UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Visual Library

Leonhard Eulers

Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen.

Aus dem Lateinischen übersetzt

und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet

von

Johann Andreas Christian Michelsen,

Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cölnischen Gymnasium.

Erstes Buch.

Berlin,

bey Carl Matzdorff

1788.

Universitäts-Gesamthochschule
Bibliothek
15
Paderborn
1988.4562 G
06
THU
3225-1 19

Vorrede
des
Uebersetzers.

Ich habe nicht nöthig, meine Vorrede mit Beweisen für die Wichtigkeit des Werks, wovon ich hier den Liebhabern der mathematischen Wissenschaften den ersten Band, übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet, übergebe, anzufüllen Der berühmte Name seines unsterblichen Verfassers überhebt mich dessen, und ich zeige daher nur den Inhalt davon mit des Hrn. Prof. Fuß *) Worten an. In diesem Werke ist die ganze Lehre von den algebraischen und transcendenten Funktionen, ihre Umformung, Auflösung und Entwickelung aus einander gesetzt. Es enthält alles Nützliche und Wissenswürdige über die Eigenschaften und Summationen unendlicher Reihen, und weiset einen neuen und merkwürdigen Weg, die Exponentialgröße zu behandeln. Es giebt einen

*) In der Lobrede auf Eulern, die Basel 1786 von dem Hrn. V. selbst übersetzt herausgekommen ist, S. 64 65.

deutlichern und fruchtbarern Begriff von den Logarithmen und deren Gebrauche, und setzt den neuen von Eulern entdeckten Algorithmus der Kreis- oder Winkelgrößen ins Licht. Im zweyten Theile giebt er die allgemeine Lehre von den krummen Linien, mit ihren Abtheilungen und Unterabtheilungen, und in einem Zusatze die Theorie der Körper und ihrer Oberflächen, nebst der daraus entstehenden Gleichungen mit drey veränderlichen Größen. Den Beschluß dieses wichtigen Werks macht die Entwickelung des Begriffs der doppelt gekrümmten Linien, die aus der Durchschneidung zweyer krummen Flächen entstehen.

Was meine Uebersetzung betrifft, so habe ich dabey so treu als möglich zu seyn gesucht, indem von einem Manne, wie Euler war, alles wichtig ist. Am allerwenigsten habe ich es mir, wie Hr. Pezzi in seiner zu Strasburg 1786 erschienenen französischen Uebersetzung, erlaubt, ganze Absätze wegzulassen. Nur an ein Paar Orten, nemlich am Ende des 228sten § im dreyzehnten und §. 235 im vierzehnten Capitel habe ich eine geringe Aenderung vorgenommen, aber dabey zugleich angemerkt, wie die veränderten Stellen im Originale heißen. Undeutlich fürchte ich durch meine Treue nicht geworden zu seyn, ob ich gleich glauben muß, daß dadurch hier und da eine lateinische Wendung eingeflossen seyn werde.

In

In den hinzugefügten Anmerkungen und Zusätzen habe ich theils die Stellen, welche mir für diejenigen, für die Euler eigentlich geschrieben hat, nicht deutlich genug zu seyn schienen, zu erläutern und leichter zu machen gesucht, und dies ist besonders in den unmittelbar nach verschiedenen §§ stehenden Anmerkungen geschehen; theils habe ich darin aus andern Eulerischen Schriften verschiedene Auszüge mitgetheilt, wodurch das Ganze eine größere Vollständigkeit und Brauchbarkeit erhält. Denn einmal finden sich Stellen, worin Euler Kenntnisse aus der gemeinen Algebra voraussetzt, die darin nicht so ausführlich vorgetragen werden, z. B. die Eliminations-Methode und der Binomische Lehrsatz, im größten Umfange, und ohne Differential-Rechnung bewiesen. Zweytens führt er bisweilen Sätze, auf welche er die wichtigsten Untersuchungen bauet, bloß historisch an, z. B. den Satz von der Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in reelle einfache oder doppelte Faktoren §. 32, und den Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln §. 166. Endlich schien es mir nützlich, manche von den abgehandelten Materien noch nach einer andern Methode bearbeitet mitzutheilen, und außerdem auch einige etwas weiter zu führen, und auf besondere Fälle anzuwenden. Auf diese Art ist der Anhang entstanden. In demselben

liefere ich zuvörderst von jedem Capitel eine tabellarische und ausführliche Darstellung seines Inhalts, um dadurch die Uebersicht des Ganzen zu erleichtern, und hoffe dadurch, manchem wenigstens, einen nicht unangenehmen Dienst geleistet zu haben. Dann folgen die gedachten Auszüge, z. B. vollständige Auseinandersetzungen einiger aus der gemeinen Algebra vorausgesetzten Gegenstände, Zusatz B zum ersten und Zusatz D zum vierten Capitel; Beweise solcher Sätze, die Euler nur historisch angeführt hat, Zusatz B zum zweyten und Zusatz B zum zehnten Capitel; vollständigere Beweise einiger andern Sätze, Zusatz B zum achten, und Zusatz B zum vierzehnten Capitel; einige von den im Werke untersuchten Materien, nach einer andern Methode behandelt, Zusatz B zum neunten und Zusatz C zum zehnten Capitel; weitere Ausführungