u}{\text{Sin. tot.}} = g =$ Größe des Bildes.

Z. B. der scheinbare Halbmesser der Sonne = 16′; und der Abstand des Bildes vom Glase, oder a = 10 Fuß = 120 Zoll, so ist

log. 120 = 2,0791812
log. Tang. 16′ = 7,6678492
9,7470304
— 10,
0,7470304 — 1 = 0,55851 Zoll (2 mal

Größe des Sonnenbildes = 1,11702 Zoll.

§. 682. Alle Strahlen, die nicht sehr nahe bei der Axe auf das Glas fallen, werden in Puncten vereinigt, die dem Glase näher liegen, als der Brennpunct, und machen das Bild zwar hell, aber verwirren es auch etwas.

Zu dieser Unvollkommenheit, welche von der Kugelgestalt des Glases herkommt, gesellt sich noch eine andere, die ihren Grund in der verschiedenen Brechbarkeit der Lichtstrahlen hat.

Die erstere Unvollkommenheit fällt bei parabolischen Hohlspiegeln weg; auch bei den Glaslinsen weiß man sie dadurch zu vermindern, daß man dieselben bis auf wenige Grade bedeckt, wodurch die Strahlen verhindert werden, weit von der Axe hindurch zu gehen. Deutlichkeit wird zwar gewonnen, aber Helligkeit geht verloren.

§. 683. Jeder Lichtstrahl läßt sich durch ein 3seitiges gläsernes Prisma in 7 einzelne Farben, die verschiedene Brechbarkeit zeigen, zerlegen. Dabei findet allemal folgende Ordnung statt: roth, orange, gelb, grün, blau,

blau, indigo, violet. Der rothe Strahl wird am wenigsten, der violette am meisten gebrochen, und daher können die Bilder, welche erhabene Gläser machen, nicht auf einem Puncte von allen Strahlen formirt seyn; der Bildpunct ist also eigentlich ein Bildraum, in welchem dasjenige Bild, das die rothen Strahlen machen, zunächst am Glase, und dasjenige, das die violetten Strahlen bilden, am entferntesten liegt; zwischen beiden liegen noch 5 andere Bilder, welche die übrigen 5 Farben machen. Alle 7 Bilder zusammen geben ein mehr oder weniger treues Bild vom Object, je nachdem die Glaslinse beschaffen ist, und die Bilder näher oder weiter von einander liegen. Hätten alle 7 Lichtstrahlen einerlei Brechbarkeit, so würden sie ein vollkommneres Bild hinter dem Glase geben.

Der Raum zwischen dem rothen und violetten Bilde heißt auch Diffusionsraum, und beträgt den 28sten Theil der Brennweite des Glases; also kann er bei 28 Fuß Brennweite 1 Fuß betragen.

§. 684. Dollond, ein englischer Künstler, verfertigte zuerst, von Euler darauf geleitet, Glaslinsen, welche die 7 Farbenbilder ziemlich genau in einen Punct zusammen bringen. Sie bestehen aus zweierlei Glase, aus dem harten Flintglase, und dem weichern Kronglase, wovon das erstere die Lichtstrahlen stärker bricht, als das letztere. Das Kronglas ist convex, und das Flintglas concav so in eineinander geschliffen, daß die Wirkung der einer erhabenen Linse gleich kommt. Das convexe spaltet nun die 7 Farben eines Lichtstrahls, aber das hohle Flintglas bricht sie in widriger Richtung, und so werden sie in einem Bilde vereinigt. Man nennt solche Gläser achromatische oder farbenlose; ihre Wirkung ist vortrefflich, aber ihre Verfertigung sehr schwer. Die deutschen Künstler, und unter diesen vorzüglich Frauenhofer, haben in der neuesten Zeit die vollkommensten Sehewerkzeuge mit achromatischen Glaslinsen zu Stande gebracht, und bewiesen, daß die Deutschen sowol im Erfinden, als Vervollkommnen, mit jeder Nation wetteifern, obgleich die Regierungen zu ihrer Aufmunterung wenig gethan haben.

§. 685. Mit Hülfe der hohlen und erhabenen Gläser können kurzsichtige und weitsichtige Augen die für sie undeutlichen Objecte besser sehen. Ein Auge heißt kurzsichtig, myops, dessen Bau so beschaffen ist, daß die Bilder entfernter Gegenstände zu nahe hinter die Krystallinse (welche, wie ein erhabenes Glas, Bilder auf die Netzhaut wirft) fallen. Hält man vor ein solches Auge ein Hohlglas, so werden die von den Objecten kommenden Lichtstrahlen divergirend auf das Auge fallen, und so wirken, als kämen sie aus des Glases Zerstreuungspuncte, der dem Auge viel näher liegt, und darum werden auch die von der Krystallinse entstehenden Bilder weit genug hinter sie auf den Boden des Auges fallen, und deutlich seyn.

Ein weitsichtiges Auge (presbyt) ist flacher, seine Krystallinse hat eine zu große Brennweite, und die Bilder naher Gegenstände fallen hinter die Netzhaut. Daher wird es durch ein erhabenes Glas, welches die Lichtstrahlen mit der Axe parallel ins Auge sendet, nahe Gegenstände so wahrnehmen, als wären sie entfernt, folglich deutlich sehen.

Der Kurzsichtige sieht durch sein Hohlglas die Objecte kleiner; der Weitsichtige hingegen durch sein Convexglas größer, als derjenige, welcher gesunde Augen hat. Beide Fehler werden dadurch vermehrt, daß man Gläser von zu kurzer Brennweite gebraucht.

Das Fehlerhafte in dem Auge besteht darin, daß es die zur Betrachtung naher und entfernter Gegenstände nöthige Veränderung nicht vornehmen kann, welche dem gesunden Auge nie schwer wird.

Die Brillen, welche fehlerhaften Augen das Sehen erleichtern, sind daher eine der schönsten Erfindungen. Gesunden Augen können sie, als Brillen, nur schädlich seyn, und thöricht ist der Glaube, daß es Conservationsbrillen gebe, oder einen Menschen wohl ziere, eine Brille auf der Nase zu haben, und sich halbblind zu stellen, wie es vor kurzer Zeit noch Mode war. —

§. 686. Die Größe der Deutlichkeit, mit der wir Gegenstände erblicken, hat ihre Gränzen. Zu ferne oder zu nahe Dinge können wir nicht genau erkennen.

Ein

Ein gutes Auge sieht in einer Entfernung von 6 bis 8 Zoll kleine Gegenstände am deutlichsten; allein dann ist der Sehewinkel immer nur sehr klein. Brächten wir sie dem Auge näher bis auf 1 Zoll, so wäre ihr Sehewinkel 8 mal größer, aber alsdann könnten wir vermöge des Baues unserer Augen sie gar nicht deutlich sehen. Es kommt also darauf an, diese Gegenstände in eine solche Lage zu bringen, daß ihr Sehewinkel groß, und ihre Entfernung doch in der Weite von etwa 8 Zoll bleibt. Dies geschieht durch

das Mikroscop oder Vergrößerungsglas. Es sey MN Fig. 240. ein erhabenes Glas von sehr kurzer Brennweite, etwa $\frac{1}{2}$ Zoll; und PO ein kleines Object innerhalb der Brennweite; in A das Auge. Das Glas MN bricht nun die Strahlen von PO so, daß es scheint, als kämen sie aus op, also viel weiter her. Der Sehewinkel PAO ist $=<$ pAO; folglich sieht das Auge den Gegenstand so viel mal größer, als die Entfernung des Brennpuncts vom Glase in der Entfernung von 8 Zoll enthalten ist. (Hier $\frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$ mal, und die Oberfläche des kleinen Objects erscheint demnach $16 . 16 = 256$ mal größer, als sie in der Entfernung von 8 Zollen dem unbewaffneten Auge erscheint). Diese Art Mikroscope nennt man einfach. Je kleiner die Brennweite, je stärker die Vergrößerung. Weil aber die von ihnen aufgefangene kleine Menge Licht in einen großen Raum ausgebreitet wird, so erscheint der durch sie besehene Gegenstand auch dunkel, und daher nicht ganz deutlich. Mit starker Beleuchtung hilft man dieser Unvollkommenheit ab.

§. 687. Weil das einfache Mikroscop die Unbequemlichkeit hat, daß man das Auge zu nahe an die Glaslinse legen muß, um alle Strahlen zu bekommen, so zieht man das zusammengesetzte Fig. 241., bei dem man zwischen das Auge A und das Glas MN noch zwei oder mehrere Gläser von größerer Brennweite setzt, mit Recht vor, weil dadurch das Bild vom Object PO in einer schicklichern Lage vor's Auge gebracht wird. Denn hier fallen die Strahlen von dem fast im Brennpunct der Linse

MN

MN liegenden Gegenstand divergirend auf dieselbe, werden durch die Brechung parallel und fallen so auf das Glas DE, welches sie in seinem Brennpunct f vereinigt. Ein drittes erhabenes Glas BC, welches um seine Brennweite von f absteht, sendet die Strahlen des Bildes f also dem Auge parallel zu. Es sind vielerlei Anordnungen der Gläser möglich, aber die Hauptsache ist bei allen, daß das letzte Glas (Augenglas) die Strahlen parallel macht. Ein Kurzsichtiger, welcher nur durch divergirende Strahlen deutlich sieht, muß die Gläser BC und DE, welche verschiebbar sind, der Glaslinse MN (Objectivlinse) etwas näher bringen.

Weil die Strahlen, die nicht nahe bei der Axe auf die Objectivlinse fallen, eine unregelmäßige Richtung nehmen, und das Bild verwirren, so bedeckt man sie fast ganz, und bringt auch da, wo ein Bild entsteht, in f eine schwarze Scheibe, worin ein kleines rundes Loch ist, die sogenannte Blende, an, um alle falsche Strahlen zu vernichten. Zur stärkern Beleuchtung des auf einer Glasscheibe liegenden kleinen Objects PO dient der Planspiegel S.

§. 688. Um entfernte Gegenstände unter einem größern Gesichtswinkel zu betrachten, dienen die Fernröhre, Sehröhre, Tubus oder Telescope.

Das sogenannte holländische Fernrohr Fig. 242 besteht aus einer erhabenen Objectivlinse P von großer, und einem Hohlglase Q von kurzer Brennweite, welche in einer verschiebbaren Röhre befestigt sind.

Der sehr entfernte Gegenstand Ee sendet seine Strahlen EA und eA durch das Glas P, welche, weil sie durch die Axe des Glases gehen, keine Brechung leiden. Alle übrige Strahlen von Ee fallen in andern Puncten auf P und werden in seinem Brennpunct F vereinigt. Aber ehe sie dazu gelangen, treffen sie das Hohlglas Q, welches um seine Zerstreuungsweite von F absteht. Letzteres bricht sie parallel, und daher sieht ein Auge, das dicht an diesem Glase liegt, den Gegenstand aufrecht und zwar unter dem Winkel GBg, welcher durch die Linie mPg, die sich durch die Endpuncte der beiden Gläser ziehen läßt, bestimmt wird.

Die

Die Vergrößerung giebt die Formel $\frac{B}{b}$, wo B die Brennweite des Objectivs, und b die des Oculars oder Augenglases Q bedeutet. Wenn z. B. B = 12 Zoll und b = 2 Zoll wäre, so müßte die Vergrößerung $\frac{12}{2}$ = 6 mal betragen.

Gesichtsfeld nennt man den Kreis, den man mit dem vestliegenden Fernrohre mit einemmal übersehen kann. Er wird nach Graden bestimmt, und hängt bei diesem Instrument hauptsächlich mit von der Größe des Augapfels ab, welchen man nahe an das Hohlglas legen muß, wenn man viele Strahlen auffangen will. Nimmt man bm als die halbe Breite des Augapfels und zieht von m eine gerade Linie durch die Axe des Vorderglases, so hat man den Winkel bAm = $\frac{1}{2}$ Gesichtskreis.

Begreiflich wird dieser Winkel immer kleiner, je größer die Brennweite des Vorderglases gegen die des Augenglases ist; d. h. je mehr das Werkzeug vergrößert, je kleiner ist das Gesichtsfeld. Überhaupt ist mit diesen Fernröhren, eben des kleinen Gesichtsfeldes wegen, nicht gut, eine 10malige Vergrößerung zu erhalten; und sie werden daher nur zu Taschenperspectiven gebraucht.

Die Länge (d. h. den Abstand der beiden Glaslinsen) giebt die

Formel: B — b, und sie ist = dem Unterschied der Brennweiten. Wenn B = 12 Zoll, b = 2 Zoll, so ist die Länge = 10 Zoll.

Anmerk. (Weil man die Brennweite eines Hohlglases nicht durch Versuche in Sonnenstrahlen, wie es bei dem erhabenen wol anging, bestimmen kann, so setze man das gegebene Hohlglas mit einem erhabenen so zusammen, daß entfernte Gegenstände deutlich erscheinen, ziehe nun den Abstand beider Gläser von der Brennweite des Objectivs ab, so erhält man die Brennweite des Hohlglases.)

§. 689. Das astronomische Fernrohr ist weit mehr zu starken Vergrößerungen geschickt, als das

vorige, und besteht aus zwei erhabenen Gläsern, wovon das eine P Fig. 243. eine lange, und das andere MQ eine kurze Brennweite hat. Die beiden äußersten Strahlen des sehr entfernten Gegenstandes Ee, welche durch die Axe des Objectivglases P gehen, bestimmen die Größe des verkehrten Bildes Ff im Brennpunct desselben. Das Augenglas Q steht um seine Brennweite von F ab, und bricht daher die Strahlen des Bildes Ff so, daß sie parallel auf das Auge in O fallen, welches den Gegenstand nun unter dem Winkel $fBF = < GBg$, also sehr vergrößert, erblickt.

Formel: $\frac{B}{b}$ = der Vergrößerung, d. h. man dividirt die Brennweiten in einander. (Eine gerade Linie BF von der Mitte des Augenglases durch den äußersten Punct des Bildes bestimmt den $< fBF$, welcher so viel mal größer ist, als $< fAF$, so oft Bf in Af enthalten ist.)

Dies Seherohr stellt die Gegenstände verkehrt aber sehr deutlich dar.

Formel: $B + b$ = der Länge desselben, oder dem Abstand der beiden Glaslinsen.

Der beste Platz für das Auge O wird da seyn, wo es die mehrsten Lichtstrahlen bekommt. Weil nun Ff kein Punct ist, so kommen viele Strahlen desselben erst in O, dem Abstande der Brennweite von QM, zur Axe, und das Auge muß also dort den schicklichsten Platz haben.

Formel: $\frac{BM}{BA}$ = Tang. des halben Gesichtsfeldes. Diese Größe ist bei diesem Seherohr sehr beträchtlich. Gerade Linien vom Mittelpunct des Glases P zu dem Mittelpunct des Glases Q und dessen Endpuncte M, bilden den Winkel MAB, welcher der Halbmesser des Gesichtsfeldes ist, und also von der Breite des Augenglases QM und seinem Abstande vom Objectiv P abhängt. Er wird gefunden durch BA ; Sin. tot. = BM ; Tang. MAB.

Die Klarheit oder Helligkeit, mit der die Dinge durch dies Fernrohr erscheinen, hängt von dem Strahlenbündel ab, welches das Augenglas auf das Auge wirft. Es ist gut, wenn dies wenigstens $\frac{1}{2}$ bis 1 ganze Linie dick ist, weil der Augenstern ungefähr diese Breite hat.

Formel: $Af : Bf = PP : QM$ oder nn, und nn $= \frac{PP \cdot Bf}{Af}$ oder $= \frac{PP \cdot b}{B}$ = der Klarheit.

Weil nun die Breite nn = 1 Linie, oder wenigstens $\frac{1}{2}$ Linie seyn muß, so wird die Offnung des Objectivs wenigstens so viel halbe Linien betragen, als so vielmal das Werkzeug vergrößern soll. Z. B. bei einer 100maligen Vergrößernng muß die Offnung des Objectivs auch 100 halbe Linien, oder 4 Zoll 2 Linien haben (allenfalls auch 3 Zoll, wie einige Theoretiker vestsetzen).

Anmerk. Zu ansehnlichen Vergrößerungen müssen also Gläser von großer Brennweite genommen werden, weil diese nur eine ziemliche Breite erhalten können. Gläser von kurzer Brennweite und großer Offnung (Breite) bringen wegen ihrer großen Convexität die Strahlen nicht nahe genug zusammen, wodurch Verwirrung entsteht; aber Gläser von großer Brennweite krümmen sich nur wenig, und die mehrsten Strahlen gehen nahe bei der Axe durch das Glas, wodurch die Verwirrung wegfällt. Man gestatte bei 100maliger Vergrößerung nicht viel über $\frac{1}{2}$ Grad Größe des Bogens, womit das Objectiv beschrieben ist Bei kleinen Vergrößerungen kann dieser Bogen wol 8 Grade haben.

§. 690. Eine starke Vergrößerung vermehrt den Diffusionsraum, darum sind kurze Fernröhre dieser Art nicht zu sehr ansehnlichen Vergrößerungen geschickt. Ist die Verwirrung zu groß, so bedeckt man das Objectivglas mit einem Pappedeckel, der in der Mitte ein Loch hat. Schon §. 684. ist erwähnt, daß mittelst zweier Gläser P und Q Fig. 244., die verschiedene Gestalt und Brechungsfähigkeit haben, der Diffusionsraum sehr vermindert werden kann. Nimmt man nun die Radien, womit die beiden Bogen eines erhabenen Glases beschrieben sind, ver-

verschieden, so findet sich in Hinsicht der Diffusion auch schon ein merklicher Unterschied. Euler beweist, daß ein erhabenes Glas, dessen vordere, dem Object zugekehrte, Seite mit einem Radius von 14 Zoll, und dessen hintere Seite mit dem Radius von 84 Zoll beschrieben ist, den kleinsten Diffusionsraum hat, folglich seinen Zweck am besten erfüllt. Die Brennweite dieses Glases wird 24 Zoll seyn. Will man also ein Objectiv von anderer Brennweite, so richte man es so ein, daß die Vorderfläche mit einem Radius, der sich zu dem der Hinterfläche, wie 14 : 84 oder 1 : 6 verhält, beschrieben werde.

Zusammengesetzte oder achromatische Objective vertragen eine starke Vergrößerung, große Öffnung, und sind eben so brauchbar, als einfache von 5 bis 8 mal größerer Brennweite, sogar in vielen Fällen den Spiegeltelescopen vorzuziehen.

§. 691. Das **Erdfernrohr** Fig. 245. besteht aus 2 astronomischen. Das Objectivglas A hat eine lange Brennweite, und bricht die parallelen Strahlen LL in seinem Brennpunct F zusammen, wo ein Bild entsteht. Das Glas B hat eine kurze Brennweite BF, und bricht die Strahlen des Bildes so, daß sie nach der Brechung parallel auf das 3te Glas C fallen, welches die Stelle des Auges vertritt, und in seinem Brennpunct f wieder ein Bild macht, dessen Strahlen von dem Glase D, das um seine Brennweite davon absteht, abermals parallel dem Auge in O zugeführt werden.

Die Länge des Erdfernrohrs beträgt wenigstens so viel, als die Brennweite des Objectivs = B, und die Brennweiten b, b′, b″ der 3 übrigen Gläser doppelt genommen.

Formel: $B + 2 . (b + b' + b'') =$ Länge.

Die Vergrößerung hängt von den beiden Paaren der Gläser A, B und C, D ab, wovon jedes Paar ein astronomisches Fernrohr bildet. A und B vergrößert so viel mal, als b in B, oder die kleine Brennweite in der großen enthalten ist. Die Gläser C und D thun für sich dasselbe. Folglich ist die gemeinschaftliche Vergrößerung das Product aus der des ersten und zweiten Paars.

Formel: $\frac{B}{b} \cdot \frac{b'}{b''} = \frac{B \cdot b'}{b \cdot b''}$ = Vergrößerung, wobei b = Brennweite vom Glase B, b′ = Brennweite vom Glase C, und b″ = Brennweite vom Glase D ist.

Z. B. Es sey die Brennweite
des Objectivs A = B = 20 Zoll
des Glases B = b = 4 —
des Glases C = b′ = 2 —
des Glases D = b″ = 1 —
so ist $\frac{B \cdot b'}{b \cdot b''} = \frac{20.2}{4.1}$ = 10malige Vergrößerung.

Der Abstand der Gläser A und B, so wie C und D ist = der Summe ihrer Brennweiten, allein man findet das Gesichtsfeld am größten, wenn B und C etwas weiter, als die Summe ihrer Brennweiten absteht, weil das Glas C dann alle Lichtstrahlen auffängt.

Das Gesichtsfeld dieses Fernrohrs ist noch größer, als bei dem astronomischen, weil das Glas C mehr Lichtstrahlen auffangen kann, als ein Auge an seiner Stelle. — Es stellt die Gegenstände aufrecht vor, indem das 2te Paar Gläser C und D das vom ersten Paar gemachte verkehrte Bild wieder verkehret, also aufrichtet; allein weil die Gläser nie vollkommen durchsichtig sind, so gehen auch mehr Strahlen verloren, wenn mehr als 2 Gläser darin sind.

Man kann allerlei Anordnungen der Gläser erfinden; aber die gewöhnlichsten sind so, daß die 3 Gläser B, C, D von gleichen Brennweiten genommen sind, in welchem Fall die Vergrößerung durch die Division der Brennweiten der Gläser A und B gefunden wird, denn das andere Paar Gläser C und D richtet den Gegenstand nur auf. — Es giebt Erdfernröhre mit 4, 5 oder 6 Augengläsern, welche allemal in einer beweglichen Röhre verschiebbar sind. Da nahe Gegenstände ihr Bild nicht im Brennpunct des Objectivs formiren, so muß man bei Betrachtung derselben die Augenglasröhre etwas mehr herausziehen; Kurzsichtige hingegen werden sie weiter hinein schieben müssen.

§. 692. Zu den Vorsichtsmaßregeln, die Wirkung der Fernröhre zu vermehren, rechnet man:

1. Die

1. Die Bedeckung oder Öffnung des Objectivs, welche von der Vergrößerung abhängt; man findet sie durch die

Formel: $\frac{36 \cdot V}{100}$ = Öffnung, wobei V = Vergrößerung, und die Zahl 36 Linien bedeutet.

2. Das Anschwärzen der Röhren, worin die Gläser bevestigt sind, um alle schiefeinfallende Lichtstrahlen zu vertilgen.

3. Das geschickte Anbringen der Blenden, schwarzer in der Mitte offener Ringe. Sie können zur Deutlichkeit viel beitragen, und müssen da, wo die Lichtstrahlen am dichtesten sind, oder wo Bilder entstehen, ihren Platz haben, z. B. im Erdfernrohr Fig. 245. zwischen den Gläsern C und D im Brennpunct f, beim astronomischen nur in F. Zweckwidrig wäre eine Blende zwischen den Gläsern B und C. Die Größe der Öffnung in der Blende muß der des Bildes entsprechen. Zwar verengen die Blenden das Gesichtsfeld, allein zum Vortheil, denn sie halten alle falsche Lichtstrahlen ab und vermehren so die Deutlichkeit.

§. 693. In den Newtonschen oder Herschelschen Telescopen vertritt die Stelle des Objectivglases ein auf dem Grunde einer geschwärzten Röhre ACDB Fig. 250. liegender parabolisch gekrümmter Hohlspiegel SP. Der Lichtstrahl LR wird durch den Spiegel so zurückgeworfen, daß er in A an der obern Öffnung der Röhre ein convexes Glas von kurzer Brennweite trifft, welches um seine Brennweite von der des Hohlspiegels absteht, und als Augenglas dient. Weil solche Spiegel alle Lichtstrahlen genau in einem Puncte vereinigen, so sind sie zu sehr starken Vergrößerungen außerordentlich geschickt. Man findet die Vergrößerung durch die Division der Brennweiten des Hohlspiegels und des Augenglases in einander.

Dieses Instrument dient vornehmlich zur Betrachtung überirdischer Gegenstände, und ist einer großen Helligkeit und Deutlichkeit fähig, weil der Spiegel viele Lichtstrahlen in einem kleinen Raum vereinigt. Herschel erzählt,

zählt, daß, sobald ein Fixstern erster Größe, z. B. Wega, an das Gesichtsfeld des Telescops trete, diese Erscheinung einer prachtvollen Morgenröthe, und sein wirklicher Eintritt dem Aufgang unserer Sonne gleiche; so auch, daß er in einer ziemlich dunkeln Nacht mittelst seines 40 Fuß langen Telescops die Ziffern an einem 1 Meile weit entfernten Thurm erkennen konnte.

Das Gregorianische Telescop hat einen durchbrochenen Spiegel und mehrere Augengläser, stellt die Gegenstände dunkler vor, und ist daher wenig beliebt.

§. 694. Die dunkle Kammer oder Camera obscura kann in die veststehende und tragbare eingetheilt werden. Beide Arten sind an Einrichtung und Größe verschieden.

In der Decke des dunklen Behältnisses ABCP Fig. 246. befindet sich in G ein erhabenes (gewöhnlich planconvexes) Glas, dessen Brennpunct auf den mit weißem Papier überzogenen Tisch T fällt. SP ist ein beweglicher Planspiegel, der die Strahlen oq und br vom Object ob auf das Glas G wirft, welches in seinem Brennpunct (Bildpunct) auf dem Tische T ein Bild (in unnachahmlicher Treue und Schönheit) vom Object darstellt.

Man kann diesem dunklen Zimmer verschiedene Vollkommenheit geben, wozu unter andern gehört,

1. daß der Spiegel PS mittelst einer Vorrichtung unter allerlei Winkel gestellt werden kann, je nachdem man diese oder jene Gegenstände auffangen will;

2. daß der Tisch mit einer Kurbel k höher oder tiefer geschroben werden kann, weil die Bilder naher Gegenstände weiter vom Glase G fallen, als die der entfernten;

3. daß das Glas G eine ziemliche Größe habe, um viele Lichtstrahlen aufzufangen.

An solchen Orten, die eine schöne lebendige Aussicht gewähren, wird eine Camera obscura eine eben so angenehme, als nützliche Unterhaltung, und Zeichenmeistern unübertreffliche Muster geben.

§. 695.

§. 695. Die tragbare Camera obscura hat folgende Einrichtung:

In dem Kästchen PMSB Fig. 247. ist bei C eine Röhre, und in derselben eine andere runde Röhre verschiebbar mit einem erhabenen Glase G. In der Richtung SP liegt ein Planspiegel, welcher die von einem Object O herkommenden und vom Glase G gebrochenen Strahlen oA und Oa nach einem mattgeschliffenen Planglase MS, welches horizontal auf dem Kästchen liegt, reflectirt, und daselbst ein deutliches vollkommen treues Bild, gleich einem Gemälde, vorstellt.

Wenn die Strahlen parallel auf G fallen, so ist GA + Al der Brennweite des Glases gleich; liegt aber O nahe, so muß das Glas G mit seiner Röhre weiter herausgezogen werden.

Über SM ist eine schwarze Decke MD, die mehr oder weniger geöffnet werden kann, um alles fremde Licht von dem Bilde in L abzuhalten; in u ist das Auge. — Je größer der Durchmesser und die Brennweite der Glaslinse G ist, desto größer und deutlicher werden die Bilder.

Dies Werkzeug hat mancherlei Bequemlichkeiten für Maler und Zeichner, die ihre Zeichnungen von Personen oder Landschaften mit den unerreichbaren Mustern, welche es darstellt, vergleichen wollen.

Die Größe des Bildes in der Camera obscura, so wie hinter jedem convexen Glase, hängt von der Brennweite des letztern und dem Abstand des Objectes ab. Rückt dieses dem Glase näher, so wird das Bild größer, aber entfernter hinter demselben erscheinen. Bild und Object sind gleich groß, wenn der Abstand = der Brennweite ist; kommt das Object noch näher, als die Brennweite, so wird sein Bild vergrößert.

§. 696. Die Zauberlaterne oder laterna magica oder lucida dient dazu, kleine Gegenstände vergrößert abgebildet zu sehen. Das erhabene Glas MN Fig. 248. ist in der Röhre QR bevestigt. Bei JK ist das Kästchen durchbrochen, um die Objecte, Gemälde u. dgl. hinein zu schieben, welche durch Lampen stark erleuchtet werden. Da OP sich jetzt innerhalb der Brennweite des Glases MN befindet, so wird sein Bild vergrößert auf der

der weißen Wand WD, jedoch verkehrt erscheinen. Bringt man MN dem Object näher, so wird sein Bild op größer und entfernter. Je größer je dunkler; daher muß bei starken Vergrößerungen auch eine sehr starke Beleuchtung statt finden.

Will man kleine Insecten vergrößert sehen, so ist Lampenschein nicht hinreichend. Man trifft dann die Einrichtung so, daß die Sonne, deren Strahlen man wol noch mit einem erhabenen Glase verdichtet, die Objecte erleuchtet. In dieser Gestalt heißt dies Werkzeug ein Sonnenmikroscop.

§. 697. Der optische Kasten (sogenannte Kuckkasten) ist so eingerichtet, daß perspectivische Zeichnungen bei BL horizontal ausgebreitet, ihre Strahlen pq Fig. 249. auf den schiefgelegten Planspiegel PS werfen, welcher sie nach dem in der Öffnung MN bevestigten erhabenen Glase reflectirt. Da Nq + qp noch weniger, als die Brennweite des Glases MN beträgt, so sieht ein Auge O durch das Glas die Zeichnungen in vv vergrößert aufrecht, wodurch eine angenehme Täuschung hervorgebracht werden kann.

Im Schön-Seherohr, Kaleidoscop, Myriomorphoscop, liegen zwei Planspiegel unter einem spitzen Winkel gegen einander, welche die zwischen einem Plan- und mattgeschliffenen Objectiv-Glase befindlichen Körper vervielfältigt und in unbeschreiblicher Schönheit und Regelmäßigkeit dem durch eine kleine Öffnung sehenden Auge darstellen. Es hängt von der Neigung der Spiegel ab, wie vieleckig die Figuren erscheinen; sind die Spiegel z. B. 30° gegen einander geneigt, so erblicken wir ein ($\frac{360}{30} - 1 = 12 - 1 = 11$) Eilfeck (siehe §. 669.). Bei der kleinsten Bewegung verändert sich die Lage der Körperchen zwischen den Objectiven und mithin auch die erscheinende Figur, deren Verwandlungen in das Unendliche gehen. Für Maler, Kattundrucker und andere Zeuchfabrikanten giebt dies (vom Mechanikus Winkler zu Berlin für Deutschland erfundene) einfache Instrument unnachahmlichschöne Muster in unendlicher Menge.

VI. Grundsätze aus der Dynamik.

§. 698. Masse = M heißt die Menge des Materiellen in einem Volumen. Das Volumen = V begreift Masse und Zwischenräume unter sich; die Masse aber nur die Materie. Also ist das Volumen stets größer, als die Masse. Dicht ist ein Körper, der wenig Zwischenräume hat.

Formeln: $\frac{M}{V} = D$ = Dichtigkeit.

$D \cdot V = M$ = Masse.

$\frac{M}{D} = V$ = Volumen.

Die Vergleichung mehrerer Körper in Beziehung auf Dichtigkeit, Masse und Volumen ist leicht, denn

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{v},$$

wobei die d, m und v dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 699. Die Lockerheit (raritas) steht im geraden Verhältniß des Volumens und im umgekehrten der Masse.

Formeln: $\frac{V}{M} = R$ = Lockerheit; und zweier Körper

$R : r = \frac{V}{M} : \frac{v}{m}$, woraus jede Größe zu finden.

§. 700. Bewegung der Körper. Soll ein Körper von einem Orte nach einem andern gebracht werden, so wird dazu Zeit erfordert; denn er kann nicht an zwei Orten zugleich seyn. Aus der Vergleichung des Wegs und der darauf verwandten Zeit, entsteht der Begriff der Geschwindigkeit.

Formeln: $\frac{W}{Z} = G$ = Geschwindigkeit.

$Z \cdot G = W$ = Wege.

W =

$\frac{W}{G} = Z =$ Zeit; für mehrere Körper:

$G : g = \frac{W}{Z} : \frac{w}{z}$, wobei g, w, z dieselben Eigenschaften an einem andern Körper bedeuten.

§. 701. Man kann einen mit gleichmäßiger Bewegung durchlaufenen Raum durch ein Parallelogramm, dessen Höhe die Zeit, und dessen Grundlinie die Geschwindigkeit bedeutet, ausdrücken, s. Fig. 251., wo Seite C die Geschwindigkeit und Seite T die Zeit ist. Folglich werden in gleichen Zeiten, gleich große Räume durchlaufen; und die Räume verhalten sich, wie die Producte aus der Geschwindigkeit und Zeit.

Ein mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung durchlaufener Raum kann durch einen Triangel abc, oder cdb Fig. 251., dessen Höhe die Endgeschwindigkeit, dessen Grundlinie die Zeit ist, vorgestellt werden. Also die

Formel: $\frac{G \cdot Z}{2} = R =$ Raum; $\frac{2R}{G} = Z =$ Zeit;

$\frac{2R}{Z} = G =$ Geschwindigkeit.

Bei der gleichmäßig abnehmenden Bewegung ist die anfängliche Geschwindigkeit = der Höhe des Dreiecks.

§. 702. Die Größe der Bewegung, Quantität der Bewegung heißt die Gewalt, die ein bewegter Körper ausübt. Sie ist das Product der Menge seiner Theile und seiner Geschwindigkeit.

Formel: $M \cdot G = Q =$ Quantität der Bewegung.

$\frac{Q}{M} = G =$ Geschwindigkeit.

$\frac{Q}{G} = M =$ Masse.

Z. B. die Masse einer Kugel = 7, ihre Geschwindigkeit = 6, so ist die Größe ihrer Bewegung = $7 \cdot 6 = 42$.

Die

Die Größe der Bewegung zweier Körper ergiebt sich aus der Proportion;

$$Q : q = M . G ; mg.$$

Anmerk. Läßt man Kugeln von verschiedener Schwere aus verschiedenen Höhen auf weichen Thon fallen, so kann man die Größe der Bewegung an den Einsenkungen, der Theorie gemäß, bestätigt finden. Die Fallhöh = der Geschwindigkeit; die Schwere = der Masse; die Einsenkung = der Wirkung.

§. 703. Vom Stoß der harten Körper. Der Stoß kann central, wenn der Schwerpunct senkrecht, oder excentrisch, wenn er schief getroffen wird, seyn.

Trifft ein bewegter Körper A einen ruhenden B, so leidet A eben so viel an seiner Bewegung, als B bedarf, um die Bewegung von A zu erhalten. Die allgemeine oder gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße findet man, wenn man die Größe der Bewegung addirt, und durch die Summe der Massen dividirt. Es sey Masse, Geschwindigkeit vor dem Stoße mit M und G; vom zweiten Körper die Masse mit m, die Geschwindigkeit mit g; und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße mit x bezeichnet, so giebt das

Formular: $\frac{M.G+m.g}{M+m} = x$, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 1. A habe Masse 2 | B habe Masse 2
Geschwindigk. 6 | Geschwindigk. 0, ruhe

also; und $g = 0$, so giebt die Formel $\frac{2.6+2.0}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 2. Es sey, wie vorher; aber B habe die Geschwindigkeit 3, so giebt die Formel $\frac{2.6+2.3}{2+2} = \frac{12+6}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ Geschwindigkeit nach dem Stoße.

Beispiel 3. Wenn sich A und B gegen einander bewegen, so ist mg negativ, und die

Formel: $\frac{M.G - m.g}{M + m} = x.$

Es sey $M = 2, m = 3$ $G = 6 \quad g = 2$ so ist $\frac{2.6 - 3.2}{2 + 3} = \frac{12 - 6}{5}$

$= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

§. 704. Wird ein Körper von 2 Kräften unter schiefer Richtung getrieben, so folgt er keiner, sondern geht nach der Richtung oder Diagonale des Parallelogramms, das sich aus beiden Kräften beschreiben läßt. Z. B. der Körper a Fig. 252. werde von der Kraft Q allein in 1″ durch den Raum ac; und von der Kraft q in gleicher Zeit durch ab getrieben, so geht er nach d in 1″.

Die Diagonale ad läßt sich durch Zeichnung und Rechnung finden (siehe Lehre vom Winkelhebel §. 606).

Wirken mehr, als zwei Kräfte auf den Körper a, so sucht man erst die Richtung der Diagonale, die er von 2 Kräften allein getrieben, durchlaufen wird; nimmt dann die Diagonale für eine, die 3te für die andere Kraft, woraus sich wieder ein Parallelogramm bilden läßt, u. s. f.

Je spitzer der $< Qaq$, desto länger; je stumpfer er aber ist, desto kürzer wird die Diagonale seyn. Sie ist allezeit geradlinig, wenn die Seitenkräfte gleichmäßig wirken.

§. 705. Die Bewegung eines Körpers fällt krummlinicht aus, wenn ihn eine stetig wirkende Kraft jeden Augenblick von seiner Bahn abzieht. Eine krummlinichte Bewegung ist demnach eine zusammengesetzte, und entsteht aus der mitgetheilten Stoßbewegung nach der Tangente, Tangentialkraft; und aus einer nach dem Mittelpunct ziehenden Kraft, Centripetalkraft. Beide Kräfte heißen Centralkräfte, wenn sie zugleich wirken.

§. 706.

§. 706. Kreisförmig wird die Bewegung, wenn das Quadrat der Tangentialkraft der Centripetalkraft gleich ist (den Durchmesser gleich 1 gesetzt).

Formel: $T^2 = C$ = Centripetalkraft; T = Tangentialkraft (denn $C : T = T : 1$).

Die Centripetalkraft steht daher im geraden Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit G und im umgekehrten des Halbmessers R.

Formel: $\frac{G^2}{R} = C.$

Die periodische Umlaufszeit Z steht im Verhältnisse des Umfangs oder Halbmessers, dividirt durch die Geschwindigkeit G.

Formel: $\frac{R}{G} = Z$; $G = \frac{R}{Z}$.

Die Geschwindigkeit eines beweglichen durch Centralkräfte mit gleichförmiger Bewegung im Kreise herumgeführten Körpers ist gleich der Quadratwurzel aus der Centripetalkraft und dem Durchmesser des Kreises.

Formel: $\sqrt{C \cdot D} = G.$

Vector oder Radius vector nennt man diejenige Linie, die vom Kraftpunkte bis zu dem durch Centralkräfte bewegten Körper gezogen wird. Die vom Vector beschriebenen Räume verhalten sich, wie die dazu gebrauchten Zeiten.

§. 707. Ist die Geschwindigkeit, die ein Körper zuletzt erlangen würde, wenn er nach dem Kraftpuncte in gerader Linie hinfiele, größer, als die aus der Fliehkraft (Tangentialkraft) entstehende Geschwindigkeit in jedem gegebenen Puncte, so beschreibt der Körper eine Ellipse. Ist diese letztere aus der Fliehkraft entspringende Geschwindigkeit größer, als jene, so ist die Bahn eine Hyperbel; sind beide gleich, so ist die Bahn eine Parabel. Im Kreise beträgt die Tangentialkraft so viel, als der Körper beim freien Falle durch den 4ten Theil des Diameters verlangen würde.

Formel: $T = \frac{D}{4}$, wobei T = Tangentialkraft;
D = Diameter.

Beträgt die Tangentialkraft mehr als $\frac{D}{4}$, so bewegt sich der Körper in einer Parabel oder Hyperbel.

In der Ellipse ist die Flieh- oder Tangentialkraft im fernsten Abstande vom Kraftpuncte kleiner, als die Centripetalkraft, und daher die Bewegung überhaupt langsamer; im kleinsten Abstande aber größer, und daher die Bewegung schneller. Der Kraftpunct liegt in einem der beiden Brennpuncte. Der fernste Punct, wo die kleinste Geschwindigkeit ist, heißt die obere Abside; derjenige aber, wo die größte Geschwindigkeit statt findet, heißt die untere Abside.

§. 708. Die Gesetze der Centralbewegung sind im Sonnensystem in der vollkommensten Übereinstimmung.

Johann Kepler, geboren 1571, gest. 1630, entdeckte durch mühsames Forschen, daß die Bahnen aller Planeten um die Sonne Ellipsen sind, in deren einem, allen gemeinschaftlichen Brennpuncte die Sonne, als Kraftpunct, ruht.

In Fig. 253. sey S die Sonne; in E der andere Brennpunct. Der Planet bewegt sich von A durch LDPRM, ist in A am weitesten von der Sonne (im Aphelio oder in der obern Absida); in P aber in der Sonnennähe (im Perihelio oder in der untern Absida).

Je weiter der Planet von A nach D hinkommt, desto mehr wird er von der Sonne angezogen, desto schneller ist seine Bewegung; denn, von E aus betrachtet, durchläuft er in gleichen Zeiten gleich große Winkel, und daher wird der Bogen ML in derselben Zeit zurückgelegt, in welcher der Bogen DR, der doch viel größer ist, durchlaufen wird. $\angle LEM = \angle DER$, weil es Scheitelwinkel sind. Von P über R nach A hin nimmt seine Geschwindigkeit ab. In A ist die Bahn vollendet.

§. 709. Die Quadrate der (siderischen) Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich gegen einander, wie die Cubikzahlen ihrer

rer mittlern Entfernungen von der Sonne, die in m und n am Ende der kleinen Axe statt finden.

Formel: $U^2 : u^2 = E^3 : e^3$
oder $U : u = \sqrt{E^3} : \sqrt{e^3}$
} wobei U und u Umlaufszeiten, und E und e mittlere Entfernungen sind.

Z. B. es sey die Umlaufszeit der Erde = 365 Tage 6 Stunden = 8766 Stunden; ihr Abstand von der Sonne = 1000;

Umlaufszeit der Venus = 224 Tage 17 Stunden = 5393 Stunden; man sucht ihren mittlern Abstand von der Sonne = e.

$8766^2 : 5393^2 = 1000^3 : e^3$
oder $7684{,}2756 : 2908{,}4449 = 1000000000 : e^3$

$$\frac{2908000000}{7684} = 378450809 = e^3$$

hieraus $\sqrt[3]{}$ gezogen, giebt 723,33 solcher Theile für den Abstand der Venus, deren der Abstand der Erde 1000 hat.

Dieses zweite wichtige Keplerische Gesetz erstreckt sich auch auf die Nebenplaneten, deren Kraftpunct aber nicht die Sonne, sondern ihr Planet ist.

§. 710. Die Zeiten, die ein Planet anwendet, einen Theil seiner Bahn zu durchlaufen, verhalten sich zu einander, wie die Sectoren, oder Räume der elliptischen Ebene zwischen den zurückgelegten Bogen und dem Brennpuncte, den die Sonne einnimmt. Die elliptischen Räume DSRP und LSMA sind also gleich, wenn die Bogen DR und ML in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, siehe §. 708.

Auch dieses wichtige Gesetz, das in der Astronomie zur Bestimmung des Orts eines Planeten seine Anwendung findet, wurde von Kepler entdeckt.

Gesetze der Schwere auf der Erdoberfläche.

§. 711. So wie die Sonne der allgemeine Kraftpunct in Hinsicht ihrer Planeten und Kometen ist, so ist es die Erde wieder für sich in Hinsicht des Mondes und alles dessen, was zur Erde gehört. Alles zeigt ein unerforschliches Bestreben, sich dem Mittelpunct der Erde zu nähern; oder der Mittelpunct der Erde zieht alles mit gleicher Liebe an. Wenn kein Hinderniß vorhanden, so fällt eine Feder eben so schnell zur Tiefe, als ein Stück Blei; jeder Körper fällt senkrecht auf die wahre Horizontallinie, und zwar nach folgendem Gesetz:

er fällt in der 1sten Sek.	15 Fuß;	durchgefallene Räume	1
— — — — 2ten	— 45 —	—	— 3
— — — — 3ten	— 75 —	—	— 5
— — — — 4ten	— 105 —	—	— 7
			u. s. w.

Größe des Falls nach der 4ten Sekunde = 240 Fuß, oder durch 16 Räume.

Nach der 3ten Sekunde war der Körper durch 9 Räume; nach der 2ten durch 4 Räume, jeden zu 15 Fuß, gefallen: also sind die Quadrate der Zeitsekunden der Anzahl der Räume gleich, durch die der Körper gefallen ist. Folglich läßt sich für die Fallhöhe eine allgemeine Formel geben.

Formel: $15 . z^2 = h$ = Höhe oder Tiefe, welche ein Körper gefallen ist;

$\sqrt{\frac{h}{15}} = z$ = Zeit, die ein Körper zum Fallen gebraucht, in Sekunden angegeben.

Z. B. wie tief fällt ein Körper, wenn ihn nichts hindert, in 10″? Hier ist $z = 10$, und $15 . 10^2 = 1500$ Fuß $= h$ = Tiefe.

Wie lange wird ein Körper durch einen Raum von 280 Fuß fallen? — Hier ist $\sqrt{\frac{280}{15}} = \sqrt{18{,}66\ldots}$ = 4,3 Sekunden.

Anmerk. Der Raum, den ein Körper in der ersten Sekunde durchfällt, ist unter dem Aequator, wegen der grö-

größern Dicke der Erde, oder größern Fliehkraft, etwas geringer, als bei uns. Denn er beträgt

unter dem Aequator 15 Fuß 0 Zoll 7 Linien Pariser Maaß,
unter dies. Polhöhe 15 — 1″ — 2‴ od. 15,6344 Fuß Preuß.
unter dem Pol . 15′ — 1″ — 8‴.

Man nennt diesen Raum die Fallkraft, oder Fallhöhe in der ersten Sekunde.

§. 712. Durch Rechnung kann die Größe der Fallhöhe in der ersten Sekunde für jeden Ort gefunden werden. Denn das Quadrat vom Durchmesser eines Kreises verhält sich zum Quadrat der Peripherie desselben, wie die halbe Länge eines Sekundenpendels, zu der Länge, durch die ein Körper in der 1sten Sekunde fällt, d. h. $100^2 : 314^2 = 220{,}28$ Linien : 15′ 1″ 2‴ Pariser Maaß.

Allgemeine Formel: $D^2 : P^2 = \frac{1}{2} L : F$,

wobei $D = 100$; $P = 314$; $L =$ der Pendellänge; $F =$ Fallkraft.

§. 713. Die Schwere nimmt mit dem Quadrat der zunehmenden Entfernung vom Mittelpunct der Erde ab.

Demnach beträgt diese Abnahme auf dem Chimborasso, welcher 3357 franz. Klafter über der Meeresfläche erhaben ist, nur $\frac{1}{500}$. Denn wenn der Erdhalbmesser = 3273300 Klafter; der Gipfel des Berges aber 3276657 Klaftern vom Mittelpunct der Erde absteht, so ist

3273300 : 3276657 = 100000 : 100098 (der Radius = 100000)

und $100098^2 : 100000^2 =$ (abgekürzt) 100196 : 10000 oder 1 : 0,998 = 1000 : 998. Aber diese Zahlen sind nur um $\frac{2}{1000}$ oder $\frac{1}{500}$ verschieden.

Im Mittelpunct der Erde wird die Schwere aufhören, also auf der Oberfläche am stärksten seyn.

§. 714. Besäße die Erde die anziehende Kraft nicht, so würde ein auf der Oberfläche in Wurfbewegung gebrachter Körper ewig in der erhaltenen Richtung fortfliegen. Da aber die Centripetalkraft oder Schwere beständig auf ihn wirkt, so wird seine Bewegung krummlinicht,

paraboliſch werden. Könnte man aber in einer geringen Entfernung von der Erdoberfläche einem Körper in horizontaler Richtung die Geſchwindigkeit von 18800 Fuß in 1″ geben, ſo würde er nie wieder zur Erde kommen, ſondern als Trabant um dieſelbe laufen.

§. 715. Durch den Umſchwung der Erde erhalten die Theile unter dem Aquator eine Fliehkraft, die $\frac{1}{289}$ der Centripetalkraft beträgt; alſo würde ein freifallender Körper daſelbſt, wenn die Erde ruhete, anſtatt 15 Fuß 7 Linien = 2167 Linien in einer Sekunde zu fallen, etwas mehr, nämlich 2174,5 Linien franz. Maaß fallen.

Daß die Fliehkraft unter dem Äquator 289 mal geringer iſt, als die Centripetalkraft, erfährt man aus dem Abſtand und Umlauf des Mondes um die Erde. Z. B. Wenn ſein Abſtand = 60 Erdhalbmeſſer; ſein Umlauf 656 Stunden; Erdhalbmeſſer = 1; ihre Umdrehungszeit = 24 Stunden, ſo giebt

$$\frac{60^3 \cdot 24^2}{1^3 \cdot 656^2} = 289.$$

§. 716. Die Kraft, welche ein Körper beim freien Falle durch die beſchleunigte Bewegung erhält, findet man, wenn man das Quadrat der Zeit mit ſeiner Maſſe multiplicirt.

Formel: $Z^2 \cdot M = K =$ der erhaltenen Kraft.

Z. B. ein Körper von 4 ℔ übt, wenn er 3 Sekunden lang fällt, eine Kraft von $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ ℔ aus.

Beim Steigen eines Körpers nimmt ſeine Geſchwindigkeit und Kraft eben ſo ab, als ſie beim Fallen zunimmt.

§. 717. Von der Wurfbewegung. Ein horizontal nach B Fig. 256. geworfener Körper A würde in gleichen Zeiten die Räume Aa, ab, bc, durchlaufen. Vermöge der anziehenden Kraft der Erde wird er aber jeden Augenblick nach M gezogen, und alſo während er Aa zurücklegt, um AC ſinken; während Ab um AD ſinken; während Ac aber um AE ſinken. Seine Bewegung iſt demnach aus 2 Kräften zuſammengeſetzt. Vermöge der Centripetalkraft ſinkt er in der erſten Sekunde

um

um ap = AC; nach der zweiten um 4 solche Räume, um bq = AD; nach der dritten um 9 Räume, nämlich er = AE; folglich verhalten sich die Abschnitte AC, AD, AE, wie die Quadrate der Zeiten Aa, Ab, Ac, oder Cp, Dq, Er, und der Körper beschreibt die krumme Linie Apqr, in welcher AM die Axe, AC, AD, AE Abscissen und Cp, Dq, Er Ordinaten sind. Aus dem Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen ergiebt sich, daß die krumme Linie eine Parabel ist. Nun ist, wenn Aa sehr klein genommen wird, die Ap die Diagonale im Rechteck AapC, wird also in derselben Zeit durchlaufen, als der Körper um AC frei fallen, oder um Aa horizontal sich fortbewegen würde; und da dies in jedem der Parallelogramme AbqD u. s. w. gilt, so muß der Körper in derselben Zeit den Bogen Ar zurücklegen, als er AE durchfallen, oder AC horizontal durchlaufen würde.

Wird der Körper mit der in r erhaltenen Geschwindigkeit aufwärts nach m geworfen, so nimmt er mit verzögerter Bewegung den Weg durch q, p nach A, dem Scheitel der Parabel, und geht nach S mit beschleunigter Bewegung wieder herunter in eben so viel Zeit, als er zum Steigen brauchte.

Diese Gesetze des freien Falles und der Wurfbewegung gelten nur im luftleeren Raume; denn der Widerstand der Luft, der nicht zu jeder Zeit gleich ist, macht hiebei beträchtliche Änderungen.

§. 718. Vom Pendel.

Eine Bleikugel an einem feinen seidenen Faden oder Haar, welches an einem Stift so bevestigt ist, daß die Kugel sich frei hin und her bewegen kann, kommt dem einfachen mathematischen Pendel sehr nahe. Dieses Pendel schwingt gleich schnell, es mag die Kugel größere oder kleine Bogen beschreiben, daher es zur genauen Abmessung kleiner Zeittheile dienen kann; nur die Reibung und der Widerstand der Luft sind Ursachen, daß es seine Bewegung nicht immer fortsetzt.

Hin- und Herschwung heißt ein ganzer Schwung. Der Punct, worin die ganze Schwere des Pendels vereinigt liegt, heißt der Schwingungspunct; der von ihm beschriebene Bogen Schwingungsbogen; der

Abstand des Schwingungspuncts vom Aufhängepunct — die Pendellänge.

Man läßt das einfache Pendel im luftleeren Raume schwingen, damit es weniger Hinderniß finde.

§. 719. Bei einem zusammengesetzten Pendel vertritt die Stelle des Haars ein Stab. Ist dieser von gleicher Dichtigkeit und gleichem Gewicht, so ist sein Schwingungspunct $\frac{2}{3}$ seiner Länge, vom Aufhängepuncte an gerechnet.

Soll ein zusammengesetztes Pendel gewisse Schwingungen in einer gegebenen Zeit machen, so muß es so lange verkürzt und verlängert werden, bis es mit einem einfachen Pendel, welches das Verlangte leistet, gleichschwingt.

§. 720. Ein Pendel, dessen Schwingungen Sekunden lang dauern, heißt ein Sekundenpendel. Seine Länge ist nicht aller Orten gleich,

z. B. am Aquator = 439 franz. Linien
unter der Polhöhe von 45° = 440,35
am Pol selbst = 441,59,

weil die stärkere Dicke der Erde unter dem Äquator eine Verminderung der Schwere zur Folge hat, die das Pendel in der Schwingung erhält. In den bewohntesten Ländern ist der Unterschied der Pendellängen also kaum $\frac{1}{400}$.

§. 721. Formeln zur Berechnung der Pendellänge für jeden Ort.

$440{,}392 \pm 1{,}2494 \cdot \text{Cosin.}^2 P$ = Länge des Sekundenpendels nach La Place's Theorie. Und

$440{,}3505 \pm 1{,}2448 \cdot \text{Cosin.}^2 P$ = Länge des Sekundenpendels nach Steinhäuser's Berechnung.

P = Polhöhe.

Z. B. man sucht die Länge des Sekundenpendels unter der Polhöhe 52° 30′; so ist Cos. 52° 30′ = 0,6087; sein Quadrat = 0,3705.

Also $1{,}2448 \cdot 0{,}3705 = 0{,}4611$
$+ 440{,}3505$
= 440,8116 Linien, d. h. 36 Zoll 8,8 Par. Linien für die Länge des Sekundenpendels.

§. 722.

§. 722. Zwei gleichlange Pendel schwingen gleichgeschwind, wenngleich ihre Gewichte verschieden sind. Ungleiche Pendel schwingen verschieden, das kürzere geschwinder, denn die Dauer der Schwingung hängt von der Länge des Pendels ab.

Die Längen L und l zweier Pendel verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Anzahl Schwingungen, die sie in einer gegebenen Zeit machen.

Formeln: $L : l = t^2 : T^2$, wo t und T = den Schwingungen.

$\frac{l \cdot t^2}{T^2} = L =$ der Länge des größern Pendels.

$\frac{L \cdot T^2}{t^2} = l =$ der Länge des kleinern Pendels.

$\sqrt{\frac{L \cdot T^2}{l}}$ oder $T\sqrt{\frac{L}{l}} = t =$ der Anzahl Schwingungen des kleinen Pendels.

$\sqrt{\frac{l \cdot t^2}{L}}$ oder $t \cdot \sqrt{\frac{l}{L}} = T =$ der Anzahl Schwingungen des größern Pendels.

Z. B. Es sey das größere Pendel 36 Zoll (= L) lang, und schlage in einer gegebenen Zeit 4 mal (= T); man wünscht die Länge eines andern Pendels (= l), das in derselben Zeit 8 Schwingungen macht, zu finden.

Die Formel für l giebt $\frac{36 \cdot 4^2}{8^2} = \frac{36 \cdot 16}{64} = \frac{36}{4} = 9$ Zoll.

§. 723. Bei einem einfachen Pendel liegt der Schwingungspunct um $\frac{2}{5}$ des Halbmessers der Kugel unterhalb des Mittelpuncts derselben, wenn die Kugel an ihrer Oberfläche aufgehängt ist. — Weil die Metallstangen durch die Wärme länger werden, so zieht man mit Recht Pendelstangen von lackirtem Kienenholz den metallnen vor.

Schlägt man einen Körper mit einer Stange so, daß er vom Schwingungspuncte derselben getroffen wird, so übt man auf ihn die größte Gewalt aus. Trifft ihn ein anderer Punct, so empfindet man eine unangenehme Prellung in der Hand.

§. 724.

§. 724. Vom Fall auf der schiefen Ebene.

Der Körper Q Fig. 254. kann auf der gegen den Horizont geneigten Ebene cb nicht ruhen, weil sein Schwerpunct nicht senkrecht unterstützt ist: er wird, wenn er sich selbst überlassen bleibt, nach b hin mit einer geringern Kraft und Schnelligkeit fallen, als wenn er senkrecht fiele. Die Kraft, welche ihn auf cb herabtreibt, heißt sein relatives Gewicht, und hängt von der Neigung der Ebene ab. Absolutes Gewicht ist dasjenige, womit er auf eine horizontale Unterlage drückt. S. §. 614.

§. 725. Die Bewegung auf der schiefen Ebene ist, wie beim freien Falle, eine gleichmäßig beschleunigte, und die zurückgelegten Räume verhalten sich auch, wie die Quadrate der verflossenen Zeitsekunden. Aber der Fall in der ersten Sekunde ist weit geringer, und wird gefunden, wenn man die Höhe = h der schiefen Ebene mit 15 Fuß (der Fallkraft beim freien Falle) multiplicirt, und das Product durch die Länge dividirt.

Formel: $\frac{h \cdot 15}{l} = f =$ der Fallkraft in der 1sten Sek.

Z. B. Es sey die Ebene 20 Fuß lang (= l) und 8 hoch (= h), wie weit fällt ein Körper auf derselben in der ersten Sekunde?

$$\frac{8 \cdot 15}{20} = 6 \text{ Fuß in der ersten Sekunde.}$$

Wie weit wird er nach 3 Sekunden gefallen seyn? Nach §. 711. wird er $15 \cdot 3^2$ (da hier anstatt 15 die 6 gilt), aber nur $3^2 \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$ Fuß durchlaufen.

Die Kraft, welche ein Körper durch den Fall auf der schiefen Ebene am Ende ausübt, wird gefunden, wenn man das Quadrat der Zeitsekunden mit dem relativen Gewicht multiplicirt.

Formel: $z^2 \cdot g = k =$ der ausgeübten Gewalt.

§. 726. Die Geschwindigkeit des Körpers Q Fig. 254, der von c an nach b auf der schiefen Ebene fällt, ist in b eben so groß, als sie seyn würde, wenn er frei von c nach a fiele.

In

In der Figur 255. stellt die krumme Linie AMC einen Bogen von der Cycloide oder Radlinie (und zwar die Hälfte derselben) vor, welche krumme Linie die merkwürdige Eigenschaft hat, daß ein Körper, der in ihr herabgleitet, in derselben Zeit in c anlangt, er mag vom obersten Punct A, oder von irgend einem andern M auf derselben herabfallen. Auch erhält der Körper, der auf AMC herabrollt, in C dieselbe Geschwindigkeit, die er durch den senkrechten Fall nach AB bekommen würde. Jedoch sind nach der Figur des Weges die Zeiten verschieden. Der Körper gelangt nämlich nicht auf dem kürzesten Wege AoC am schnellsten nach C, sondern er wird am geschwindesten in C ankommen, wenn sein Weg den Bogen der Radlinie AMC beschreibt, in welcher AB der Durchmesser des Rades, und BC dem halben Umfange desselben gleich ist.

§. 727. Vom Stoße elastischer Körper. Elastische Körper erhalten durch den Stoß anfangs denselben Zuwachs an Bewegung, wie die unelastischen, allein durch ihre elastische Kraft wird die zusammengedrückte Masse alsobald den vorigen Raum wieder erfüllen, also eigentlich doppelt stoßen und gestoßen werden.

Es sey der eine elastische Körper A, seine Masse = M; Geschwindigkeit = C; der andere Körper = B; seine Masse = m; Geschwindigkeit = c; so ist in der allgemeinen

Formel: $\frac{MC + mc}{M + m} = G$ = gemeinschaftliche Geschwindigkeit durch die einfache Mittheilung.

A verliert nun 2 (MC — GM) durch den doppelten Stoß, daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße = $\frac{(MC - GM)}{M}$.

B gewinnt 2 (Gm — mc); daher seine Geschwindigkeit nach dem Stoße = $\frac{2(Gm - mc)}{m}$.

Z. B. Die elastische Kugel A habe Masse = 8 ℔; Geschwindigkeit = 6; die Kugel B habe Masse = 4; Ge-

Geschwindigkeit = 0, ruhe also; so ist $\frac{8.6+4.0}{8+4} = \frac{48}{12}$ = 4 = G.

A verliert nun 2.(8.6 — 4.8) = 2.(48 — 32) = 2 . 16 = 32 durch den doppelten Stoß, daher ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße $\frac{8.6-4.8}{8} = 6-4 = 2$.

B gewinnt 2 . (4 . 4 — 4 . 0) = 2 . 16 = 32; ihre Geschwindigkeit ist daher $\frac{2.(4.4-4.0)}{4}$ $= \frac{32}{4} = 8$.

2tes Beispiel.

A hat Masse = 8 Geschwind. = 6 B hat Masse = 4 Geschw. = 3 und $\frac{8.6+4.3}{8+4}$ $= \frac{48+12}{12} = 5 = G$.

Nun verliert A 2 (8.6 — 5.8) = 8.2 = 16, behält also noch 8.6 — 16, oder überhaupt 32 Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit = $\frac{32}{8} = 4$.

Aber B gewinnt 2.(5.4.—4.3) = 2.(20—12) = 2.8 = 16; hat also überhaupt 4.3 + 16 = 28 Grade der Bewegung, und eine Geschwindigkeit = $\frac{28}{4} = 7$.

3tes Beispiel.

Wenn A Masse = 2 Geschwindigk. = 16 / 32 und B Masse = 3 Geschwindigk. = 1 / 3 hat, so ist

$\frac{2.16+3.1}{2+3} = \frac{35}{5} = 7 = G$.

A verliert nun 2(2.16 — 7.2) = 2.18 = 36 Grade. Sie hatte aber nur 32, folglich geht sie mit 4 Grad der Bewegung und $\frac{4}{2} = 2$ Geschwindigkeit zurück.

B gewinnt $2.(7.3-3.1) = 2.18 = 36$ Grad, und da sie schon 3 Grad hatte, so hat sie nun 39, und eine Geschwindigkeit $= \frac{39}{3} = 13$.

4tes Beispiel. Wenn die Bewegungen entgegengesetzt sind.

A habe Masse $= 3$, Geschwindigk. $= 8$, $= 24$ — B Masse $= 2$, Geschw. $= 7$, $= 14$ — so ist $\frac{24-14}{3+2}$

$= \frac{10}{5} = 2 =$ G.

A verliert $2.(3.8-2.3) = 2.18 = 36$ Grade. Da sie nur 24 Grad hatte, so geht sie mit 12 Grad, und einer Geschwindigkeit von $\frac{12}{3} = 4$ zurück.

B gewinnt $2.(2.2+2.7) = 2.18 = 36$ Grade; aber da sie 14 Grade entgegensetzt, so bleiben ihr nur 22 Grad und eine Geschwindigkeit $= 11$, rückwärts.

Gleiche elastische Kugeln, die einander begegnen, gehen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Die verschiedenen Fälle, welche beim Stoß elastischer Kugeln vorkommen, sind wohl zu unterscheiden.

§. 728. Schief ist der Stoß, wenn das Centrum eines Körpers nicht senkrecht getroffen wird.

Z. B. es berühre die elastische Kugel B Fig. 257. auf ihrem Wege CB die ruhende A, so wird A nach der Richtung BD, welche durch die beiden Mittelpuncte geht, sich hinbewegen; B aber nicht nach H kommen, sondern nach BG abspringen, wenn sie mit A von gleicher Masse ist. Die Linie GB ist parallel FE, die senkrecht auf BD durch die Berührungspuncte geht.

Ist nun BH = der Geschwindigkeit der Kugel B, so ist das Parallogramm FHDE leicht zu zeichnen.

Anmerk. Klügel in seiner Encyclopädie S. 196. giebt folgende Regeln:

1. Die Summe der Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße sind

sind gleich, wenn die Körper einerlei Richtung haben; der Unterschied jener Producte ist zu nehmen, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

2. Die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße sind gleich, die Körper mögen laufen, wie man will.

3. Die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße ist dieselbe, d. h. die Körper entfernen sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher näherten.

§. 729. Elastische Kugeln, die gegen eine veststehende Ebene geworfen werden, springen, gleich den Lichtstrahlen, unter gleichgroßen Winkeln zurück. Dies geschieht, wenn Ebene und Kugel, oder einer nur von beiden Körpern elastisch ist.

Die Gesetze vom Stoß elastischer Körper kommen beim Villard unaufhörlich in Anwendung.

Mathematische Berechnung der Töne.

§. 730. Theilt man eine Saite in zwei gleiche Theile, und läßt nur die eine Hälfte schwingen, so ist der Ton um 1 Octave höher, als der Ton der ganzen Saite; wird die Saite in 3 Theile getheilt, wovon nur 2 Theile tönen, so ist der Ton um eine Quinte höher, als der Ton der ganzen Saite. Die Töne einer vollen Octave haben daher zum Grundton ein Verhältniß, wie die Länge der schwingenden Saite zur Länge der Saite, welche den Grundton oder die 1 hören läßt. Grundton und Octave verhalten sich wie 2 : 1; oder die Octave ist $\frac{1}{2}$ Grundton; der Grundton verhält sich zur Quinte, wie 3 zu 2; oder die Quinte ist $\frac{2}{3}$. In der folgenden Tabelle ist das Verhältniß eines jeden Tones innerhalb einer Octave zum Grundton, den wir C nennen wollen, in einem Decimalbruch angegeben, wobei die Länge der Saite des Grundtons = 1 genommen ist.

Tabelle

Tabelle der Tonverhältnisse.

C ; C Einklang = 1 : 1	. . . . .		1,0000
C : cis kleine Sekunde	25 : 24	. .	0,9600
C : des — —	16 : 15	. .	0,9375
C : d große Sekunde	9 : 8	. .	0,8889
C : dis übermäßige Sek.	75 : 64	. .	0,8533
C : es kleine Terz . .	6 : 5	. .	0,8333
C : e große Terz . .	5 . 4	. .	0,8000
C : eis übermäßige Terz	245 : 192	. .	0,7836
C : fes verminderte Quarte	32 : 25	. .	0,7812
C : f Quarte . . .	4 : 3	. .	0,7500
C : fis übermäßige Quarte	25 : 18	. .	0,7200
C : ges verminderte Quinte	36 : 25	. .	0,6944
C : g Quinte . . .	3 : 2	. .	0,6666
C : gis übermäßige Quinte	25 : 16	. .	0,6400
C : as kleine Sexte . .	8 : 5	. .	0,6250
C : a große Sexte . .	5 : 3	. .	0,6000
C : ais übermäßige Sexte	245 : 144	. .	0,5877
C : b kleine Septime	16 : 9	. .	0,5625
	(9 : 5)	. .	0,5555
C : h große Septime	15 : 8	. .	0,5333
C : ces verminderte Octave	48 : 28	. .	0,5208
C : c Octave . . .	2 : 1	. .	0,5000

§. 731. Es ist nicht möglich, die Töne in ihrer mathematischen Reinheit auszuüben, weil eine Fortschreitung in lauter reinen Verhältnissen zu weit vom Grundton abführen, und die Verbindung mit demselben endlich ganz aufheben würde. Überdies haben wir auf unsern Tasteninstrumenten für die freilich etwas verschiedenen Töne cis und des, dis und es, fis und ges u. s. w. nur eine Taste. Die dazu gehörige Saite muß nun so gestimmt werden, daß der Ton zwischen cis und des, fis und ges ꝛc. schwebt, um sowol als cis, als auch als des brauchbar zu seyn.

Diese nothwendige Unvollkommenheit hat die Folge, daß jedem Intervall etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Man nennt dies Temperatur. Nur die Octaven bleiben vollkommen rein.

Von

Von den in voriger Tabelle angeführten 21 Tönen bleiben also nur folgende 12 übrig:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
c	cis des	d	dis es	e	f	fis ges	g	gis as	a	ais b	h	c

§. 732. Die gleichschwebende Temperatur ist dasjenige Verhältniß aller Töne innerhalb einer Octave, nach welchem die nothwendige Unvollkommenheit unter alle 12 Töne gleichmäßig vertheilt, folglich einem jeden etwas von seiner mathematischen Reinheit genommen wird. Die Töne verhalten sich umgekehrt, wie die Längen gleich dicker und gleich stark gespannter Saiten, oder gerade, wie die Geschwindigkeiten der Schwingungen. Heißt nun der Grundton 1 und die Octave 2, so lassen sich zwischen beide noch 11 Zahlen einschalten, die eine geometrische Progression bilden. Die erste Zahl ist die 12te Wurzel aus 2; die zweite ist das Quadrat dieses ersten Gliedes, die dritte der Kubus u. s. w.; die 12te ist die 12te Potenz, oder die 2 selbst, die Oberoctave. S. Klügel's Encyclop.

Mittelst der Logarithmen finden wir die zwölfte Wurzel aus 2 dadurch, daß wir ihren Logarithmen durch 12 dividiren, und dazu die Zahl suchen.

log. 2 = 0,3010300

12:) ————————

0,0250858, wozu 1,05946 gehört.

Die übrigen Zahlen findet man, wenn man den zwölften Theil des Logarithmen von 2 nach der Reihe mit 2, 3, 4 ꝛc. multiplicirt, und die Zahlen dazu aufsucht, woraus folgende Tabelle für die gleichschwebende Temperatur entsteht.

	I.	II.	III
	Verhältnisse der Schwingungen,	der Saitenlängen.	Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
c	1,00000 . .	1,00000 .	0
cis	1,05946 . .	0,94387 .	112,25
d	1,12246 . .	0,89090 .	218,20
dis	1,18921 . .	0,84090 .	318,21

I.	II.	III.
Verhältniß der Schwingungen,	der Saitenlängen.	Die ganze Saite = 2000, und die nicht schwingenden Theile gezählt.
e 1,25992	0,79370	412,60
f 1,33484	0,74915	501,69
fis 1,41421	0,70710	585,79
g 1,49831	0,66742	665,16
gis 1,58740	0,62996	740,08
a 1,68179	0,59461	810,79
b 1,78180	0,56123	877,54
h 1,88775	0,52973	940,54
c 2,00000	0,50000	1000,00

Das Verhältniß der Saitenlängen unter II. ergiebt sich, wenn man die unter I. gefundenen Zahlen halbirt, und umkehrt, d. h. h zu cis, b zu d macht u. s. w.

Die unter III. befindlichen Zahlen, welche die Länge des nichtschwingenden Theils einer Saite (die durch Stege verkürzt werden kann) angeben, findet man, wenn man die unter I. gegebenen Schwingungen von der Zahl 2000,00 abzieht und umkehrt. So giebt z. B. die Schwingung für h = 1887,75 von 2000,00 abgezogen, die Zahl 112,25 für cis in III.

Nach der letzten Berechnung unter III. werden die Monochorde abgetheilt.

§. 733. Eine vollkommen richtige gleichschwebende Temperatur auf dem Griffbrett einer Guitarre zu erhalten, verfahre man also:

Wenn das Instrument so weit fertig ist, daß Saiten darauf gezogen werden können, so beziehe man sie vorläufig mit Drathsaiten, und lasse sie einige Tage ruhig liegen, damit sich der Hals in die richtige Lage ziehe. Dann drücke man da die Saite mit einer Messerschneide nieder, wo sie die reine Octave angiebt. Weil Drathsaiten gleichförmiger, als Darmsaiten sind, so geben sie auch den Octavenpunct sicherer an. Dieser Punct wird nicht in der Mitte oder Hälfte der Saite liegen (weil dieselbe durch das Niederdrücken stärker angespannt

spannt wird), sondern näher an das Ende der Saite fallen, wohin die Stege oder Bunde kommen, je höher dieselbe über dem Griffbrette schwebt. Er falle, wohin er wolle, so theile man allezeit seinen Abstand vom Halse (vom sogenannten Sattel) in 1000 Theile, und nehme davon für

E = 0	für H = 665,16
F = 112,25	C = 740,08
Fis = 218,20	Cis = 818,79
G = 318,21	D = 877,54
Gis = 412,60	Dis = 940,54
A = 501,69	E = 1000
B = 585,79	

solcher Theile. Soll die Theilung noch in die zweite Octave gehen, so nehme man von jeder Zahl die Hälfte, z. B. für f $\frac{112,25}{2}$ = 56,12 und trage sie jenseit des Octavpuncts auf das Griffbrett. Auf diese Weise sind die Puncte, durch welche die elfenbeinernen Stege gelegt werden müssen, vollkommen genau bestimmt.

Daß man diese ganze Theilung sehr zart auf ein sauberes Lineal tragen, und bei allen eben so gearbeiteten Guitarren, die gleiche Saitenlänge und Neigung des Halses haben, wieder gebrauchen kann, sieht man ohne Erinnern.

Wohl verdient die Abtheilung der Stege die größte Aufmerksamkeit der Verfertiger, indem sich jede Nachlässigkeit durch Mißtöne rächt, die um so übler wirken, je ungleichförmiger die Saiten sind. Die in der Musikalischen Zeitung mitgetheilte Verfahrungsweise von H. Scheibler, so wie die mehrerer Künstler, ist mathematisch unrichtig, und nur erträglich zu nennen.

Vierte Abtheilung.

Astronomie.

1. Erklärungen, Zeitgleichung, sphärische Astronomie, Strahlenbrechung u. s. w.

§. 734. Die Wissenschaft vom Weltgebäude, von darin vorhandenen Weltkörpern, ihren Erscheinungen und Bewegungen, Größen, Entfernungen und Beschaffenheiten, heißt Astronomie oder Sternkunde, und zerfällt

a. in die sphärische, welche die scheinbare Bewegung der Weltkörper berechnet;

b. in die theoretische, welche die wahren Bewegungen der Weltkörper, ihre Größen und Entfernungen aus Beobachtungen und Rechnungen kennen lehrt;

c. in die physikalische, welche die Kräfte und Wirkungen, die das Weltall zusammenhalten, entwikkelt, und über die natürliche Beschaffenheit der Himmelskörper aus Beobachtungen urtheilt.

Anmerk. Vergleiche über dieses: Hrn. Bode's Erläuterungen der Sternkunde ꝛc., welches unübertroffene Werk alle Zweige dieser Wissenschaft mit großer Deutlichkeit und Gründlichkeit abhandelt, und bei dem Folgenden mit zum Grunde gelegt ist. Freunden der Sternkunde ersetzt es jede andere Anweisung. Der Preis ist 5 Rthlr. für beide Bände.

§. 735.

§. 735. Jeder Mensch glaubt sich im Mittelpunct des großen runden Gewölbes, welches der Himmel rings um ihn und um die Erde bildet, zu befinden. Die am blauen Himmelsgewölbe blinkenden Sterne scheinen ihm gleich fern zu seyn, und ihre gemeinschaftliche Bewegung von Osten nach Westen statt zu haben. Daß diese Himmelskörper in sehr ungleichen Entfernungen hinter einander stehen, daß das blaue Himmelsgewölbe nichts, als ein sinnlicher Schein, ist, so wie der tägliche scheinbare Auf- und Untergang eigentlich von der Umwälzung der Erde von Westen nach Osten herrührt — alles dies ändert in der Berechnung der Aufgaben aus der spärischen Astronomie nichts. Denn das hohle Himmelsgewölbe, in dessen Mittelpunct wir uns zu befinden glauben, wird von ihr als eine hohle Kugel betrachtet, an deren innerer Fläche sie Kreise und Linien zieht, durch die und auf welchen die scheinbaren Bahnen der Himmelskörper gehen müssen.

§. 736. Der kleine Kreis azpqns Fig. 258. sey die Erdkugel, in c ihr Mittelpunct, p der Nordpol, s der Südpol und aq der Äquator. Zwischen dem Äquator und dem Nordpol befinde sich in z ein Zuschauer, der wegen der unermeßlichen Entfernung des Himmelsgewölbes und der Kleinheit der Erde eigentlich in c steht, folglich die scheinbare tägliche Umwälzung des Himmels aus dessen Mittelpunkt c betrachtet. Sieht er aus z gerade in die Höhe, so erblickt er am Himmelsgewölbe einen Punct Z, welcher sein Scheitelpunct oder Zenit heißt.

Die verlängerte Linie Zz trifft den Mittelpunct der Erde, und geht von da verlängert durch n nach dem senkrecht über n befindlichen Himmelsgewölbe in N, welcher Punct der Fußpunct oder Nadir genannt wird.

Ein Zuschauer in a hat sein Zenit in A, sein Nadir in Q; und so wird jeder Punct auf der Erdkugel sein besonderes Zenit und Nadir haben.

Denkt man sich die Erdaxe sp bis zum Himmelsgewölbe verlängert, so trifft sie in P den nördlichen und in S den südlichen Weltpol. Eben so wird der erweiterte Äquator aq in A und Q zwei Puncte am Himmelsgewölbe treffen, die im Äquator des Himmels liegen.

Bei

Bei der einmaligen Umwälzung der Himmelskugel um die Weltaxe PS bleiben die Pole P und S selbst unbeweglich, allein Q bewegt sich nach A in einem Bogen über qCa, während A sich hinterhalb der Figur über aCq nach Q, und dann diesseits über qCa wieder nach seiner Stelle in A bewegt. Die Linie AQ beschreibt demnach einen größten Kreis, dessen Centrum C, und dessen Pole die Weltpole sind. Man nennt ihn Äquator des Himmels. — Bei dieser Bewegung bleibt der Punct Z auch nicht im Zenit von z, sondern ist nach 12 Stunden in V; der Punct N aber in O. Dem Beobachter erscheinen innerhalb 24 Stunden alle Puncte, die in einem Kreise liegen, dessen Radius PZ ist, im Zenit. Alle Kreise, deren Ebenen durch den Mittelpunct der Erde gehen, heißen größte Kreise; folglich ist ein Kreis, den der Punct Z um den Pol P beschreibt, nur ein kleinerer Kreis; eben dies gilt auch von dem Punct N. Die Erde wird bei dieser Vorstellung stillstehend gedacht.

§. 737. Wenn man sich aber den Himmel stillstehend denkt, und die Erde um ihre Axe sp sich schwingen läßt, so scheint es einem Beobachter auf derselben, weil er die Umdrehung nicht merkt, daß sich der Himmel in entgegengesetzter Richtung um sie schwinge. Der Punct a muß sich dann in 12 Stunden über C nach q bewegen; z rückt in eben derselben Zeit nach v; n nach o. Kurz alle Erscheinungen erfolgen in gleicher Ordnung, als vorher bei veststehender Erde.

§. 738. Wir betrachten nun die Himmelskugel in Fig. 259. allein, und versetzen uns in ihren Mittelpunct. Es sey in P der nördliche und in S der südliche Weltpol, so ist AQ der Äquator, der hier, wie jede Linie auf einer Kugeloberfläche, als ein Bogen erscheint. Wenn nun in Z das Zenit eines Ortes ist, so wird HOR der Horizont oder Gesichtskreis seyn, durch den der Himmel in 2 Halbkugeln getheilt wird. Alle Kreise, die durch das Zenit Z gehen, und den Horizont senkrecht durchschneiden, heißen Scheitelkreise oder Vertikalkreise. Es sind unzählig viele möglich; alle sind größte Kreise.

Der Äquator wird von einem andern größten Kreise EK unter einem Winkel von 23° 27′ 50″ durchschnitten, welcher Ekliptik oder Sonnenbahn heißt, weil die Sonne in 365 Tagen 6 Stunden denselben zu durchwandeln scheint.

Anmerk. Man denke sich den Horizont HR an dem Gestelle HLGR, und eine Kugel PASQ so bevestigt, daß sie sich um PS drehen läßt, so hat man eine Vorstellung von einem Himmelsglobus.

§. 739. Alle größte Kreise auf einer Kugel durchschneiden einander auf zwei um 180° von einander abstehenden Puncten. Weil nun der Horizont ein größter Kreis ist, so ist auch von jedem andern größten Kreise stets die Hälfte über dem Horizonte sichtbar.

§. 740. Es bewege sich nun die Himmelskugel um die Axe SP, während der Horizont HR unbeweglich bleibt, so beschreibt der Punct E z. B. den mit dem Äquator gleichlaufenden Kreis EmM; der Punct K aber den Kreis ktw; der Punct d beschreibt um den Nordpol P den Kreis dc; und der Punct e den Kreis ef; welche zur Hälfte in der Figur erscheinen, sämmtlich mit dem Äquator parallel und kleinere Kreise sind.

Der Kreis EmM heißt der nördliche Wendekreis, und liegt größtentheils über dem Horizont; aber der Kreis ktw, der südliche Wendekreis, liegt größtentheils unter demselben. Bei anderer Stellung der Himmelskugel würde von diesen Parallelkreisen mehr oder weniger über dem Horizont erscheinen.

Der kleinere Kreis cd heißt der nördliche Polarkreis, wird von dem um 23° 27′ 50″ vom Pol abstehenden Pol der Ekliptik beschrieben, und ist stets über dem Horizont; hingegen der vom andern Pol der Ekliptik beschriebene Kreis ef liegt beständig unter demselben, und heißt der südliche Polarkreis.

§. 741. Die Sonne folgt nun dem täglichen Umschwung des Himmels, verändert aber unterdessen täglich ihren Platz etwa um 1°, und ist z. B. am 21sten März im Äquator in ♈; am 22sten Junius aber in E, am

23sten

23sten September wieder im Äquator (in der Figur hinter ♈); und am 22sten December in k.

Ist sie in ♈, so ist sie gerade halb so lange über dem Horizonte, als unter demselben, folglich ist Tag und Nacht gleich lang auf der Erde. Nach 3 Monaten, wenn sie auf ihrer Bahn in E ist, beschreibt sie ihren Tagbogen in EmM, von welchem der größte Theil, nämlich Em, über dem Horizont liegt; folglich sind dann die Tage viel länger, als die Nächte. Das Gegentheil geschieht, wenn sie sich am 22sten December in K befindet, und ihr täglicher Umlauf in kw ist.

§. 742. Bei dieser Stellung der Himmelskugel wird jeder Himmelskörper täglich einmal auf den größten Kreis HAEZP gelangen, und daselbst seinen höchsten Standpunct haben. Dieser Kreis, welcher durch das Zenit und beide Weltpole geht, und auf dem Äquator und Horizont senkrecht steht, heißt Meridian- oder Mittagskreis. Jeder Ort auf der Erde, der nicht unter demselben liegt, hat einen andern Meridian.

Anmerk. An Himmels- und Erdkugeln stellt diesen Meridian ein messingner Ring vor, der in 4 mal 90° eingetheilt, und mit der Kugel im Gestelle zugleich verschiebbar ist. — Man hat auch auf einem dünnen Messingblech einen in 90° getheilten Viertelkreis, der im Zenit an den Meridianring angeschraubt, und nach allen Richtungen an der Kugelfläche zum Horizont herab bewegt werden kann. Man nennt ihn Höhenquadrant. Sein Zweck ist, die Höhe eines Sterns über dem Horizont bei einer gegebenen Stellung der Kugel zu messen. In Fig. 259. stellt ihn ZV vor.

§. 743. Der Abstand eines Himmelskörpers vom Äquator heißt seine Abweichung, Declinatio. Z. B. ab oder AE. Sie ist nördlich oder südlich, je nachdem das Gestirn auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel sich befindet. Z. αβ oder QK.

Der Winkel AγE, oder QγK, den die Sonnenbahn mit dem Äquator macht, heißt die Schiefe der Ekliptik; sein Maaß ist AE oder QK.

Das Maaß eines jeden sphärischen Winkels ist der Bogen, welcher in einem Abstande von 90° der Winkelspitze gegenüber steht.

§. 744. Unter Polhöhe versteht man die scheinbare Erhöhung des Pols über den Horizont, oder den Winkel POR.

Äquatorhöhe ist der Winkel AOH, oder die Erhöhung des höchsten Äquatorpunctes im Meridian; sein Maaß ist AH = der Ergänzung der Polhöhe zu 90°.

Für jeden Ort auf der Erde, der den Pol höher oder tiefer sieht, wird auch das Zenit, der Horizont und jeder Kreis gegen Z eine andere Stellung haben. — (Die Polhöhe ist stets der geographischen Breite eines Orts, oder seinem Abstande vom Erdäquator gleich.).

§. 745. Den Horizont theilt man in 4 Hauptabtheilungen: Morgen, Mittag, Abend, Mitternacht, oder Ost, Süd, West, Nord. (Außerdem beim Seewesen wol in 32 oder 64 Unterabtheilungen, die bekannt genug sind.). Die Entfernung eines Punctes in einem Vertikalkreise vom Ostpuncte heißt Morgenweite; vom Westpuncte — Abendweite; die Entfernung vom Südpuncte (oder der Winkel, den ein Vertikalkreis mit dem Meridian macht) heißt das Azimuth; es ist östlich oder westlich, je nachdem es auf der Ost- oder Westseite des Meridians genommen wird.

Alle Kreise und Winkel an der Himmelskugel werden in Graden angegeben, deren bekanntlich jeder Kreis 360 hat. Weil die kleinern Kreise auch kleinere Grade haben, so mißt man sie durch Grade der größten Kreise, welche alle gleichgroß sind; und daher bestehen alle sphärische Dreiecke aus Bogen größter Kreise.

§. 746. Höhe eines Himmelskörpers. Jeder Vertikalkreis ist ein größter Kreis, und also beträgt der Quadrant vom Scheitel bis zum Horizont 90°. Null-Grad liegt im Horizont; 90° im Zenit. Der Abstand vom Horizont ist die Höhe, welche das Complement oder die Ergänzung zu 90° des Abstandes vom Zenit ist.

Almucantarats oder auch Höhenkreise laufen mit dem Horizont parallel, werden immer kleiner, je

näher

näher sie dem Zenit kommen (wo sie = Null sind) und sind kleinere Kreise. Sterne auf einerlei Almucantarats haben einerlei Höhe, welche auf den Vertikalkreisen gemessen wird, und nicht über 90° betragen kann.

Die Abend- und Morgenweite, so wie das Azimuth mißt allemal ein Bogen am Horizont.

§. 747. Derjenige Punct, in welchem die Sonnenbahn am 21sten März in ♈ den Äquator durchschneidet, ist der Anfangspunct, von welchem die Grade des Äquators nach Morgen hin gezählt werden. Innerhalb 24 Stunden bewegen sich alle 360° desselben durch den Meridian; und eben so auch die Grade seiner Parallelen. Folglich gehen in einer Stunde 15° des Äquators oder seiner Parallelen durch den Meridian, oder culminiren. Die Grade, welche den Unterschied eines Sterns zwischen der Culmination desselben und des Anfangspunctes ♈ angeben, heißen gerade Aufsteigung. Ein Himmelskörper, der z. B. mit dem 120sten Grade des Äquators zugleich durch den Meridian geht, hat eine gerade Aufsteigung von 120°. Die Grade der geraden Aufsteigung werden allemal auf dem Äquator von 0° ♈ bis 360 fort gezählt.

Durch den Äquator wird der Himmel in die nördliche und südliche Halbkugel getheilt. Von demselben bis zum Pol sind 90°; folglich kann ein Stern nicht über 90° Abweichung haben. Die Abweichung wird auf den Meridianen, welche alle senkrecht auf dem Äquator stehen und durch beide Weltpole gehen, gemessen.

Jeder Kreis, den ein Stern bei einer Umwälzung des Himmels am Firmament beschreibt, ist mit dem Äquator parallel.

§. 748. Ein sehr merkwürdiger Kreis ist die Ekliptik oder Sonnenbahn. Vom Durchschnitt ♈ fängt man an zu zählen, und zählt die Grade derselben nach Osten hin durch die

Frühlingszeichen: Widder, Stier, Zwilling, je-
♈ ♉ ♊

des zu 30 Grad, in welchen die Sonne eine nördliche Abweichung hat, und bei uns die Tage länger, als 12 Stunden, sind.

Vom

Vom 22sten Junius an nähert sich die Sonne dem Äquator wieder, und durchläuft die

Sommerzeichen: Krebs, Löwe, Jungfrau, jedes ♋ ♌ ♍ zu 30°, in welchen, wegen ihrer nördlichen Abweichung, bei uns die Tage ebenfalls länger, als 12 Stunden, sind.

Am 23sten September ist sie abermals im Äquator, wo Tag und Nacht einander gleich sind, und durchwandelt von nun an die

Herbstzeichen: Waage, Scorpion, Schütze, jedes ♎ ♏ ♐ zu 30°, in denen die Sonne eine südliche Abweichung hat, und auf der südlichen Halbkugel der Erde die Tage länger, als 12 Stunden, bei uns aber kürzer sind.

Der kürzeste Tag für uns ist am 22sten December, von welchem Tage an die Sonne durch die

Winterzeichen: Steinbock, Wassermann, Fische, ♑ ♒ ♓ jedes zu 30°, geht, noch eine südliche Abweichung hat, und unsre Tage kürzer, als 12 Stunden, macht.

Der Abstand der Sonne vom Widderpunct (0° ♈) wird ihre Länge genannt. Man zählt sie nach Zeichen und Graden; z. B. wenn ihr Abstand vom Widderpunct 80° beträgt, so spricht man: die Länge der Sonne = 2 Zeichen 20°; oder sie steht im 20° ♊.

Anmerk. Im grauen Alterthum theilte man die Sterne, bei welchen die Sonne auf ihrer jährlichen Bahn erschien, in 12 Sternbilder, Sternhaufen, denen man die Namen Widder, Stier, Zwilling, Krebs, Löwe, Jungfrau, Waage, Scorpion, Schütze, Steinbock, Wassermann, Fische, gab, weil die Phantasie Aehnlichkeit zwischen den Sternhaufen und den genannten Thieren zu finden wußte. Die Sonne war bei Frühlingsanfang im Widder, und durchlief etwa alle Monat eins dieser Sternbilder; allein aus physischen Gründen trifft dies jetzo nicht mehr zu; und man unterscheidet jetzt genau die Zeichen von den gleichnamigen

gen Sternbildern. Unter Zeichen versteht man nämlich allemal den 12ten Theil der ganzen Ekliptik. Der Widderpunct liegt jetzt im Sternbilde der Fische.

§. 749. Durch die 4 Hauptpuncte der Sonnenbahn 0° ♈, 0° ♋, 0° ♎, 0° ♑ zieht man auch zwei größte Kreise, welche durch die Pole gehen, den Äquator senkrecht durchschneiden, und Coluren heißen. Sie bezeichnen den Frühlings- Sommer- Herbst- und Winterpunct.

§. 750. In der Fig. 261. ist der Äquator als eine gerade Linie, und die Ekliptik als eine sich um ihn schlingende krumme Linie vorgestellt. Aus dieser Vorstellung ersieht man, wie die Sonne, wenn sie sich am 21sten März bei ♈ vom Äquator nördlich wendet, in ihrer Abweichung anfangs schnell zunimmt; wie diese Zunahme immer geringer wird, je näher sie dem ♋ kommt, wo ihre Abweichung mehrere Tage hindurch nur um Sekunden verschieden ist; wie die Sonne mit beschleunigter Abnahme ihrer Abweichung zum Äquator zurückkehrt und in eben dieser Form die südliche Bahn durchläuft.

Die aus ♉, ♊, ♋ ꝛc. auf den Äquator gefällten Perpendikel schneiden nicht gleichgroße Stücke von demselben ab; denn ♈a ist kleiner, als bc oder cd, welches eine natürliche Folge der fast parallelen Lage der Ekliptik in der Gegend des ♋ ist. Demnach machen die 30° des ersten Zeichens in der Sonnenbahn nicht auch 30° auf dem Äquator, sondern nur 27° 54′ 18″; indessen treffen die Puncte 90°, 180°, 270° und 360° zusammen.

§. 751. Die Grade der Ekliptik und ihrer Parallelen heißen Längengrade. Der Abstand eines Himmelskörpers von der Ekliptik heißt seine Breite, welche nördlich oder südlich seyn kann, je nachdem derselbe dem Nord- oder Südpol der Ekliptik näher steht, und wird auf den Breitenkreisen gemessen, welche auf der Ekliptik senkrecht stehen und durch die Pole derselben gehen. Die Breite kann niemals über 90° seyn.

§. 752. Der sogenannte Thierkreis besteht aus den angeführten 12 Sternbildern, durch welche die Sonnenbahn geht. In diesen bewegen sich auch die den Alten be-

bekannten Planeten; allein seit der Entdeckung der 4 neuen Planeten würde ein Thierkreis, der die sämmtlichen Bahnen aller einschließen soll, über 100° Breite haben müssen.

§. 753. Knoten nennt man diejenigen Puncte in der Ekliptik, wo die Bahn eines Planeten dieselbe durchschneidet. Diese Knoten sind in Beziehung auf die Ekliptik das, was die Durchschnittspuncte der letztern und des Äquators sind, und auch eben so veränderlich.

§. 754. Alle bisher beschriebene Kreise lassen sich auf einem Himmelsglobus mit einem Blick übersehen. In Ermangelung eines solchen kann eine kleinere Kugel von einigen Zollen im Durchmesser, auf der man diese Linien, wie sie beschrieben sind, zieht, einstweilen gute Dienste leisten. — Zeichnungen von Kugelkreisen und Dreiecken auf dem Papiere erfordern viel Einbildungskraft des Schülers, und geben nicht selten falsche Begriffe.

Anmerk. Sehr gute und brauchbare Himmels- und Erdgloben von 8 bis 10 Zoll Durchmesser sind im Industriecomptoir zu Weimar für 10 bis 15 Rthlr. zu haben.

Die vollständigste Anleitung zum Gebrauch der Himmels- und Erdkugel giebt

Scheibel in seinem Vollständigen Unterricht vom Gebrauche der k. Himmels- und Erdkugel, und in dessen Erläuterungen und Zusätzen, mit Kupfern und astronomischen Tafeln. Preis 1 Rthlr. 18 Gr.

Bode in seinen Erläuterungen der Sternkunde ꝛc und seiner Anleitung zur Kenntniß der Erdkugel ꝛc.

§. 755. Für jeden, der astronomische Beobachtungen anstellen will, ist die Lage des Meridians, oder desjenigen größten Kreises, der durch beide Pole und das Zenit, durch den wahren Süd- und Nordpunct geht, das wichtigste Erforderniß. Alle Himmelskörper gehen täglich einmal südlich und einmal nördlich durch den Meridian oder culminiren, und haben daselbst ihren höchsten Standpunct und die Hälfte ihres Tagbogens erreicht;

reicht; denn der Meridian theilt den Aquator und alle seine Parallelen und Tagbogen in 2 Theile.

Man hat mannigfaltige Mittel, die Lage des Meridians oder der Mittagslinie zu finden; aber nicht alle sind gleich genau und ausführbar. Dem ersten Anblick nach scheint dies Geschäft leicht; denn die Sonne wird alle Mittage um 12 Uhr im Meridian seyn, und es kommt hauptsächlich darauf an, den Augenblick des wahren Mittags recht genau zu finden.

Man findet die Mittagslinie

1. Mit Hülfe eines Compasses, dessen Abweichung bekannt ist. Man stellt ihn so, daß die Nadel in ihre Abweichung einspielt, und zieht an der Seite des viereckigen Kästchens eine gerade Linie über eine Ebene, so ist diese die Mittagslinie. Siehe Beschreibung des Compasses §. 392, 10.

2. In den Monaten Mai, Junius und Julius, am besten im Junius, wo die Sonne ihre Abweichung nicht merklich ändert, lege man eine gerade Fläche von Holz, Metall oder Stein wagerecht an einen Ort, der Vor- und Nachmittags von der Sonne beschienen werden kann. Aus einem Punct auf der Fläche ziehe mehrere concentrische Kreise, und errichte im Centrum ein senkrechtes, etwa 1 Zoll breites und 3 Zoll hohes, gerades, dünnes Messingblech, in welchem oben, genau über dem Centrum ein feines Loch befindlich ist, durch welches die Sonne auf die Kreise scheinen kann. Nun ist anzunehmen, daß die Sonne in gleich weit vom Mittage entfernten Stunden, gleich hoch erscheinen, und ihr Bild durch das kleine Loch gleich weit vom Mittelpunct der Kreise fallen wird. Dieser Abstand wird aber durch die Kreise gemessen. Man gebe also Acht, wann das helle Pünctchen Vor- und Nachmittags die Kreise berührt, und bemerke die Puncte mit einem feinen Nadelstich. Wenn dies geschehen, so ziehe man die Durchschnittspuncte in jedem Kreise durch eine gerade Linie (Chorde) zusammen, halbire sie, und ziehe durch die Mitte der Chorden und durch das Centrum eine gerade Linie, so ist sie die Mittagslinie; und die Chorden gehen verlängert nach Morgen und Abend.

Diese

Diese Verfahrungsweise ist um so zuverlässiger, je höher das kleine Loch über dem Centrum ist, und je genauer man die Sache betreibt; übrigens leicht, und allenthalben auszuführen.

3) Hat man einen Sextanten oder andern Höhenwinkelmesser und eine gleichförmig gehende Pendeluhr, so mißt man (am besten im Junius) des Vor- und Nachmittags übereinstimmende Sonnenhöhen, und bemerkt dabei, was die Uhr zeigte. Addirt man beide Zeiten und halbirt sie, so ergiebt sich der Augenblick des wahren Mittags. Z. B. Es sey Sonnenhöhe

des Vormittags 40°, um 8 Uhr 11′ 20″
des Nachmittags 40°, um 3 — 48′ 56″
+ 12

24 St. 0′ 16″

2)

Mittag war es, als die Uhr zeigte 12 Uhr 0′ 8″ und sie ging also 8″ vor.

Setzt man diese Messung mehrere Tage hinter einander fort, so wird der Gang der Uhr bekannt, und man kann nun im Voraus den Augenblick des wahren Mittags bestimmen. Der Schatten eines lothrecht hängenden Körpers giebt dann genau die Richtung der Mittagslinie an.

(Wie man aus einer einzigen Messung den Augenblick des wahren Mittags finden könne, wird in der Folge vorkommen).

§. 736. Man habe nun auf die eine oder andere Weise die Mittagslinie gefunden, so sind immer noch Vorrichtungen zu treffen, um den Durchgang oder die Culmination der Himmelskörper zu beobachten.

Den Freunden astronomischer Beschäftigungen ist folgendes Meridianinstrument zu empfehlen.

AB Fig. 260. ist ein starkes hölzernes oder metallnes Lineal, an dem in B ein Diopter BD (worin ein feines Loch L) und in A ein anderes in der Mitte gespaltenes Lineal AC senkrecht aufgerichtet ist. In C sey an einem dünnen Faden ein Loth befestigt, dessen Bleikugel in P frei in einer runden Versenkung schwebt.

Das

Das Instrument bringe man auf die Mittagslinie und schraube es in S vest, daß es sich schwer drehen läßt. Die Seite AC stehe nach Süden. Legt man nun das Auge an das Diopter, so sieht man alle Himmelskörper nach und nach hinter dem Lothfaden vorbeigehen oder culminiren.

Bringt man einen Tubus LT, in dessen Augenglases Brennpunctz ein Fadenkreuz befindlich ist, so an, daß er sich in der Öffnung CP auf und nieder bewegen läßt, während das Augenglas immer über B bleibt, so läßt sich die Culmination viel genauer beobachten.

Will man die Culmination der nahe am Scheitelpunct vorbeigehenden Sterne beobachten, so muß von C nach G noch ein ähnliches Lineal mit einer Öffnung angebracht seyn.

§. 757. Nachdem man sich mit den bisher beschriebenen Kreisen einigermaßen vertraut gemacht, kann man mit Hülfe einer allgemeinen Himmelscharte, oder eines Globus, und des vorhin beschriebenen Meridianinstruments die Sternbilder bald kennen lernen. Zu diesem Zweck ist die große Planisphäre zu Bode's Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels, welche auch einzeln nebst einer Anweisung zum Gebrauch für 12 Gr. zu haben ist, sehr empfehlenswerth. Sie stellt die Gestirne der nördlichen Halbkugel ganz, und von denen der südlichen so viel vor, als in unsern Gegenden über den Horizont kommen, den Pol in der Mitte, wie es diese Projection erfordert. Beim Gebrauch halte man sie über den Kopf, so trifft die Lage der Sterne mit dem Himmel überein. Mit Hülfe dieser Karte kann man in kurzer Zeit ohne mündlichen Unterricht die Gestirne kennen lernen, und viele Aufgaben mit ziemlicher Genauigkeit lösen.

§. 758. Der Himmelsglobus stellt die Gestirne am richtigsten vor, und giebt die deutlichste Anschauung. Über seinen Gebrauch, allerlei Aufgaben aus der sphärischen Astronomie zu lösen, sehe man die §. 754. empfohlnen Schriften von Bode und Scheibel nach. Eine Hauptsache ist, daß man (für unsre Halbkugel) den Nordpol des Globus so hoch über den Horizont erhebt,

hebt, als an dem Beobachtungsorte der Weltpol über dem Horizont erscheint, welche Erhöhung allemal der geographischen Breite gleich ist, und am messingnen Meridianringe gemessen werden kann. Alsdann liegt die Axe des Globus der Weltaxe parallel, und alle Kreise und Puncte auf demselben haben eine übereinstimmige Lage mit dem Sternhimmel. Das Auge des Beobachters muß eigentlich im Mittelpunct der Kugel ruhen, von wo es die Erscheinungen, welche durch die Umwälzung der Kugel entstehen, betrachtet. Für diejenigen, welche sich von der täglichen Bewegung der Gestirne und allen sie begleitenden Umständen noch keine deutliche Begriffe machen können, ist ein Himmelsglobus der beste Lehrmeister.

§. 759. Allein so genau man auch bei mechanischen Auflösungen der Aufgaben mit Hülfe des Globus oder der Planisphäre verfahren mag, so kann man doch nur eine Erscheinung mit einer Sicherheit von etwa 2 Minuten in der Zeit, oder $\frac{1}{2}$ Grad im Bogen angeben, womit der Astronom nicht zufrieden ist, und deshalb seine Zuflucht zur Rechnung nimmt, welche ihm die höchste Genauigkeit gewährt.

In dem Folgenden wollen wir diese Rechnungen kennen lehren, und die nöthigen Formeln geben, damit Freunde der Sternkunde sie selbst anstellen können, und sich frühzeitig an Genauigkeit gewöhnen.

---

§. 760. **Zeitgleichung.** Die Zeit, welche ein Fixstern von einer Culmination zur andern gebraucht, heißt ein **Sternentag**; alle Puncte des Himmels sind unterdessen durch den Meridian gegangen. Ein **Sonnentag** hingegen ist um 3′ 56″,56 länger, weil die Sonne nicht an zwei auf einander folgenden Tagen wegen ihrer Fortrückung am Himmel mit einerlei Punct culminirt, und wird in 24 gleiche Stunden getheilt. Sonnen- und Sternenzeit sind daher sehr verschieden. Theilt man den Sternentag in 24 Stunden, so müssen in einer solchen Sternenstunde genau 15°; in einer Sternenminute 15 Raumminuten; in einer Sternensecunde 15 Raumsekunden durch den Meridian gehen. Hingegen braucht 1°

vier Zeitminuten, 1 Raumminute vier Zeitsekunden, durch denselben zu gehen. Man kann sich also eine Hülfstafel entwerfen, in welcher für eine ganze Umwälzung, oder 24 Sternstunden, berechnet ist, wie viel Grade, Minuten und Sekunden in einer gegebenen Zeit durch den Meridian gehen. Die Tafel I. im Anhange ist eine solche, deren Benutzung wir an einigen Beispielen zeigen wollen.

1. Der Unterschied der Culminationszeit zweier Sterne beträgt 7 St. 4′ 15″; wie viel ist der Unterschied ihrer geraden Aufsteigung?

Nach Tafel I. geben 7 Stund. im Bogen 105°
4′ — — — 1
15″ — — — — 3′ 45″
Unterschied der geraden Aufsteigung = 106° 3′ 45″

2. Der Unterschied der geraden Aufsteigung zweier Sterne beträgt 83° 10′ 12″; wie viel macht dies in der Zeit?

Die 2. Hälfte d. Taf. I. giebt für 80° = 5 St. 20′
3° = — 12′
10′ = — — 40″
12″ = — — — 48‴
Zeitunterschied = 5 St. 32′ 40″ 48‴

Uhren, welche so eingerichtet sind, daß sie genau 24 Stunden zählen, von einer Culmination eines Fixsterns bis zur andern, heißen Sternuhren und sind bei astronomischen Beobachtungen äußerst bequem. (Schraubt man die Pendellinse einer Sekundenuhr um 2,31 Pariser Linien höher, so zeigt sie Sternenzeit).

§. 761. Unsere gewöhnlichen Stunden sind $\frac{1}{24}$ der Zeit, welche von einer Culmination der Sonne zur andern verfließt. Ein Sonnentag ist aber wegen der ungleichen Bewegung der Sonne nicht genau eben so lang, als der andere; denn sie bewegt sich zu einer gewissen Jahreszeit täglich 57′ im Bogen von Westen nach Osten, zu einer andern 61′. Aber in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 45 Sekunden legt sie alle 360° der Ekliptik zurück, woraus sich ihre mittlere tägliche Bewegung zu 59′ 8″,33 ergiebt. Daher heißt die Zeit, in der der ganze Aequator

und

und diese 59′ 8″,33 durch den Meridian rücken, ein mittlerer Sonnentag, an welchem in 1 Stunde 15° 2′ 28″ des Äquators den Meridian passiren. — Ein Sternentag dauert also nur 23 Stunden 56′ 4″ mittlerer Sonnenzeit, und die Fixsterne kommen täglich um etwa 4′ früher in den Meridian, als die Sonne, daher sie in 1 Jahr 366 mal culminiren.

Will man Sternenzeit in mittlere Sonnenzeit verwandeln, so bedarf es einer Reduction, welche die Tafel II. enthält.

1. Wie viel betragen 9 St. 10′ Sternenzeit in mittlerer Sonnenzeit?

Nach Tafel II. geben 9 St. Reduction = — 1′ 28″,5
10 Min. — = — 0′ 1″,6
Reduction = — 1′ 30″,1

also sind 9 St. 10′ Sternz. nur 9 St. 10′ weniger 1′ 30″,1 = 9 St. 8′ 30″ mittlere Sonnenzeit.

Will man mittlere Sonnenzeit in Sternenzeit verwandeln, so muß man die Reduction addiren.

§. 762. Die Zeit, welche von einer Culmination der Sonne bis zur andern verstreicht, heißt die wahre Zeit.

Als Ursachen der Ungleichheit unserer Sonnentage findet man

1. die ungleiche Bewegung der Sonne in der Ekliptik;
2. die Schiefe der Ekliptik; denn gleiche Bogen der Sonnenbahn geben nicht wieder gleiche Bogen, wenn sie auf den Aquator, den allgemeinen Zeitmesser, reducirt werden.

Daher besteht die Ausgleichung der wahren und mittlern Zeit aus 2 Theilen, nämlich

1. aus dem Unterschied der wahren und mittlern Länge,
2. und aus dem Unterschied der wahren Länge und wahren geraden Aufsteigung der Sonne.

Beide Unterschiede in Zeit verwandelt geben die Zeitgleichung, oder den Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit.

Z. B.

Z. B. es sey am
1sten Jan. die mittlere Länge der Sonne 9 Z. 10° 26′
wahre Länge 9 10 28′

Erster Theil = + 2′

Wahre Länge = 9 Z. 10° 28′
gerade Aufsteigung = 9 11 23′

Zweiter Theil = + 55′
Erster Theil = + 2

Summe = + 57′

diese 57′ nach Tafel I. in Zeit verwandelt, geben 3 Minuten 48 Sekunden Zeitgleichung.

Am 15ten April, 16ten Junius, 1sten September und 25sten December trifft die mittlere Zeit mit der wahren genau zusammen. Hingegen im November beträgt der Unterschied der wahren und mittlern Zeit an 16 Minuten. Der längste natürliche Tag ist 24 St, 0′ 30″ (den 21sten Decbr.; der kürzeste dauret 23 St. 59′ 39″ (den 19ten September).

Gut gemachte Sonnenuhren folgen dem ungleichen Lauf der Sonne, und zeigen stets die wahre Zeit; allein unsere Pendeluhren, die um so vollkommner sind, je gleichförmiger sie gehen, vermögen dies nicht, und müssen daher oft gestellt werden, wenn sie mit den Sonnenuhren übereintreffen sollen. Es ist also vernünftiger, alle Pendeluhren die mittlere Sonnenzeit weisen zu lassen, wie in Berlin und a. O. geschieht. Der tägliche Unterschied zwischen dem wahren und mittlern Mittage kann fürs ganze Jahr berechnet, und in eine Tafel gebracht werden, welche Tafel der Zeitgleichung heißt. Die Tafel III. im Anhange ersetzt sie in den Jahren, die zwischen 2 Schaltjahren liegen, ganz, als 1818, 1822, 1826 ꝛc., in den andern Jahren trifft sie beinahe zu. Um mittelst derselben die wahre Zeit in mittlere zu verwandeln, addire oder subtrahire man die bei jedem Tage angegebene Verbesserung zu oder von der wahren Zeit, je nachdem es die Zeichen + oder — erfordern. Z. B. Man beobachtet am 10ten Jan. eine Himmelsbegebenheit um 12 Uhr 46′ wahrer Zeit, so findet man in der ersten mit Januar über-

überschriebenen Spalte für den 10ten Tag die Zahl 7',49", welche zu 12 St. 46' addirt 12 Uhr 53' 49" mittlere Zeit geben.

Anmerk. Die mittlere Zeit liegt bei Sonnen- und Planetentafeln zum Grunde — Ist mittlere Zeit in wahre zu verwandeln, so verwechsle man die Zeichen. — Im Schaltjahr ist die Zeitgleichung am

1. Jan. = + 3' 37"	1. April = + 3' 58"	1. Jul. = + 3' 23"
1. Febr. = + 13' 53'	1. Mai = — 3' 3"	1. Aug. = + 5' 57"
1. März = + 12' 39'	1. Jun. = — 2' 36"	1. Sept. = — 0' 12"
	1. Oct. = — 10' 22"	
	1. Nov. = — 16' 16"	
	1 Dec. = — 10' 39".	

Formeln für die Aufgaben aus der sphärischen Astronomie.

§. 763. (Zum Messen der Höhen der Himmelskörper kann ein Quadrant, Halbkreis oder Sextant, der die gehörige Schärfe giebt, gebraucht werden.) (S. §. 455. bis 458.).

Die Abweichung der Sonne aus ihrer Länge und der Schiefe der Ekliptik zu finden.

Im sphärischen △ ♈Ad Fig. 261. ist ♈d die Länge, dA die Abweichung; und $< d♈A = ☋C$ die Schiefe der Ekliptik. Man nenne die Länge = l = ♈d; die Schiefe der Ekliptik = k = $< d♈A$; so ist die

Formel: $\frac{\text{Sin. l . Sin. k}}{\text{Sin. tot.}} = \text{Sin. a} =$ Abweichung.

und $\frac{\text{Sin. tot. . Sin. a}}{\text{Sin. k}} = \text{Sin. l} =$ Sonnenlänge.

und $\frac{\text{Sin. tot. . Sin. a}}{\text{Sin. l}} = \text{Sin. k} =$ Schiefe der Ekliptik.

Die Schiefe der Ekliptik ist gegenwärtig 23° 27' 52" = k.

§. 764. Die gerade Aufsteigung der Sonne ♈A aus der Länge, und der Schiefe der Ekliptik zu finden.

For-

Formel: $\frac{\text{Tang. l . Cos. k}}{\text{Sin. tot.}} = \text{Tang. g} =$ geraden Aufsteigung.

und $\frac{\text{Tang. g . Sin. tot.}}{\text{Cos. k}} = \text{Tang. l} =$ Sonnenlänge.

und $\frac{\text{Tang. g. Sin. tot.}}{\text{Tang. l}} = \text{Cos. k} =$ Schiefe der Ekliptik.

Anmerk. Da sich die 4 Quadranten der Ekliptik gleich sind, so wird die Berechnung der Größen g, l, k, a in den übrigen 3 Quadranten eben so geführt; nur merke man wohl, daß man unter l (Sonnenlänge) allemal den Bogen verstehen muß, der zwischen dem gegebenen oder gefundenen Punct d, und dem nächsten Durchschnitt der Ekliptik mit dem Aequator liegt. So ist z. B. im 2ten Quadranten die Größe l = dem Abstand von ♎ Fig. 261. nach ♋ zu gerechnet. Gesetzt, man sucht die gerade Aufsteigung der Sonne, wenn ihre Länge 5 Zeichen, d. i. = 150° in ♍ ist. Man ziehe 150° von 180 ab, so bleibt der Bogen ♎ ♍ = 30° = l. Die Rechnung giebt die Größe 180e = g, welche wieder von 180 subtrahirt die gerade Aufsteigung übrig läßt. — Ueberhaupt lehrt der Anblick der 26sten Figur, wie man sich in jedem Quadranten zu benehmen habe.

In den Kalendern und astronomischen Jahrbüchern findet man für den Augenblick des wahren Mittags, als den Anfang des astronomischen Tages, die Länge der Sonne (in den Jahrbüchern von Bode auch noch die Abweichung, gerade Aufsteigung und alles, was den Lauf der Sonne, des Mondes, und der Planeten betrifft, aufs genauste) angegeben. — Die Länge der Sonne wird aus den sogenannten Sonnentafeln, wovon im Anhange Tafel XI. eine Probe vorkommt, berechnet.

§. 765. Die Polhöhe des Beobachtungsortes zu finden.

1. Miß mit einem Quadranten oder andern Winkelmesser die Höhe der Sonne im Augenblick ihrer Culmination,

tion, ziehe davon ihre Abweichung ab, wenn sie diesseit des Äquators (vom 21sten März bis 23sten September), oder addire die Abweichung dazu, wenn sie jenseit des Äquators (vom 23sten Sept. bis 21sten März) ihren Tagbogen beschreibt: in beiden Fällen erhält man die Äquatorhöhe, deren Ergänzung zu 90° die Polhöhe ist.

Dies Verfahren ist leicht und genau, wenn man dabei folgende Umstände berücksichtigt:

Da man eigentlich den Mittelpunct der Sonne messen sollte, welcher sich durch nichts kenntlich macht, so mißt man gewöhnlich die Höhe des obern oder untern Sonnenrandes, und zieht davon ab, oder addirt dazu den halben Durchmesser der Sonne, wodurch man den Mittelpunct derselben erhält. Wie viel Minuten und Sekunden der Sonnenhalbmesser an jedem Tage hat, zeigt Tafel IV. im Anhange.

Ein zweiter, nicht zu übergehender Umstand ist die Strahlenbrechung, welche macht, daß ein Himmelskörper stets höher erscheint, als er wirklich ist. Wieviel sie bei einer gemessenen Höhe beträgt, kann aus Tafel VI. ersehen werden. Der Betrag der Strahlenbrechung muß allemal von der scheinbaren Höhe abgezogen werden, um die wahre zu erhalten.

Wegen der Parallaxe erscheinen solche Himmelskörper, bei denen sie noch merklich ist, niedriger, als sie wirklich sind, daher muß der Betrag derselben, welchen die Tafel V. für die Sonne angiebt, zu der gemessenen Höhe addirt werden. (Mehreres davon unten §. 808. f.)

Z. B. Man habe am 2ten Mai des Mittags die Culminationshöhe d. obern Sonnenrand. gefund. = 53° 9′ 51″
so ist die Strahlenbr. Tafel VI. abzuziehen — — 45″

wahre Höhe des obern Sonnenrandes = 53° 9′ 6″
davon den Halbmesser der Sonne, Taf. IV. = — 15′ 55

Höhe des Mittelpuncts = 52° 53′ 11″
Hievon die Abweichung der Sonne = 15° 24′ 53″

Höhe des Äquators = 37° 28′ 18″
also Polhöhe = 52° 31′ 42″
dazu die Parallaxe = — — 5″

Wahre Polhöhe = 52° 31′ 47″

2. Oder

2. Oder man messe die Culminationshöhe eines Sterns, ziehe davon die Strahlenbrechung ab, und addire oder subtrahire seine Abweichung, je nachdem sie südlich oder nördlich ist, so kommt die Aquatorhöhe. Die Fixsterne erscheinen als Puncte; und ihre Parallaxe (davon später unten) verschwindet ganz; daher sind solche Messungen sehr brauchbar, aber wegen der Dunkelheit der Nacht doch nicht so leicht auszuführen, als man glaubt. Denn man muß Vorrichtungen zur Erleuchtung des Limbus, und des Kreuzschnitts im Brennpunct des Augenglases treffen. Erstere (die Erleuchtung des Gradbogens) kann durch eine seitwärts stehende Lampe; letztere durch einen breiten Pappring, der in geringer Entfernung vor dem Objectivglase angebracht ist, rückwärts erleuchtet wird, und sein Licht mit in den Tubus wirft, erlangt werden.

Um den starken Glanz der Sonne zu mildern, hält man ein stark gefärbtes, oder am Licht schwarz angelaufenes Glas zwischen das Auge und den Tubus oder das Diopter.

3. Beobachtet man in langen Winternächten die Culmination eines Sterns diesseit, und 12 Stunden nachher jenseit des Pols (unter demselben), zieht von der größeren Höhe die kleinere ab, so bleibt eine Differenz, in deren Mitte der Weltpol liegt; addirt man nun die halbe Differenz zur kleinern Höhe, oder zieht sie von der größern ab, so erhält man die Polhöhe. Der Stern muß nicht untergehen, also in unserer Gegend nicht über 50° vom Pol abstehen. Die Strahlenbrechung wird von jeder Höhe abgezogen.

§. 766. Die Abweichung der Sonne oder eines Sterns zu finden, wenn die Polhöhe bekannt ist.

Miß die Culminationshöhe der Sonne oder des Sterns, und ziehe davon die Strahlenbrechung ab; so ist der Unterschied zwischen der beobachteten Sonnenhöhe und der bekannten Aquatorhöhe die Abweichung. Sie ist nördlich, wenn die gemessene Höhe mehr beträgt, als die Äquatorhöhe; im Gegentheil südlich.

§. 767. Den Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung zu finden, wenn die Abweichung der Sonne und die Polhöhe bekannt sind.

Dieser Unterschied ist aus Figur 262. der Bogen OD des Äquators AQ. Es befinde sich die Sonne in S, dem nördlichen Wendekreise, am Horizont, so geht mit ihr zugleich der Punct O im Äquator auf; aber der Punct D kommt mit ihr zugleich in den Meridian. SD ist ihre Abweichung = a. Wäre die Sonne im Äquator in O, so brauchte sie 6 Stunden bis zum Meridian in A; allein jetzt wird der Bogen OD auch noch dazu gehören.

Im rechtwinklichten Dreieck OSD ist < K = der Äquatorhöhe; SD = a = Abweichung; bei D der rechte Winkel; daher die

Formel: Sin. tot. : Tang. a = Cot. k : Sin. OD,

also $\frac{\text{Tang. a . Cot. k}}{\text{Sin. tot.}} \left\{\begin{array}{l}= \text{Sin. OD} \\ = \text{Sin. u}\end{array}\right\}$ = Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung.

Z. B. Es sey die Abweichung

SD = a = 23° 28′, log. Tang. a = 9.6376106

d. Äquatorh. = < k = 37° 28′, log. Cot. k = 10.1155428

Unt. der ger. und schief. Aufst. log. Sin. = 9.7531534

u = 34° 30′ = OD

nach Tafel I. in Zeit verwandelt, giebt 2 St. 18′; werden diese zu 6 Stunden addirt, so erhält man den halben Tagbogen der Sonne = 8 St. 18′; folglich wird die Tageslänge 16 St. 42′; der Aufgang der Sonne um 3 Uhr 42′; und ihr Untergang um 8 Uhr 18′ seyn.

Hat die Sonne eine südliche Abweichung (vom 23sten Sept. bis zum 21sten März), so wird der gefundene Bogen in Zeit verwandelt und von 6 Stunden abgezogen. Der Rest ist die halbe Tageslänge.

Aus der vorigen Proportion fließen noch die Formeln:

$\frac{\text{Sin. tot. Sin. u}}{\text{Tang. a}}$ = Cot. k = der Äquatorhöhe, oder Tang. der Polhöhe.

$\frac{\text{Sin. tot. Sin. u}}{\text{Cot. k}}$ = Tang. a = der Abweichung der Sonne.

§. 768.

§. 768. Die Morgen- und Abendweite zu finden, wenn Polhöhe und Abweichung der Sonne bekannt sind.

Nach Fig. 262. ist O der wahre Ostpunct; OS die Morgen- oder Abendweite im Sommer; of im Winter; man sucht den Bogen OS = m am Horizont.

Formel: Sin. k : Sin. a = Sin. tot. : Sin. m.

und $\frac{\text{Sin. tot. Sin. a}}{\text{Sin. k}}$ = Sin. m = Morgen- und Abendweite.

so wie $\frac{\text{Sin. tot. Sin. a}}{\text{Sin. m}}$ = Sin. k = Äquatorhöhe.

und $\frac{\text{Sin. k . Sin. m}}{\text{Sin. tot.}}$ = Sin. a = Abweichung.

Anmerk. In den Sommermonaten liegt die Morgen- und Abendweite von Osten und Westen nach Norden; in den Wintermonaten von Osten und Westen nach Süden zu.

§. 769. Die Höhe der Sonne für eine gegebene Zeit zu finden, wenn Abweichung und Polhöhe bekannt sind.

Es sey Fig. 263. HR der Horizont; AQ Äquator; in Z das Zenit, in P der Pol; in a die Sonne; so ist pa ihre Abweichung, aP die Ergänzung zu 90°; na die Sonnenhöhe, aZ ihre Ergänzung zu 90°; ZP der Abstand des Zenits vom Pol = der Äquatorhöhe; HP der Meridian; < h der Stundenwinkel, dessen Maaß der Bogen pA.

In dem schiefwinklichten Dreieck ZaP ist bekannt ZP = dem Abstand des Zenits vom Pol; aP die Ergänzung zur Abweichung pa, und der Stundenwinkel h, dessen Maaß pA (die in Bogen verwandelte Zeit vor oder nach der Culmination in A); man sucht aZ.

Fälle das Perpendikel ZC, so entstehen zwei rechtwinklichte Dreiecke. Dann ist das Stück x oder CP zu finden:

Formel: Tang. x = Tang. ZP . Cos. h; aber aP − x = aC = y;

und

und Cosin. x : Cos. ZP = Cos. y : Cos. aZ,
und 90° — aZ = der gesuchten Sonnenhöhe.

Anmerk. Wenn die Sonne eine südliche Abweichung hat, so ist Pa größer, als 90°; bei nördlicher Abweichung hingegen kleiner. Im erstern Fall ist der Abstand Pa = 90° + der Abweichung, und im letztern Fall 90° — der Abweichung.

§. 770. Die Polhöhe aus der Höhe und Abweichung der Sonne zu einer gegebenen Zeit zu finden.

Im △ ZaP Fig. 263. ist bekannt aP die Ergänzung zur Abweichung; aZ die Ergänzung zur Sonnenhöhe, und der Stundenwinkel h; man sucht ZP die Ergänzung zur Polhöhe. Auf die verlängerte Seite PZ falle das Perpendikel ad, wodurch das rechtwinklichte Dreieck Pad entsteht, in welchem die

Formel: Tang. Pd = Cos. h . Tang. aP;
und Cos. aP : Cos. Pd = Cos. Za : Cos. dZ;
aber Pd — dZ = PZ = dem Abstand des Zenits vom Pol, oder der Äquatorhöhe.

§. 771. Die Zeit (oder den Abstand der Sonne vom Meridian) zu finden, wenn Pol- und Sonnenhöhe, nebst ihrer Abweichung bekannt sind.

Im schiefwinklichten △ PZa Fig. 263. sind alle 3 Seiten bekannt; denn ZP = der Äquatorhöhe; aZ = der Ergänzung der Sonnenhöhe; aP = dem Abstand derselben vom Pol, welcher sich aus der Abweichung ergiebt. Man sucht den Stundenwinkel h.

Man nenne die Seite aZ = A; ZP = B; aP = C; Fig. 264;

Formel:

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} h^2 = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\left(\frac{A+B-C}{2}\right) . \text{Sin.}\left(\frac{A+C-B}{2}\right)}{\text{Sin. B . Sin. C}}}$$

z. B. Es sey der Abstand der Sonne von P, oder Seite C = 83° 19′
der Cosinus der Polhöhe, oder Abstand des Zenits vom Pol, Seite B = 38° 53′
der Cosinus der Sonnenhöhe, oder die Seite aZ = A = 70° —

so ist $\frac{70° + 38° 53' - 83° 19'}{2} = \frac{25° 34}{2}$
$= 12° 47'$, log. Sin. = 9,3449124

und $\frac{70° + 83° 19' - 38° 53'}{2} = \frac{114° 26'}{2}$
$= 57° 13'$, log. Sin. = 9,9246535
Decadische Ergänzung des log. Sin. 38° 53′ dazu addirt = 0,2022225
Decadische Ergänzung des log. Sin. 83° 19′ dazu addirt = 0,0029613
log. $\frac{1}{2}$ h² = 19,4747497
daraus die $\sqrt{}$ = 2:
log $\frac{1}{2}$ h = 9,7373748
$\frac{1}{2}$ h = 33° 7′
(.2
also < h = 66° 14′

Verwandelt man nach Tafel I. den Bogen 66° 14′ in Zeit, so ergiebt sich 4 St. 24′ 56″, um welche Zeit die Sonne vom Meridian absteht. Es war also entweder um 7 Uhr 35′ 4″ Vormittags, oder um 4 Uhr 24′ 56″ Nachmittags.

Bei südlicher Abweichung ist 90° + der Abweichung; bei nördlicher aber 90° — Abweichung = der Seite aP = C; die Berechnung dieselbe.

§. 772. Das Azimuth aus der bekannten Pol- und Sonnenhöhe für eine gegebene Zeit zu finden.

Nach Fig. 263. ist ZP = dem Cos. der Polhöhe; folglich AZ = der Polhöhe; der Stundenwinkel h giebt den Bogen Ap, den Abstand der Sonne vom Meridian (die Zeit in Grade verwandelt nach Tafel I.), und aZ = dem Cosin. der Sonnenhöhe; na = Sonnenhöhe.

Man

Man sucht den Winkel m, dessen Maaß Hh, das Azimuth ist.

Formel: Tang. h . Cos. ZP = Cot. w,

und Cot. ZP : Cos. w = Cot. aZ : Cos. r.

Nun machen $< m + < w + < r = 180°$; also ist $180° - (w + r) = < m =$ dem Azimuth.

§. 773. Den parallatischen Winkel (den der Vertikalkreis mit dem Abweichungskreise macht) aus der Sonnen- und Polhöhe und der Tageszeit zu finden.

Dieser Winkel ist in Fig. 263. der Winkel ZaP. Bekannt ist ZP; Za und $< h$ (den die in Grade verwandelte Zeit giebt).

Formel: Sin. aZ : Sin. h = Sin. ZP : Sin. ZaP.

(wobei aZ die Ergänzung der Sonnenhöhe zu 90°; ZP = Aquatorhöhe).

§. 774. Die Zeit zu finden, wenn Azimuth, Polhöhe und Abweichung der Sonne bekannt sind.

In Fig. 265. ist $< m = 180° - n$, und $< n =$ Azimuth; man sucht $< h$. Auf die nach G verlängerte aZ falle ein Perpendikel PG.

Formel: Sin. tot. : Cos. ZP = Tang. m : Cot. o.

und Tang. aP : Tang. ZP = Cos. o : Cos. aPG.

Aber $aPG - o = h =$ dem Stundenwinkel, welcher in Zeit zu verwandeln ist.

§. 775. Die Polhöhe desjenigen Ortes zu finden, wo die Dämmerung anfängt, im Sommer die ganze Nacht zu dauren.

Addire zur größten Abweichung der Sonne = 23° 27′ 52″
den Sehnungs- oder Dämmerungsbogen,
welcher = 18°

so giebt die Summe des Ortes Aquatorhöhe = 41° 27′ 52″
folglich seine Polhöhe = 48° 32′ 8″

§. 776. Die Zeit zu finden, in welcher an einem Orte, dessen Polhöhe größer, als

48°

48° 32′ 8″ ist, die ganze Nacht die Dämmerung dauret.

Von der Äquatorhöhe ziehe den Dämmerungsbogen ab, so giebt der Rest die Abweichung der Sonne, welche an dem Tage statt findet, wo die Dämmerung die ganze Nacht dauret.

Z. B. Es sey Polhöhe = 52° 32′; Äquatorhöhe = 37° 28′
Dämmerungsbogen = 18°

Abweichung der Sonne = 19° 28′

Diese Abweichung hat die Sonne am 17ten Mai und 26sten Juli, wenn ihre Länge 3 Zeichen 15° ist. Im Ganzen dauret die Zeit der nächtlichen Dämmerung 70 Tage.

§. 777. Die Zeit der kürzesten Dämmerung zu finden.

Multiplicire den Sinus der Polhöhe mit der Tang. 9 Grad; das Product ist der Sinus der südlichen Abweichung der Sonne, zur Zeit der kürzesten Dämmerung.

Z. B. Polhöhe 52° 31′ log. Sin. = 9,89956
Tang. 9° = 9,19971

Sin. der südlichen Abweichung = 9,09927
= 7° 13′

Diese Abweichung der Sonne findet am 2ten März und 12ten October statt, wo die Dämmerung 1 St. 59′ dauret.

§. 778. Die Dauer der kürzesten Dämmerung zu finden.

Dividire den Sin. 9° durch den Cos. der Polhöhe; multiplicire den sich ergebenden Sinus mit 2, und verwandle ihn in Zeit.

Z. B. log. Sin. 9° = 9,19433 + 10
Cos. 52° 31′ = 9,78428

log. Sin. = 9,41005 = 14° 54′ (.2
29° 48′

in Zeit verwandelt nach Tafel I. = 1 St. 59′ kürzesten Dämmerung.

§. 779.

§. 779. Die Länge der Dämmerung an einem gegebenen Tage für eine bekannte Polhöhe zu finden.

Nach Beobachtungen beginnt die Dämmerung, wenn die Sonne noch 18° tief unter dem Horizont steht; also ist im △ ZSP Fig. 266. die Seite ZS = 90° + 18° = 108°; PS ist der Abstand der Sonne vom Pol; ZP die Entfernung des Zenits vom Pol; folglich alle 3 Seiten bekannt. Man sucht den Stundenwinkel h.

Nennt man die 3 Seiten A, B, C, so ist die

Formel:

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}h^2 = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\left(\frac{A+B-C}{2}\right).\text{Sin.}\left(\frac{A+C-B}{2}\right)}{\text{Sin. B . Sin. C}}}$$

(Die Auflösung dieser Formel ist §. 771. gezeigt.)

Wird der gefundene Bogen in Zeit verwandelt, und von ihm der halbe Tagbogen subtrahirt, so bleibt im Rest die Dauer der Dämmerung.

Z. B. Wenn SP = C = 83° 12′,
ZP = B = 37° 28′,
ZS = A = 108°

so findet man h = 131° 50′, in Zeit 8 St. 47′ 20″. Der halbe Tagbogen ist 6 St. 35′, folglich Dauer der Dämmerung = 2 St. 12′ 20″.

§. 780. Den Tag zu finden, an welchem unter einer gegebenen Polhöhe die Sonne zu einer bestimmten Zeit aufgeht.

Mit der bestimmten Zeit ist auch zugleich der Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung gegeben, d. h. ab Fig. 267. ist entweder der Überschuß über 6 Stunden, oder das Fehlende, je nachdem die Sonne vor oder nach 6 Uhr aufgeht.

Im rechtwinklichten △ abc ist bekannt ab = u = Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung; < abc = k der Äquatorhöhe; man sucht ca die Abweichung der Sonne, und findet daraus den Ort derselben und den Monatstag.

For-

Formel: Sin. tot. : Sin. u = Tang. k : Tang. a (= Abweichung).

Z. B. Wann geht die Sonne unter hiesiger Polhöhe um 7 Uhr auf?

Der Aufsteigungsunterschied ist 1 Stunde oder 15° = u.

log. Tang. k 37° 28′ = 9,8844572
log. Sin. u 15° = 9,4129962

log. Tang. a = 9,2974534 = 11°13′ = Abweichung der Sonne, welche am 19ten April und 22sten October statt findet.

Anmerk. Aus der Abweichung der Sonne kann man ihre Länge nach der 2ten Formel bei S. 763. finden, und in einem Kalender oder Jahrbuch nachsehen, auf welchen Tag sie fällt.

§. 781. Den Winkel, welchen ein Punct der Ekliptik mit dem Meridian eines Ortes macht, zu finden.

Suche den Positionswinkel durch: Cosin. der geraden Aufsteigung, multiplicirt mit der Schiefe der Ekliptik, giebt im Product den Sin. des Positionswinkels. Die Ergänzung dieses Winkels zu 90° ist der verlangte Winkel.

Oder: Multiplicire den Cos. der Länge mit der Tangente der Schiefe, so giebt das Product die Cot. des Winkels mit dem Meridian (oder die Tagente des Positionswinkels).

Im 1sten und 4ten Quadranten liegt dieser Winkel östlich, im 2ten und 3ten westlich.

§. 782. Die Höhe und Länge des 90° der Ekliptik, und den Winkel der Ekliptik mit dem Horizont, für eine gegebene Zeit und Polhöhe zu finden.

Die Ekliptik schneidet den Horizont an sehr verschiedenen Stellen und unter verschiedenen Winkeln, aber allemal so, daß die Winkel am West- und Osthorizonte einander gleich sind. Der von beiden Puncten (Ost und West) gleichweit abstehende Punct der Ekliptik ist der 90ste Grad und höchste Punct der Eliptik, dessen Höhe das Maaß der Winkel am Horizont ist.

Nach

Nach Fig. 271. ist id die Ekliptik, sd das über dem Horizont auf der Morgenseite liegende Stück, welches größer, als 90° ist. ZAdR ist der Meridian, und u der höchste 90° von s abstehende Punct der Ekliptik. Vom Pol der Ekliptik e ist durch Z, u und w ein Scheitel- oder Breitenkreis auf den Horizont gezogen; wu ist die Höhe des 90sten Grades = Ze = dem Abstand des Zenits vom Pol der Ekliptik.

Der < uws ist ein rechter; < usw mißt auch die Höhe des 90sten Grades; u ♈ ist sein Abstand vom Widderpunct westlich; d culminirt, und A ist der höchste Punct im Äquator, welcher eben culminirt, und die Mitte des Himmels heißt. Zu dieser läßt sich d finden, welcher Punct mit ihr gleiche gerade Aufsteigung hat. (Aus der geraden Aufsteigung die Sonnenlänge oder einen Punct d in der Ekliptik, so wie dessen Abweichung zu finden, lehrt §. 764. und 763.) Also ist auch die Abweichung Ad, und mithin die Höhe Rd zu erhalten.

Der Winkel der Ekliptik mit dem Meridian, nämlich SdR, ergiebt sich nach §. 781.

Nun ist im rechtwinklichten Dreieck dRs, die Seite Rd und < sdR bekannt; folglich giebt die

Formel: Cosin. Rd . Sin. SdR = Cos. dsR = dem Winkel der Ekliptik mit dem Horizont, die Höhe des 90sten Grades. Und die

Formel: Cot. Rd . Cos. SdR = einer Cot., die in diesem Falle von 180° subtrahirt, Sd giebt.

Folglich ist ud = Sd — 90°; daher auch du zum culminirenden Punct der Ekliptik addirt, die Länge des 90°, und damit dessen Abstand von ♈; us zur Länge von u addirt, giebt die Länge des aufgehenden Puncts der Ekliptik.

Anmerk. Culminirt 0° ♑ und ♋, so ist der 90° zugleich mit im Meridian; bei der Culmination des ♑, ♒, ♓, ♉ und ♊ liegt er mit dem größten Theil der Ekliptik auf der Ostseite; culminiren hingegen die 6 übrigen Zeichen, so liegt er mit dem größten Theil derselben auf der Westseite; wenn 0° ♎ unter, und

0°

c. ♈ aufgeht, so ist der Winkel mit dem Horizonte der kleinste; umgekehrt, ist er der größte; in beiden Fällen der Höhe des culminirenden Puncts der Ekliptik gleich.

§. 783. Die Zeit, welche die Sonne gebraucht, sich um ihren Durchmesser vertikal zu erheben, zu finden.

Dividire die Dauer der Culmination durch den Sinus des parallatischen Winkels. (Siehe §. 773. und 784.)

§. 784. Die Zeitdauer der Culmination der Sonnenscheibe zu finden.

Verwandle den scheinbaren Durchmesser der Sonne in Zeit (15′ auf 1 Zeitminute); multiplicire sie mit der Sekante der Abweichung, und dividire das Product durch den Cosinus der Abweichung.

Oder: Der Diameter (= D) der Sonne in Sekunden, mit 15 und dem Cosinus der Abweichung (= a) dividirt, zeigt im Quotienten, wie viel Zeitsekunden (= Z) der Sonnendurchmesser zur Culmination gebraucht.

Formel: $\frac{D}{15 \cdot \text{Cos. } a} = Z.$

Z. B. es sey am 1sten April der Durchmesser der Sonne = 32′ 5″ = 1925″ = D; die Abweichung = 4° 24′ 30″ = a, so ist

log. 1925 = 3,2844307

log. 15 = 1,1760913 } addirt
log. Cos. 4° 24′ 30″ = 9,9987133 }

Summe 1,1748046 abgezogen

log. Z = 2,1096261 = 128,75 Sekunden
= 2′ 8″, 75.

§. 785. Die Zeit zu finden, welche der Sonnendurchmesser anwendet, durch einen Vertikalkreis zu gehen.

Dividire die Dauer der Culmination durch den Cosinus des parallatischen Winkels. §. 773.

§. 786.

§. 786. Die Höhe zu finden, in welcher ein Himmelskörper gerade in Osten oder Westen erscheint.

Formel: $\frac{\text{Sin. a}}{\text{Sin. P}} = \text{Sin. H} =$ der Höhe. (a = Abweichung; P = Polhöhe.)

§. 787. Die Zeit zu finden, in welcher ein Himmelskörper gerade in Osten oder Westen erscheint.

Formel: Cot. P . Tang. a = Cos. h = Stundenwinkel. (a = Abweichung; P = Polhöhe.)

Der Stundenwinkel ist in Zeit zu verwandeln nach Tafel I., wenn von der Sonne die Rede ist; bei Fixsternen ist die gefundene Zeit Sternenzeit. Tafel II.

§. 788. Die Zeit zu finden, in welcher ein Himmelskörper seine Höhe am schnellsten ändert.

Hat derselbe eine südliche Abweichung, so geschieht dies (für unsern Horizont) bei seinem Auf- und Untergange; hat er eine nördliche Abweichung, so ändert er seine Höhe gerade in Ost und West am schnellsten; ist aber die Abweichung größer, als die Polhöhe, so culminirt er zwischen dem Pol und Scheitel, und der Stundenwinkel wird durch die

Formel: Cot. a . Tang. P = Cos. h = dem Abstand des Sterns vom Meridian, gefunden. (Hiebei ist a = Abweichung; P = Polhöhe.)

§. 789. Die stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung und die stündliche Veränderung der Abweichung der Sonne zu finden.

Nenne die gerade Aufsteigung der Sonne = g; Abweichung = a; Schiefe des Ekliptik = k; stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung = m; Veränderung der Abweichung = n.

Formel: m . Tang. k . Cos.^2 a . Cos. g = n, stündliche Veränderung der Abweichung;

n . Cos

$\frac{n \cdot \text{Cot. } k}{\text{Cos.}^2 a \cdot \text{Cos. } g} = m =$ stündlichen Veränderung der geraden Aufsteigung.

Anmerk. Wenn eine von den Größen n und m bekannt ist, so ergiebt sich die andere aus der Formel. Die Bewegung der Sonne innerhalb 24 Stunden kann aus den Sonnentafeln gefunden werden, und ist ziemlich gleichförmig; folglich kann man auch ihre stündliche Veränderung in der geraden Aufsteigung aus dem Unterschiede finden, welcher in der täglichen Veränderung statt findet. Man suche z. B. die Länge der Sonne für 2 auf einander folgende Tage, berechne daraus nach §. 764. die gerade Aufsteigung für beide Tage, und theile den Unterschied in 24 Theile, so hat man die stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung = m; auch die Abweichung kann so gesucht werden.

§. 790. Die Fixsterne behalten eine veste (fixe) Stellung gegen einander, und sind in unabsehbarer Menge an allen Orten des Himmels, vorzüglich aber in der sogenannten Milchstraße oder Glanzstraße ausgestreut. Ihr scheinbarer Abstand vom Widderpunct, im Bogen auf den Aquator reducirt, ist ihre gerade Aufsteigung; ihr Abstand vom Aquator ihre Abweichung.

§. 791. Die gerade Aufsteigung und Abweichung eines Fixsterns zu finden.

Beobachte den Zeitunterschied zwischen der Culmination des Widderpunctes und des Sterns, nach einer Sternenzeit weisenden Uhr, und verwandle diesen Zeitunterschied nach Tafel I. in Grade, Minuten ꝛc.

(Die Culmination des Widderpunctes findet man, indem man die gerade Aufsteigung der Sonne in Zeit verwandelt, und von 12 Uhr Mittags abzieht; in Bode's Jahrbuch ist die Culmination des Widderpunctes für jeden Tag angegeben.)

Oder: beobachte die Zeit der Culmination des Sterns nach der wahren Zeit; verwandle die seit dem vorhergehenden Mittage verflossene Zeit in Grade, und addire sie

zur

zur geraden Aufsteigung der Sonne, wobei jedoch auf die Reduction in Tafel II. zu achten ist.

Zieht man die Culminationshöhe eines Sterns und die Aquatorhöhe von einander ab, so giebt der Rest die Abweichung des Sterns. Ist erstere größer, so ist die Abweichung nördlich, im Gegentheil südlich.

In den Sternverzeichnissen (von Bode und Piazzi) sind die Fixsterne nach ihrer geraden Aufsteigung und Abweichung genau bestimmt.

§. 792. Die Länge und Breite eines Fixsterns zu finden, wenn seine gerade Aufsteigung und Abweichung bekannt ist.

Wenn Fig. 268. in T der Stern, so ist ♈y seine gerade Aufsteigung = a; yT seine Abweichung = d; ♈x seine Länge = l; xT seine Breite = b; A♈ der Aquator, und ♈♋ die Ekliptik; < e die Schiefe derselben; < n ein Hülfswinkel. —

Formel: Sin. a . Cot. d = Tang. n, dem Hülfswinkel,

und $\frac{\text{Sin. d . Cos. (e + n)}}{\text{Cos. n}}$ = Sin. b, der Breite des Sterns.

und Tang. b. Tang. (e+n) = Sin. l, der Länge.

Ob die Breite nördlich oder südlich, ob der Bogen der Länge vor oder nach dem Widder- oder Wagepunct genommen wird, ist aus den Umständen leicht zu erkennen.

§. 793. Die gerade Aufsteigung und Abweichung eines Sterns zu finden, wenn seine Länge, Breite und Schiefe der Ekliptik bekannt sind.

Hier sind die im vorigen §. bezeichneten Werthe b, l und e bekannt; man sucht a und d.

Formel: Sin. l . Cot. b = Cot. n; und n ± e = < T♈y.

Cos. l . Cos. b = Cos. ♈T.

Cos. T♈y . Tang. ♈T = a = der geraden Aufsteigung.

(Anmerk. Im ersten Quadranten ist a die gerade Aufsteigung selbst; im zweiten muß das gefundene a von 180° abgezogen; im dritten zu 180° addirt; und im vierten von 360° abgezogen werden.)

Sin. TVy . Sin. VT = Sin. yT = d = Abweichung.

Aus der Länge, Breite und Abweichung ergiebt sich die gerade Aufsteigung auch durch

Cos. d ; Cos. l = Cos. b : Cos. a, geraden Aufsteigung.

Aus Länge, Breite und gerader Aufsteigung ergiebt sich die Abweichung durch

Cos. a : Cos. b = Cos. l : Cos. d, der Abweichung.

§. 794. Den Abstand zweier Sterne von einander zu finden, wenn gerade Aufsteigung und Abweichung beider bekannt sind.

Es mögen nach Fig. 269. in r und t Sterne seyn, Prm und Ptm Abweichungskreise, welche hier Quadranten sind, indem AQ den Aquator vorstellt. mr und mt sind die bekannten Abweichungen, rP und tP ihre Ergänzungen zu 90°; Winkel P, dessen Maaß mm, ist der Unterschied in der geraden Aufsteigung; also im △ Prt bekannt rP, tP und der eingeschlossene Winkel P; man sucht rt die 3te Seite. Fälle (nach dem 10ten Fall der Auflösung schiefwinklichter Dreiecke Tafel XIII.) das Perpendikel tn, dann ist die

Formel: r : Tang. Pt = Cos. P : Tang. Pn.
und Pr — Pn = nr,
Cos. Pn : Cos. nr = Cos. Pt : Cos. rt,
dem gesuchten Abstande.

§. 795. Den Positionswinkel eines Sterns aus seiner Breite und geraden Aufsteigung zu finden.

Unter Positionswinkel versteht man die Neigung des Breiten- und Abweichungskreises, oder Fig. 268. den Winkel xTy, wenn in T der Stern ist.

Es stehe ein Stern in t Fig. 270.; P der Weltpol; e der Pol der Ekliptik EK, so ist tu seine Breite; mt seine Abweichung, Pe der Abstand genannter Pole = 23° 27′ 52″; Winkel tPe seine gerade Aufsteigung oder dessen Abstand vom nächsten Aquinoctialpunct oder Colur; so verhält sich

Cosin. der Breite zum Cosin. der geraden Aufsteigung, wie der Sin. der Schiefe zum Sin. des Positionswinkels; oder nach der

Formel: Sin. et : Sin. P = Sin. Pe : Sin. Pte = Cos. b : Cos. a = Sin. k : Sin. des Positionswinkels; wobei auf die nördliche oder südliche Breite, und Eigenschaft des Winkels zu achten ist.

§. 796. Die Zeit der Culmination eines Sterns zu finden.

Es sey die gerade Aufsteigung der Sonne = A; des Sterns = a; der Unterschied beider = u; 24 stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung der Sonne = v.

Formeln: a — A = u;
24 St. : v (in Zeit verw.) = u (in Zeit verwandelt) : x,
und u — x = der Culminationszeit d. Sterns.

Z. B. Wenn die gerade Aufsteigung
der Sonne = 51° 32′ 43″ = A
des Sterns Spica = 198° 51′ 16″ = a
a — A = 147° 18′ 33″ = u
in Zeit = 9 St. 49′ 14″
24stündl. Veränd. = 59′ 13″ — in Zeit = 0 St. 3′ 57″ = v
Nun 24 St. : 3′ 57″ = 9 St. 49′ 14″ : x, und findet x = 1′ 37″; aber 9 St. 49′ 14″ — 1′ 37″ = 9 Uhr 47′ 37″ = Culminationszeit der Spica. (Am 15ten Mai).

Anmerk. Ist a kleiner als A, so wird a um 360° vermehrt.

§. 797. Den Unterschied der geraden und schiefen Aufsteigung eines Sterns, dessen halben Tagbogen, Auf- und Untergang zu finden.

For-

Formeln: Multiplicire die Tangente der Abweichung mit der Tangente der Polhöhe, so ist das Product der Sinus des Aufsteigungsunterschiedes.

Wird dieser Bogen in Zeit verwandelt und zu 6 Stunden addirt oder davon subtrahirt, nachdem die Abweichung nördlich oder südlich ist, so hat man den halben Tagbogen.

Zieht man den halben Tagbogen von seiner Culminationszeit ab, so ergiebt sich der Aufgang; addirt man ihn zu derselben, so erfährt man den Untergang.

§. 798. Den Stundenwinkel eines Sterns aus seiner und der Sonne geraden Aufsteigung zu finden.

Ziehe von der Summe der geraden Aufsteigung der Sonne, und der in Grade reducirten wahren Zeit die gerade Aufsteigung des Sterns ab, so ist der Rest der Stundenwinkel.

§. 799. Die Zeit der Nacht aus der beobachteten Höhe eines Sterns zu finden, wenn seine Culmination, Abweichung und die Polhöhe bekannt sind.

Wenn nach Fig. 264. der Stern in a; in Z das Zenit; in P der Pol ist, so ist bekannt

Za die Ergänzung der Höhe = A.
ZP der Abst. des Zenits vom Pol = B.
und aP der Abst. des Sterns vom Pol = C.

Man sucht < h, oder den Abstand vom Meridian.

Formel:

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} h^2 = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{A+B-C}{2} \cdot \text{Sin. } \frac{A+C-B}{2}}{\text{Sin. B . Sin. C}}}$$

Der so kommende Stundenwinkel ist in Zeit, und diese mittelst der Tafel II. in mittlere Sonnenzeit zu verwandeln.

Dieser Abstand vom Meridian wird zur Culminationszeit des Sterns addirt, oder davon subtrahirt; je nachdem

dem derselbe auf der West- oder Ostseite des Meridians steht.

§. 800. Die Zeit der Nacht aus der Culmination eines Sterns zu finden.

Berechne nach §. 796. die Zeit der Culmination, und beobachte sie nach einer guten Uhr, so ergiebt sich die Abweichung der Uhr und mithin die wahre Zeit.

Wenn man gleichgroße Höhen des Sterns vor und nach seiner Culmination mißt, und allemal die Zeit der Uhr bemerkt, so ist das Mittel zwischen beiden beobachteten Zeiten, die Culminationszeit.

§. 801. Wie viel ein Stern seine Höhe in einer Zeitminute ändere, zu finden.

Multiplicire 15′ mit dem Sinus der Äquatorhöhe und dem Cosinus der Morgen- oder Abendweite, so giebt das Product die Antwort.

---

§. 802. Die Mittagsverbesserung zu finden.

Bei übereinstimmenden Sonnenhöhen nimmt man an, daß die Sonne z. B. Vormittags 8 Uhr dieselbe Höhe, als Nachmittags 4 Uhr habe. Diese Voraussetzung ist nur um die Zeit der Sonnenwende gegründet; in der übrigen Zeit ist die Höhe der Sonne bei gleichem Abstand vom Meridian Vor- und Nachmittags nicht gleich, weil sie unterdeß ihre Abweichung ändert, welcher Umstand um so merklichern Einfluß hat, je weiter die gemessenen Höhen vor oder nach 12 Uhr abstehen, und je näher man den Monaten März und September ist.

Man findet die Mittagsverbesserung, wenn man

1. aus der vormittägigen Zeit und Abweichung, und
2. aus der nachmittägigen Zeit und Abweichung den Stundenwinkel berechnet. Die Hälfte des Unterschiedes beider Stundenwinkel, in Zeit verwandelt, giebt die Verbesserung des wahren Mittags.

Hält sich die Sonne zwischen Steinbock und Krebs auf, so wird diese Mittagsverbesserung davon subtrahirt; in den andern Zeichen dazu addirt.

§. 803.

§. 803. Tafeln, welche die Mittagsverbesserung angeben, findet man in allen guten astronomischen Schriften. Die VII. Tafel besteht aus 2 Theilen, und ist nach Bode's Anleitung so zu berechnen:

Die Veränderung der Sonnenabweichung in der Zeit zwischen den Beobachtungen (aus der 24stündlichen hergeleitet) wird mit der Tangente der Abweichung zu Mittage multiplicirt, und das Product mit 30 mal der Tangente der halben Zwischenzeit (in Grade verwandelt) dividirt. Der Quotient ist der erste Theil.

Der zweite Theil wird gefunden, wenn man die Veränderung der Abweichung durch das Product 30 mal den Sinus von der halben Zwischenzeit (in Grade verwandelt) dividirt. Der letztere Quotient wird beim Gebrauch noch mit der Tangente der Polhöhe multiplicirt.

Zur scharfen Bestimmung der Zeit nimmt man gern diejenige Tagsstunde, wo sich die Sonnenhöhe am schnellsten ändert; nahe am Mittag ändert sich die Sonnenhöhe wenig. Siehe §. 788.

§. 804. Gebrauch der Tafel VII. Man habe z. B. unter der Polhöhe 52° 32′ am 21sten März, wo die Sonne im 0° ♈ steht, durch übereinstimmende Sonnenhöhen um 8 und 4 Uhr die wahre Mittagszeit

= 11 Uhr 56′ 39″

gefunden, so giebt der erste Theil der Tafel VII. dazu die Mittagsverbesserung . . . . = + 0″

Aber der zweite Theil enthält dazu 18″,2, welche mit der Tangente der Polhöhe = 1,304 . . . multiplicirt werden müssen, die Verbesserung = − 23″,7

Folglich verbesserte mittlere Sonnenzeit im wahren Mittag . . . = 11 Uhr 56′ 15″,3

§. 805. Das Zurückweichen der Äquinoctialpuncte, und die Veränderung in der geraden Aufsteigung und Abweichung der Fixsterne.

Da-

Obgleich die Fixsterne unter sich beständig einerlei Stellung behalten, so rücken alle doch gemeinschaftlich mit der Ekliptik und ihren Parallelen von Westen gegen Osten, zwar langsam, aber in 72 Jahren etwa 1 Grad vorwärts. Diese Erscheinung entsteht dadurch, daß der Durchschnitt der Ekliptik mit dem Äqugtor jährlich um 50″, 15, rückwärts nach Westen geht, wodurch die Länge der Fixsterne um eben so viel größer wird. In 25848 Jahren (welche Zeit man das Platonische Jahr nennt) werden sie einen Umlauf um die Pole der Ekliptik vollenden. Die Breite bleibt dabei unverändert.

Eine nothwendige Folge davon ist, daß die gerade Aufsteigung und Abweichung der Fixsterne Veränderung erleidet. Diese Veränderung ist bei jedem Fixstern verschieden, und wird folgendermaßen berechnet:

addire log. 50″,15 = 1,7002709
log. Cos. d. Schiefe d. Ekl. = 9,9625551

1,6628260 = 46″,

so hat man den ersten, allen Sternen gemeinschaftlichen Theil der jährlichen Veränderung in der geraden Aufsteigung.

Den zweiten Theil findet man also:
addire die log. der jährlichen Längenzunahme = Z = 50″, 15
log. Sin. d. Schiefe d. Ekl. = E = 23° 27′ 52″
log. Sin. d. ger. Aufst. des Sterns = A
log. Tang. der Abweich. desselben = D.

Von der Kennziffer des kommenden Logarithmen ziehe 30 ab, so bleibt im Rest der Logarithme einer Anzahl Sekunden, welche zum 1sten Theil (46″) addirt werden, wenn die Sterne zwischen 0° und 180° gerader Aufsteigung eine nördliche Abweichung haben; und davon subtrahirt, wenn die gerade Aufsteigung zwischen 180° und 360° fällt.

Bei südlicher Abweichung findet das Gegentheil statt.

Z. B. Wie viel beträgt die jährliche Veränderung der geraden Aufsteigung des Sterns Algol? Seine gerade Aufsteigung = 43° 57′ 36″; Abweichung 40° 12′ 53″.

log.

log. Z = 50″, 15 = 1,7002709
log. Sin. E = 23° 27′ 52″ = 9,6000793
log. Sin. A = 43° 57′ 36″ = 9,8414200
log. Tang. D = 40° 12′ 53″ = 9,9273389

31,0691091 — 30 = 11″, 7
dazu den 1sten Theil = 46″

Algol's jährliche Veränderung in der gerad. Aufst. = 57″, 7.

Die Veränderung in der Abweichung nimmt im 1sten und 4ten Quadranten zu, bei den nördlichen Sternen; im 2ten und 3ten ab. Bei den südlichen Sternen ändern sich die Zeichen. Man findet die jährliche Veränderung in der Abweichung:

addire d. Logarith. d. Längenzunahme = Z = 50″, 15
Log. der Schiefe der Ekliptik = E = 23° 27′ 52″
Log. Cos. der gerad. Aufst. = A; Cos.

vom kommenden Logarithmen ziehe 20 ab, der Rest ist der Logarithme der Anzahl Sekunden der jährlichen Veränderung.

Z. B. Algol's jährliche Veränderung in der Abweichung zu finden.

log. Z = 1,7002709
log. Sin. E = 9,6000793
log. Cos. A = 9,8572400

21,1575902 — 20 = 14″, 37 jährliche Veränderung.

In den Sternverzeichnissen findet man die jährliche Veränderung der geraden Aufsteigung und Abweichung zwar angegeben, allein weil durch sie selbst der Stand der Sterne nach einigen Jahren anders wird, so muß auch die jährliche Veränderung wenigstens alle 10 Jahre auf's Neue berechnet werden.

§. 806. Der Polarstern steht gegenwärtig etwa 1° 39′ vom Weltpole ab, und wird der jährlichen Veränderung der Abweichung wegen, im Jahr 2105 demselben bis auf 28′ nahe kommen, sich dann wieder entfernen, und einem andern (γ am Knie des Cepheus) die Ehre, Polarstern zu heißen, überlassen. Ein Kreis, der $23\frac{1}{2}$ Grad vom Pol der Ekliptik absteht, geht durch alle Sterne, die

die nach und nach dem Pole nahe kommen und Polarstern heißen können.

Die Ursache des Zurückgehens der Äquinoctialpuncte liegt in dem Monde und der sphäroidischen Gestalt der Erde, und ist ein Gegenstand der physischen Astronomie, welche ihn glücklich erklärt.

§. 807. Verzeichniß der vornehmsten Fixsterne nach gerader Aufsteigung und Abweichung, nebst jährlicher Veränderung für den 1sten Januar 1820.

Namen oder Buchstaben der Sterne.	Größe.	Gerade Aufsteig. ° ′ ″	Jährl. Veränder. + ″	Abweichung. ° ′ ″	Jährl. Veränder. ″
Algenib im Pegasus	3	0.59.37	46,1	14.10.56.N.	+ 20.
Schedir Cassiop.	3	7.35. 7	49,6	55.22.58. —	+ 19,9
β im Wallfisch	2	8.23. 1	44,9	18.58.32. S.	—19,8
Polarstern	3	14.14. 4	214,7	88.20.56.N.	+ 19,5
Mirach Androm.	2	14.55. 1	49,4	34.39.53.	+ 19,4
Alamak .	2	28.13.15	54,2	41.27.40.	+ 17,7
Menkar Wallfisch	2	43.12.59	46,5	3.22.44.	+ 14,6
Algol Perseus	4	44. 7.12	57,6	40.15.17.	+ 14,4
Algenib .	2	47.52.40	63,0	49.12.44.	+ 13,5
γ Eridan .	2	57.23.19	41,7	14. 1.30. S.	—10,9
Aldebaran Stier .	1	66.23.58	51,4	16. 8.20. N.	+ 7,9
Capella Fuhrmann .	1	75.51. 3	66,1	45.48. 9.	+ 4,6
Rigel Orion	1	76.28.19	43,1	8.25. 1. S.	— 4,8
β Stier	2	78.43.42	56,6	28.26.47.N.	+ 4
Bellatrix Orion .	2	78.52. 6	48	6.10.42.	+ 3,9
δ Orion .	2	80.42. 5	45,8	0.26.20. S.	— 3,3
Beteigeize	1	86.21.24	48,6	7.21.53.N.	+ 1,4

Namen

Namen oder Buchstaben der Sterne.	Größe.	Gerade Aufsteig. ° ′ ″	Jährl. Verändr. + ″	Abweichung. ° ′ ″	Jährl. Verändr. ″
β gr. Hund	2	93.41.28	39,5	17.52.26. S.	+ 1,2
Sirius großer Hund .	1	99.18.13	39,7	16.27.47.	+ 2
δ gr. Hund	2	105.15.56	36,5	26. 6.49.	+ 5,2
Castor Zwill.	2	110.46.25	57,7	32.16.26.N.	— 7
Procyon kl. Hund .	1	112.28. 5	47,2	5.41.26.	— 6,6
Pollux Zwill.	2	113.34.10	55,2	28.27.10.	— 7,9
Alphrat Schlange	2	139.40.41	43,9	7.52.53. S.	+ 15,2
Regul. Löwe	1	149.41.35	48,1	12.50.37.N.	—17,3
β gr. Bär	2	162,43.28	55,4	57.20.44.	—19,1
Dubhe großer Bär	2	163. 8. 0	57,4	62.43.17.	—19,1
Denebola gr. Löwe	2	174.57.52	45,8	15.34.47.	—19,9
Spica Jungfr.	1	198,55.48	47,1	10.13. 4. S.	+ 19
Arctur Bootes . .	1	211.51.46	41	20. 8.46.N.	—15,1
β Waage .	2	226.49.54	48,1	8.42.37. S.	+ 13,8
Gemma Krone .	2	231.46. 1	38,1	27.19.41.N.	—12,4
α Schlange	2	233.50.57	44,0	6.59.56.	—11,9
Antaras Scorpion	1	244.35.48	54,6	26. 1.18. S.	+ 8,6
β Drache .	2	261.35.29	20,1	52.26.20.N.	— 3,0
α Schlangenträger .	2	261.38.32	41,4	12.42. 6.	— 3
γ Drache .	2	268. 6.22	20,7	51.30.53.	— 0,7
Wega Leier	1	277.42.38	30,4	38.37.18.	+ 2,9
Atair Adler	1	295.29.58	43,9	8.24. 4.	+ 8,9
Deneb Schwan	2	308.49.19	30,5	44.38.32.	+ 12,5
Seheat Wassermann	3	341.16. 9	47,9	16.46.26. S.	—18,9

Namen oder Buchstaben der Sterne.	Größe.	Gerade Aufsteig. ° ′ ″	Jährl. Verändr. + ″	Abweichung. ° ′ ″	Jährl. Verändr. ″
Fomahand südl. Fisch	1	341.55.14	50,1	30.34.26.	−18,9
SeheatPegas.	2	343.45.34	43,0	27. 6.31.N.	+ 19,2
Markab Peg.	2	343.56.47	44,4	14.14.23.	+ 19,2
α Andromeda	2	359.46.28	46,1	28. 5.46.	+ 19,8
β Cassiopeja	2	359.54.17	46,7	58. 9.22.	+19,8

Gesetzt, man wünscht am 1sten Januar 1830 zu wissen, wie groß die gerade Aufsteigung und Abweichung des Sirius sey?

Vorstehende Tafel giebt für 1820 seine gerade Aufsteigung . . . . . = 99° 18′ 13″
für 10 Jahr 10. 39,7 = 397″ = 6′37″ = 6′ 37″
gerade Aufsteigung des Sirus 1830 = 99° 24′ 50″

Seine südl. Abweichung ist 1820 = 16° 27′ 47″
für 10 Jahr 10. 2″ = 20″ Zunahme = 20″
Südl. Abweichung des Sirius 1830 = 16° 28′ 7″

Für einzelne Wochen eines Jahres läßt sich die Veränderung leicht aus der jährlichen berechnen.

Freunde der Sternkunde, welche die Culmination der Sterne beobachten, um die Zeit der Nacht zu finden, wählen dazu gern die der ersten und zweiten Größe, weil sie stark in's Auge fallen. Daher kann ihnen vorstehende Tafel gute Dienste leisten.

---

§. 808. Strahlenbrechung in der Atmosphäre der Erde.

Alle Lichtstrahlen, welche aus dem Weltall durch den Äther in die viel dichtere Erdatmosphäre kommen, müssen in letzterer eine Brechung erleiden, die derjenigen ähnlich ist, welche bei Luft und Wasser oder Glas statt findet; nur muß sie viel geringer seyn. Die neuern und besten Beobachtungen geben den Satz:

daß

daß sich der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des gebrochenen Winkels (in unserer Atmosphäre) verhalte, wie 3201 : 3200.

Ein senkrecht einfallender Lichtstrahl wird nicht gebrochen, daher haben Sterne im Zenit keine Strahlenbrechung. Bei dem möglichst größten Einfallswinkel, wenn der Stern im Horizont steht, muß die Brechung am größten seyn.

Da nun die Atmosphäre keine gleichförmig dichte Flüssigkeit ist, indem der untere Theil, vom obern gedrückt, viel dichter ist, und die Luftschichten in unendlich vielen Abstufungen von unten nach oben, sowol an Schwere, als an Dichtigkeit abnehmen, so erleidet ein schief darauf fallender Lichtstrahl in jeder Luftschicht eine neue Brechung, und gelangt eigentlich auf einem krummen Wege zur Erde. Indessen ist diese krumme Linie wenig von einer geraden verschieden.

§. 809. Wir sehen also nur die im Zenit befindlichen Himmelskörper an ihrem wahren Orte, in allen andern Puncten des Himmels um die Wirkung der Strahlenbrechung höher in dem durch sie gezogenen Scheitelkreis. Sie gehen daher früher auf und später unter; auch ist die wohlthätige Dämmerung eine Folge der Strahlenbrechung.

§. 810. Wenn die Polhöhe eines Orts genau bekannt ist, so läßt sich die Höhe eines Sterns für eine gegebene Zeit genau berechnen. Mißt man nun im berechneten Augenblick die Höhe desselben, so findet man die Größe der Strahlenbrechung für diese Höhe, wenn man die berechnete Höhe von der gemessenen (scheinbaren) abzieht, welche letztere allemal größer ist, als die berechnete oder wahre.

Die größte Strahlenbrechung im Horizont beträgt 33′, woraus man die Strahlenbrechung für jede Höhe findet:

Formel: Cos. 6 . 33′ . Sin. Z = Sin w; wobei Z = Zenitabstand und w = einem Hülfswinkel.

$\frac{Z - w}{6}$ = Strahlenbrechung für jede Höhe.

Z. B.

Z. B. Man sucht die Strahlenbrechung für die Höhe 31° (oder den Zenitabstand = Z = 59°).

log. Cos. 6. 33′ = 3° 18′ = 9.9992793
log. Sin. Scheitelabstand
= 59° = Z = 9.9330656

log. Sin. w, Hülfswinkel = 9,9323449 = 58° 50′ 32″,1
von 59°
— 9′ 27″,9
6:)
Mittlere Strahlenbrechung = 1′ 34″,6

Nach dieser Formel ist die erste Hälfte der Tafel VII. berechnet.

§. 811. Die Strahlenbrechung ist nicht immer gleich, woran theils chimische Mischungen, größere Elasticität der Luft, theils vermehrte Wärme schuld sind. Man muß daher zugleich auf den Stand des Thermometers und Barometers bei Beobachtungen Rücksicht nehmen, und eine Verbesserung anbringen, welche der zweite Theil der Tafel VI. angiebt. Die mittlere Strahlenbrechung findet bei einem Barometerstand von 27 Zoll 9,3 Linien, und Thermometerstand + 8 nach Reaumür statt. Zeigen nun Barometer und Thermometer auf andere Puncte, so sucht man sie in der Tafel auf (oder nimmt die ihnen am nächsten kommenden) und multiplicirt mit dem dabei stehenden Decimalbruch die mittlere Strahlenbrechung; das Product ist die wahre Strahlenbrechung, welche allemal von einer gemessenen scheinbaren Höhe eines Himmelskörpers abgezogen werden muß.

Z. B. Man habe bei einem Thermometerstand = + 15°, und Barometerstand = 27 Zoll 4 Linien eine Höhe der Sonne = 31° gemessen, so giebt die Tafel VI. dazu
mittlere Strahlenbrechung . . = 1′ 34″,6
die zweite Hälfte enthält für den Barometerstand 27. 4, und Thermometerstand = + 15 den Decimalbruch 0,946, welcher mit 1′ 34″,6 = 94″,6 multiplicirt, die wahre . . . = 1′ 29″,5
giebt, die, von 31° Höhe abgezogen, = 30° 58′ 30″,5 wahre Höhe der Sonne übrig läßt.

§. 812.

§. 812. Die Vergrößerung des halben Tagbogens eines Himmelskörpers durch die Strahlenbrechung giebt die

Formel: $\frac{\text{Sin. P}}{\text{Cos. a}} = \text{Sin. x}$; und $\frac{33' (= 1980'')}{\text{Cos. x . Cos. a . 15}'}$;

der Quotient giebt Sekunden.

(wobei P = Polhöhe; a = Abweichung; x = einem Hülfswinkel; 33′ oder 1980″ die horizontale Strahlenbrechung bedeutet.)

Z. B. Wie viel wird der halbe Tagbogen der Sonne am 21sten Junius, da ihre Abweichung = 23° 27′ 52″ ist, unter der Polhöhe 52° 32′ durch die Strahlenbrechung vergrößert?

log. Sin. 52° 32′ = 9,8996604 + 10
log. Cos. 23° 27′ 52″ = 9,9625076

log. Sin. x = 9,9371528 = 59° 55′,

dessen Cosin. = 9,7000622
log. Cos. a = 9,9625076
log. Cos. 15 = 1,1760913

0,8386611

diesen Logar. abgez. vom log. 1980 = 3,2966652

2,4580041 = 287″

Also Verlängerung des halben Tagbogens = 4′ 47″.

§. 813. Die Veränderung der Morgen- und Abendweite durch die Strahlenbrechung giebt in Sekunden die

Formel: $\frac{\text{Sin. P}}{\text{Cos. a}} = \text{Sin. x}$; und $\frac{1980'' \text{ . Sin. P}}{\text{Cos. x . Cos. a}}$

= Verl. der Morgen- und Abendweite,

wobei P = Polhöhe; a = Abweichung; x = Hülfswinkel.

Wenn a nördlich ist, so wird die Abend- und Morgenweite größer, und wenn sie südlich, geringer.

§. 814. Von der Parallaxe (Nebensicht).

Wird ein freistehender Körper a Fig. 272. aus zwei verschiedenen Orten c und n betrachtet, so scheint er von c aus in m, von n aus betrachtet in h zu seyn. Der Unterschied der scheinbaren Orte hm, oder der Winkel can = ham heißt die Parallaxe von a.

Wenn c der Mittelpunct der Erde, n ein Punct auf ihrer Oberfläche; a der Mond, und HJ das scheinbare Himmelsgewölbe, so ist der Bogen hm, oder < ham = can, unter welchem der Halbmesser der Erde vom Monde aus erscheint, die Parallaxe desselben.

Es befinde sich ein Himmelskörper a Fig. 273. im scheinbaren Horizont des Ortes n, so erscheint er um die Wirkung der Parallaxe niedriger, als aus dem Mittelpunct der Erde. Der Unterschied ist hm; in m ist sein wahrer Ort, der bei allen Berechnungen zum Grunde liegt; in h sein scheinbarer. Der Winkel nac ist die horizontale Parallaxe des Himmelskörpers.

Befindet sich hingegen derselbe in b, in der Höhe hnh, so ist < nbc seine Höhenparallaxe. Im Zenit Z fällt die Gesichtslinie durch cnaz, folglich verschwindet die Parallaxe ganz.

§. 815. Der leichteste Fall, die Parallaxe eines Himmelskörpers zu finden, ist, wenn derselbe von zwei Beobachtern in n und d zu gleicher Zeit beobachtet wird, der Unterschied der scheinbaren Orter, hm, ist seine horizontale Parallaxe. Dann ist im △ cna bei n der rechte Winkel, cn der Halbmesser der Erde, und < a bekannt. Folglich ergiebt sich sein Abstand vom Mittelpunct der Erde durch

Sin. a : cn = Sin. tot. : ac = dem Abstand von der Erde,

ac : Sin. tot. = cn : Sin. a = der horizontalen Parallaxe.

Folglich ergiebt sich aus dem Abstande eines Himmelskörpers seine Parallaxe.

§. 816. Multiplicirt man den Cosinus der scheinbaren Höhe = H mit der in Sekunden ausgedrückten horizon-

zontalen Parallaxe = P, so giebt das Product die Höhenparallaxe.

Formel: Cos. H . P = Höhenparallaxe.

Die Größe der Parallaxe hängt von der Entfernung ab; und verschwindet, wenn diese unendlich ist. Aus vielfachen Untersuchungen über die horizontale Parallaxe der Himmelskörper fand man die des Mondes 60′ (in seiner mittlern Entfernung); die der Sonne = 8″ 5.

Die Höhenparallaxe des Mondes für die Höhe = 30° zu finden.

Hier ist H = 30°; P = 60′ oder 3600″

log. 3600 = 3,5563025
log. Cos. 30° = 9,9375306

3,4938331 = 3117″, 7

Höhenparallaxe = 52′ 17″, 7.

§. 817. Die Entfernung des Mondes aus seiner horizontalen Parallaxe zu finden.

Formel: $\frac{R}{\text{Sin. P}}$ = Entfernung des Mondes von der Erde.

log. R (= 859,5 Meil.) = 2,9342459 + 10
log. Sin. P = 1° = 8,2418553

log. des Abstandes = 4,6923906 = 49249 Meilen.

Anmerk. Der Mond wird wegen seiner starken Parallaxe etwa um 1° niedriger im Horizont, und wegen der Strahlenbrechung um 33′ höher, folglich im Ganzen um etwa 27′ niedriger gesehen, wodurch sein halber Tagbogen verkürzt wird, welches bei keinem andern Himmelskörper der Fall ist, weil die Parallaxe der andern nur wenige Sekunden, und die Strahlenbrechung bei allen gleich viel beträgt.

§. 818. Den Abstand der Sonne aus ihrer horizontalen Parallaxe zu finden.

Formel: $\frac{R}{\text{Sin. P}}$ = Abstand der Sonne.

log.

log. 859,5 = R = 2,9342459 + 10
log. Sin. 8″,5 = P = 5,6149938

log. des Abstandes = 7,3192521 = 20857000 Meilen.

Der Radius der Erde von 859½ Meile ist der kleinste brauchbare Maaßstab, die Entfernungen nicht sehr entfernter Himmelskörper zu finden. Bei größeren Messungen legen die Astronomen ein Stück, oder den ganzen Durchmesser der Erdbahn = 41714000 Meilen zum Grunde.

§. 819. Aus der Höhenparallaxe und der scheinbaren Höhe den Abstand eines Himmelskörpers zu finden.

Formel: Sin. p. : Cos. H = R : Abstand des Himmelskörpers.

(wobei p = Höhenparallaxe; H = scheinbare Höhe; R = Radius der Erde).

§. 820. Die Entfernung der Fixsterne aus ihrer jährlichen Parallaxe zu finden.

Die Astronomen beobachten die Fixsterne zu verschiedenen Jahrszeiten, und finden (jedoch nicht übereinstimmig) die Größe der jährlichen Parallaxe der nächsten kaum einige Sekunden, wobei ihre Standlinie = R = dem Erdbahnhalbmesser = 20857000 Meilen, dessen Logarithmen wir §. 818. fanden = 7,3192521.

Formel: $\frac{\text{R . Sin. tot.}}{\text{Sin. P}}$; wobei P = der jährlichen Parallaxe.

Z. B. die Parallaxe des Procyon = 3″; wie groß ist sein Abstand?

log. R = 7,3192521 + 10
− log. P = 3″ = 5,1626961

12,1565560 = 1 Billion 434000 Millionen Meilen.

II. Copernikus' Lehre
oder
das wahre Verhältniß der Erde zur Welt.

§. 821. Lange hatten die Menschen den prächtig gestirnten Himmel betrachtet, und die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper berechnet, ohne vom wahren Verhältniß der Erde zur Sonne einen richtigen Begriff zu haben. Der Schein siegte. Ihm zufolge hielt man die Erde für das Centrum der Welt, für unbeweglich, und das Hauptwerk des Schöpfers; die Sonne, Planeten und Fixsterne für ein der Erde nothwendiges Bedürfniß; vom sogenannten Himmel hat man zum Theil noch jetzt sehr kindische Begriffe.

Im scheinbaren Laufe des Mondes und der Sonne finden alle Völker der Erde so viel Regelmäßiges, daß sie dieselben als Zeitmesser anerkennen müssen. Aber der unregelmäßig scheinende Lauf einiger sehr auffallenden Sterne, als der des Merkur, der Venus, des Mars, Jupiter und Saturn, ist und war eine unauflösliche Aufgabe für Alle, die sich vom sinnlichen Schein nicht losmachen können. Copernikus machte seinen Namen unsterblich, indem er das Verhältniß der Erde zum Sonnensystem entwickelte, und alle Erscheinungen im Laufe der Planeten Merkur, Venus ꝛc. aufs Einfachste, Natürlichste und Bestimmteste erklärte. Obgleich religiöser Wahn seiner Lehre entgegen arbeitete, so drang dennoch die Wahrheit derselben unbezwingbar durch, und Männer, wie Kepler und Newton, bewiesen sie mit mathematischer Strenge.

§. 822. Nach Copernikus' Lehre sind alle Sterne, mit Ausnahme einiger, die man Planeten oder Wandelsterne nennt, Sonnen, behalten gegen einander eine gleiche Stellung, und schweben frei im unendlichen Raume in unabsehbarer Menge. Unsre Sonne ist eine von jener Menge. Wegen ihrer größern Nähe erscheint sie größer und glänzender, als die andern Sonnen oder Fixsterne, und nimmt den Mittelpunct aller Planetenbahnen ein. Die Planeten sind dunkle Körper, gleich unserer Erde, an-

empfangen ihr Licht von der Sonne, und bewegen sich in kreisförmigen Bahnen, und verschiedenen Abständen und Zeiten um die veststehende Sonne in folgender Ordnung: Merkur, Venus, Erde mit dem Monde, Mars, Jupiter, Saturn.

Auf diese Weise versetzte Copernikus die Erde selbst unter die Sterne. Sie blieb nicht mehr Hauptzweck des Weltschöpfers, sondern trat in die Reihe einer untergeordneten Klasse der himmlischen Körper, der Planeten, und mußte der Sonne die Würde überlassen, die man ihr so lange erhalten hatte. Ob die Erde den neuen niedern Rang verdiene, wird man aber erst dann richtig beurtheilen, wenn man sich mit dem Sonnensystem etwas näher bekannt gemacht hat.

§. 823. Die unnatürliche tägliche Umwälzung des Himmels mit allen großen und herrlichen Weltkörpern um die kleine Erde, welche vorher angenommen werden mußte, um die Erscheinung eines Tages zu erklären, verwandelte Copernikus in eine einmalige Umwälzung der Erde um ihre Axe von Abend gegen Morgen, wodurch für ihre Bewohner nothwendig der sinnliche Schein entstehen muß, als drehe sich der Himmel vom Morgen zum Abend täglich einmal um die Erde.

Weil man auf der Oberfläche einer Kugel allenthalben oben steht, und die verlängerte Richtung nach dem Mittelpunct der Erde unten heißt; weil wir durch die Gesetze der Schwere an den Erdkörper unauflöslich gekettet sind, und bei dem täglichen Umschwunge desselben unsre Atmosphäre, als ein dünnes Gewand, mitnehmen: so ist begreiflich, daß wir von der Axendrehung unsers Wohnplatzes weder etwas gewahr werden, noch von demselben abfallen können, wie die Einfalt, die mit den Begriffen von unten und oben noch nicht auf dem Reinen ist, gemeiniglich glaubt.

§. 824. Ein Jahr ist der einmalige Umlauf der Erde um die Sonne, während sie sich, gleich einer fortrollenden Kugel, $365\frac{1}{4}$ mal um ihre Axe wälzt. Sie beschreibt in dieser Zeit einen Kreis (eigentlich eine Ellipse), dessen Radius ihr Abstand von der Sonne ist, und der die Erdbahn heißt. Da es nun scheint, als bewege sich

die

die Sonne in dem der Erde gegenüberstehenden Theil der Erdbahn, so nennt man sie auch Sonnenbahn oder Ekliptik. Steht für uns z. B. die Sonne im ♈, so sieht man von ihr aus die Erde in ♎, also in einem 180° entfernten Puncte.

§. 825. Den Wechsel der Jahreszeiten erklärt Copernikus dadurch, daß die Erdaxe bei ihrer täglichen und jährlichen Bewegung stets eine unverrückte schräge Lage gegen die Erdbahn von 66½ Grad behalte, und daher im Sommer der Nordpol und im Winter der Südpol beständig die Sonne sehen müsse.

§. 826. Der unordentlich erscheinende Lauf der Planeten, ihr Vor- und Rückwärtsgehen und Stillstehen im Thierkreise, ihre sichelähnliche Erleuchtung, so wie ihre bald größer, bald kleiner scheinenden Durchmesser — alles dies ist begreiflich, wenn man bedenkt, daß wir die Planeten nicht aus der Sonne, dem Mittelpunct ihrer Bahnen, sondern aus der Erde, die, wie jene, täglich ihren Platz im Weltraum verändert, betrachten, wodurch wir bald diesem, bald jenem viel näher kommen, wobei die untern Planeten wegen ihres schnellern Laufs der Erde voreilen, diese hingegen den obern wieder zuvorkommt, und ein scheinbares Zurückgehen der letztern bewirkt. — Aus Fig. 274. wird dies noch deutlicher.

Es sey in S die Sonne. Zunächst um sie bewege sich Merkur, dann Venus, und darauf die Erde. Letztere befindet sich am 21sten Junius in ♋; Merkur in w; so hat er von der Erde aus gesehen seinen weitesten Abstand von der Sonne. Der Winkel S♋w beträgt nur 28° und heißt seine größte westliche Ausweichung von der Sonne. Er kann uns in dieser Stellung nur etwa die Hälfte seiner von der Sonne erleuchteten Seite zeigen. Je näher er nach n rückt, je näher kommt er der Erde, und je weniger sehen wir von der erleuchteten Seite. In n steht er vor der Sonne, culminirt mit ihr zugleich und kann nicht sichtbar seyn. Nach ungefähr 16 Tagen steht er in o, hat dort seine größte östliche Ausweichung und ist in der Morgendämmerung sichtbar. Von w durch n nach o ist seine scheinbare Bewegung rückgängig.

(Die ganze Bahn des Merkur wird demnach von der Erde aus unter einem Winkel von 2.28° = 56° gesehen.)

Dieselbe Erscheinung giebt die Venus. Ihre größte westliche Ausweichung ist in a, ihre östliche in b; der < S ♁ a beträgt 48°, und ihre ganze Bahn muß unter einem Winkel von 96° erscheinen. Sie kann daher, wie Merkur, nur des Abends oder Morgens, niemals um Mitternacht, oder nach M hin gesehen werden. Steht die Venus in a, so ist ihre erleuchtete Seite nur zum Theil von uns zu sehen, in v gar nicht, wo sie uns am nächsten ist; in y sehen wir sie wieder sichelförmig erleuchtet, und in p ganz, wo sie hinter der Sonne steht, und wegen ihrer großen Entfernung nur klein erscheint.

Die scheinbaren Durchmesser der Planeten nehmen zu oder ab, je näher oder entfernter sie sind. Die Pfeile zeigen die gemeinschaftliche Richtung; die tägliche Umwälzung geschieht nach eben derselben Richtung ihres Laufs; folglich sehen wir die Puncte b und o früher, als die Sonne; aber w und a nach derselben.

Die rechtläufige Bewegung, worin die Planeten nach der Ordnung der himmlischen Zeichen fortrücken, findet beim Merkur in dem Theil seiner Bahn, der zwischen o, f und w liegt; bei der Venus von b nach p und a statt. In w, o, a und b stehen diese Planeten scheinbar still, weil sie sich entweder gerade nach der Erde zu, oder von ihr weg bewegen, und man sie eine Weile in einerlei Gesichtslinie sieht. Ihre Bewegung wird in n und f, v und p scheinbar am schnellsten seyn.

Rückt nun auch die Erde in ihrer Bahn, z. B. von ♁ nach Z in eben der Zeit fort, in welcher Merkur von w nach o, und Venus von a nach y gehen, so werden die Puncte b und o dahin treffen, wo die Pfeile stehen.

§. 827. Man stelle sich vor, die Bahn des Merkur sey die Erdbahn, die Bahnen der Venus und Erde mögen aber die der obern Planeten Mars und Jupiter vorstellen, so lassen sich alle Erscheinungen, die bei dem verschiedenen Stande dieser Himmelskörper eintreten können, auf eben diese Weise beurtheilen. Befindet sich z. B. die Erde in n, so können Mars und Jupiter in v und ♁, also zur Mit-

ter-

ternachtsstunde, im Meridian erscheinen; und weil die Erde schneller läuft, als die obern Planeten, so kann sie nach 2 Monaten schon in ☌ seyn, während Jupiter erst in ✕ ist, und deshalb rückwärts zu gehen scheint, weil die Gesichtslinie von der Erde nach ihm den Punct N am Firmament trifft, der weiter rückwärts liegt, als M, wo er vor 2 Monaten war.

§. 828. Die Bahnen der Planeten sind zwar keine Kreise, sondern Ellipsen; allein weil ihre Abweichung vom Kreise bei den meisten nur gering ist, so kann man sie sich zu desto leichterer Zeichnung in einer Figur als Kreise vorstellen, deren Mittelpuncte nicht genau in der Sonne zusammentreffen, als excentrische Kreise. Derjenige Punct, welcher dann am weitesten von der Sonne absteht, heißt das Apheliun (Sonnenferne); der ihm entgegengesetzte Punct, welcher der Sonne am nächsten liegt, heißt das Perihelium (Sonnennähe); beide Puncte sind etwas veränderlich. Der Abstand des Kreismittelpuncts von der Sonne ist die Excentricität (in der Ellipse der Abstand des Brennpuncts vom Mittelpunct derselben). Weiß man die Zeit des ganzen Umlaufs, und den Punct des Apheliums, so läßt sich der wahre Ort eines Planeten, an welchem er von der Sonne aus erscheint, oder seine heliocentrische Länge, für jede folgende Zeit bestimmen. Von der Erde aus betrachtet erscheint der Planet an einem andern, dem geocentrischen Orte, dessen Abstand von 0° ♈ seine geocentrische Länge heißt.

Weil die Planetenbahnen nicht genau in einerlei Ebene mit der Erdbahn liegen, sondern kleine Winkel mit derselben machen, so liegt die Hälfte einer jeden über, und die andere Hälfte unter der Ekliptik oder Erdbahn. Die Durchschnittspuncte heißen Knoten; und werden mit den Zeichen ☊ und ☋ (aufsteigender und niedersteigender Knoten) bemerkt. Auch die Knoten sind veränderlich. Ist ein Planet in einem seiner Knoten, so hat er keine Breite; in jedem andern Puncte seiner Bahn hat er eine Breite, welche, von der Sonne aus betrachtet, heliocentrisch; und von der Erde aus gesehen, geocentrisch heißt.

Die

Die Astronomen haben die heliocentrischen Örter der Planeten auf viele Jahre voraus berechnet und in Tafeln gebracht, die man Planetentafeln nennt. Ihre Berechnung gründet sich auf das copernikanische System, und stimmt so vortrefflich mit der Beobachtung, daß diese Übereinstimmung allein schon der schönste Beweis für die Wahrheit desselben ist.

§. 829. Diejenigen Stücke, die zur vollständigen Darstellung einer Planetenbahn gehören, nennt man Elemente, und sie sind folgende:

1) die Umlaufszeit;
2) die Länge für eine bestimmte Zeit;
3) der Punct der Sonnenferne und seine Bewegung;
4) der Abstand von der Sonne;
5) die Excentricität;
6) die Neigung der Bahn gegen die Erdbahn;
7) die Knoten und deren Bewegung.

§. 830. Man unterscheidet den tropischen Umlauf (nach dessen Vollendung ein Planet, von der Sonne aus gesehen, wieder dieselbe Länge hat, und der bei Planetentafeln zum Grunde gelegt wird), und den siderischen Umlauf, nach welchem ein Planet wieder bei einem und demselben Fixstern erscheint. Dieser letztere Umlauf dauert etwas länger, weil die Länge der Fixsterne unterdessen zugenommen hat. Ein synodischer Umlauf aber ist die Zeit, welche ein Planet anwendet, um mit der Erde und Sonne wieder in eine Linie zu kommen. Er wird um so länger dauren, je weniger die Umlaufszeiten der beiden Planeten von einander verschieden sind, denn sie rollen dann geraume Zeit neben einander her, ehe der schnellere dem langsamern einen Vorsprung abgewinnt, und ihn endlich wieder einholt.

Den tropischen und siderischen Umlauf findet man aus Beobachtungen; den synodischen Umlauf durch die Regel:

der Unterschied der Bewegung der Erde und des Planeten in einer gewissen Zeit,

z. B.

z. B. in 100 Jahren, verhält sich zu eben dieser Zeitdauer, wie 360° zum synodischen Umlauf.

Z. B. In wie langer Zeit wird Jupiter mit der Erde und Sonne in eine Linie kommen, wenn die Säkularbewegung

der Erde	= 100	Uml.	0 Zeich.	0°	46′
des Jupiter	= 8		5	6	17′30″ ist?
Unterschied	91		6 Z	24°	28′30″, in Graden $3444\frac{1}{2}$° beinahe.

Proportion $3444\frac{1}{2}$° : 100 Jahren = 360° : 1 Jahr, 33 Tage, 14 St.

§. 831. Die Erscheinung des Gegenscheins (wo Sonne, Erde und Planet in einer geraden Linie stehen) wird von den Sternkundigen genau beobachtet, um daraus den Unterschied in der Säkularbewegung, die genauere Umlaufszeit, und aus letzterer wieder den Abstand des Planeten von der Sonne zu berechnen; denn aus der Umkehrung der Proportion im vorigen §. findet sich jener Unterschied der Säkularbewegung.

Vergleiche hiemit und mit dem Folgenden §. 708 bis 710.

§. 832. In der folgenden Tafel sind die Elemente aller bis jetzt bekannten 11 Hauptplaneten für den 1sten Januar 1820 Berliner Meridian enthalten, wornach sich ein Sonnensystem zeichnen, und so manche Aufgabe mechanisch lösen läßt (ein Geschäft, das Freunden der Sternkunde recht sehr zu empfehlen ist).

Sonnen-

	Sonnenferne.	Jährliche Beweg.	Eccentricität; den Abstand der Sonne v. d. Erde =100000	Abstand der Planeten von der Sonne, den der Erde = 100000 = halben großen Axe.			Ort des aufsteigenden Knotens.	Jährliche Beweg.
	Z. G. M. Sek.	Sek.		kleinster,	mittlerer,	größter,	Z. G. M. Sek.	Sek.
Merkur	8 14 40 41	56,2	7959	30751	38751	46669	1 16 11 57	43,3
Venus	10 8 53 13	48,6	498	71835	72333	72831	2 15 2 59	31,0
Erde	9 9 50 4	62,1	1681	98319	100000	101681		
Mars	5 2 46 44	67	14204	138165	152369	166573	1 18 10 58	28
Vesta	2 9 50 32		20137	215377	235514	255651	3 13 18 28	
Juno	7 23 14 54		68197	198722	266919	335115	5 21 9 59	
Ceres	10 26 41 47		21682	255059	276741	298423	2 20 58 30	
Pallas	10 1 3 11		67845	209052	276897	344742	5 22 28 57	
Jupiter	6 11 28 12	56,7	25013	495266	520279	545292	3 8 36 37	35,7
Saturn	8 29 27 19	66,1	53640	900432	954072	1007712	3 22 8 17	33,3
Uranus	11 17 39 18	52,8	89556	1828806	1918362	2007918	2 12 56 28	15,7

Pro-

	Tropischer Umlauf.					Siderischer Umlauf.					Mittl. synodischer Umlauf d. Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tag.			Heliocentrische Länge 1sten Jan. 1820.				Neigung der Bahnen gegen die Ekliptik.		
	Jahr.	T.	St.	M.	S.	Jahr.	T.	St.	M.	S.	J.	T.	St.	Zeich.	Gr.	M.	Sek.	Gr.	M.	Sek.
Merkur	—	87	23	14	33	—	87	23	15	44	—	115	21	4	23	37		7	0	0
Venus	—	224	16	41	27	—	224	16	49	11	1	218	16	10	28	39		3	23	35
Erde	—	365	5	48	48	—	365	6	9	12	—	—	—	3	10	1	32	—	—	—
Mars	1	321	16	18	27	1	321	17	30	36	2	49	22	3	18	55		1	51	3
Vesta	3	224	9	15	47	3	224	13	41	17	1	139	19	0	8	—		7	8	11
Juno	4	131	10	30	21	4	131	16	57	51	1	108	17	4	4	—		13	4	0
Ceres	4	220	5	52	6	4	220	13	3	39	1	101	9	3	29	9		10	37	35
Pallas	4	221	15	35	51	4	221	22	47	44	1	101	6	3	18			34	37	41
Jupiter	11	312	20	39	2	11	314	20	26	31	1	33	13	10	25	28		1	19	2
Saturn	29	154	13	16	15	29	166	19	51	11	1	12	20	0	0	47		2	29	55
Uranus	83	274	8	38	—	84	8	18	14	—	1	4	10	8	24	52		0	46	16

	Jährl. tropische Bewegung zu 365 Tagen.	Säkularbewegung, tropische.	Mittlere tägliche tropische Bewegung.	24stündliche Bewegung: im Perihelio.	im Aphelio.
Merkur	49 Z. 23° 43′ 3″	415 Uml. 2 Z. 14° 4′	4° 5′ 32″,6	6° 20′ 47″	2° 45′ 19″
Venus	19 14 47 30	162 6 19 12	1 36 7,8	1 37 27	1 34 49
Erde	11 29 45 40	100 0 0 46	0 59 8,3	1 1 10	0 57 11
Mars	6 11 17 10	53 2 1 42	0 31 26,6	0 38 4	0 26 12
Vesta	3 9 32 3	27 8 7 4	0 16 21,7	0 19 30	0 13 50
Juno	2 22 30 54	22 11 7 9	0 13 33,8	0 23 40	0 8 19
Ceres	2 18 9 23	21 8 21 —	0 12 50,8	0 15 5	0 11 1
Pallas	2 18 5 28	21 8 14 28	0 12 50,2	0 21 50	0 8 2
Jupiter	1 0 20 32	8 5 6 18	0 4 59,3	0 5 31	0 4 33
Saturn	0 12 13 37	3 4 23 32	0 2 0,6	0 2 16	0 1 48
Uranus	0 4 17 44	1 2 9 51	0 0 42,4	0 0 46	0 0 38

S. 833.

§. 833. Beim Anfertigen eines Sonnensystems verfahre man also: Auf einem großen Bogen ziehe man aus einem Puncte S, welcher die Sonne vorstellt, einen Kreis so groß, als es der Raum verstattet, und theile denselben in 12 Zeichen, jedes in 30° und kleinere Theile. Dieser Kreis stellt die Ekliptik vor. Um nun die Bahn eines Planeten, z. B. des Merkur, ziehen zu können, lege man ein Lineal an S und den Punct seiner Sonnenferne = 8 Z. 14° 41′ in der Ekliptik, und ziehe mit Bleistift von ☉ aus eine Linie, auf welche die Excentricität = 7959 nach einem beliebigen Maaßstabe getragen wird. (Man wählt, wo möglich, einen solchen Maaßstab, nach welchem auch die Bahn des Uranus mit auf die Zeichnung zu bringen ist; schneidet man von den in der Tafel angesetzten Zahlen rechts zwei Zahlzeichen ab, so können alle Planetenbahnen nach einem gewöhnlichen tausendtheiligen Maaßstabe verzeichnet werden.) Aus dem gefundenen Punct ziehe mit dem Radius = dem mittlern Abstande von der Sonne = 38710 einen Kreis, welcher die Bahn des Merkur seyn wird. Der Sonnenferne gegenüber liegt die Sonnennähe. Die Knoten liegen einander ebenfalls gegenüber, und ein Lineal an S und 1 Z. 16° 11′ 57″ in der Ekliptik gelegt, durchschneidet die Merkurbahn im aufsteigenden Knoten, und rückwärts im niedersteigenden.

Völlig eben so zeichnet man nach Angabe der Tafel die Bahnen der andern Planeten.

Weiß man nun für eine gewisse Zeit den heliocentrischen Ort eines Planeten und der Erde, so lege man abermals ein Lineal an S und den Punct der heliocentrischen Länge in der Ekliptik, und bezeichne den Punct, wo es die Planetenbahn durchschneidet, mit einem verwischlichen Strich. Auf diese Weise sind die Puncte, in denen sich Planet und Erde befinden, im richtigen Verhältniß, und man kann ihre Entfernung mit Zirkel und Maaßstab mechanisch finden. Will man sie in Meilen haben, so setzt man auf

100000 (oder 1000) : $20\frac{1}{2}$ Million Meilen = wie der mit dem Zirkel gefundene Abstand : gesuchten in Millionen Meilen. Oder man mache sich einen Maaßstab, auf welchem der Radius der Erdbahn in Meilen abgetheilt ist, worauf die Abstände der

Pla-

Planeten in ihren sehr verschiedenen Stellungen leicht gemessen werden können.

Auch läßt sich beurtheilen, an welchem Ort in der Ekliptik ein Planet, von der Erde aus betrachtet, erscheinen wird. Allein dabei ist zu bedenken, daß der Kreis, welcher die Ekliptik vorstellen soll, eigentlich unendlich groß gegen die Erdbahn, oder letztere gegen erstere als ein Punct gedacht werden muß, woraus dann folgt, daß parallele Linien von der Sonne und Erde nach der Ekliptik gezogen genau einerlei Punct treffen.

§. 834. Der elliptische Lauf der Planeten um die Sonne.

Es befinde sich die Sonne im Brennpunct S der Ellipse AePd Fig. 275., so ist A das Aphelium oder die Sonnenferne, P das Periphelium oder die Sonnennähe, AP große Axe oder Absidenlinie, C das Centrum, de die kleine Axe.

Wenn der Planet sich in o befindet, so ist Ao der Abstand desselben vom Aphelio; der Winkel ASo heißt die wahre Anomalie; die eccentrische Anomalie ist der Winkel Acu; der Punct u liegt da, wo eine Ordinate ro verlängert den mit CA beschriebenen Kreis AuPa in u treffen wird.

Bewegte sich der Planet in diesem Kreise, so würde er in gleichen Zeiten gleichviel Grade zurücklegen, und z. B. nach dem 6ten Theil seiner Umlaufszeit 60° von A abstehen und in x seyn. Der Abstand Ax heißt die mittlere Anomalie, welche in dieser östlichen Hälfte der Ellipse stets größer, als die wahre seyn wird, indem sich der Planet zwischen A und o langsamer, als zwischen eP und Pa bewegt. Hingegen wird auf der andern Seite von P nach a bis A die wahre Anomalie größer seyn, als die mittlere. In A, wo sich der Planet am langsamsten, und in P, wo er sich am schnellsten bewegt, werden beide Anomalien zusammentreffen. Der Unterschied zwischen der wahren und mittleren Anomalie oder zwischen den Winkeln ASo und ASx heißt die Mittelpunctsgleichung.

§. 835. Sobald man diesen Unterschied weiß, so läßt sich die Länge des Planeten in der Ellipse, oder der

Winkel

Winkel ASo bestimmen. Dieser Unterschied müßte vom mittlern Orte abgezogen werden, so lange sich der Planet zwischen A oder Null Grad und 180° befindet, und dazu addirt werden, wenn er von P nach d und A läuft.

Bode giebt in seinen Erläuterungen folgende Regel, die wahre Anomalie und Mittelpunctsgleichung zu finden:

SA : SP = Tang. $\frac{1}{2}$ ASx : Tang. $\frac{1}{2}$ ASo.

d. h. der Abstand der Sonnenferne verhält sich zum Abstand der Sonnenhöhe, wie die Tangente der halben mittlern Anomalie zur Tangente der halben wahren Anomalie.

Z. B. die Mittelpunctsgleichung der Venus zu finden, wenn ihre mittlere Anomalie 60° ist.

Nach §. 832 ist AS = 72831; SP = 71835.

72831 : 71835 = Tang. 30° : Tang. $\frac{1}{2}$ ASo.

log. Tang. 30° = 9.7614394
log. 71835 = 4.8563361
14.6177755
log. 72831 = 4.8623163
log. Tang. $\frac{1}{2}$ ASo = 9.7554592 = 29° 39′ 38″ (.2

Wahre Anomalie = 59° 19′ 16″
von der mittlern = 60° abgezogen

giebt die Mittelpunctsgleichung = — 40′ 44″.

Allein dies leichte Formular ist nur bei den Planeten sicher anzuwenden, deren Excentricität gering ist.

Setzt man die wahre Anomalie voraus, so erhält man die mittlere durch folgende Formel:

1) $\sqrt{(SP)} : \sqrt{(SA)}$ = Tang. $\frac{1}{2}$ ASo : Tang. $\frac{1}{2}$ ACu.

2) $\frac{206265'' \cdot CS}{CP}$ — . Sin. ACu = y; und y + ACu = < ASx.

Der Unterschied der mittlern und wahren ist die Mittelpunctsgleichung.

Anmerk. Die Zahl 206265 ist der in Bogentheilen ausgedrückte Halbmesser eines Kreises; denn derselbe = 57° 17′ 45″ = 206265″.

§. 836.

§. 836. Wenn man aus dem Punct S mit einem Radius, welcher die mittlere Proportionallinie zwischen der halben großen und halben kleinen Axe ist, einen Kreis zieht, so durchschneidet dieser die Ellipse da in i und l, wo die größte Mittelpunctsgleichung statt findet, und die wahre Geschwindigkeit der mittlern gleich ist.

§. 837. Den jedesmaligen Abstand eines Planeten von der Sonne oder den Radius vector So giebt die Formel:

der Sinus ASo (wahren Anomalie) verhält sich zum Sinus ACu (eccentrischen Anomalie), wie die halbe kleine Axe (die halbe große Axe = 100000), zum Radius vector.

Wenn der Planet sich in e oder d am Endpuncte der kleinen Axe befindet, so ist der Radius vector = der halben großen Axe, und der Planet in der mittleren Entfernung von der Sonne.

§. 838. Die geocentrische Länge und Breite der Planeten zu finden,

Könnten wir den Lauf der Planeten aus der Sonne betrachten, so würden wir sie stets an ihrem wahren Orte sehen; allein, da wir ihn von der Erde aus betrachten, so erscheinen sie uns in andern Puncten des Thierkreises. Aus ihren Abständen von der Sonne und ihrer heliocentrischen Länge und Breite wird sich aber ihr geocentrischer (von der Erde aus gesehener) Ort berechnen lassen.

Es stehe z. B. Jupiter in 24 Fig. 276., und seine heliocentrische Länge in der Ekliptik sey ♈J = 5 Zeichen 10° 19′ 9″; die Erde in ♁ = 7 Zeichen 10° 53′ 21″, so ist im Dreieck S24♁ bekannt S24 = dem Abstand des Jupiter von der Sonne; S♁ = dem Abstand der Erde und Sonne; und < a = dem Unterschied der heliocentrischen Länge beider Planeten. (Die heliocentrische Länge der Erde ist allemal gleich der Länge der Sonne + oder — 6 Zeichen.) Die Abstände der Planeten von der Sonne nimmt man aus §. 832., wobei man noch darauf achten muß, ob sie sich in der Sonnennähe oder Sonnenferne befinden. Nach §. 837. ergeben sich diese Abstände am sichersten.

Hier

Hier ist S♃ = 540770
S♂ = 100840

und 7 Z. 10° 53′ 21″
— 5 10 19 9

2 Z. —° 34′ 12 = 60° 34′ 12″ = < a.

man sucht den Winkel b, unter welchem Jupiter von der Sonne der Länge nach erscheint. Folglich sind im ebenen △ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, man sucht einen der beiden unbekannten Winkel, b.

Seiten 540770 < C + < b = 180° — < a
100844 a = 60° 34′ 12″

Summe 641614 Summe der beiden 119° 25′ 48″
Unterschied 439926 halbe Summe = 59° 42′ 54″.

641614 : 439926 = Tang. 59° 42′ 54″ : Tang. x.

log. = 10,2335549
5,6433796

15,8769345
5,8072738

10,0696607 = 49° 34′ 36″
dazu addirt = 59° 42′ 54″

Winkel b an der Erde = 109° 17′ 30″

d. h. 3 Zeichen 19° 17′ 30″ = geocentrischen Länge des Jupiter.

< a heißt Commutationswinkel,
< b — Elongationswinkel,
< c — Parallaxe der Erdbahn vom Planeten aus gesehen.

Durch obige Rechnung sind alle Winkel bekannt geworden, denn < a + < b von 180° abgezogen, giebt < c.

§. 839. Die geocentrische Breite zu finden dient die Formel:

Sin. a : Sin. b = Tang. der heliocentrischen Breite : Tang. der geocentrischen Breite.

Z. B. Es sey die heliocentrische Breite des Jupiter in Fig. 276. = 1° 9′ 24″ nördlich.

log.

log. Tang. 1° 9′ 24″ = 8,305133
log. Sin. b = 109° 17′ 30″ = 9,974908

18,280041

log. Sin. a = 60° 34′ 12″ = 9,939996

Tang. = 8,340045 = 1° 15′ 12″ nördliche Breite.

§. 840. Ein Planet kommt, von der Erde aus gesehen, zum Stillstande, wenn die Tangente seines Entfernungswinkels von der Sonne (Abstand der Erde = 1) gleich ist dem Halbmesser seiner Bahn, dividirt durch die Quadratwurzel dieses Halbmessers + 1, und wird nun rückgängig, oder wenn er rückgängig war, wieder rechtläufig. Die kommende Tangente ist negativ, weil der Entfernungswinkel stumpf wird, und muß von 180° abgezogen werden, dann giebt sie diesen Winkel an.

Formel: $\frac{R}{\sqrt{R+1}}$ = Tang. b = Elongationswinkel, in dem der Planet zum Stillstand kommt.

§. 841. Aus den Planetentafeln findet man für jede gegebene Zeit die mittlere heliocentrische Länge, den Ort des Apheliums und des aufsteigenden Knotens. Zieht man von der mittlern Länge den Ort des Apheliums ab, so bleibt die mittlere Anomalie, wozu die Tafeln die Mittelpunctsgleichung geben, die in den ersten 6 Zeichen von der mittlern Länge subtrahirt, in den andern 6 Zeichen dazu addirt, die wahre Länge in der Planetenbahn geben. Zieht man hievon die Länge des aufsteigenden Knotens ab, so erhält man das Argument der Breite, woraus man die Reduction auf die Ekliptik, und damit die heliocentrische Länge und Breite des Planeten in derselben findet.

§. 842. Die wahre Entfernung eines Planeten von der Erde giebt die

Formel: Sin. des Elongationswinkels verhält sich zur abgekürzten Entfernung des Planeten von der Sonne, wie der Commutationswinkel

zur

zur abgekürzten Entfernung desselben von der Erde; letztere durch den Cosin. der geocentrischen Breite dividirt, giebt die wahre gesuchte Entfernung in solchen Theilen, deren der Abstand der Erde von der Sonne 100000 hat.

Z. B. die Entfernung des Jupiter nach den Angaben im §. 838. zu finden:

Sin. b : S24 = Sin. a : 24

log. Sin. a = 60° 34′ 12″ = 9.939996
log. S24 = 540770 = 5.733013
15.673009
log. Sin. b = 109° 17′ 30″ = 9.974908
5.698101 = 499008
geocentr. Breite, Cos. 1° 15′ 12″ = 9,999896
log. der wahren Entfernung = 5.698205 = 499120.

Verlangt man diese Entfernung in Meilen, so gilt:

100000 : 20857000 Meilen = 499120 : Entfernung in Meilen.

§. 843. Als eine Probe von astronomischen Tafeln können die im Anhange mitgetheilten Tafeln des scheinbaren Sonnenlaufs A, B, C dienen, aus welchen Freunde der Sternkunde die Länge der Sonne für jede Zeit von 1810 bis 1869 mit einer für sie hinreichenden Genauigkeit finden können.

Z. B. Man sucht für Berlin am 8ten Januar 1818 Mittags wahrer Zeit die Länge der Sonne.

D. i. astronomisch = 1818 J. 0 M. 8 T. 0 St. 0 M. 0 Sek.
Zeitunterschied der Meridiane v. Berlin und Paris = = = 44′ 10″ abgez.
Wahre Zeit zu Paris = 1818 J. 0 M 7 T. 23 St. 15′ 50″
Zeitgleichung aus Tafel III. + 6′ 59″
Mittl. Zeit zu Paris = 1818 J. 0 M. 7 T. 23 St. 22′ 49″

Mittlere Länge der Sonne.				Länge d. Erdferne.
Tafel A giebt für 1818 =	9 Z.	9°	32′ 45″	3 Z. 9° 48′ 32″
Taf. B giebt f. 7 Tage =	0	6	53′ 59″	1″
für 23 Stunden =	0	0	56′ 40″	3 Z. 9° 48′ 33″
für 22 Minuten =	—	—	— 54.	
für 49 Sekunden =	—	—	— 2.	
Mittl. Länge d. Sonne =	9 Z.	17°	24′ 20″	
Länge d. Erdf. abgez. =	3	9	48 33	
Mittlere Anomalie =	6 Z.	7°	35′ 47″	

Hiezu giebt Taf. C die
Mittelpunctsgleichung = + 15′ 35″
Mittl. Länge d. Sonne = 9 Z. 17° 24′ 20″

Wahre Länge d. Sonne = 9 Z. 17° 39′ 55″ am 8ten Januar zu Berlin. Nach Bode's Jahrbuch ist sie = 9 Z. 17° 39′ 54″, also um 1″ genauer.

III. Natürliche Beschaffenheit der Sonnen- und Planetenoberfläche.

§. 844. Unsere Sonne ist ein Fixstern, der seine Lage gegen die übrigen Fixsterne entweder gar nicht, oder doch nur äußerst unmerklich verändert, und gehört mit zu dem Fixsternenheer, welches Milchstraße, Glanzstraße heißt. Letztere erscheint uns als ein unregelmäßiger Kreis am Himmel, weil unser Sonnensystem nicht in der Mitte, sondern unfern dem einen Ende derselben liegt. Nach Herschel gehören alle sichtbare Sterne am Himmel zur Milchstraße; die mit Hülfe der besten Sehwerkzeuge entdeckten, und nach allen Richtungen hin befindlichen sogenannten Nebelflecke sind gleichfalls solche Sonnenheere oder Milchstraßen, die für sich Ganze ausmachen, und nur wegen ihrer ungeheuern Entfernung uns so klein und zusammengehäuft erscheinen. Unsre Sonne wird von Planeten begleitet, daher wird jede andere Sonne ebenfalls dergleichen Weltkörper bei sich haben, und ihnen Licht und Wärme mittheilen. Was wir gegenwärtig von der physischen Beschaffenheit der Sonne und Planeten wissen,

wissen, verdanken wir vornehmlich den rastlosen Bemühungen der unsterblichen Männer unsrer Zeit, Herschel und Schröter, deren Entdeckungen Brandes in seinen „Briefen an eine Freundinn" trefflich zusammengetragen und kritisch beleuchtet hat.

§. 845. Aus der Erscheinung unregelmäßiger Flecke auf der Sonne, die sich von Zeit zu Zeit einfinden, berechnet man ihre Umwälzung zu 25 Tagen, 14 Stunden, 8 Minuten; weil sich aber die Erde indessen in ihrer Bahn fortbewegt, so zeigt sie uns erst nach 27 Tagen, 12 Stunden, 20 Minuten dieselbe Seite wieder. Die Sonne dreht sich wirklich von Westen gegen Osten, allein die uns jedesmal zugekehrte Halbkugel scheint sich in entgegengesetzter Richtung fortzuschieben. Die Ebene des Sonnenäquators macht mit der Ekliptik einen Winkel von $7\frac{1}{2}$ Grad, folglich die Sonnenaxe einen von $82\frac{1}{2}$ Grad.

§. 846. Die Atmosphäre der Sonne erstreckt sich über die Erdbahn hinaus, und heißt Zodiokallicht (Thierkreislicht), welches besonders im Herbst und Frühjahr am östlichen und westlichen Himmel im Thierkreise sichtbar wird, weil dann die Stellung der Ekliptik gegen den Horizont sich der senkrechten nähert, und die kürzeste Dämmerung statt findet.

Die Sonne ist kein Feuer, wie man ehedem irrig glaubte, sondern mit einer leuchtenden Lichthülle umgeben, durch deren Öffnungen (Sonnenflecke genannt) man die planetenartige Oberfläche derselben mit ihren Unebenheiten sieht. Diese Lichthülle soll, nach Herschel's Meinung, an 350 bis 600 Meilen vom vesten Sonnenkörper abstehen, und einer Verdichtung und Anschwellung fähig seyn. Letztern Umstand beweisen die zu einerlei Jahreszeit in vielen Jahren hinter einander beobachteten Durchmesser der Sonne, woraus hervorging, daß sie in den Jahren 1783 bis 1786 an 31′ 59″, und in den Jahren 1804 bis 1809 an 32′ 6″ im horizontalen Durchmesser hatte, folglich um 700 Meilen größer geworden war. Eine solche Erscheinung läßt große periodische Veränderungen in der Lichtatmosphäre derselben vermuthen, und ist reich an Folgerungen.

§. 847. Mit trefflichen Sehwerkzeugen erkannte man unter den Lichtwolken der Sonne noch andere dunkle Wolken, welche das Durchscheinen der erstern verhindern, und daher auf dem Sonnenkörper eine fortdauernde milde Erleuchtung erlauben, wodurch er zur Bewohnbarkeit geschickter wird.

Nach Schröter's Beobachtungen hat die Sonne Gebirge, die mit ihren Spitzen in die Lichtwolken reichen, also mehrere 100 Meilen hoch sind.

Daß die Lichtmasse, so wie die darunter befindliche dunkele Wolkenschicht, von äußerst flüssiger Natur, und unsrer Atmosphäre sehr ähnlich sey, beweisen die äußerst schnellen Veränderungen, die darin vorgehen. Sonnenflecke, die viele tausend Meilen im Durchmesser haben, sind nichts seltenes (besonders seit 1813); den Bewohnern desjenigen Landstrichs, über dem sich die Lichtwolken weggezogen haben, ist dann ein Blick in die Schöpfung vergönnt. Vielleicht ist dies die einzige Nacht der dort ewig im Lichte Wandelnden!

§. 848. Der Durchmesser der Sonnenkugel beträgt über 113 Erddurchmesser oder 194000 Meilen; ihr Umfang 611000 Meilen; und ihre Größe übertrifft die der Erde über 1448000 mal. Ein Punct auf ihrer Oberfläche unter dem Äquator schwingt sich $\frac{611000}{25 \text{ Tage } 14 \text{ St.}} = \frac{611000}{614 \text{ St.}}$ = 995 Meilen in einer Stunde, und daher $4\frac{1}{2}$ mal schneller, als ein Punct des Erdäquators bei ihrer 24stündlichen Umdrehung.

Stände die Erde im Mittelpunct der Sonne, so könnte der Mond in einem doppelten Abstande um sie in der hohlen Sonnenkugel laufen. Die Erde wird von der Sonne aus als ein ganz kleiner Stern, dessen Durchmesser 17 Sekunden beträgt, gesehen, der Mond aber nur mittelst der Fernröhre aufgefunden werden können.

§. 849. Merkur, der nächste Planet an der Sonne, beschreibt seine sehr excentrische Bahn in beinahe 88 Tagen, und da er 9400 Erdhalbmesser (etwas über 8 Millionen Meilen) in seiner mittlern Entfernung von ihr absteht, so sieht er sie $2\frac{3}{5}$ mal, und im Flächenraum 7 mal grö-

größer, als wir. Er erscheint bei seiner größten Ausweichung kurz nach Sonnenuntergang, oder vor ihrem Aufgange als ein lebhaft glänzender Stern; gewöhnlich verschwindet er in der Dämmerung, indem er sich höchstens 28° von der Sonne entfernen kann.

Aus den Beobachtungen geht hervor, daß Merkur eine ziemlich dichte Atmosphäre hat, in welcher wolkenähnliche Erscheinungen vorgehen; daß seine Umdrehungszeit 24 St. 1 Minute, sein Aquator gegen seine Bahn etwa 20° geneigt ist, und also die dortigen Jahreszeiten ungefähr eben so, wie auf der Erde, abwechseln aber nur von einer 22tägigen Dauer sind. Die Gebirge auf dem Merkur sind von erstaunlicher Höhe; denn aus der Zeit, die sie gebrauchen, um ganz in den Schatten oder in die Nachtseite zu treten, läßt sich berechnen, daß ihre Höhe $2\frac{2}{7}$ Meilen betragen muß. — Der scheinbare Durchmesser ist in seiner Erdnähe, wo er zwischen der Sonne und Erde steht, 12 Sek.; aber in der Erdferne, wo er jenseit der Sonne steht, nur 5 Sekunden. Sein wahrer Durchmesser beträgt 697 Meilen; also ist er 16 mal kleiner, als die Erde.

§. 850. Venus, der schönste Stern am Himmel, steht etwa 17500 Erdhalbmesser oder 15 Millionen Meilen von der Sonne ab, läuft in 224 Tagen um sie, und sieht sie $1\frac{2}{5}$ mal im Durchmesser, und etwa noch 1 mal so groß im Flächenraum, als wir. Wenn Venus nach Sonnenuntergang am Abendhimmel erscheint, so heißt sie Abendstern; erscheint sie vor Sonnenaufgang am Morgenhimmel, so nennt man sie Morgenstern. Ihr Licht ist weiß und sehr lebhaft, aber, wie das aller Planeten, nicht flimmernd. Einer alten Gewohnheit zufolge wird ihre scheinbare Oberfläche in 12 Zoll getheilt. Steht sie jenseit der Sonne, so sehen wir sie ganz erleuchtet, aber wegen ihres großen Abstandes (von 35 Millionen Meilen) nur 9″ im scheinbaren Durchmesser; befindet sie sich zwischen Sonne und Erde, so sehen wir ihre dunkle Seite, aber 61″ im scheinbaren Durchmesser, denn ihr Abstand beträgt dann kaum 6 Millionen Meilen. In allen übrigen Stellungen erscheint sie, wie Merkur, mit zunehmendem und abnehmendem Lichte. Sie glänzt am lebhaftesten, und ist sogar dem unbewaffneten Auge bei Tage sichtbar, wenn sie 3 Zoll erleuchtet scheint.

Die

Die Größe der der Erde zugekehrten erleuchteten Seite bei dem Merkur und der Venus steht im Verhältniß mit dem Cosinus des Winkels an diesen Planeten. Ist dieser Winkel zwischen Null und 90°, so wird der Cosinus noch zum Halbmesser addirt; hingegen zwischen 90° und 180° davon subtrahirt.

Daß man durch gute Fernröhre auch noch einen kleinen Theil ihrer Nachtseite erleuchtet sieht, setzt eine Strahlenbrechung und Dämmerung in ihrer (der unsrigen ähnlichen) Atmosphäre voraus. Ihre Oberfläche scheint sehr bergig; besonders findet man auf ihrer südlichen Halbkugel Berge von 4 bis 5 Meilen Höhe. Ihre Tage dauren 23 St. 21 M., und ihre Axenneigung kommt der der Erde gleich, folglich können auch ihre Jahreszeiten nicht sehr von den unsrigen unterschieden seyn.

Der wahre Durchmesser der Venus beträgt 1688 Meilen; also ist sie etwa um $\frac{1}{20}$ kleiner, als die Erde.

§. 851. Die Erde ist der 3te Planet unsers Sonnensystems, und bewegt sich in einem Abstande von $20\frac{1}{2}$ Million Meilen in $365\frac{1}{4}$ Tagen um die Sonne. Ihr Halbmesser von $859\frac{1}{2}$ Meile ist der allgemeine Maaßstab des Astronomen, womit er die Abstände der Planeten mißt. Die Dichtigkeit, Masse und Fallkraft der Erde dient als Vergleichungsmaaß für die übrigen Planeten. Ihre Axendrehung bestimmt den Tag, ihr Umlauf um die Sonne das Jahr. Jeder Planet, also auch die Erde, wird von der Sonne etwas mehr, als zur Hälfte erleuchtet, weil letztere viel größer ist, und die Planeten Atmosphären haben, in welchen die Lichtstrahlen gebrochen werden. Auf der Erde wird es an einem Orte schon etwas hell, der noch 8 bis 9° von der Erleuchtungsgrenze absteht, welcher Zustand die Dämmerung genannt wird.

Die Axe der Erde ist gegen ihre Bahn $66\frac{1}{2}$ Grad geneigt, und behält diese Stellung unverrückt bei ihrer jährlichen Reise um die Sonne, wodurch die wohlthätige Abwechselung der Jahrszeiten entsteht. Der Winkel, welchen der Äquator mit ihrer Bahn macht, ist die Ergänzung von $66\frac{1}{2}°$, also $= 23\frac{1}{2}°$, und heißt die Schiefe der Ekliptik.

An-

Anmerk. Vor 3000 Jahren war die Schiefe der Ekliptik größer und = 23° 52′ 51″; gegenwärtig ist sie nur noch 23° 27′ 51″, und es kann seyn, daß sie in der Zukunft einst ganz verschwindet, wo alsdann auch der Wechsel der Jahreszeiten aufhören würde. Nach der Meinung einiger Astronomen ist diese Abnahme nur eine Schwankung; allein es scheint glaublicher, daß sie eine Folge der Attraction der Sonne und ein nothwendiges Ereigniß sey, durch welches der Erdkörper einem gewissen Ziele entgegen geführt wird, das ihm der Schöpfer setzte.

Nach Berechnungen, welche über die Dauer der Dämmerung angestellt worden sind, ergiebt sich die Höhe der Erdatmosphäre auf 10 Meilen. Wolken und andere Lufterscheinungen sind Gährungen, Auflösungen, und überhaupt chimische Prozesse in dem flüssigen Wesen der Atmosphäre.

Die Unebenheiten der Erde sind im Vergleich mit ihrem Durchmesser und denen der andern Planeten äußerst unbedeutend. Denn nur ein einziger Bergrücken Asiens erhebt sich über eine deutsche Meile. (Nach den neuern Messungen der Engländer beträgt die Höhe des Himalajagebirges 28000 Fuß über der See.)

§, 852. Der Mond ist ein Trabant oder Nebenplanet der Erde, und schwingt sich in einem Abstande von etwa 60 Erdhalbmessern oder 51000 Meilen in 27 Tagen 8 St. um sie, welches sein periodischer Umlauf genannt wird. Weil aber unterdessen die Erde in ihrer Bahn mit dem Monde zugleich fortgerückt ist, so ist der Mond noch nicht wieder in derselben Lichtgestalt, sondern erhält sie erst nach 29 Tagen 12 St. 44′ 3″. Letzterer Umlauf heißt der synodische. Seine mittlere tägliche tropische Bewegung ist 13° 10′ 35″.

Da er sein Licht von der Sonne empfängt, so wendet er seine erleuchtete Seite auch stets derselben zu. Nun sey Fig. 277. E die Erde; a, b, c, d, e, f, g, h die Mondbahn; nach S hinaus die Sonne, und der Mond in a, dann sehen wir von der Erdoberfläche in m den Mond und die Sonne zusammen am Himmel; er zeigt uns seine dunkle Seite, und heißt Neumond. Nach 3½ Tagen

ist

ist er in b; wir sehen etwas von der erleuchteten Seite, sichelförmig, wie es bei einer Kugel seyn muß. In c sehen wir von ihm nach $7\frac{1}{4}$ Tagen die erleuchtete Seite halb, und nennen dies das erste Viertel, wobei der Mond Abends gegen 6 Uhr culminirt. In d ist er nach $10\frac{1}{4}$ Tagen etwa $\frac{3}{4}$ erleuchtet sichtbar; und in e nach $14\frac{1}{2}$ Tagen im Vollmond, wo wir die uns zugewandte Seite ganz erleuchtet sehen, und er Nachts um 12 Uhr culminirt. Von nun an sehen wir die helle Seite nicht mehr ganz; in g ist sie wieder zur Hälfte sichtbar, und heißt letztes Viertel, wobei er gegen 6 Uhr Morgens culminirt. Ehe der Mond wieder nach a kommt, ist unterdessen die Erde von E nach V gerückt, und der Mond ist nach 27 Tagen 12 St. noch nicht wieder bei der Sonne. Er muß noch den Bogen as (etwa 27°) zurücklegen, um wieder im Neumond (bei der Sonne) zu seyn.

Aus der Figur sieht man leicht, daß der Mond vom Neumond zum Vollmond hinter, und vom Vollmond zum Neumond, vor der Erde hergeht. In dem Theil ceg seiner Bahn ist er weiter, und in dem Theil gac näher an der Sonne, als die Erde.

§. 853. Die Bahn des Mondes um die Erde ist eine Ellipse, aber weil beide Körper gegen einander eine, wiewol ungleiche, Schwere haben, und gemeinschaftlich um die Sonne rollen, so ist die Bahn des Mondes im Weltraum eigentlich eine Radlinie oder Cykloide, und die gemeinschaftliche Bahn beider Weltkörper in der Richtung des gemeinsamen Schwerpuncts, welcher näher an der Erde, als am Monde liegt, weil erstere größer ist.

§. 854. Aus verschiedenen scheinbaren Durchmessern des Mondes, welche von 29′ 22″ auf 33′ 31″ steigen können, so wie aus der verschiedenen Geschwindigkeit desselben folgt, daß er in einer Ellipse, in deren Brennpunct die Erde ist, um letztere läuft. Die Excentricität beträgt 5505 solcher Theile, deren die halbe große Axe 100000 hat. Hiernach läßt sich, wie bei den Planeten die Mittelpunctsgleichung und wahre Anomalie berechnen. Allein da so vielerlei Ursachen auf den Mondlauf einwirken, so erhält man durch die elliptische Berechnung den wahren Ort des Mondes lange noch nicht genau, und es

ist

ist erst den neuern Astronomen gelungen, nach Anwendung der tiefsten analytischen Rechnungen, zu einer großen Sicherheit zu gelangen. In den Mondtafeln muß daher auf folgende Umstände hauptsächlich Rücksicht genommen werden.

1. Die große Axe der Mondbahn bewegt sich täglich 6′ 41″ von Westen nach Osten.

2. Die Excentricität, folglich auch die Mittelpunctsgleichung, ist einer periodischen Veränderung unterworfen, die auf 1° 20′ 34″ gehen kann, und Evection heißt.

3. Die Variation oder Veränderung der Geschwindigkeit des Mondes ist am größten, wenn derselbe etwa 45° von den Syzygien (Voll- oder Neumond) und den Quadraturen (erstem und letztem Viertel) absteht, und beträgt höchstens 37′ 4″.

4. Die jährliche Gleichung richtet sich nach dem verschiedenen Abstande der Erde und Sonne, und beträgt bei 90° und 270° Anomalie 11′ 16″.

5. Die Knoten der Mondbahn verändern ihren Ort in 24 Stunden um 3′ 10″, 6 von Osten nach Westen, folglich ist die Gestalt und Lage der Mondbahn gegen die Erdbahn einem veränderlichen Winkel unterworfen, welcher von 5° auf 5° 17′ gehen kann.

Außerdem giebt es noch mancherlei kleine Verbesserungen, deren Grund in der gegenseitigen Anziehung zu suchen ist, welche in genauen Mondtafeln von Bürg und Triesnecker vorkommen.

§. 855. Der scheinbare Durchmesser des Mondes verhält sich stets zur horizontalen Parallaxe P, wie 6 : 11, oder wie 32′ 45″ zu 60′, oder 131 : 240. In einer

Formel: D : P = 131 : 240.

Den scheinbaren Durchmesser für jede Höhe findet man, wenn man den horizontalen Durchmesser mit 1 + Sin. P (horizontalen Parallaxe) und dem Sin. der scheinbaren Höhe multiplicirt. In einer

Formel: D . (1 + Sin. P) . Sin. H = d = dem scheinbaren Durchmesser in jeder Höhe H, welcher vom Horizont bis zum Scheitel zuweilen 37″ zunehmen kann.

§. 856. Weil uns der Mond beständig eine und dieselbe Seite zuwendet (bis auf eine geringe Schwankung), so dreht er sich während eines synodischen Umlaufs auch um seine Axe. Ein Mondentag ist also auch ein Mondenjahr, und die dortigen Tageszeiten fallen mit den Jahreszeiten zusammen.

§. 857. Zufolge der Schwankung (Libration) sehen wir während eines Monats seine Kugel sich etwas rechts und links neigen, so daß seine Flecke 13 bis 14 Tage lang etwas nach der Ost- und eben so lange wieder nach der Westseite rücken, wodurch wir monatlich etwas mehr, als die Hälfte des Mondes zu sehen bekommen. Diese Erscheinung kommt daher, daß der Mond in seiner elliptischen Bahn dem zweiten Brennpuncte stets vollkommen einerlei Seite zeigt, und die Erde den ersten einnimmt. Eine Folge der Schwankung ist, daß der erste Mondmeridian, von dem an alle Mondflecke gezählt werden, nur im Perigeo und Apogeo (Mondnähe und Mondferne) mit unsrer Gesichtslinie zusammenfällt, und als eine gerade Linie erscheint. Von 0 bis 90° Anomalie liegt er als eine halbe Ellipse westwärts, und von 180° bis 360° Anomalie, ostwärts vom Mittelpunct des Mondes. Der Breitenkreis durch des Mondes Mittelpunct, und der erste Mondmeridian liegen allemal um den Unterschied zwischen dem wahren und mittlern Ort des Mondes, im Bogen der Mondoberfläche auf deren Äquator gerechnet, aus einander. Die Schwankung kann dort 8° betragen, und hat eine Veränderung der Mondflecke in der Breite zur Folge, die bis auf 6° 46′ gehen kann.

§. 858. Wie viel wir jederzeit in den verschiedenen Lichtgestalten des Mondes von ihm erleuchtet sehen, ergiebt sich durch die

Formel: Cos. b . Cos. l = Cos. E = Erleuchtungsgrenzbogen vom Mittelpunct des Mondes. Hiebei ist b = Breite, und l = Längen-

genabstand des Mondes von der Sonne. Der Cos. E ist zugleich der wahre Entfernungsbogen des Mondes und der Sonne.

§. 859. Die Mondbahn läßt sich in einer Ellipse darstellen, in welcher die halbe große Axe = 100000; halbe kleine = 99848; die Excentricität = 5505 ist. Alsdann ist der Mond in der Erdnähe = 48125 Meilen (seine Parallaxe = 61′ 24″) und in der Erdferne = 67645 Meilen (Parallaxe = 55′) von der Erde entfernt.

§. 860. Der Halbmesser des Mondes hat 232, und sein Durchmesser 464 Meilen: um so merkwürdiger sind die Berge desselben, von denen einige über eine deutsche Meile hoch sind. Die Berechnung der Berghöhen des Mondes beruht darauf, daß man die Länge des Schattens mittelst äußerst genauer Mikrometer in Theilen des Monddurchmessers mißt, darauf die Sonnenhöhe für den Ort des Berges berechnet, und in dem Dreieck, welches die Länge des Schattens und die Höhe des Berges, als beide Catheten, bilden helfen, die Höhe trigonometrisch sucht. Man kann auch die dortigen Berge dadurch messen, daß man die Zeit beobachtet, wann ihre Gipfel von der aufgehenden Sonne zuerst beschienen werden.

§. 861. Schon dem unbewaffneten Auge erscheinen auf der Mondoberfläche dunkle und hellere Flecke, denen die Astronomen größtentheils Namen (nach berühmten Mathematikern) gegeben haben. Weil man die dunklen Gegenden für Meere hielt, so gab man ihnen auch Meeresnamen. Mittelst ganz gemeiner Fernröhre erkennt man folgende merkwürdige Flecke:

A. Auf der westlichen Hälfte zur Zeit des Vollmondes:

1. mare crisium, ist ein auf der nördlichen Halbkugel nahe an der Westseite abgesonderter schwarzgrauer Fleck.

2. mare tranquillitatis, links neben dem vorigen, ein sehr großer schwarzgrauer Fleck, nahe am Äquator nördlich.

3. mare fecunditatis, südlich rechts vom vorigen, mit ihm zusammenhängend.

4. mare

4. mare nectaris, südlich unter den vorigen.

5. mare serenitatis, links nördlich über dem mare tranquillitatis.

6. mare vaporum, nahe am Äquator und 1sten Meridian, etwa vom 10° bis 20° nördl. Breite.

7. Das mare frigoris, nahe am Nordpol des Mondes, erstreckt sich auch auf die

B. östliche Halbkugel des Mondes, wo

8. mare imbrium, ein sehr großer dunkler Fleck, welcher mit hellleuchtenden Gebirgsadern eingeschlossen ist, worin die hellsten Puncte Copernicus und Aristarch sind; von 20 bis 49° nördlicher Breite.

9. mare nubium, und

10. mare humorum liegen auf der südlichen Halbkugel links vom 1sten Meridian.

§. 862. Die Gebirge reflectiren das Licht sehr stark, und erscheinen daher als weiße Streifen, und die einzelnen Bergspitzen als helle Lichtpuncte. Besonders ist die südliche Halbkugel sehr bergig. Der kenntlichste Fleck, von welchem viele Gebirgsketten auszugehen scheinen, ist das Wallgebirge Tycho (44° südlicher Breite und 10° östlicher Länge). Es ist ein Ringgebirge mit einer 10 Meilen weiten und 9700 Fuß tiefen Versenkung, in deren Mitte sich ein Centralberg 3400 Fuß hoch erhebt. Die Höhe dieses merkwürdigen Wallgebirges beträgt an 10100 Fuß. Es giebt außer diesem noch eine Menge Ringgebirge, die ein ziemlich zerfallenes Ansehen haben, und Ebenen von einigen 20 Meilen im Diameter einschließen. Der helle Fleck Copernicus (10° nördliche Breite und 20° östliche Länge) ist der Anfang mehrerer Gebirgsketten, die sich in die Gegend des mare imbrium erstrecken, und schließt einen Crater von 15000 Fuß Tiefe und 7 Meilen Breite ein. Fast alle Berge des Mondes schließen ungeheure Crater in sich, und scheinen Producte der dortigen unterirdischen Kräfte zu seyn.

Schröter fand eine gewaltige Kluft, die an 20000 Fuß tief, 6 Meilen breit und 25 Meilen lang ist, und ihm am Mondrande wie ein Ausschnitt erschien.

Manche

Manche Berge sind schroff und zackig und gleichen einem Zuckerhute, wie z. B. der Spitzberg am Rande des mare frigoris, welcher 9000 Fuß hoch ist, und wie alle Mondberge, die nicht Crater sind, aus solchen Schichten und Zacken zusammengesetzt ist, wie wir in den Alpen sehen. Die Berge Dörfel und Leibnitz haben eine Höhe von 25000 Fuß und erscheinen am Mondrande als kleine Hervorragungen. Plinius Crater unter dem mare serenitatis, 6800 Fuß tief, wird durch ein Ringgebirge von 13000 Fuß Höhe eingeschlossen. Er scheint mit Calippus Crater nördlich an dieser schönen Gegend durch 500 Fuß hohe Bergadern verbunden zu seyn, welche das Ansehen haben, als wären sie communicirende Canäle, und von den dort wirksamen Naturkräften entstanden.

§. 863. Große Meere giebt es im Monde nicht; denn die mit dem Namen mare belegten dunkeln großen Flecke sind ebene schöne Landschaften. Man bezweifelt sogar das Daseyn des Wassers; allein neuere Beobachtungen des Hrn. Gruithusen beweisen, daß es auf diesem Weltkörper Flußbetten giebt, die ihren Ursprung an bergigen Gegenden haben, wie unsere Ströme, allerlei Krümmungen, um Berge und Anhöhen zu umgehen, machen, Seitenflüsse aufnehmen, und sich in den Wallebenen endigen, welche wahrscheinlich Wasserbehälter sind, und mit unsern Landseen viel Ähnlichkeit haben. Die Wallebene Archimedes ist an 10 Meilen im Durchmesser, und so eben, wie die Oberfläche unsrer Landseen.

§. 864. Es gehen noch fortdaurend Veränderungen auf der Mondoberfläche vor, woraus man theils auf Bewohnung derselben, theils auf Revolutionen schließen kann. Dahin gehören die Veränderungen der Gestalt und Farbe mancher Plätzchen und Merkmale, und das Entstehen und Vergehen mehrerer kleinen Crater, die man sorgfältig beobachtete.

Merkwürdig ist der Umstand, daß die Masse der Ringgebirge ziemlich dem kubischen Inhalt ihrer Crater gleich kommt, und also zu der Vermuthung berechtigt, jene Crater seyen durch Corruptionen, wie unsere Vulkane, entstanden. Schröter sah in der Nachtseite des Mondes einen Crater Feuer speien und mehrere Vulkane entstehen und sich verändern.

§. 865.

§. 865. Lange zweifelte man an dem Daseyn einer Mondatmosphäre, bis man endlich unter sehr günstigen Umständen Beobachtungen anstellte, woraus sich eine Dämmerung und Dunstwolken nachweisen lassen. Indessen muß die Mondatmosphäre von der unsrigen sehr verschieden seyn; denn so lange es dort Tag ist, erblickt man keine Spur von Wolken oder Dünsten (wenige Fälle in den Gegenden des mare crisium und mare imbrium ausgenommen), und da überdies die Höhe der Atmosphäre nur $\frac{1}{3}$ Meile oder 8000 Fuß, die der meisten Mondberge aber zwischen 9 bis 25000 Fuß beträgt, so mag wohl nie eine Dunstwolke ihre Scheitel berührt haben, und daher die blendend weiße Farbe derselben entstanden seyn.

§. 866. Aus der äußerst geringen Mondatmosphäre läßt sich's erklären, warum das Daseyn der dortigen Flüsse und Wasserbehälter so lange bezweifelt werden konnte. Weil die Sonne einem jeden Orte des Mondes $14\frac{3}{4}$ Tage lang scheint, und wegen der geringen Schiefe der Ekliptik die Tage alle von ziemlich gleicher Länge sind, so ist sehr wahrscheinlich die Hitze des dortigen Mittags sehr groß, und die Verdampfung und Austrocknung der Gewässer (besonders bei so geringem Druck der Atmosphäre) eine nothwendige Folge der langsamen Axendrehung. Das in Luft verwandelte Wasser wird auf der Nachtseite des Mondes seine Tropfgestalt wieder annehmen, und auf eine uns unbekannte Weise die Vegetation befördern. Alle Beobachtungen, welche das Daseyn des Wassers beweisen, wurden bei dortigem Auf- oder Untergang der Sonne angestellt.

§. 867. Ob der Mond eine völlige Kugel oder ein Sphäroid sey, ist nicht leicht zu bestimmen. Daraus aber, daß er im Ganzen der Erde, als seinem Centralpuncte, immer einerlei Seite zuwendet, schließt man auf eine längliche Gestalt desselben. Wäre dies, so muß die Spitze der großen Axe gegen den andern Brennpunct seiner elliptischen Bahn stehen. Könnten wir ihn einmal rotiren sehen, so würde sich dieser Umstand leicht berichtigen lassen.

§. 868. Die Bewohner des Mondes sehen die Sterne eben so, als wir, auf- und untergehen. Aber ein

Stern

Stern vollendet seinen scheinbaren Umlauf um den Mond erst in 27 Tagen und die Sonne den ihrigen in 29 Tagen, folglich muß das scheinbare Fortrücken der Himmelskörper dort sehr langsam vor sich gehen.

Aber einen seltsamen Anblick gewährt den Mondbewohnern die Erde. Sie steht ewig der Mitte der uns zugewendeten Mondoberfläche im Scheitel, den Mondsrändern im Horizont, und schwankt monatlich nur ein wenig auf und nieder. Ihr Licht ist 14 mal stärker, als das Mondenlicht, und wechselt wie dieses; ist der Mond im Vollicht, so steht die Erde bei der Sonne und ist im Neulicht; zur Zeit des Neumonds leuchtet dort die Erde mit vollem Lichte. (Nicht jeder Theil der Erdoberfläche leuchtet dem Monde gleich stark. Wir sehen z. B. den dunkeln Theil des Mondes 3 Tage nach dem Neumond nicht so stark von der Erde beleuchtet, als 3 Tage vor dem Neumond; im erstern Fall wird er vom atlantischen Meere, und im letztern von Asien beschienen.) — Hinter der scheinbar vestistehenden Erde rücken andere Himmelskörper langsam vorbei; die Bewohner der von der Erde abgewendeten Seite des Mondes sehen die Erde niemals über ihrem Horizont. Wegen der feinern, leichtern und reinern Mondatmosphäre haben die dortigen Wesen einen überaus heitern Himmel und klaren Anblick der Sterne; dem Aufgang der Sonne geht nur eine sehr geringe Dämmerung vorher, worauf sie plötzlich erscheint, und viel dunklere Schatten, als bei uns, hinter den Bergen macht.

Die Mondkugel ist 50 mal kleiner, als die Erde; ihre Dichtigkeit ist nur $\frac{3}{4}$ von der der letztern; die dortige Fallkraft der Körper in einer Sekunde beträgt $3\frac{1}{10}$ Fuß.

§. 869. Mars steht an 37000 Erdhalbmessern oder $31\frac{1}{3}$ Millionen Meilen von der Sonne ab, läuft um sie in 1 Jahr 322 Tagen, und ist $\frac{1}{6}$ mal so groß, als die Erde. Die Sonne erscheint ihm im Durchmesser $1\frac{1}{2}$ mal, und im Flächenraum $2\frac{1}{4}$ mal kleiner, als uns. Er dreht sich um seine Axe in 24 Stunden 40 Minuten, und ist an seinen Polen um $\frac{1}{16}$ abgeplattet. Sein scheinbarer Durchmesser beträgt, wenn er, der Erde am nächsten, Nachts 12 Uhr culminirt, 26 Sek.; aber wenn er jenseit der Sonne steht, nur 4 Sek. Im erstern Fall ist er etwa 12700, und im letz-

letztern 61200 Erdhalbmesser entfernt. (Wegen seiner großen Excentricität kann er der Erde bis auf 9265 nahe kommen, und sich auf 64665 Erdhalbmesser entfernen.) Er erscheint bei 90° Abstand von der Sonne sichelförmig erleuchtet.

Bei der dortigen großen Schiefe der Ekliptik von 28° 42′ ist die Abwechselung der Jahreszeiten und Tageslängen viel größer, als bei uns. Örter, die von seinem Äquator 60° entfernt liegen, sehen im Winter die Sonne gar nicht. Daher sind auch seine Pole beträchtlich weit mit Schnee bedeckt, welcher auf der Halbkugel, die gerade Sommer hat, fast ganz wegthaut, wie vielfache Beobachtungen einstimmig bestätigen. Seine Atmosphäre gleicht fast der unsrigen; denn es zeigen sich Wolken, die mit verschiedener Geschwindigkeit (etwa 20 Fuß in 1″) über seine Oberfläche hinstreichen; oft bedeckt ein Wolkengürtel den Mars in der Nähe des Äquators. Diese Wolken erscheinen meistentheils rosenroth oder blutroth, zuweilen auch grau; die Oberfläche des Mars aber ist glänzend weiß. Er glänzt am Himmel mit ruhigem feuerfarbenem Licht gewöhnlich als ein Stern erster Größe.

§. 870. Ceres, ein kleiner, dem unbewaffneten Auge unsichtbarer Planet, wurde 1801 von Piazzi zu Palermo zufällig entdeckt; steht im Mittel 67100 Erdradien, oder $57\frac{3}{4}$ Millionen Meilen von der Sonne, läuft um sie in 4 Jahren 220 Tagen, sieht sie im Durchmesser $2\frac{4}{5}$ mal, und im Flächenraum 8 mal kleiner, als wir, und hat nur etwa 35 bis 40 Meilen im Durchmesser, aber eine über 100 Meilen hohe Atmosphäre, welche diesem Planeten ein cometartiges Ansehen giebt.

§. 871. Pallas, ein eben so kleiner Planet, wurde von Olbers im Jahr 1802 entdeckt. Sein Abstand von der Sonne ist fast dem der Ceres gleich, aber seine Bahn sehr stark gegen die Ekliptik geneigt. D. Gauß hatte kaum die in den ersten 20 Tagen gemachten Beobachtungen vernommen, als er diesem Weltkörper, wie auch der Ceres, seine Bahn mit einer überraschenden Genauigkeit anwies. Die Bahnen der Ceres und Pallas durchschneiden sich fast; folglich müssen sich diese Planeten zuweilen erstaunlich nahe kommen, eine Erscheinung, welche die

Astro-

Astronomen auf den Gedanken brachte, daß beide kleine Weltkörper die Trümmer eines größeren wären, und vielleicht noch andere Stücke vorhanden seyn könnten. Durch die Entdeckung der Juno und Vesta wurde diese Vermuthung bestätigt. Auch Pallas hat eine Atmosphäre von 100 und mehr Meilen Höhe.

§. 872. Juno, von Harding 1804 entdeckt, steht der Sonne etwas näher, als Pallas und Ceres, im Mittel 64600 Erdhalbmesser, läuft in 4 Jahren 131 Tagen in einer sehr excentrischen Bahn um die Sonne. Ihr Durchmesser wird wahrscheinlich nur 25 bis 30 Meilen betragen; ihre Atmosphäre ist zwar kleiner, als die der vorigen, allein es gehen schnelle Wechsel, Aufheiterungen und Verdichtungen auch in ihr vor, wodurch das Aufsuchen von dergleichen Körperchen selbst mit guten Fernröhren sehr erschwert wird.

§. 873. Vesta, von Olbers 1807 entdeckt, ist der Sonne noch näher, als Juno, und läuft um sie in 3 Jahren 7 Monaten. Sie gleicht der Juno an Größe und atmosphärischen Erscheinungen.

Lange vor der Entdeckung dieser 4 kleinen Planeten hatten die Astronomen eine Lücke zwischen Mars und Jupiter bemerkt, und Bode zeigte vor 30 Jahren schon, daß hier ein Planet fehle, dessen Umlaufszeit er zu $4\frac{1}{2}$ Jahr bestimmte. Um so merkwürdiger bleibt es, daß gerade da diese 4 kleinen Körperchen gefunden wurden, wo man nur einen Hauptplaneten vermuthete. Weil aber durch dieselben wegen ihres geringen körperlichen Inhalts die Lücke eigentlich doch nicht ausgefüllt wird, so ist glaublich, daß in einem Abstande von 60 bis 70 Millionen Meilen noch mehrere von dieser Beschaffenheit befindlich sind. — Über die Axendrehung und Neigung gegen ihre Bahnen läßt sich wegen ihrer großen Entfernung und hohen Atmosphäre wohl nicht leicht etwas Gewisses bestimmen. Sie scheinen erst jüngst dem chaotischen Zustande entrissen, und noch im Werden begriffen zu seyn.

§. 874. Jupiter, der größte Planet, ist 1474 mal größer, als die Erde, steht 126200 Erdhalbmesser oder 108 Millionen Meilen von der Sonne ab, legt in 11 Jahren 314 Tagen seine Reise um dieselbe zurück, sieht

sie im Durchmesser $5\frac{1}{2}$ mal, und im Flächenraum 27 mal kleiner, als wir. Er schwingt sich in 9 St. 55′ 40″ um seine Axe, welche um $\frac{1}{14}$ kürzer ist, als sein Äquatorialdurchmesser. Ein Punct auf seiner Oberfläche unter dem Äquator schwingt sich $\frac{11{,}4 \cdot 24 \text{ St.}}{9 \text{ St. } 55'} = 27{,}6$ mal schneller fort, als ein Punct des Erdäquators, denn sein Durchmesser ist = 11,4 Erddiameter. Sein Äquator ist nur wenige Grad gegen seine Bahn geneigt, folglich wird die Abwechselung der Tages- und Jahreszeiten sehr gering seyn. Der scheinbare Durchmesser beträgt 30″, wenn er Mittags 12 Uhr culminirt, und 49″, wenn er Nachts 12 Uhr durch den Meridian geht.

Man unterscheidet auf seiner Oberfläche nahe am Äquator 3 oder 4 beständige Streifen, in welchen jedoch atmosphärische Erscheinungen und Veränderungen vorgehen. Zuweilen sieht man andere Gegenden mit grauen dünnen Nebelstreifen und Fleckchen bedeckt, oft die Oberfläche gekräuselt, welches man für Wolken hält. Schon aus den veränderten Gestalten, die seine Monde annehmen, so bald sie sich hinter demselben verbergen, folgt, daß Jupiter eine Atmosphäre habe. Merkwürdig sind aber jene Streifen am Äquator, welche eine gewisse Regelmäßigkeit oder vielmehr Einförmigkeit in die dortige Witterung bringen, die mit seiner geringen Schiefe gut harmonirt. Sie scheinen eine Folge der schnellen Axendrehung des Jupiter zu seyn, und Ähnlichkeit mit dem auf der Erde in der heißen Zone regelmäßigen Ostwinde zu haben. Man beobachtet aber auch dunkle Flecke, die sich mit einer unbegreiflichen Schnelligkeit (7 bis 10000 Fuß in 1 Sek.) über den Jupiter meist von West nach Ost bewegen. Sind dies Wolken, woran fast nicht zu zweifeln ist, so übersteigt die Heftigkeit des zuweilen dort herrschenden Sturmwindes alle unsre Vorstellungen.

§. 875. Jupiter wird von 4 Monden begleitet, welche ihm mit abwechselndem Lichte leuchten, wie uns unser Mond. Den Jupitersbewohnern erscheint der erste Mond ziemlich eben so groß, als uns der unsrige; der zweite und dritte etwa halb, und der vierte nur $\frac{1}{4}$ so groß im Durchmesser. Diese Monde bewegen sich wegen der er-

staun-

staunlichen Anziehungskraft des Jupiter überaus schnell um denselben, wie folgende Übersicht beweist:

1. Mond in	1	T.	18	St.	28′	36″,	Abst.	57307	Meil	u. 560 M. Durchm.
2. —	—	3	13		17	54	—	92840	—	— 460 — —
3. —	—	7	3		59	36	—	147114	—	— 820 — —
4. —	—16		18		5	7	—	262721	—	— 570 — —

Außerordentlich seltsam würde uns der Himmel erscheinen, wenn wir auf diesen Monden verweilen könnten. Die Bewohner des ersten Trabanten sehen den Jupiter am Himmel als einen mit mildem Lichte glänzenden Körper, dessen Durchmesser 19° hält, also ganze Sternbilder bedeckt. Welch ein Anblick! Auch diese Monde wenden dem Jupiter als Centralpunct stets eine und dieselbe Seite zu, und weil man diese Erscheinung bei allen Nebenplaneten bestätigt findet, so scheint eine starke Centripetalkraft der Axendrehung entgegen zu wirken. — Auf den Oberflächen der Jupitertrabanten erblickt man dunkle Stellen, und auf den ihrem Kraftpuncte abgewandten Seiten atmosphärische Erscheinungen.

§. 876. Die Bahnen dieser Monde liegen ziemlich in der Ebene der seinigen; daher erleiden sie (wenigstens die 3 ersten) bei jedem Umlauf Verfinsterungen, indem sie durch den Schatten des Jupiter gehen müssen. Aus dem Ein- oder Austritt eines Trabanten in oder aus dem Schatten, welche Erscheinung auf der halben Erde in gleichen Augenblicken gesehen werden kann, läßt sich die geographische Länge eines Ortes berechnen. (Der Schatten des Jupiter ist 12 Millionen Meilen lang.)

Jupiter erscheint in jeder Stellung als ein Stern erster Größe mit weißgelblichem Lichte, am schönsten, wenn er um Mitternacht culminirt. Durch gemeine gute Fernröhre sind seine 4 Monde zu sehen, die rechts und links in einer Linie sich zeigen. Er nimmt mit seinem Gefolge am Himmel einen halben Grad ein.

Anmerk. In Bode's astronom. Jahrbuche findet man für jeden Tag die Stellung der Jupitertrabanten abgebildet, und ihre Verfinsterungen angezeigt.

§. 877. Saturn steht an Größe dem Jupiter wenig nach, denn er ist 1030 mal größer, als die Erde; ist 231400 Erdhalbmesser oder 199 Millionen Meilen von

der Sonne entfernt, sieht sie im Durchmesser $9\frac{1}{2}$ mal, und im Flächenraum 91 mal kleiner, als wir, und läuft in 29 Jahren 166 Tagen um dieselbe. Wegen seiner schnellen Axendrehung, die nur 9 St. 16 Min. dauert, ist er an den Polen um $\frac{1}{11}$ seines Durchmessers abgeplattet. Ist er um Mitternacht im Meridian, so erscheint sein Durchmesser $21\frac{1}{2}$ Sek,; ist er bei der Sonne, aber nur $15\frac{1}{2}$ Sek. Die dortige Schiefe der Ekliptik beträgt 31° 20′, wodurch die Jahreszeiten (welche $7\frac{1}{2}$ unsrer Jahre dauern) sehr verschieden seyn müssen.

Auf seiner Oberfläche sieht man 4 bis 5 dunkle dem Äquator parallele Streifen, wie beim Jupiter, in denen ebenfalls atmosphärische Veränderungen vorgehen; die Schneefarbe seiner Polargegenden nimmt im Sommer ab, und im Winter zu, welches bei allen Planeten, deren Axenneigung beträchtlich ist, bemerkt wird. Übrigens muß sowol die Oberfläche, als die Atmosphäre des Saturn sehr geschickt seyn, das Sonnenlicht zurückzuwerfen, weil er bei so schwacher Erleuchtung dennoch so hell erscheint.

§. 878. Den Saturn umschweben zwei äußerst dünne, aber sehr breite Ringe, deren scharfe Kante in der Ebene seines Äquators liegt. Beide Ringe sind durch einen schmalen Zwischenraum von einander getrennt, und erscheinen durch gewöhnliche Fernröhre und Telescope nur als ein Ring, welchen wir als eine Ellipse sehen, weil er gegen uns eine schiefe Lage hat. Alle 15 Jahre ist sie eine Linie, und alle $7\frac{1}{2}$ Jahre am meisten geöffnet. Der Ring ist eine veste Masse, die das Licht, besonders auf der breiten Fläche, stark reflectirt; nach einigen Astronomen dreht sich der Ring innerhalb 10 St. 32′ 15″ um den Saturn. Der innere Rand des Ringes steht vom Saturn 5800 Meilen ab, seine Breite beträgt 3940, seine Dicke 80 bis 100 Meilen; der Durchmesser muß 40500 Meilen, und sein Umfang 127000 Meilen betragen. Weil er eigentlich aus 2 Ringen besteht, so kann man zuweilen durchsehen, und daraus den Abstand beider bestimmen. Herschel fand denselben = 570 Meilen, und die Breite des äußeren Ringes 1380 Meilen.

Man

Man leitet die Entstehung dieses Doppelringes von der erstaunlich schnellen Axendrehung des Saturns her, wodurch bei seiner Bildung die Theile unter dem Äquator in Folge der Fliehkraft sich vom Planeten absondern mußten.

§. 879. Den Saturnsbewohnern unter dem Äquator erscheint der Ring als ein durch das Zenit gehender breiter dunkler Streif, hinter welchem sich die Sonne in dem dortigen Frühjahr und Herbst Monate lang verbirgt. Zu andern Zeiten fällt der ungeheure Schatten des Ringes auf diejenige Halbkugel des Saturn, welche Winter hat, und verursacht daselbst Jahre lang Sonnenfinsternisse. Die andere Halbkugel sieht den Ring als einen breiten hellleuchtenden Streifen über dem Äquator schweben; und die Polargegenden sehen ihn gar nicht. Folglich ist, nach irdischer Weise zu urtheilen, den Saturnsbewohnern von diesem Ringe wenig oder gar keine Begünstigung zu versprechen; vielmehr vermehrt sein gewaltiger Schatten die Unfreundlichkeit des langen Winters, der über $7\frac{1}{2}$ Jahre dauert.

Ob der Ring bewohnt sey, ist eine schwer zu lösende Frage. Von der Weisheit des Schöpfers läßt sich erwarten, daß auch er ein Wohnplatz lebender Wesen seyn werde. Ohne die schnelle Axendrehung des Ringes, wodurch die Schwere gegen den Saturn sehr vermindert wird, wäre wenigstens die Seitenfläche desselben gar nicht bewohnbar; denn unbevestigte Gegenstände würden in krummen Linien zu dem, ihnen zur Seite stehenden, Saturn hinfallen. Übrigens müßten sie gewohnt seyn, die Sonne 15 Jahre lang zu entbehren, und dann eben so lange fast ununterbrochen zu sehen. Die einzige Lichtabwechselung an einem so langen Tage ist die Sonnenfinsterniß, welche der Saturnsschatten auf dem Ringe täglich macht, und die nur einige Stunden dauert.

Wenn die Saturnsbewohner mit uns in Hinsicht der Geistes- und Körperkräfte gleiche Stufe einnehmen, so wissen sie von dem Daseyn des Merkur, der Venus und Erde nichts, weil selbst die letztere sich, von dort aus betrachtet, nie über 6° von der Sonne entfernt, also ewig in der Dämmerung verborgen bleibt.

§. 880. Außer diesem großen Ringe bewegen sich um den Saturn noch 7 Monde von sehr ungleicher und schwer zu bestimmender Größe. Der 5te hat 260, und der 6te 680 Meilen im Durchmesser; die innern sind viel kleiner; alle 7 bewegen sich in der erweiterten Ebene des Ringes. Mit ihnen nimmt Saturn am scheinbaren Himmelsgewölbe einen Raum von 18′ 56″ ein.

	Umlaufszeit.				Abstand der Monde vom Saturn.	
I. Mond	0 T.	22 St.	37′	23″	24133	Meilen.
II. —	1	8	53	9	30817	—
III. —	1	21	18	55	41451	—
IV. —	2	17	45	51	54430	—
V. —	4	12	27	55	75959	—
VI. —	15	23	15	23	176137	—
VII. —	79	22	3	13	513481	—

Die Nähe dieser Monde und ihr schneller Umlauf ist erstaunlich; aber der Anblick des Saturn und seines Ringes von einem seiner Monde übersteigt die kühnste Phantasie. So erscheint z. B. den Bewohnern des ersten Mondes der Saturn als eine hellleuchtende Kugel von 41° scheinbarem Durchmesser, oder 80 mal breiter, als uns die Sonne; und der Ring als ein breiter Streifen von 112° Länge. Die große Mannigfaltigkeit in der wechselseitigen Erleuchtung des Saturnsystems würde einem geübten Astronomen, der sich auf einem dieser Monde befände, viel zu schaffen machen. — Auch diese 7 Monde wenden ihrem Hauptplaneten beständig einerlei Seite zu, zeigen dunkle Stellen auf ihrer Oberfläche, und sogar atmosphärische Erscheinungen.

§. 881. Uranus, der letzte bekannte Planet, wurde 1781 von Herschel durch ein 7 füßiges Teleskop entdeckt. Er vollendet in der erstaunlichen Entfernung von 465000 Erdhalbmessern oder fast 400 Millionen Meilen in 84 Jahren 9 Tagen seine Laufbahn um die Sonne, welche ihm nur 1′ 40″, oder 19 mal kleiner im Durchmesser, und im Flächenraum 368 mal kleiner, als uns, erscheint. Sein scheinbarer Durchmesser in der Erdnähe = 4″, 3; in der Erdferne 3″, 6; das unbewaffnete Auge sieht ihn als einen kleinen Stern 6ter Größe.

Die

Die Axendrehung ist bis jetzt noch unbekannt, aber aus der Abplattung desselben folgt, daß seine Axe mit seiner Bahn fast zusammenfällt, folglich die dortige Schiefe der Ekliptik so groß ist, daß die Sonne sowohl den Polargegenden als dem Äquator im Zenit erscheinen kann. Wie verschieden muß dort die Abwechselung der Tages- und Jahrszeiten seyn! So bald sich die Sonne vom Aequator entfernt, versinkt der eine Pol in eine 40 Jahre dauernde Nacht, die sich in 20 Jahren bis zum Äquator verbreitet, und also die ganze Halbkugel bedeckt. Wären die dortigen Bewohner von unsrer Körperbeschaffenheit, so würden sie bei Annäherung der langen Nacht den Wanderstab ergreifen, und auf diejenige Halbkugel ziehen müssen, welche Tag hat.

§. 882. Uranus ist fast 85 mal größer, als die Erde, und hat, so viel bis jetzt bekannt, 6 Monde, deren Beobachtung zu den feinsten gehört, die jemals gemacht sind; nur Herschel's 40füßiges Teleskop zeigt sie alle. Sie bewegen sich in einer fast senkrechten Richtung gegen seine Bahn um ihn, in der Ebene des Äquators.

	Umlaufszeit.			Abstand vom Uranus.
I.	Mond 5 Tage	21 St.	25′	49000 Meilen.
II.	— 8	17	1	64000 —
III.	— 10	23	4	74000 —
IV.	— 13	11	5	85000 —
V.	— 38	1	49	169000 —
VI.	— 107	16	40	338000 —

§. 883. Schwerlich wissen die Uranusbewohner etwas von den Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Vesta, Ceres, Pallas und Juno. Nur Jupiter und Saturn sind ihnen zuweilen des Morgens und Abends sichtbar, und entfernen sich nie weit von der Sonne. Aber zur Beobachtung der Fixsternparallaxe ist ihr Wohnplatz sehr geschickt, denn sie verändern ihren Standpunct in 42 Jahren um die Größe einer Standlinie von 800 Millionen Meilen, welche unsre Standlinie (von 42 Mill. Meilen) fast 20 mal übertrifft. Folglich muß ein Fixstern, dessen Parallaxe bei uns 1″ austrägt, dort seinen scheinbaren Ort um 20″ verändern. Übrigens ist diese scheinbare Veränderung in der Stellung der Fixsterne so äußerst unbedeutend, daß

sie

sie nur dem stark bewaffneten Auge bemerklich wird, und der Fixsternhimmel dort eben so, wie hier uns, erscheint.

§. 884. Wir haben unsre Erde im Verhältniß mit den andern Planeten zwar nicht als einen der bedeutendsten, doch aber auch nicht als den kleinsten Weltkörper kennen gelernt, und gefunden, daß sie in unsrer Sonnenwelt eine gute Mittelstufe einnimmt. Ueberraschend ist bei aller Verschiedenheit, welche der ungleiche Abstand von der Sonne in der Erleuchtung und Erwärmung hervorbringt, dennoch die Aehnlichkeit, welche alle Planeten mit der Erde haben. Auf ihrer Oberfläche wechseln Tag und Nacht, Sommer und Winter, Regen und Sonnenschein, Gebirge und schöne Ebenen. Man kann daher mit eben den Gründen, welche uns das Daseyn eines Weltenschöpfers beweisen, auf die Bewohnbarkeit aller Planeten schließen. Es würde bei dem gegenwärtigen Zustande unsrer Kenntnisse sündlichen Irrwahn verrathen, zu glauben, daß nur der 3te Hauptplanet (die Erde) ein Wohnplatz vernünftiger Wesen sey. Zwar denkt der Kurzsichtige an glühende Hitze auf dem Merkur, an erstarrende Kälte auf dem Saturn und Uranus: allein diese Räthsel lösen sich, wenn man erwägt, daß die Sonnenstrahlen an sich nicht heiß sind, sondern nur die Kraft haben, den vorhandenen Wärmestoff aus den Körpern zu entwickeln. Der Merkur braucht nur in eben dem Grade weniger eigenthümliche Wärme zu besitzen, als er von der Sonne stärker, wie die Erde erleuchtet wird, um eine eben so milde Temperatur zu haben, wie diese. Die Erleuchtung eines Planeten durch die Sonne nimmt bekanntlich mit dem Quadrat der Entfernung ab, folglich läßt sich der Erleuchtungsgrad für jeden berechnen. Empfängt demnach auch Uranus $20^2 : 400^2 = 400$ mal weniger Licht, als die Erde, so wird darum dort nicht Finsterniß und erstarrende Kälte herrschen. Denn es ist wahrscheinlich, daß seine Masse mit mehr eigenthümlichem Licht- und Wärmestoff versehen ist, als die Erde, folglich eben so gut, wie diese, zur Erhaltung lebender Wesen geschickt sey. Uebrigens ist auch nicht zu bezweifeln, daß es der Allmacht des Schöpfers werde gefallen haben, selbst in der Organisation sämmtlicher Planetenbewohner Mannigfaltigkeit herrschen zu lassen.

§. 885.

§. 885. Zu unserm Sonnensystem gehört noch eine beträchtliche Anzahl anderer Himmelskörper, die man Kometen nennt. Sie erscheinen gemeiniglich mit langen Lichtschweifen, nicht in der Ebene der andern Planeten, sondern unter allerlei Richtungen an jedem Punct des Himmels, und sind, wie die Planeten, beständige Weltkörper, die sich nur durch sehr längliche Bahnen, lange dauernde Umlaufszeiten, und, wie es scheint, durch eigenes Licht von den Planeten unterscheiden. Die Sonne liegt in dem einen Brennpuncte ihrer sehr elliptischen Bahn. Wenn sie sich in der Nähe derselben befinden, schwillt ihre leuchtende Dunstmasse zuweilen so stark an, daß ihr Raum viele Millionen Kubikmeilen beträgt. In diesen sogenannten Schweifen, deren scheinbare Länge bei einigen wohl an 80 Grad hält, gehen schnelle und auffallende Veränderungen vor. Gemeiniglich erblickt man einen kleinen festen Kern, an welchem sich der Schweif, der stets das Sonnenlicht flieht, fächerartig hängt.

Man kennt bereits über 100 Kometen, deren Bahnen alle berechnet sind, und deren Sonnennähe innerhalb der Marsbahn liegt. Aber nach sehr wahrscheinlichen Gründen giebt es deren weit mehrere, welche in ungünstigen Stellungen ihre Sonnennähe passiren, und nicht beobachtet werden konnten. Einige haben eine Umlaufszeit von mehrern tausend Jahren. — In jetzigen Zeiten vergeht fast kein Jahr, in welchem die Astronomen nicht einen oder mehrere entdecken. Nach Lambert's Berechnung gehören über 4000 Kometen zu unserm Sonnensystem. Demnach scheint die gesammte Planetenwelt nur ein sehr geringer Theil desselben, und die Hauptsache die Kometenwelt zu seyn. — Herschel hält die Kometen für werdende Weltkörper!

§. 886. Den wahren Durchmesser d eines Himmelskörpers zu finden, wenn der scheinbare Durchmesser d', und die horizontale Parallaxe p desselben, so wie der Durchmesser der Erde D bekannt sind.

Formel: $2p : d' = D : d =$ wahren Durchmesser in Erddurchmessern.

Z. B. den wahren Durchmesser des Mondes zu finden.

Hier

Hier ist D = 1

$d' = 32' 45'' = 1965''$
$p = 60'$ also $2p = 7200''$ } so ist $\frac{1 . 1965}{7200} = 0{,}27$

des Erddurchmessers.

§. 887. Aus der gegenseitigen Anziehung der Planeten, und der Kraft, mit der sie ihre Monde um sich schleudern, berechneten die Astronomen die Masse (welche nicht mit ihrem kubischen Inhalte verwechselt werden muß) und Dichtigkeit der Planeten.

Z. B. Wenn die Dauer des Mondumlaufs = 655 St.
die Dauer des Umlaufs der Erde = 8766 St.
Entfernung des Mondes von der Erde = 1
— der Erde von der Sonne = 400,

so giebt $\frac{400^3}{1^3} : \frac{655^2}{8766^2} = 357000 : 1$,

woraus folgt, daß die Sonne 357000mal mehr Masse hat, als die Erde. Da sie aber 1448079mal größer ist, so müßte sie, wenn ihre Dichtigkeit eben so groß, als die der Erde wäre, auch so viel mal mehr Masse haben. Sie hat aber nur 357000mal mehr Masse, folglich ist ihre

Dichtigkeit $= \frac{357000}{1448079} = 0{,}24$, oder fast 4mal geringer, als die der Erde.

§. 888. Die Fallkraft in einer Sekunde giebt folgendes Formular:

$$\frac{15{,}1 \text{ Fuß} \cdot \text{Masse des Planeten}}{\text{Quadrat des Halbmessers.}}$$

Z. B. für Jupiter, welcher 309mal mehr Masse, und 11,4 mal größer im Halbmesser ist:

$$\frac{15{,}1 \cdot 309}{11{,}4^2} = \frac{4666}{130} = 35{,}9 \text{ Fuß Fall in } 1'' \text{ auf dem Jupiter.}$$

Folgende Tafel enthält die Dichtigkeit, Masse und Fallkraft der bekanntesten Planeten und der Sonne.

Dich-

	Dichtigkeit.	Masse.	Fallkraft in 1 Sekunde	Größe im Verhältniß zur Erde.		Durchmesser in Meilen.
Merkur	2,56	0,16	15,1 Fuß	16 mal	kleiner.	697
Venus	1,03	0,95	15,2 —	$\frac{1}{20}$ —		1688
Erde	1,00	1,00	15,1 —	—		1719
Mond	0,75	0,015	3,1 —	50		465
Mars	0,64	0,10	5,2 —	$6\frac{2}{3}$		920
Sonne	0,23	329800	389,0 —	1448079 mal	größer.	194490
Jupiter	0,21	309,1	35,9 —	1474 —		19566
Uranus	0,20	16,9	13,2 —	85 —		7564
Saturn	0,095	98,2	14,5 —	1030 —		17362

Die Größe der Sonnenkugel übertrifft die gesammte Größe aller Planeten um 559mal, woraus sich die Größe ihrer Anziehungskraft, welche das ganze System in Ordnung hält, erklärt.

IV. Leichte und sichere Verfahrungsweise, Sonnenuhren zu zeichnen.

§. 889. Auf einer ebenen rechtwinklichten Fläche von Messing, Zinn oder Holz ziehe man für eine

horizontal- oder wagerechtliegende Sonnenuhr

die Parallelen CA und DB Fig. 278. in einem Abstande, der der Dicke des Zeigers gleich ist. Auf CA errichte das Quadrat CAEG, und auf DB das Quadrat DBFH, in beliebiger Größe, doch so groß, als es die Uhrfläche nur immer erlaubt, und daß eine Seite dieser gleichen Quadrate genau 1000 Theile eines verjüngten Maaßstabes mißt.

Die Linien CA und DB liegen so, daß C und D nach Süden, A und B nach Norden zeigen; dann fällt der Schatten des zwischen AC und DB befindlichen Zeigers des Vormittags auf das Quadrat DBFH, und des Nachmittags auf das Quadrat CAEG, und geht nach der Ordnung der Zahlen über dieselben.

Wohin der Schatten für jede beliebige Zeit fallen wird, läßt sich berechnen, sobald man die Polhöhe desjenigen

nigen Ortes kennt, für welchen die Uhr bestimmt ist. Um 12 Uhr fällt der Schatten auf die Fläche CDAB, um 1 Uhr auf die Linie Cb, um 2 Uhr auf die Linie C2 ꝛc. und macht also zu jeder Zeit mit der Mittagslinie CA einen Winkel bCA, oder 2CA u. s. w. welcher Stundenwinkel, oder Winkel mit dem Meridian heißt. Sieht man CA als den Radius an, so ist die Linie AE eine Tangente, und GE die Cotangente. Trägt man nun nach dem Maaßstabe, wonach die Quadrate gezeichnet sind, von A aus auf die Tangente AE die Tangententheile, welche einem Stundenwinkel z. B. bCA zukommen, so erhält man den Punct b, von dem eine gerade Linie nach C gezogen, die Richtung des Schattens zur verlangten Stunde anzeigt.

Wie groß nun das Stück Ab, Ac, Ad für die Stunden 1, 2, 3 und auf der andern Seite, für 11, 10, 9 u. s. f. seyn muß, findet man für jede Viertelstunde in der Tafel VIII. des Anhanges, für verschiedene Polhöhen berechnet. Man suche also in der obern Querspalte die Polhöhe, die der des Orts gleich, oder nahe ist, und trage die in der senkrecht darunter stehenden Spalte angegebenen Tangententheile nach dem Maaßstabe auf die Zeichnung, z. B. für die Polhöhe 52° 30′ ist Ab = 212,5 um 1 Uhr; Ac = 458,2 um 2 Uhr u. s. w., welche Theile auch auf die andere Seite BF eben so von B aus getragen werden.

Die Cotangententheile werden von G aus auf GE, und von H aus auf HF getragen.

Die 6te Stundenlinie ist = o und die GH. Weil nun aber eine solche Uhr auch noch nach 6 Uhr, und des Morgens vor 6 Uhr die Zeit angeben kann, so verlängere man die Linie MD nach N, und X nach Y, so bekommt man die 7te und 8te Stunde des Abends. Eben so verfahre man mit den Stunden früh vor 6 Uhr.

Nachdem so die Lage der Stundenlinien bestimmt ist, kann man der Uhr eine beliebige Einfassung, z. B. einen Kreis, ein Parallelogramm u. dgl. geben, und die Zahlen hinzufügen.

§. 890. Ein wichtiger Umstand an jeder Sonnenuhr ist der Zeiger CMm Fig. 279, bei welchem es darauf ankommt, daß der Winkel Mcm, welchen die zeigende

oder

oder schattende Kante CM mit der Uhrfläche macht, gleich der Polhöhe des Ortes sey. Diesen Winkel erhält man, indem man einen rechtwinklichten Triangel CRP Fig. 279. und 280. zeichnet, worin PR = dem Sin. und CP = dem Cosin. der Polhöhe gemacht wird. In der Tafel VIII. findet man unter jeder Spalte die Größe der Catheten PR und CP angegeben. Die Größe des Zeigers ist willkührlich; damit er aber keine unnütze Höhe erhalte, trage man den Abstand der 12ten Stunde vom Uhr-Centro auf die verlängerte CP des Zeigers (in der Figur 279. ist cz = c12 Fig. 278.), und beschreibe das gleichseitige Dreieck NCZ, dessen eine Seite ZN die Hypotenuse CR in M durchschneiden wird; in M kann dann das Ende des Zeigers seyn.

Die beiden Kanten CM und DO müssen recht scharf und glatt, und die Puncte CD genau an das Centrum der Uhr CD anschließen. Er kann mit Zapfen V, oder Schrauben in der Uhr bevestigt werden; aber nie vergesse man, ihn in Hinsicht der Uhrfläche senkrecht zu stellen. Die zeigende Fläche eines jeden Sonnenuhrzeigers, also CMDO muß der Erdaxe parallel, folglich CM nach dem Nordpol des Himmels gerichtet seyn.

Horizontalsonnenuhren sind die brauchbarsten, denn sie zeigen den ganzen Tag die wahre Zeit mit einer Genauigkeit von etwa 1 Minute. Man legt sie wagerecht, und so, daß die 12te Stundenlinie im Meridian, mit dem Uhrcentro nach Süden weist.

§. 891. Die Vertikal- oder hangende Sonnenuhr, deren Fläche auf einer Horizontale senkrecht steht, wird eben so, wie die vorige gezeichnet. Man zieht auch hier zwei um die Dicke des Zeigers von einander abstehende Parallelen, auf welche der Schatten um 12 Uhr fällt, errichtet auf jeder Seite ein Quadrat, und trägt die Tangententheile für jede ganze, halbe und Viertelstunde auf die Seiten des Quadrats, die an der 12ten Stundenlinie und ihr gegenüber liegen, wie sie für 7 verschiedene Polhöhen in der Tafel IX. des Anhanges angegeben sind. Eine solche Uhr kann höchstens bis 6 Uhr die Stunden zeigen, und ihr Centrum ziemlich oben auf der zur Uhr bestimmten Platte genommen werden. Ihr Zeiger CRP

Fig. 280.

Fig. 280. macht mit der Uhrfläche einen Winkel, welcher mit der Aquatorhöhe, oder deren Cosinus der Polhöhe gleich ist. Man kann ihn durch ein rechtwinklichtes Dreieck CRP bekommen, wie bei der Horizontaluhr, aber der Winkel x bei R liegt im Uhrcentrum auf der 6ten Stundenlinie, und P in der Nähe von 12 Uhr. RP ist senkrecht und geht nach dem Mittelpunct der Erde; CR nach den Weltpolen und zeigt mit dem äußersten Schattenrande die Zeit an.

Beim Aufstellen der Uhr sehe man dahin, daß die Uhrfläche völlig senkrecht auf der Morgen- und Abendlinie, und der Zeiger in der Ebene des Meridians liege.

Runde Zeiger taugen nichts, und zeigen falsch. Daher ist auch die in den Lehrbüchern vorkommende geometrische Construction der Sonnenuhren in der Ausübung ganz unbrauchbar. Es würde nämlich zu einer solchen Uhr ein Zeiger ohne alle Dicke erfordert, welches ein unmögliches Ding ist; anderer großen Unbequemlichkeiten bei Auftragung der Stundenlinien nicht zu gedenken.

§. 892. Oriental- und Occidentalsonnenuhren stehen mit ihren Flächen gegen Morgen oder Abend, und senkrecht auf der horizontalen AB Fig. 281. Wenn A Süden und B Norden ist, so ist Winkel x = Äquatorhöhe des Aufstellungsortes. In der 6ten Stundenlinie ist der Zeiger abcd Fig. 282. auf der Fläche CB senkrecht befestigt, und so hoch, daß er (niedergelegt) von 6 bis 9 auf der Uhr reicht. Die Abtheilung der Stundenlinien hängt also von der Zeigerhöhe, oder dem Abstand 6 — 9 ab. Man theile den Abstand 6 – 9 in 100 Theile. Wieviel solcher Theile jeder Viertelstunde, von 6 Uhr an, als dem Zeigerplatz und Uhrcentro, zukommen, findet man in der Tafel X. des Anhanges.

Je näher die Stunden dem Mittage kommen, desto länger wird der Schatten, und um 12 Uhr unendlich seyn. Die obere Fläche ab am Zeiger zeigt mit ihrem Schatten die Stunden an.

Eine Occidental- oder Abenduhr wird eben so gezeichnet, nur erhält sie die Zahlen in umgekehrter Ordnung; wo 11 steht, muß 1 stehen; anstatt 10 eine 2 u. s. w.

An

An einem Würfel von beliebiger Größe lassen sich diese 4 Sonnenuhrgattungen, so wie auch eine Mitternachtuhr anbringen, welche letztere wie eine Mittagsuhr gezeichnet wird; allein ihr Zeiger steht mit der Spitze unten, und die Stundenzahlen folgen in umgekehrter Ordnung von 3 bis etwa 7, und 5 bis 9 Uhr.

§. 893. In den Tafeln VIII. bis X. kommen nur die Tangententheile aller Viertelstunden vor. Man kann aber leicht die Stundenwinkel und ihre Tangententheile für einzelne Minuten haben. Zu einer solchen Rechnung sind zwei Stücke zu wissen nöthig:

1) die Polhöhe des Ortes,
2) die Aquinoctialdistanz.

Unter letzterer versteht man den Theil des Aquators, der sich in einer gegebenen Zeit (von 12 Uhr an gerechnet) durch den Mittagkreis bewegt. Innerhalb 24 Stunden bewegt sich der ganze Aquator mit seinen 360 Graden durch den Meridian, folglich in 1 Stunde 15°, in 30 Minuten $7\frac{1}{2}$°, in 5 Minuten 1° 15′ u. s. w. (S. Tafel I.). Nun findet man den Stundenwinkel bei Horizontalsonnenuhren dadurch:

Sin. tot. : Sin. P = Tang. A : Tang. S,

wobei P = Polhöhe, A = Äquinoctialdistanz; S = Stundenwinkel.

Z. B. Man sucht den Stundenwinkel für 5 Minuten nach 12 oder vor 12 Uhr, unter der Polhöhe 52° 30′, so ist

Sin. tot. : Sin. 52° 30′ = Tang. 1° 15′ : Tang. S.

log. Tang. 1° 15′ = 8,3403020
log. Sin. 52° 30′ = 9,8994667
= 18,2397687
log. Sin. tot. = 10,0000000
∴ log. Tang. S. = 8,2397687 = 59′ 40″,

wozu man in den trigonometrischen Tafeln die natürliche Tangente 0,0173692 findet, wovon man aber nur die 3 ersten Zahlen, und allenfalls eine Decimalstelle nehmen kann, weil der Maaßstab, nach welchem die Uhr gezeichnet wird, nur 1000theilig ist. Daher ist der Punct, auf den der Schatten 5 Min. vor oder nach 12 Uhr hinfällt,

um 17,3 solcher Theile entfernt, deren die Tangente 1000 hat. – Sobald der Stundenwinkel über 45° wächst, ist die Tangente über 1000, daher suche man in den Tafeln die Cotangententheile zu demselben.

§. 894. Die Stundenwinkel und Tangententheile zu einer Vertikal- oder Mittagsuhr werden eben so gefunden, nur mit dem Unterschiede, daß man statt des Sinus der Polhöhe, den Cosinus derselben nimmt, und daher die Formel hat

Sin. tot. : Cosin. P = Tang. A : Tang. S.

(worin P = Polhöhe, A = Äquinoctialdistanz, S = Stundenwinkel).

Mittelst der gegebenen Formeln kann man sich nöthigenfalls solche Tafeln, wie VIII und IX. selbst verfertigen, wenn die Polhöhe, unter welcher man wohnt, nicht darin zu finden ist. Eine Sonnenuhr ist brauchbar, wenn auch die Polhöhe, für welche sie gemacht, von der des Aufstellungsortes um 5′ verschieden ist.

§. 895. In der Tafel X findet man durch die Formel Sin. A : 100 = Cosin. A : Abstand der Stundenlinien, vom Zeiger auf der 6ten Stunde an gerechnet.

Z. B. wie weit reicht der Schatten auf einer Abenduhr um 2 Uhr Nachmittags?

Hier ist A = 2 . 15° = 30°, daher

Sin. 30° : 100 = Cos. 30° : S

log. Cos. 30° = 9,9375306

log. 100 = 2

11,9375306

log. Sin. 30° = 9,6989700

2,2385606 = 173,21,

d. h. die 2te Stundenlinie ist von dem Zeiger um 173,2 solcher Theile entfernt, deren er 100 hat.

Die Polhöhe hat auf die Abend- und Morgenuhren weiter keinen Einfluß, als daß sie unter dem Winkel der Äquatorhöhe aufzustellen sind.

Anhang.

Anhang.

Tafel I.

Astronomische Tafeln.

Verwandlung der Zeit in Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. 1 St. = 15°.								Verwandlung der Grade, Minuten, Sekunden in Zeit 15° = 1 St.							
Stund.	Grade.	Min. Sek. Tert.	Gr. M.	Min. Sek., Sek.	Tert.	Min. Sek. Tert.	Grad, Min. Min., Sek. Sek.,	Tert.	° ′ ″	St. M. M. Sek. S.	Tert.	° ′ ″	St. M. M. Sek. Sek.	Tert.	°	St.	Min.
1	15	1	0	15		31	7	45	1	0	4	31	2	4	70	4	40
2	30	2	0	30		32	8	0	2	0	8	32	2	8	80	5	20
3	45	3	0	45		33	8	15	3	0	12	33	2	12	90	6	0
4	60	4	1	0		34	8	30	4	0	16	34	2	16	100	6	40
5	75	5	1	15		35	8	45	5	0	20	35	2	20	110	7	20
6	90	6	1	30		36	9	0	6	0	24	36	2	24	120	8	0
7	105	7	1	45		37	9	15	7	0	28	37	2	28	130	8	40
8	120	8	2	0		38	9	30	8	0	32	38	2	32	140	9	20
9	135	9	2	15		39	9	45	9	0	36	39	2	36	150	10	0
10	150	10	2	30		40	10	0	10	0	40	40	2	40	160	10	40
11	165	11	2	45		41	10	15	11	0	44	41	2	44	170	11	20
12	180	12	3	0		42	10	30	12	0	48	42	2	48	180	12	0
13	195	13	3	15		43	10	45	13	0	52	43	2	52	190	12	40
14	210	14	3	30		44	11	0	14	0	56	44	2	56	200	13	20
15	225	15	3	45		45	11	15	15	1	0	45	3	0	210	14	0
16	240	16	4	0		46	11	30	16	1	4	46	3	4	220	14	40
17	255	17	4	15		47	11	45	17	1	8	47	3	8	230	15	20
18	270	18	4	30		48	12	0	18	1	12	48	3	12	240	16	0
19	285	19	4	45		49	12	15	19	1	16	49	3	16	250	16	40
20	300	20	5	0		50	12	30	20	1	20	50	3	20	260	17	20
21	315	21	5	15		51	12	45	21	1	24	51	3	24	270	18	0
22	330	22	5	30		52	13	0	22	1	28	52	3	28	280	18	40
23	345	23	5	45		53	13	15	23	1	32	53	3	32	290	19	20
24	360	24	6	0		54	13	30	24	1	36	54	3	36	300	20	0
		25	6	15		55	13	45	25	1	40	55	3	40	310	20	40
		26	6	30		56	14	0	26	1	44	56	3	44	320	21	20
		27	6	45		57	14	15	27	1	48	57	3	48	330	22	0
		28	7	0		58	14	30	28	1	52	58	3	52	340	22	40
		29	7	15		59	14	45	29	1	56	59	3	56	350	23	20
		30	7	30		60	15	0	30	2	0	60	4	0	360	24	0

Tafel II.

Reduction der Sternzeit auf mittlere Sonnenzeit.

Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.	Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.	Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.	Sternzeit.	Reduction auf mittlere Sonnenzeit.
Stunden.	Min. Sek. —	Min.	Sekunden. —	Min.	Sekunden. —	Sek.	Sekunden. —
1	0 9,8	1	0,2	31	5,1	10	0,03
2	0 19,6	2	0,3	32	5,2	20	0,05
3	0 29,5	3	0,5	33	5,4	30	0,08
4	0 39,3	4	0,7	34	5,6	40	0,11
5	0 49,1	5	0,8	35	5,7	50	0,14
						60	0,16
6	0 59,0	6	1,0	36	5,9		
7	1 8,8	7	1,1	37	6,1		
8	1 18,6	8	1,3	38	6,2		
9	1 28,5	9	1,5	39	6,4		
10	1 38,3	10	1,6	40	6,5		
11	1 48,1	11	1,8	41	6,7		
12	1 58,0	12	2,0	42	6,9		
13	2 7,8	13	2,1	43	7,0		
14	2 17,6	14	2,3	44	7,2		
15	2 27,4	15	2,5	45	7,4		
16	2 37,3	16	2,6	46	7,5		
17	2 47,1	17	2,8	47	7,7		
18	2 56,9	18	2,9	48	7,9		
19	3 6,8	19	3,1	49	8,0		
20	3 16,6	20	3,3	50	8,2		
21	3 26,4	21	3,4	51	8,3		
22	3 36,2	22	3,6	52	8,5		
23	3 46,1	23	3,8	53	8,7		
24	3 55,9	24	3,9	54	8,8		
		25	4,1	55	9,0		
		26	4,3	56	9,2		
		27	4,4	57	9,3		
		28	4,6	58	9,5		
		29	4,7	59	9,7		
		30	4,9	60	9,8		

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel III.

Verwandlung der wahren Sonnenzeit in mittlere mit Hinzufügung nachstehender Verbesserung.

Tage	Januar M. S.	Februar M. S.	März M. S.	April M. S.	May M. S.	Junius M. S.	Julius M. S.	August M. S.	Septbr. M. S.	Octobr. M. S.	Novbr. M. S.	Decbr. M. S.
	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−
1	3 48	13 57	12 24	4 6	3 2	2 40	3 16	5 58	0 3	10 12	16 14	10 50
2	4 16	14 5	12 32	3 48	3 9	2 31	3 28	5 55	0 21	10 30	16 15	10 27
3	4 45	14 11	12 19	3 29	3 16	2 22	3 39	5 51	0 40	10 49	16 16	10 4
4	5 12	14 18	12 6	3 11	3 23	2 12	3 50	5 47	0 59	11 7	16 15	9 40
5	5 39	14 23	11 53	2 54	3 29	2 2	4 1	5 41	1 18	11 25	16 14	9 15
6	6 6	14 28	11 40	2 36	3 34	1 52	4 12	5 36	1 37	11 43	16 12	8 50
7	6 33	14 31	11 25	2 18	3 39	1 41	4 22	5 29	1 52	12 0	16 9	8 24
8	6 59	14 34	11 10	2 1	3 43	1 30	4 32	5 22	2 18	12 17	16 5	7 58
9	7 24	14 36	10 55	1 44	3 47	1 19	4 41	5 15	2 39	12 34	16 1	7 32
10	7 49	14 38	10 39	1 27	3 50	1 7	4 50	5 6	2 59	12 50	15 56	7 4
11	8 13	14 38	10 23	1 11	3 53	0 55	4 58	4 57	3 20	13 6	15 49	6 37
12	8 37	14 38	10 7	0 55	3 55	0 43	5 6	4 48	3 41	13 21	15 42	6 9
13	9 0	14 36	9 51	0 39	3 56	0 31	5 14	4 38	4 2	13 36	15 34	5 40
14	9 22	14 34	9 34	0 23	3 57	0 19	5 21	4 27	4 23	13 50	15 25	5 12
15	9 44	14 32	9 17	0 8	3 57	0 6	5 29	4 16	4 44	14 3	15 16	4 44
				−		+						
16	10 5	14 28	9 0	0 8	3 57	0 6	5 34	4 5	5 5	14 16	15 5	4 15
17	10 25	14 24	8 42	0 22	3 56	0 18	5 39	3 53	5 26	14 29	14 54	3 45
18	10 44	14 19	8 24	0 37	3 55	0 32	5 46	3 40	5 48	14 41	14 42	3 16
19	11 3	14 14	8 6	0 51	3 53	0 44	5 49	3 27	6 9	14 52	14 29	2 46
20	11 21	14 7	7 48	1 2	3 51	0 57	5 53	3 13	6 30	15 2	14 15	2 16
21	11 38	14 0	7 30	1 17	3 48	1 10	5 56	2 59	6 51	15 12	14 0	1 46
22	11 55	13 53	7 11	1 30	3 45	1 23	6 0	2 44	7 12	15 22	13 45	1 16
23	12 11	13 45	6 53	1 42	3 41	1 36	6 2	2 29	7 32	15 30	13 28	0 46
24	12 26	13 36	6 34	1 54	3 36	1 49	6 4	2 14	7 53	15 38	13 11	0 16
												+
25	12 40	13 27	6 15	2 5	3 31	2 2	6 5	1 58	8 13	15 45	12 53	0 14
26	12 53	13 17	5 57	2 16	3 25	2 14	6 6	1 42	8 34	15 5	12 35	0 44
27	13 6	13 6	5 38	2 26	3 19	2 27	6 6	1 26	8 54	15 57	12 15	1 14
28	13 18	12 55	5 19	2 36	3 12	2 39	6 6	1 9	9 13	16 2	11 55	1 44
29	13 29		5 1	2 45	3 5	2 52	6 5	0 51	9 33	16 6	11 34	2 4
30	13 40		4 42	2 54	2 57	3 4	6 3	0 34	9 53	16 10	11 12	2 43
31	13 48		4 24	±	2 49	−	6 1	0 16		16 12		3 12
	+	+	+		−	+	+	+	−	−	−	+

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel IV.

Halbmesser der Sonne für jeden 10ten Tag des Jahres.

Monat und Tag.	Halbmesser der Sonne.		Monat und Tag.	Halbmesser der Sonne.	
Januar.			Julius.		
1	16′	19″	10	15′	47″
11	16	19	20	15	48
21	16	18	30	15	49
31	16	17	August.		
Februar.			9	15	50
10	16	15	19	15	52
20	16	13	29	15	54
März.			September.		
2	16	10	8	15	57
12	16	8	18	15	59
22	16	5	28	16	2
April.			October.		
1	16	2	8	16	5
11	16	0	18	16	7
21	15	57	28	6	10
May.			November		
1	15	55	7	16	13
11	15	52	17	16	15
21	15	50	27	16	17
31	15	49	December.		
Junius.			7	16	18
10	15	48	17	16	19
20	15	47	27	16	19

Tafel V.

Sonnenparallaxe für jeden 3ten Grad scheinbarer Höhe.

Scheinbare Höhe.	Parallaxe der Sonne.
0°	8″,7
3°	8, 7
6	8, 6
9	8, 6
12	8, 5
15	8, 4
18	8, 2
21	8, 1
24	7, 9
27	7, 7
30	7, 5
33	7, 3
36	7, 0
39	6, 8
42	6, 5
45	6, 2
48	5, 8
51	5, 5
54	5, 1
57	4, 7
60	4, 3
63	3, 9
66	3, 5
69	3, 1
72	2, 7
75	2, 3
78	1, 8
81	1, 4
84	0, 9
87	0, 4
90	0, 0

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel V.

Sonnenparallaxe für jeden 3ten Grad scheinbarer Höhe.

Scheinbare Höhe.	Parallaxe der Sonne.
0°	8″,7
3°	8, 7
6	8, 6
9	8, 6
12	8, 5
15	8, 4
18	8, 2
21	8, 1
24	7, 9
27	7, 7
30	7, 5
33	7, 3
36	7, 0
39	6, 8
42	6, 5
45	6, 2
48	5, 8
51	5, 5
54	5, 1
57	4, 7
60	4, 3
63	3, 9
66	3, 5
69	3, 1
72	2, 7
75	2, 3
78	1, 8
81	1, 4
84	0, 9
87	0, 4
90	0, 0

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Mittlere Strahlenbrechung.

Scheinbare Höhe.	Strahlenbrechung.	Scheinbare Höhe.	Strahlenbrechung.	Scheinbare Höhe.	Strahlenbrechung.	Scheinbare Höhe.	Strahlenbrechung.	Scheinbare Höhe.	Strahlenbrechung.
0° 0′	33′ 0″	11°	4′ 47″	31°	1′ 35″	51°	0′ 46″	71°	0′ 19″
15	30 36	12	4 23	32	1 31	52	0 44	72	0 18
30	28 22	13	4 3	33	1 28	53	0 43	73	0 17
45	26 20	14	3 45	34	1 24	54	0 41	74	0 16
1° 0′	24 28	15	3 30	35	1 21	55	0 40	75	0 15
1 30	21 15	16	3 17	36	1 18	56	0 38	76	0 14
2 0	18 35	17	3 5	37	1 16	57	0 37	77	0 13
2 30	16 24	18	2 54	38	1 13	58	0 35	78	0 12
3 0	14 36	19	2 44	39	1 10	59	0 34	79	0 11
3 30	13 6	20	2 35	40	1 8	60	0 33	80	0 10
4 0	11 51	21	2 27	41	1 5	61	0 32	81	0 9
4 30	10 48	22	2 20	42	1 3	62	0 30	82	0 8
5 0	9 54	23	2 14	43	1 1	63	0 29	83	0 7
5 30	9 8	24	2 7	44	0 59	64	0 28	84	0 6
6 0	8 28	25	2 2	45	0 57	65	0 26	85	0 5
6 30	7 52	26	1 56	46	0 55	66	0 25	86	0 4
7 0	7 20	27	1 51	47	0 53	67	0 24	87	0 3
8 0	6 29	28	1 47	48	0 51	68	0 23	88	0 2
9 0	5 48	29	1 42	49	0 49	69	0 22	89	0 1
10 0	5 15	30	1 38	50	0 48	70	0 21	90	0 0

Verbesserung der mittlern Strahlenbrechung nach dem Thermometer und Barometerstand.

Wird mit der mittlern multiplicirt.

Thermometer.	Barometerhöhen in Pariser Zoll und Linien.					
nach Reaumür.	27 Z. 0 L.	27 Z. 4 L.	27 Z. 8 L.	28 Z. 0 L.	28 Z. 4 L.	28 Z. 8 L.
+ 25	0, 885	0, 897	0, 909	0, 921	0, 933	0, 945
20	0, 909	0, 921	0, 933	0, 945	0, 957	0, 969
15	0, 934	0, 946	0, 958	0, 970	0, 982	0, 994
10	0, 961	0, 973	0, 985	0, 997	1, 009	1, 021
5	0, 989	1, 001	1, 013	1, 025	1, 037	1, 049
Eispunct 0	1, 019	1, 031	1, 043	1, 055	1, 067	1, 079
— 5	1, 051	1, 063	1, 075	1, 087	1, 099	1, 111
10	1, 085	1, 097	1, 109	1, 121	1, 133	1, 145
15	1, 121	1, 133	1, 145	1, 157	1, 169	1, 181
20	1, 160	1, 172	1, 184	1, 196	1, 208	1, 220

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel VII.

Erste Verbesserung der durch übereinstimmende Sonnenhöhen erhaltenen Mittagsstande.

Länge der Sonne.		Hälfte der Zeit zwischen den Beobachtungen.								
Z.	Gr.	1 St. 40′	2 St. 0′	2 St. 20′	2 St. 40′	3 St. 0′	3 St. 20′	3 St. 40′	4 St. 0′	Zeichen der Verbesserung.
0 Z.	0°	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	
	10	0″,7	0″,9	0″,9	0″,8	0″,8	0″,7	0″,7	0″,6	+
	20	1,8	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	
I	0	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,6	
	10	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,1	1,9	+
	20	3,0	2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,0	1,9	
II	0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	1,9	1,7	
	10	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3	+
	20	1,1	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	0,8	0,7	
III	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	10	1,1	1,1	1,0	1,0	0,9	0,8	0,8	0,7	—
	20	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	
IV	0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	1,9	1,7	
	10	2,9	2,9	2,7	2,6	2,5	2,3	2,1	1,9	—
	20	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	1,8	
V	0	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,6	
	10	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	—
	20	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	
VI	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	10	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0,7	0,6	+
	20	1,8	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	
VII	0	2,5	2,5	2,4	2,3	2,1	2,0	1,8	1,6	
	10	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5	2,3	2,1	1,9	+
	20	3,1	3,0	2,9	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	
VIII	0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,0	1,8	
	10	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,4	+
	20	1,2	1,1	1,1	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	
IX	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	10	1,2	1,1	1,1	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	—
	20	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,4	
X	0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,0	1,8	
	10	3,1	3,0	2,9	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	—
	20	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	1,9	
XI	0	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	
	10	1,8	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	—
	20	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zweite Verbesserung der durch übereinstimmige Sonnenhöhen erhaltenen Mittagsstunde.

(Muß mit der Tangente der Polhöhe multiplicirt werden.)

Länge der Sonne.		Hälfte der Zeit zwischen den Beobachtungen.								
Zeich.	Gr.	1 St. 40′	2 St. 0′	2 St. 20′	2 St. 40′	3 St. 0′	3 St. 20′	3 St. 40′	4 St. 0′	Zeichen der Verbesserung.
0.	0	15″,6	15″,8	16″,0	16″,4	16″,8	17″,2	17″,7	18″,2	
	10	15, 3	15, 5	15, 7	16, 1	16, 4	16, 8	17, 3	17, 9	—
	20	14, 6	14, 8	15, 1	15, 4	15, 7	16, 1	16, 6	17, 1	
I	0	13,5	13,7	13,9	14,2	14,5	14,9	15,3	15,8	
	10	12,1	12,2	12,4	14,7	13,0	13,3	13,7	14,1	—
	20	10,2	10,4	10,5	10,7	11,0	11,3	11,6	12,0	
II	0	8,0	8,1	8,3	8,4	8,6	8,8	9,1	9,4	
	10	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,1	6,3	6,5	—
	20	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,3	
III	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	10	2,8	2,9	2,9	3,0	3	3,7	3,2	3,3	+
	26	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,1	6,3	6,5	
IV	0	8,0	8,1	8,2	8,4	8,6	8,8	9,1	9,4	
	10	10,1	10,3	10,5	10,7	10,9	11,2	11,5	11,9	+
	20	11,9	12,1	12,3	12,6	12,9	13,2	13,6	14,0	
V	0	13,4	13,6	13,8	14,1	14,4	14,8	15,2	15,7	
	10	14,4	14,6	14,9	15,2	15,5	15,9	16,4	16,9	+
	20	15,1	15,3	15,6	15,9	16,3	16,7	17,2	17,7	
VI	0	15,1	15,6	15,9	16,2	16,6	17,0	17,5	18,0	
	10	15,3	15,5	15,8	16,1	16,4	16,8	17,3	17,9	+
	20	14,8	15,0	15,2	15,5	15,9	16,3	16,8	17,3	
VII	0	13,8	14	14,3	14,6	14,9	15,3	15,7	16,2	
	10	12,5	12,7	12,9	13,1	13,4	13,8	14,2	14,6	+
	20	10,7	10,8	11,0	11,2	11,5	11,8	12,1	12,5	
VIII	0	8,5	8,6	8,7	8,9	9,1	9,3	9,6	6,6	
	10	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,5	6,7	6,9	+
	20	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	
IX	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	10	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	—
	20	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,5	6,7	6,9	
X	0	8,5	8,6	8,8	8,9	9,2	9,4	9,7	9,9	
	10	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,9	12,2	12,6	—
	20	12,6	12,8	13,0	13,2	12,5	13,9	14,3	14,7	
XI	0	14	14,2	14,4	14,7	15,0	15,4	15,9	16,4	
	10	14,9	15,1	15,4	15,7	16,0	16,5	16,9	17,5	—
	20	15,4	15,6	15,9	16,2	16,6	17,0	17,5	18,1	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel VIII.

Für Horizontalsonnenuhren unter den Polhöhen 52 bis 53 Grad.

Stundenlinien.		Polhöhe 52° 0′	Polhöhe 52° 10′	Polhöhe 52° 20′	Polhöhe 52° 30′	Polhöhe 52° 40′	Polhöhe 52° 50′	Polhöhe 53° 0′
		Tangententheile den Halbmesser = 1000,0.						
12 Uhr.	0 M.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	15	51,5	51,8	51,9	52,1	52,2	52,3	52,4
	30	103,6	103,9	104,2	104,5	104,8	104,9	105,1
	45	156,8	157,1	157,5	157,8	158,1	158,4	159,0
1 Uhr.	0′	211,0	211,6	211,9	212,5	213,2	213,5	214,1
	15	267,6	268,2	268,9	269,2	269,8	270,4	271,4
	30	326,5	327,2	327,8	328,5	329,4	330,1	330,7
	45	388,5	389,5	390,2	391,2	392,2	392,9	393,9
2 Uhr.	0′	454,6	455,7	457,1	458,2	458,9	459,9	461,0
	15	526,5	527,6	529,1	530,2	531,3	532,4	533,6
	30	604,8	606,0	607,2	608,5	610,0	611,6	612,8
	45	691,1	692,8	694,1	695,9	697,6	698,9	700,6
3 Uhr.	0′	787,8	789,7	791,6	793,5	794,9	796,8	798,7
	15	898,8	900,4	902,5	904,6	906,7	908,2	910,5
		Cotangente.				Cotangente.		
	30	973,5	971,3	969,1	967,4	965,1	962,9	960,6
	45	848,0	846,0	844,1	842,1	840,1	838,6	836,6
4 Uhr.	0′	732,7	731,0	729,2	727,9	726,1	724,3	722,9
	15	625,6	624,5	622,8	621,6	620,0	618,8	617,6
	30	525,7	524,3	523,1	522,0	520,9	519,8	518,7
	45	430,6	429,5	428,9	427,9	426,9	425,8	425,0
5 Uhr.	0′	340,1	339,1	338,4	337,8	336,8	336,2	335,5
	15	252,4	251,8	251,2	250,5	250,0	249,6	249,0
	30	167,0	166,7	166,4	165,8	165,4	165,2	164,9
	45	83,4	83,1	82,8	82,5	82,3	82,1	81,9
6 Uhr	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
		Im Zeiger sind die beiden Catheten in solchen Theilen						
Fig. 280		PR = 788 CP = 615,6	PR = 789,8 CP = 613,4	PR = 791,6 CP = 611,1	PR = 793,3 CP = 608,7	PR = 795,1 CP = 606,4	PR = 796,9 CP = 604,1	PR = 798,6 CP = 601,8

Tafel IX.

Für Vertikalsonnenuhren unter den Polhöhen von 52 bis 53°.

Polhöhen.	52° 0′	52° 10′	52° 20′	52° 30′	52° 40′	52° 50′	53° 0′
Stundenlinien.	Tangententheile, den Halbmesser zu 1000,0.						
12 Uhr 0′	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15′	40,3	40,2	40,0	39,8	39,7	39,5	39,4
30′	81,0	80,7	80,4	80,0	79,8	79,5	79,2
45′	122,4	122,0	121,5	121,0	120,5	120,1	119,7
1 Uhr 0′	164,9	164,3	163,7	163,0	162,5	161,8	161,2
15	209,0	208,2	207,4	206,6	205,8	205,0	204,2
30	255,0	254,0	253,1	252,1	251,2	250,2	249,3
45	303,5	302,5	301,3	300,1	299,0	297,9	296,7
2 Uhr 0′	355,4	354,1	352,8	351,5	350,2	348,9	347,6
15	411,5	409,8	408,1	406,7	405,1	403,7	402,0
30	472,5	470,6	468,8	467,0	465,2	463,5	461,7
45	540,0	537,9	535,8	533,8	532,0	529,8	527,6
3 Uhr 0′	615,6	613,4	611,1	608,7	606,4	604,1	601,8
15	701,9	699,3	696,7	694,1	691,5	689,0	686,0
30	802,1	799,2	796,4	793,5	790,2	787,4	784,3
45	921,4	917,9	914,5	911,0	907,8	904,0	900,1
	Cotangententheile.						
4 Uhr 0′	937,7	941,2	945,3	948,4	952,5	955,6	959,5
15	800,9	804,0	806,9	809,8	813,2	816,3	819,5
30	672,8	675,3	677,9	680,4	683,0	685,6	688,1
45	551,3	553,4	555,4	557,5	559,6	561,9	563,8
5 Uhr 0′	435,1	436,9	438,6	440,2	441,9	443,5	445,2
15	323,1	324,3	325,5	326,7	328,1	329,1	330,4
30	213,8	214,7	215,6	216,4	217,1	218,2	218,6
45	106,4	106,8	107,2	107,6	108,0	108,5	108,9
6 Uhr 0′	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Fig. 280.	Im Zeiger sind die beiden Catheten in solchen Theilen						
PR	788	789,8	791,6	793,3	795,1	796,9	798,6
CP	615,6	613,4	611,1	608,7	606,4	604,1	601,8

Tafel X.

Zur Zeichnung der Oriental- und Occidentaluhren.

A

Orientaluhr.					Occidentaluhr.
Uhr.	M.				
3	45	66,8	8 Uhr	15′	
4	0	57,7	8	0	
	15	49,3		45	
	30	41,4		30	
	45	33,9		15	
5	0	26,8	7	0	
	15	19,9		45	
	30	13,2		30	
	45	6,6		15	
6	0	0,0	6	0	
	15	6,6		45	
	30	13,2		30	
	45	19,9		15	
7	0	26,8	5	0	
	15	33,9		45	
	30	41,4		30	
	45	49,3		15	
8	0	57,7	4	0	
	15	66,8		45	
	30	76,7		30	
	45	87,7		15	
9	0	100,0	3	0	
	15	114,1		45	
	30	130,4		30	
	45	149,7		15	
10	0	173,2	2	0	
	15	202,8		45	
	30	241,4		30	
	45	294,6		15	
11	0	373,2	1	0	
	15	502,7		45	
	30	759,6		30	
	45	1526,0		15	
12	0	unendl.	12	0	

B

Der Zeiger steht auf der 6ten Stundenlinie; seine Höhe = 100 solcher Theile. Die ganze Uhr wird so aufgestellt, daß BA mit dem Horizont einen Winkel = der Äquatorhöhe, macht.

Tafel XI.

Tafeln des scheinbaren Sonnenlaufs.

A. Epochen der mittlern Bewegung der Sonne und Erdferne für den Pariser Mittagskreis.

Jahre.	Mittlere Länge der Sonne.				Länge der Erdferne.				Jahre.	Mittlere Länge der Sonne.				Länge der Erdferne.			
	Zeich.	Gr.	M.	S.	Zeich.	Gr.	M.	S.		Zeich.	Gr.	M.	S.	Zeich.	Gr.	M.	S.
1810	9	9	29	4	3	9	40	16	1840	9	10	12	26	3	10	11	16
1811	9	9	14	45	3	9	41	18	41	9	9	58	6	3	10	12	18
1812	9	9	59	33	3	9	42	20	42	9	9	43	47	3	10	13	20
1813	9	9	45	14	3	9	43	22	43	9	9	29	27	3	10	14	22
1814	9	9	30	54	3	9	44	24	44	9	10	14	16	3	10	15	24
1815	9	9	16	35	3	9	45	26	1845	9	9	59	56	3	10	16	26
16	9	10	1	24	3	9	46	28	46	9	9	45	37	3	10	17	28
17	9	9	47	4	3	9	47	30	47	9	9	31	17	3	10	18	30
18	9	9	32	45	3	9	48	32	48	9	10	16	6	3	10	19	32
19	9	9	18	25	3	9	49	34	49	9	10	1	47	3	10	20	34
1820	9	10	3	14	3	9	50	36	1850	9	9	47	27	3	10	21	36
21	9	9	48	54	3	9	51	38	51	9	9	33	8	3	10	22	38
22	9	9	34	35	3	9	52	40	52	9	10	17	57	3	10	23	40
23	9	9	20	15	3	9	53	42	53	9	10	3	37	3	10	24	42
24	9	10	5	4	3	9	54	44	54	9	9	49	18	3	10	25	44
1825	9	9	50	45	3	9	55	46	1855	9	9	34	58	3	10	26	46
26	9	9	36	25	3	9	56	48	56	9	10	19	47	3	10	27	48
27	9	9	22	6	3	9	57	50	57	9	10	5	27	3	10	28	50
28	9	10	6	55	3	9	58	52	58	9	9	51	8	3	10	29	52
29	9	9	52	35	3	9	59	54	59	9	9	36	48	3	10	30	54
1830	9	9	38	16	3	10	0	56	1860	9	10	21	37	3	10	31	56
31	9	9	23	56	3	10	1	58	61	9	10	7	18	3	10	32	58
32	9	10	8	45	3	10	3	0	62	9	9	52	58	3	10	34	0
33	9	9	54	25	3	10	4	2	63	9	9	38	39	3	10	35	2
34	9	9	40	6	3	10	5	4	64	9	10	23	27	3	10	36	4
1835	9	9	25	46	3	10	6	6	1865	9	10	9	8	3	10	37	6
36	9	10	10	35	3	10	7	8	66	9	9	54	49	3	10	38	8
37	9	9	56	16	3	10	8	10	67	9	9	40	29	3	10	39	10
38	9	9	41	56	3	10	9	12	68	9	10	25	18	3	10	40	12
39	9	9	27	37	3	10	10	14	99	9	10	10	58	3	10	41	14

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

B. Mittlere Bewegung der Sonne in Monaten, Tagen, Stunden ꝛc.

Verflossene Monate.	Mittlere Länge der Sonne. Z. Gr. M. S.	Erdferne. M. S.
Januar	1 0 33 19	0′ 5″
Februar	1 28 9 12	0 10
März	2 28 42 29	0 15
April	3 28 16 38	0 20
Mai	4 28 49 57	0 26
Junius	5 28 24 8	0 31
Julius	6 28 57 27	0 36
August	7 29 30 45	0 41
Sept.	8 29 4 54	0 46
October	9 29 38 11	0 51
November	10 29 12 21	0 57
December	11 29 45 41	1 2

In Schaltjahren wird im Januar und Februar der Tag vor dem gegebenen genommen.

Tage	Mittlere Länge der Sonne. Z. Gr. M. S.	Erdferne. M. S.
1	0 0° 59′ 9″	0″
2	0 1 58 17	0
3	0 2 57 25	1
4	0 3 56 34	1
5	0 4 55 42	1
6	0 5 54 51	1
7	0 6 53 59	1″
8	0 7 53 7	2
9	0 8 52 16	2
10	0 9 51 24	2
11	0 10 50 33	2
12	0 11 49 41	2
13	0 12 48 49	2
14	0 13 47 58	3
15	0 14 47 6	3
16	0 15 46 14	3
17	0 16 45 23	3
18	0 17 44 31	3
19	0 18 43 39	3
20	0 19 42 48	4
21	0 20 41 56	4
22	0 21 41 4	4
23	0 22 40 13	4
24	0 23 39 21	4

Tage.	Mittl. Länge der Sonne. Z. Gr. M. S.	Erdferne.
25	0 24 38 29	4″
26	0 25 37 38	4
27	0 26 36 46	5
28	0 27 35 54	5
29	0 28 35 3	5
30	0 29 34 11	5
31	1 0 33 19	5

Stund.		
1	0 0 2′ 28″	
2	0 0 4 56	
3	0 0 7 23	
4	0 0 9 51	
5	0 0 12 19	
6	0 0 14 47	
7	0 0 17 15	
8	0 0 19 43	
9	0 0 22 11	
10	0 0 24 38	
11	0 0 27 6	
12	0 0 29 34	
13	0 0 32 20	
14	0 0 34 30	
15	0 0 36 58	
16	0 0 39 26	
17	0 0 41 53	
18	0 0 44 21	
19	0 0 46 49	
20	0 0 49 17	
21	0 0 51 45	
22	0 0 54 12	
23	0 0 56 40	
24	0 0 59 9	

Minuten. Sekund.	Mittlere Länge der Sonne. Min. Sek.	Sek. Tert.	Minuten. Sekund.	Mittlere Länge der Sonne. Min. Sek.	Sek. Tert.
1	0	2	43	1	46
2	0	5	44	1	48
3	0	7	45	1	51
4	0	10	46	1	53
5	0	12	47	1	56
6	0	15	48	1	58
7	0	17	49	2	0
8	0	19	50	2	3
9	0	22	51	2	5
10	0	24	52	2	8
11	0	27	53	2	10
12	0	29	54	2	13
13	0	32	55	2	15
14	0	34	56	2	18
15	0	37	57	2	20
16	0	39	58	2	23
17	0	42	59	2	25
18	0	44	60	2	28
19	0	47			
20	0	49			
21	0	51			
22	0	54			
23	0	56			
24	0	59			
25	1	1			
26	1	4			
27	1	6			
28	1	9			
29	1	11			
30	1	14			
31	1	16			
32	1	19			
33	1	21			
34	1	24			
35	1	26			
36	1	28			
37	1	31			
38	1	33			
39	1	36			
40	1	38			
41	1	41			
42	1	43			

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

C. Mittelpunctsgleichung der Sonnenbahn für das Jahr 1820 zur gegebenen Anomalie der Sonne.

Mittlere Anomalie.	0 Zeichen. —			I Zeichen. —			II Zeichen. —			III Zeichen. —			IV Zeichen. —			V Zeichen. —			Mittlere Anomalie.
Grad.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Grad.
0	0	0	0	0	56	38	1	38	51	1	55	19	1	40	57	0	58	45	30
1	0	1	58	0	58	22	1	39	52	1	55	21	1	39	57	0	56	58	29
2	0	3	57	1	0	4	1	40	52	1	55	21	1	38	55	0	55	10	28
3	0	5	55	1	1	45	1	41	48	1	55	18	1	37	51	0	53	22	27
4	0	7	53	1	3	24	1	42	44	1	55	13	1	36	45	0	51	32	26
5	0	9	51	1	5	3	1	43	36	1	55	6	1	35	38	0	49	41	25
6	0	11	49	1	6	41	1	44	28	1	54	57	1	34	29	0	47	50	24
7	0	13	46	1	8	17	1	45	18	1	54	46	1	33	18	0	45	57	23
8	0	15	43	1	9	52	1	46	6	1	54	33	1	32	5	0	44	4	22
9	0	17	41	1	11	25	1	46	52	1	54	17	1	30	50	0	42	9	21
10	0	19	38	1	12	58	1	47	36	1	54	0	1	29	34	0	40	15	20
11	0	21	34	1	14	30	1	48	18	1	53	40	1	28	16	0	38	19	19
12	0	23	30	1	16	0	1	48	59	1	53	18	1	26	56	0	36	22	18
13	0	25	26	1	17	29	1	49	37	1	52	54	1	25	35	0	34	25	17
14	0	27	21	1	18	57	1	50	14	1	52	28	1	24	12	0	32	27	16
15	0	29	16	1	20	22	1	50	48	1	52	0	1	22	48	0	30	28	15
16	0	31	10	1	21	47	1	51	20	1	51	31	1	21	21	0	28	29	14
17	0	33	4	1	23	10	1	51	51	1	50	58	1	19	54	0	26	29	13
18	0	34	57	1	24	32	1	52	19	1	50	24	1	18	24	0	24	29	12
19	0	36	49	1	25	52	1	52	46	1	49	48	1	16	53	0	22	28	11
20	0	38	41	1	27	11	1	53	10	1	49	9	1	15	21	0	20	27	10
21	0	40	32	1	28	28	1	53	32	1	48	29	1	13	48	0	18	26	9
22	0	42	23	1	29	44	1	53	52	1	47	47	1	12	13	0	16	24	8
23	0	44	13	1	30	59	1	54	11	1	47	2	1	10	36	0	14	21	7
24	0	46	2	1	32	11	1	54	27	1	46	16	1	8	58	0	12	19	6
25	0	47	50	1	33	21	1	54	41	1	45	27	1	7	19	0	10	16	5
26	0	49	37	1	34	30	1	54	53	1	44	37	1	5	38	0	8	13	4
27	0	51	24	1	35	38	1	55	3	1	43	45	1	3	57	0	6	10	3
28	0	53	10	1	36	44	1	55	11	1	42	51	1	2	14	0	4	7	2
29	0	54	55	1	37	48	1	55	16	1	41	55	1	0	30	0	2	3	1
30	0	56	38	1	38	51	1	55	20	1	40	57	0	58	44	0	0	0	0
Grad.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Gr.	M.	S.	Grad.
Mittlere Anomalie.	+ XI Zeichen.			+ X Zeichen.			+ IX Zeichen.			+ VIII Zeichen			+ VII Zeichen.			+ VI Zeichen.			Mittlere Anomalie.

Grade der sechs ersten Zeichen.

Grade der sechs letzten Zeichen.

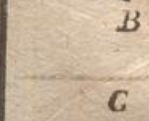
Tafel XII.

Auflösung geradlinichter Dreiecke.

1) der rechtwinklichten, worin bei B der rechte Winkel, und R = Sin. tot.

	Gegeben.	Gesucht.	Proportionen.
	AB, BC	$\sphericalangle C$ $\sphericalangle A$ AC	$CB : R = BA : Tang.\ C$ $AB : R = BC : Tang.\ A$ $\sqrt{(AB^2 + BC^2)}$; oder $Sin.\ A : R = CB : AC$
	AC, AB	$\sphericalangle C$ $\sphericalangle A$ BC	$CA : AB = R : Sin.\ C$ $90° - \sphericalangle C$ $R : Tang.\ A = AB : BC$; oder $\sqrt{(AC^2 - AB^2)}$
	$AB, \sphericalangle A$	$\sphericalangle C$ BC AC	$90° - \sphericalangle A$ $R : Tang.\ A = AB : BC$ $Cos.\ A : R = AB : AC$
	$AC, \sphericalangle A$ $(\sphericalangle C)$	$\sphericalangle C$ $(\sphericalangle A)$ BC AB	$90° - \sphericalangle A$; und $90° - \sphericalangle C = \sphericalangle A$ $R : Sin.\ A = AC : BC$ $R : Sin.\ C = AC : AB.$

2) der schiefwinklichten ebenen Dreiecke.

	AB, A, B	C BC AC	$180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B$ $Sin.\ C : Sin.\ A = AB : BC$ $Sin.\ C : Sin.\ B = AB : AC$ Fläche $= \frac{\frac{1}{2} AB^2 . Sin.\ A}{R . Sin.\ (B + A}$
	AC, BC, A	B C AB	$BC : AC = Sin.\ A : Sin.\ B$ $180° - \sphericalangle B - \sphericalangle A$ $Sin.\ B : Sin.\ C = AC : AB$ Fläche $= \frac{\frac{1}{2} AC . BC . Sin.\ (B+A)}{R}$
	AC, BC, C wenn AC größer, als BC	B A AB	$180° - \sphericalangle C = B + A$ $(AC + BC) : (AC - BC) = Tang.\ \frac{1}{2}(B + A) : Tang.\ d$ und $\frac{1}{2}(B + A) + d = B$ $\frac{1}{2}(B + A) - d = A$ $Sin.\ A : Sin.\ C = BC : AB$ Fläche $= \frac{\frac{1}{2} AC . BC . Sin.\ C}{R}$
	$AC, AB,$ BC und AC größer, als BC	B A C	$AB : (BC + AC) = (AC - BC) : x$ $BC : \frac{AB}{2} - \frac{1}{2} x = R : Cos.\ B$ $AC : \frac{AB}{2} + \frac{1}{2} x = R : Cos.\ A$ $180° - B - A.$ halbe Summe aller Seiten $= P$, so ist die Fläche $= \sqrt{[P . (P - AB) . (P - AC) . (P - BC)]}$.

Grade der sechs letzten Zeichen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel XIII.

Auflösung aller Kugeldreiecke ABC.

1) der rechtwinklichten, wo bei A der rechte Winkel, und r = Sin. tot.

Fall.	gegeben.	Gesucht.	Proportionen.	Das Gefundene ist kleiner als 90°, wenn:
1	AB, AC	BC	r : Cos. AB = Cos. AC : Cos. BC	AB und AC gleichartig.
2		B	r : Sin. AB = Cot. AC : Cot. B	AC kleiner, als 90°.
3		C	r : Cot. AB = Sin. AC : Cot. C	AB kleiner, als 90°.
4	AB, BC	AC	Cos. AB : r = Cos. BC : Cos. AC	BC und AB gleichartig.
5		B	r : Tang. AB = Cot BC. : Cos B	BC und AB gleichartig.
6		C	Sin. BC : Sin. AB = r : Sin. C	AB kleiner, als 90°.
7	AB, B	AC	r : Sin. AB = Tang. B : Tang. AC	B kleiner, als 90°.
8		BC	r : Cot. AB = Cos. B : Cot. BC	AB und B gleichartig.
9		C	r : Cos. AB = Sin. B : Cos. C.	AB kleiner, als 90°.
10	AB, C	AC	r : Tang. AB = Cot. C : Sin. AC	zweideutig.
11		BC	Sin. C : Sin. AB = r : Sin. BC	
12		B	Cos. AB : Cos. C = r : Sin. B	
13	AC, BC	AB	Cos. AC : Cos. BC = r : Cos. AB	BC und AC gleichartig.
14		B	Sin. BC : Sin. AC = r : Sin. B	AC kleiner, als 90°.
15		C	r : Tang. AC = Cot. BC : Cos. C	AC und AB gleichartig.
16	AC, B	AB	r : Tang. AC = Cot. B : Sin. AB	zweideutig.
17		BC	Sin. B : Sin. AC = r : Sin. BC	
18		C	Cos. AC : Cos. B = r : Sin. C	
19	AC, C	AB	r : Sin. AC = Tang. C : Tang. AB	C kleiner, als 90°.
20		BC	r : Cot. AC = Cos. C : Cot. BC	AC und C gleichartig.
21		B	r : Cos. AC = Sin. C : Cos. B	AC kleiner, als 90°.
22	BC, B	AB	r : Tang. BC = Cos. B : Tang. AB	BC und B gleichartig.
23		AC	r : Sin. BC = Sin. B : Sin. AC	B kleiner, als 90°.
24		C	r : Cos. BC = Tang. B : Cot. C	BC und B gleichartig.
25	BC, C	AB	r : Sin. BC = Sin. C : Sin. AB	C kleiner, als 90°.
26		AC	r : Tang. BC = Cos. C : Tang. AC	BC und C gleichartig.
27		B	r : Cos. BC = Tang. C : Cot. B	BC und C gleichartig.
28	B, C	AB	Sin. B : Cos. C = r : Cos. AB	C kleiner, als 90°.
29		AC	Sin. C : Cos. B = r : Cos. AC	B kleiner, als 90°.
30		BC	r : Cot. B = Cos C : Cos. BC	B und C gleichartig.

Auflösung aller Kugeldreiecke.

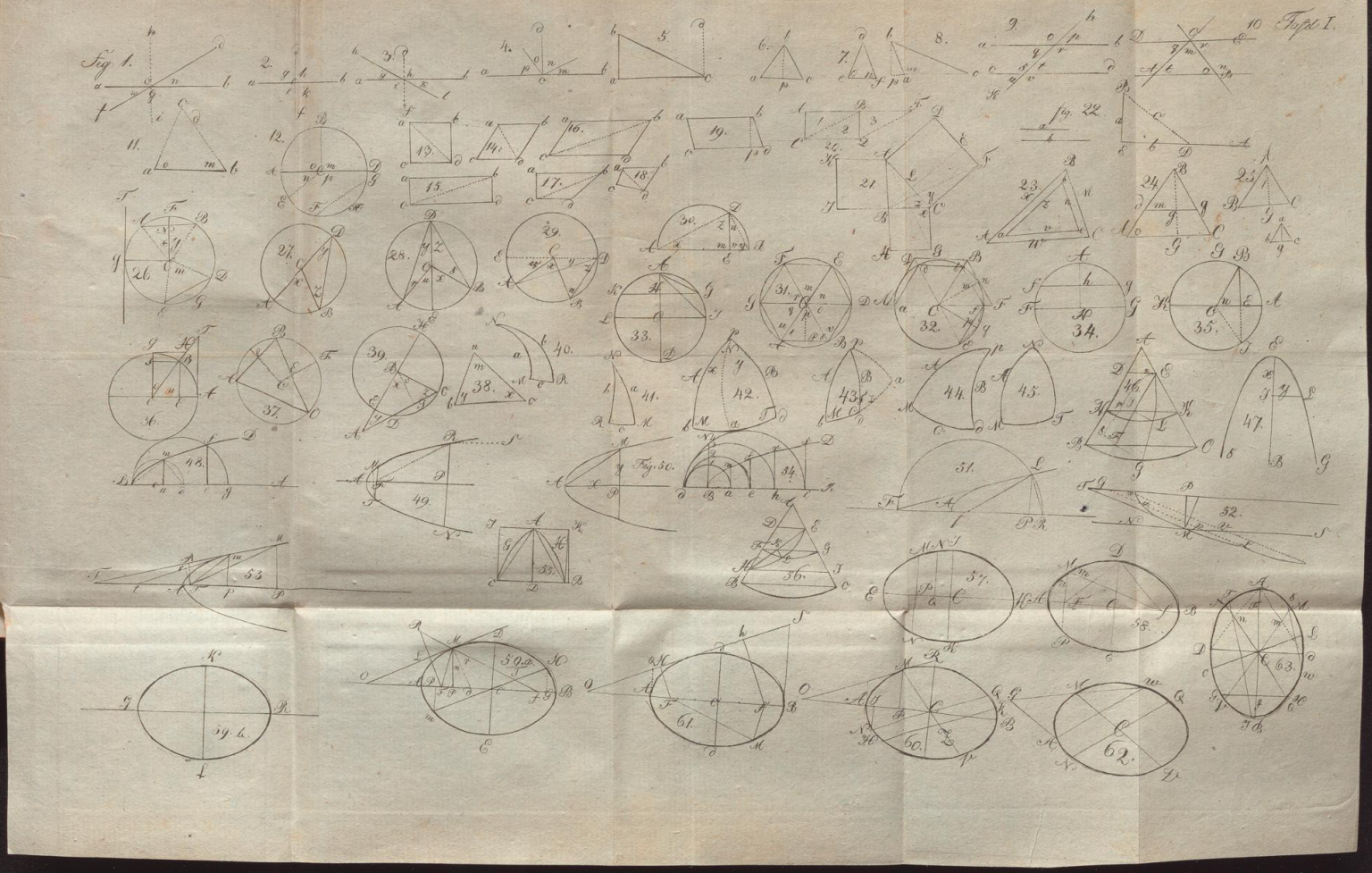
2) der schiefwinklichten.

1) Zwei Winkel und eine dem einen Winkel gegenüberliegende Seite sind gegeben: man sucht die dem andern gegenüberliegende Seite.	Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern, C zum dritten Winkel. Dann gilt Sin. A : Sin. BC = Sin. B : Sin. AC. AC kann größer und kleiner, als 90° seyn.
2) Zwei Winkel und eine dem einen Winkel gegenüber liegende Seite sind gegeben: man sucht den 3ten Winkel.	Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern bekannten Winkel, C zum gesuchten. Fället von C das Perpendikel CD auf AB (oder deren Verlängerung) und schließet: r : Cos. BC = Tang. B : Cot. BCD Cos. B : Cos. BAC = Sin. BCD : Sin. ACD. Nachdem nun die Winkel A, B gleichartig oder ungleichartig sind, so ist auch im ersten Fall BCD + ACD = C; im andern ist C die Differenz.
3) Zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite sind gegeben; man sucht die zwischen beiden Winkeln liegende Seite.	Setzet A zu dem Winkel, dessen gegenüberliegende Seite gegeben ist, B zum andern bekannten Winkel, C zum dritten. Fället von C das Perpendikel CD auf AB (oder deren Verlängerung). r : Cos. B = Tang. BC : Tang. BD Tang. A : Tang. B = Sin. BD : Sin. AD. Wenn A und B gleichartig, so ist BD + DA = AB; wenn sie ungleichartig, die Differenz.
4) Zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite sind gegeben; man sucht eine von den beiden übrigen Seiten.	Setzet B zu dem Winkel, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, C zum andern gegebenen Winkel, A zum 3ten Winkel. Fället aus C das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung; und schließet; r : Cos. BC = Tang. B : Cot. BCD. BCD ist entweder die Summe oder Differenz des Winkels BCD und BCA, woraus sich ACD ergiebt. Ferner Cos. BCD : Cos. ACD = Cot. BC : Cot. AC und AC ist kleiner, als 90°, wenn Winkel ACD und B gleichartig.
5) Zwei Winkel und die zwischenliegende Seite sind gegeben; man sucht den dritten Winkel.	Setzet B und C zu den gegebenen Winkeln, A zum gesuchten. Fället das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung, und schließet: r : Cos. BC = Tang. B : Cot. BCD. Der Winkel ACD ist die Summe oder Differenz der Winkel BCD und BCA, je nachdem das Perpendikel fällt. Sin. BCD : Sin. ACD = Cos. B : Cos. A. Ist also ∠ BCD kleiner, als der gegebene BCA, so ist der gesuchte ∠ A mit dem gegebenen gleichartig; ist aber BCD größer, als BCA, so sind A und B ungleichartig.
6) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel.	Setzet A zum gegebenen Winkel, B zu dem von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel, und C zum gesuchten. Sin. BC : Sin. AB = Sin. A : Sin. C. Der Winkel C kann spitzig oder stumpf seyn, und ist durch die gegebenen Seiten allein nicht bestimmt.

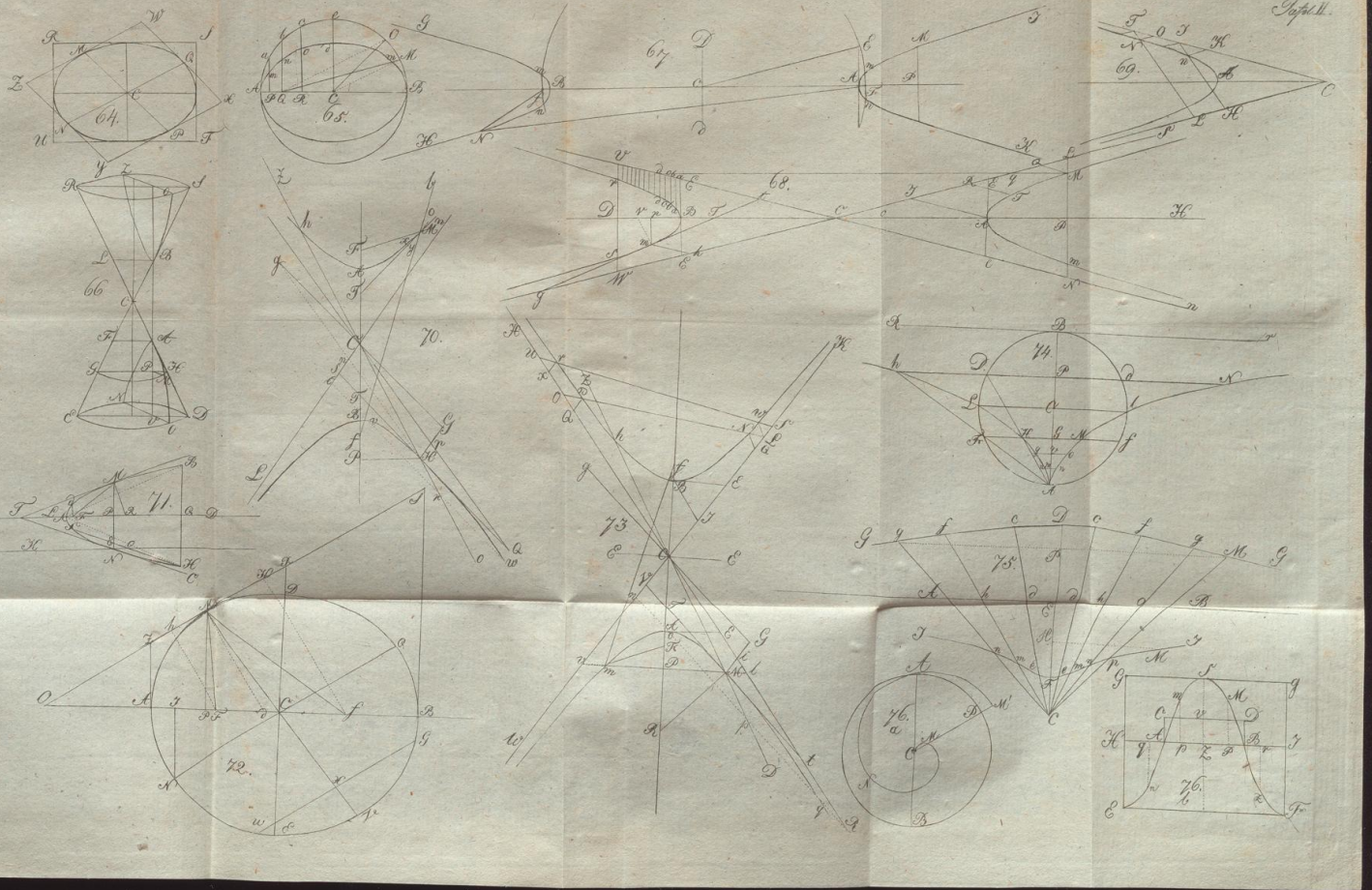
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

7) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht die dritte Seite.	Setzet B zum gegebenen Winkel, C zu dem, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt, A zum dritten Winkel, fället von C das Perpendikel CD, und schließet: r : Tang. BC = Cos. B : Tang. BD Cos. BC : Cos. AC = Cos. BD : Cos. AD. Wenn BC und AC gleichartig, so ist BD + AD = AB; wo nicht, so ist AB die Differenz zwischen BD und AD.
8) Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel sind gegeben; man sucht den von den bekannten Seiten eingeschlossenen Winkel.	Setzet B zum gegebenen, C zum gesuchten, A zum dritten Winkel. Fället von C das Perpendikel CD auf AB oder deren Verlängerung. r : Cos. BC = Tang. B : Cos. BCD Tang. AC : Tang. BC = Cos. BCD : Cos. ACD. Sind nun AC und B gleichartig, so ist BCD + ACD = C; wo nicht, so ist C die Differenz zwischen BCD und ACD.
9) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben; man sucht einen von den übrigen Winkeln.	Setzet B zum gegebenen, A zum gesuchten, C zum dritten Winkel. Fället von C das Perpendikel CD auf AB, und schließt: r : Tang. BC = Cos B : Tang. BD. Nehmet die Summe oder Differenz von BD und AB, je nachdem das Perpendikel auf AB trifft, so ergiebt sich AD. Darauf: Sin. AD : Sin. BD = Tang. B : Tang. A. Je nachdem AB größer, oder kleiner ist, als BD, so ist < A mit < B gleich- oder ungleichartig.
10) Zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel sind gegeben; man sucht die dritte Seite.	Setzet B zum gegebenen Winkel, BC sey die gegebene kleinere, und BA die größere Seite. Fället das Perpendikel CD, welches fast immer innerhalb des △ treffen wird. r : Tang. BC = Cos. B : Tang. BD. Ziehet BD von AB ab (oder wenn das Perpendikel außerhalb trifft, addiret BD und AB), so kommt AD. Cos. BD : Cos. AD = Cos. BC : Cos. AC. Je nachdem nun AD mit CD oder dem < A gleichartig oder ungleichartig ist, ist auch AC größer oder kleiner, als 90°.
11) Alle drei Seiten sind gegeben; man sucht einen Winkel.	Setzet A zum gesuchten Winkel, B und C zu den übrigen. Addiret alle drei Seiten, halbiret die Summe, und nennet das Kommende P, oder $\frac{AB + AC + BC}{2} = P$; dann ist $\text{Sin. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{r^2 \cdot \text{Sin. } (P - AB) \cdot \text{Sin. } (P - AC)}{\text{Sin. } AB \cdot \text{Sin. } AC}}$.
12) Alle drei Winkel sind gegeben; man sucht eine Seite.	Es sey BC die gesuchte Seite, A der ihr gegenüberliegende Winkel. Addiret die drei Winkel, halbiret die Summe, und nennet das Kommende P, oder $\frac{A + B + C}{2} = P$. Dann ist 1) $\text{Cos. } \frac{1}{2} BC = \sqrt{\frac{r^2 \cdot \text{Cos. } (P - C) \cdot \text{Cos. } (P - B)}{\text{Sin. } C \cdot \text{Sin. } B}}$; oder 2) $\text{Sin. } \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{r^2 \cdot \text{Cos. } P \cdot \text{Cos. } (P - A)}}{\text{Sin. } C \cdot \text{Sin. } B}$.

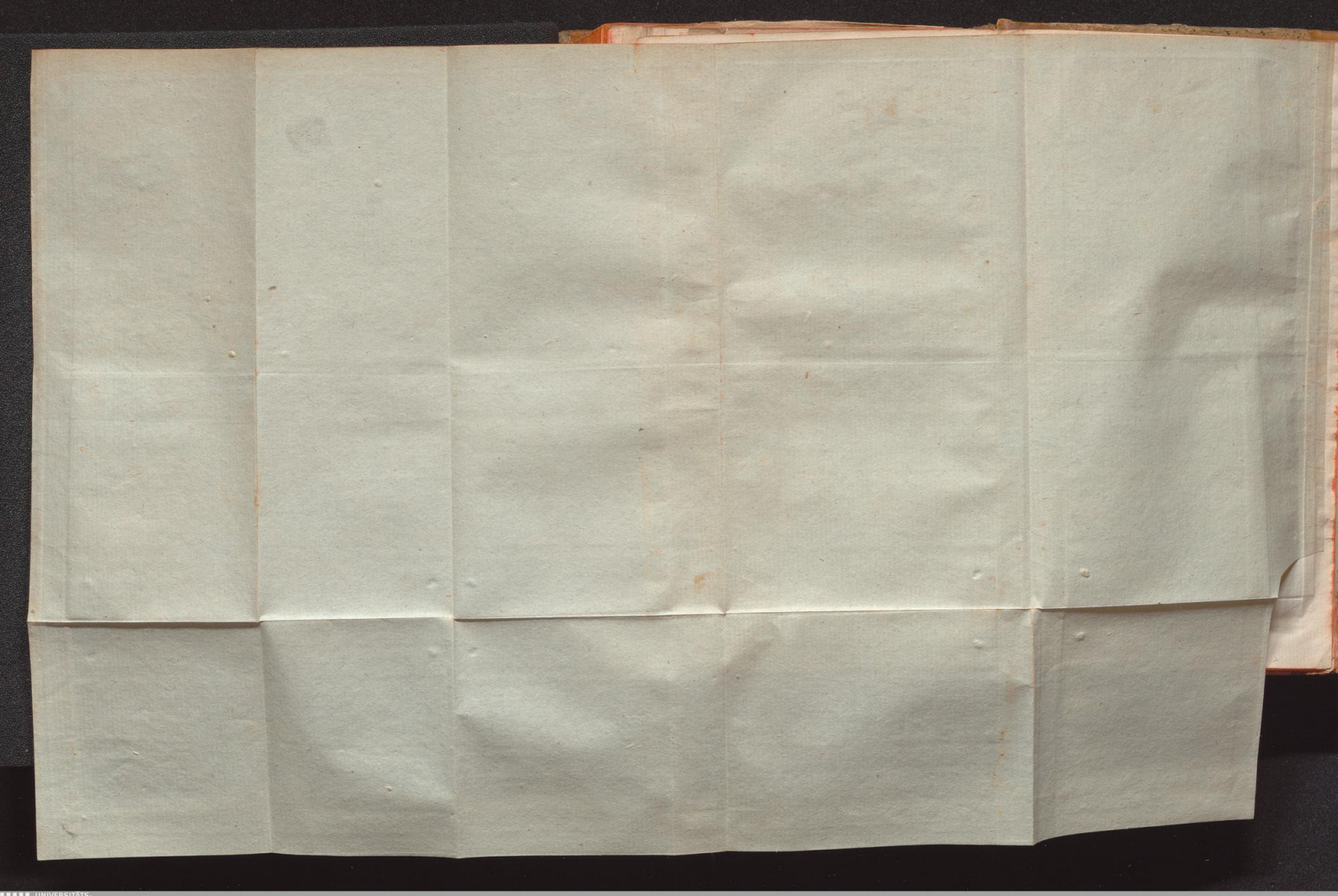
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN


Tafel I.
Fig. 1.
Fig. 50.

Tafel II.

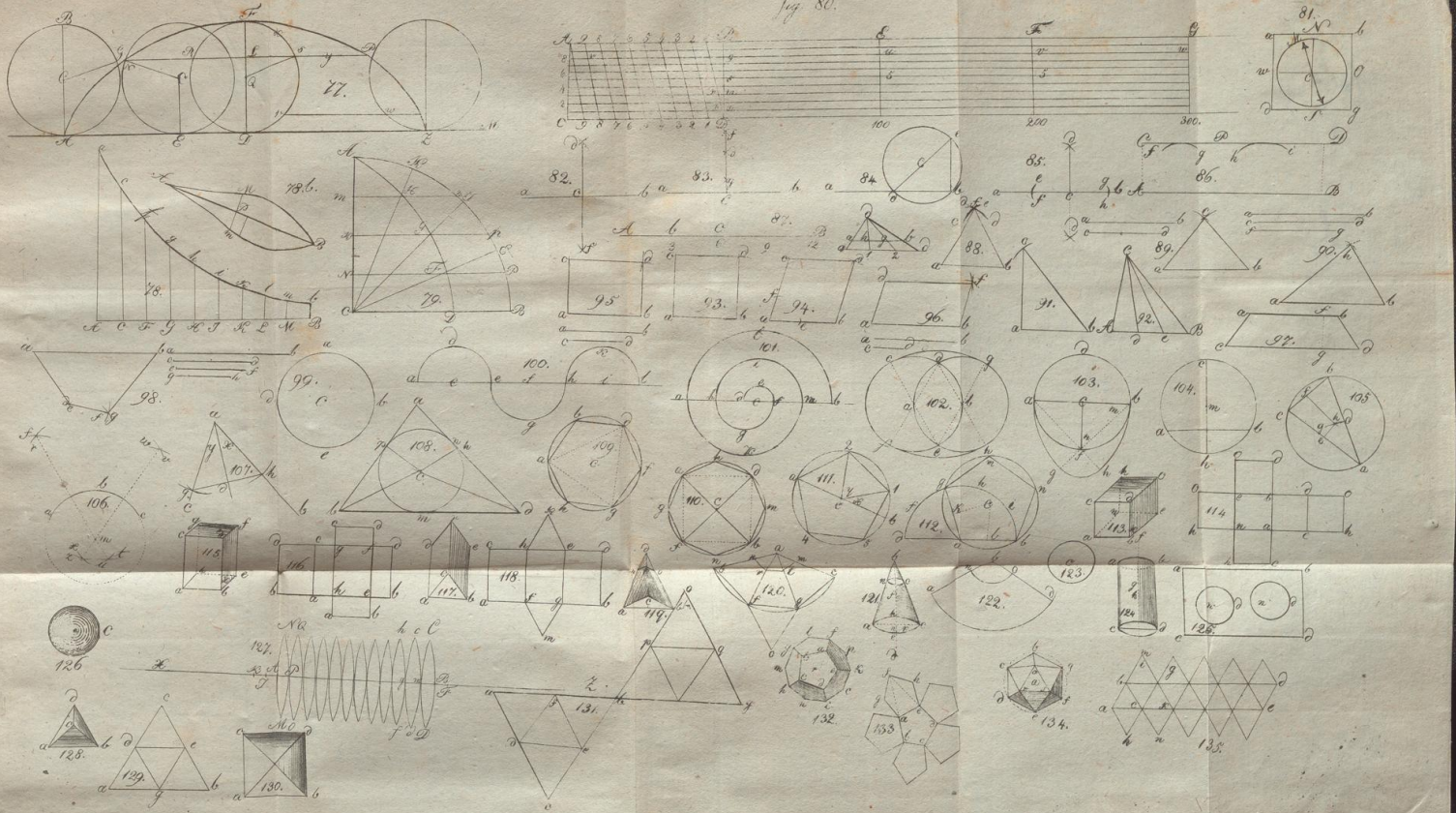


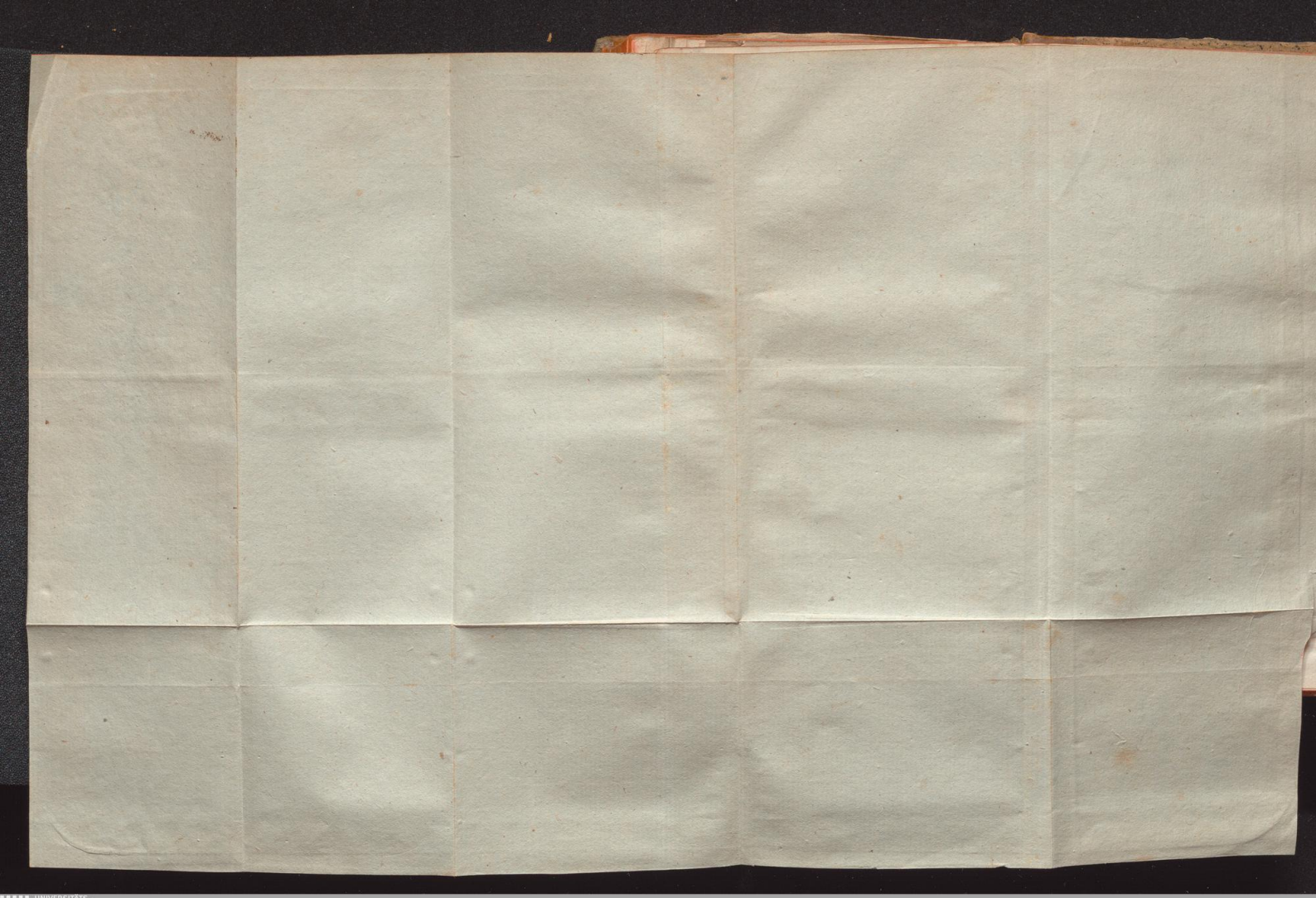
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

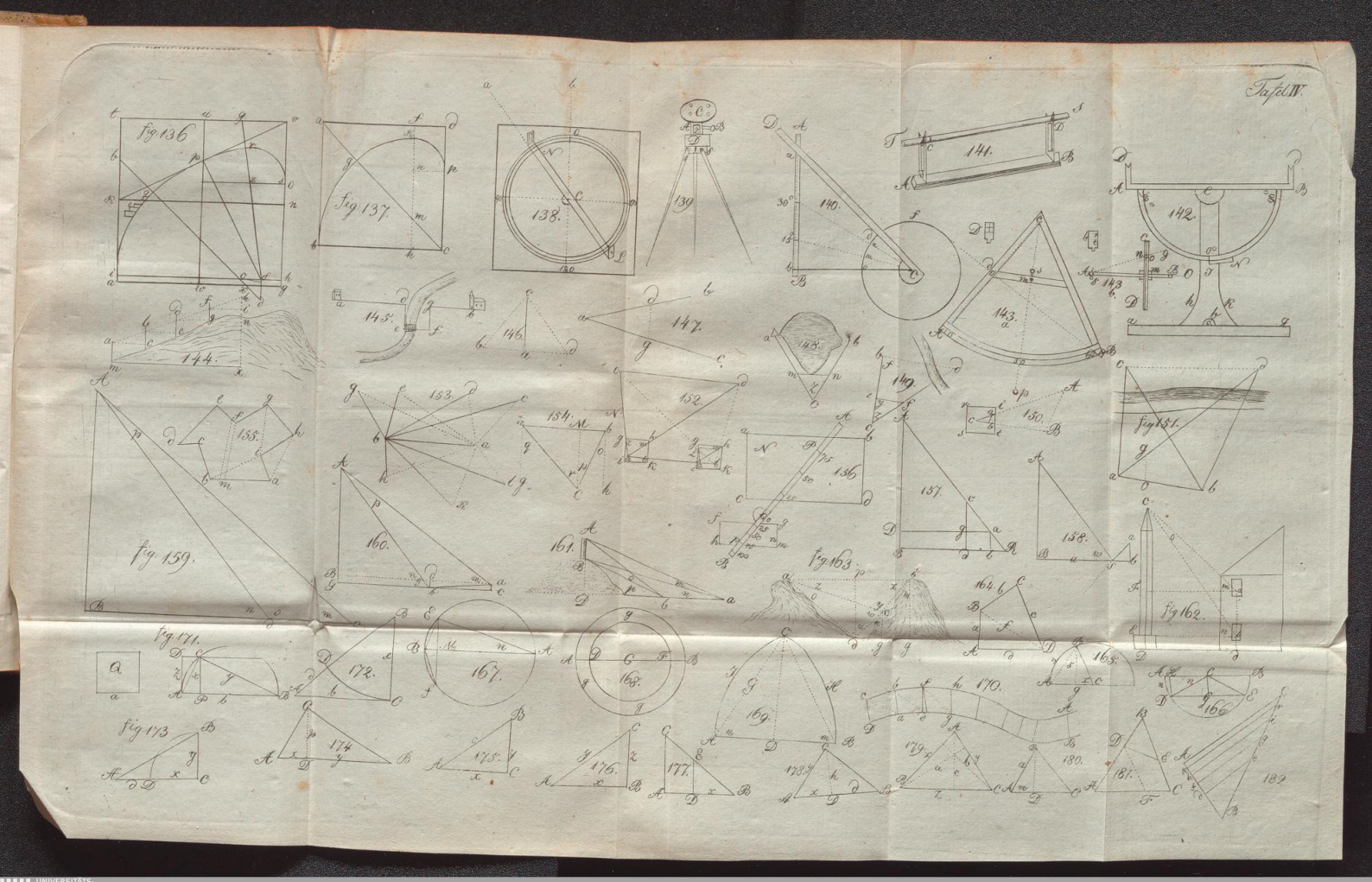
Tafel III

Fig 80.

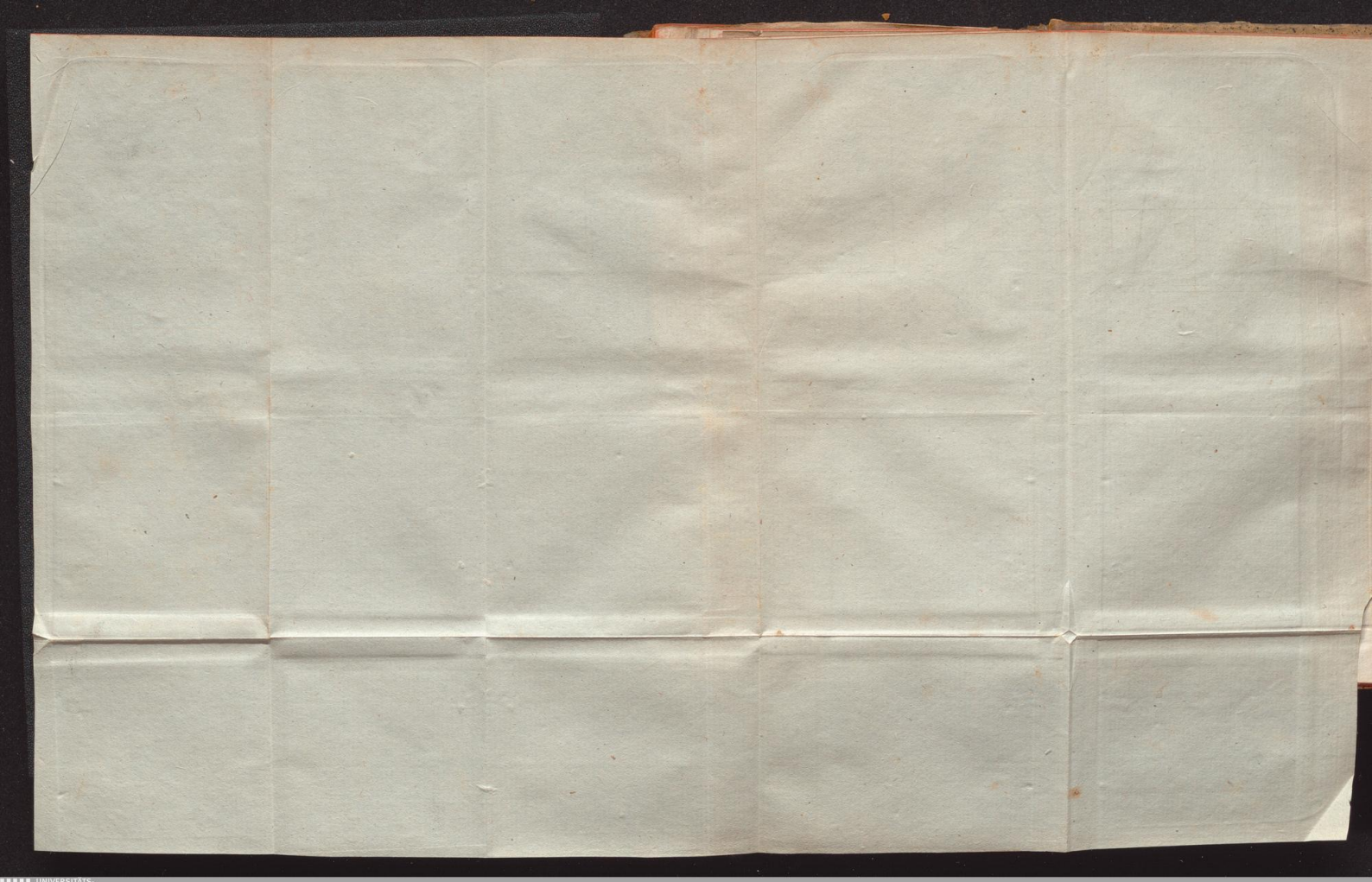




UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tafel V.

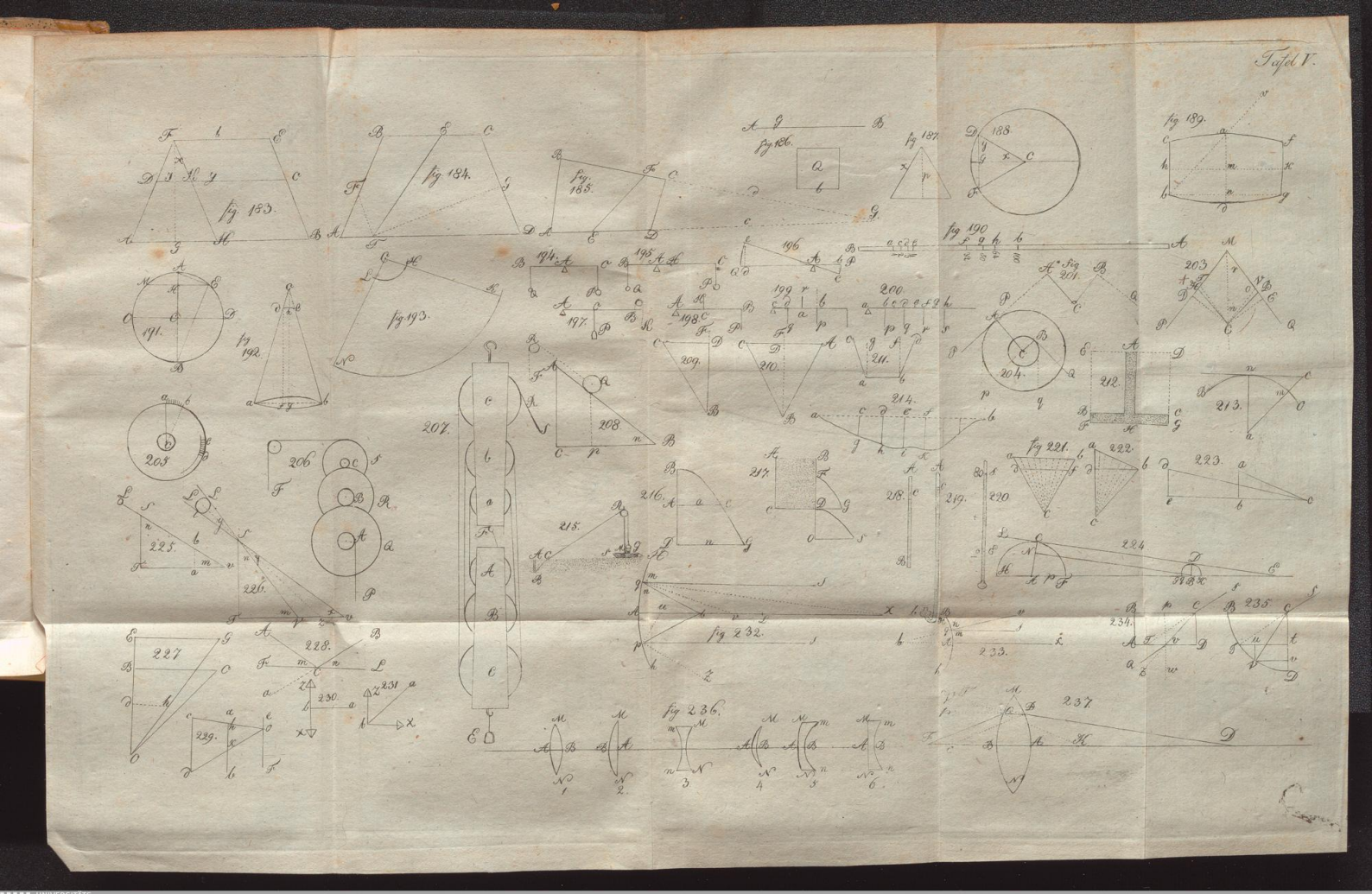
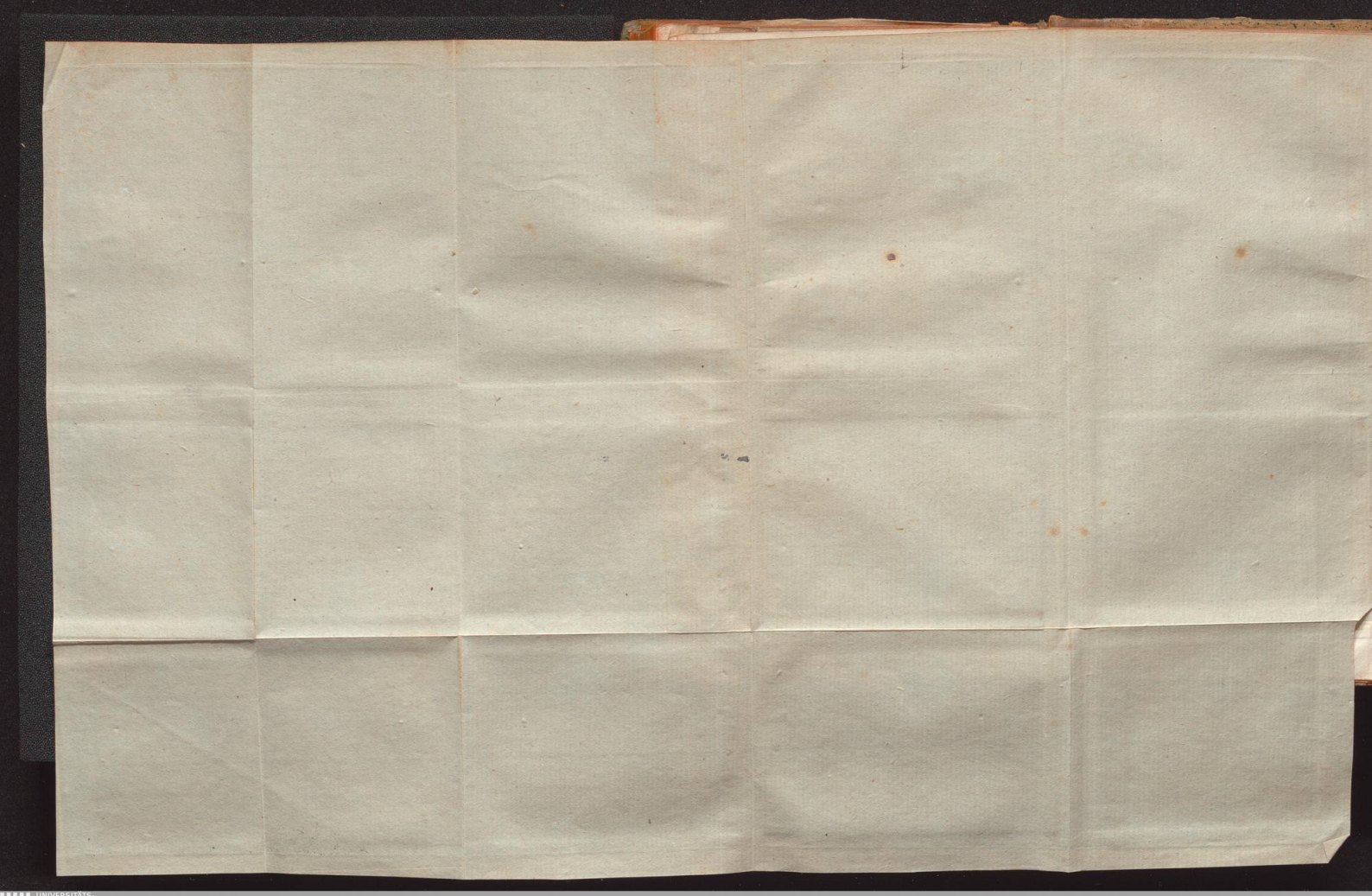
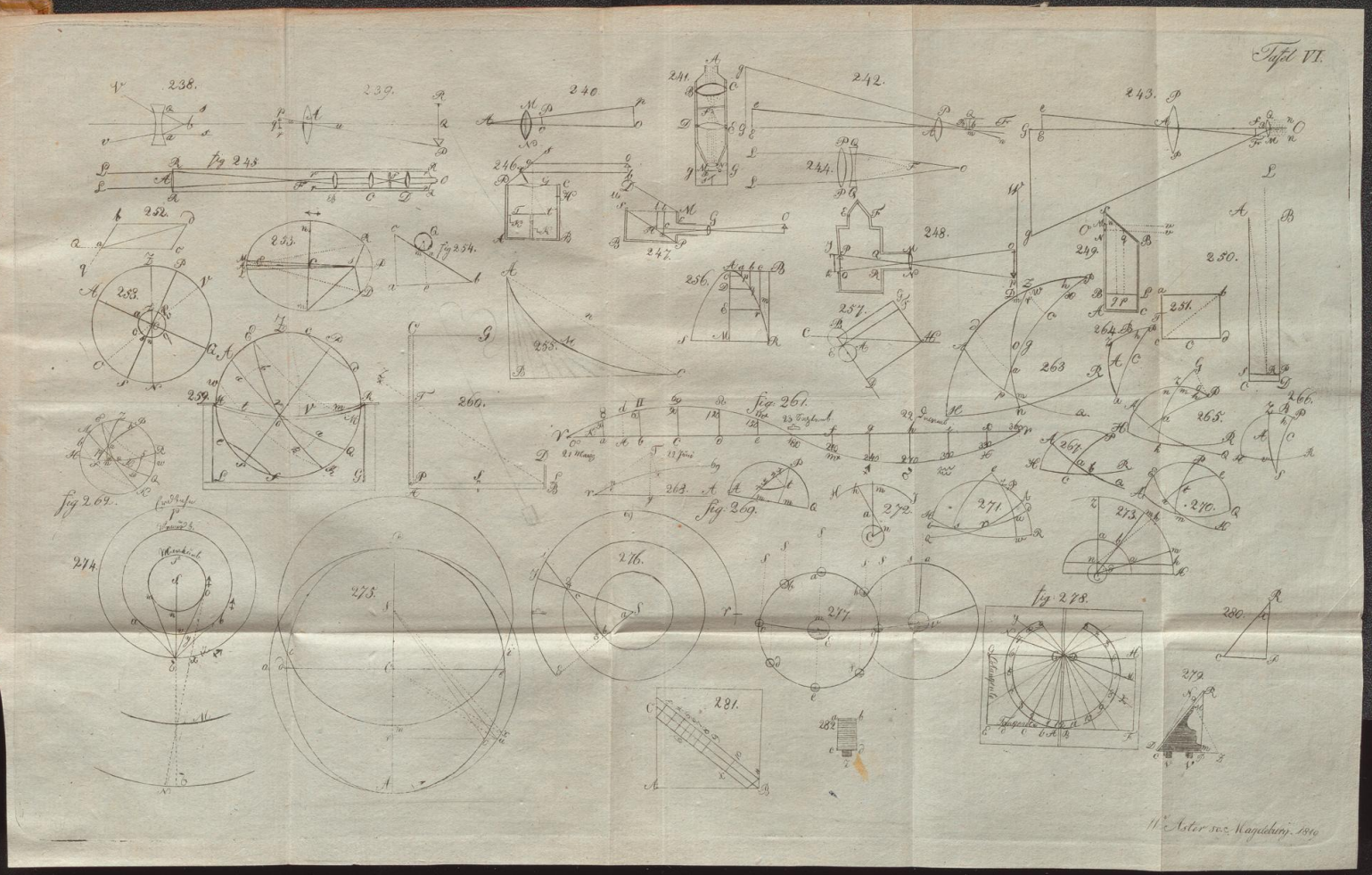
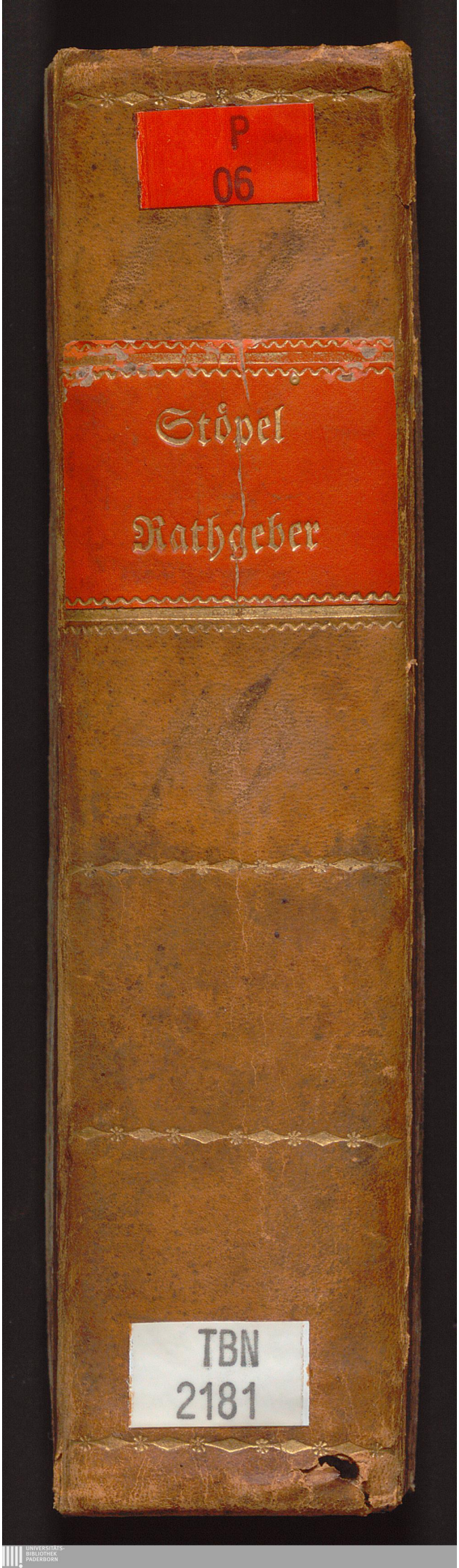


fig 183.
fig 184.
fig 185.
fig 186.
fig 187.
188
fig 189.
fig 190
191.
fig 192.
fig 193.
194.
195.
196
197.
198.
199
200
201.
203
204.
206
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220
221.
222.
223.
224
225.
226.
227
228.
229.
230.
231
232.
233.
234.
235
236.
237.


UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN


Tafel VI.
238.
239.
240.
241.
242.
243.
fig 245.
244.
246.
247.
248.
249.
250.
251.
252.
253.
fig 254.
255.
256.
257.
258.
259.
260.
261.
263.
264.
265.
266.
267.
268.
269.
270.
271.
272.
273.
274.
275.
276.
277.
278.
279.
280.
281.
282.
fig 262.
fig 263.
fig 264.
fig 265.
fig 266.
fig 267.
fig 268.
fig 269.
fig 270.
fig 271.
fig 272.
fig 273.
fig 274.
fig 275.
fig 276.
fig 277.
fig 278.
fig 279.
W. Aster sc. Magdeburg. 1810


P
06
Stöpel
Rathgeber
TBN
2181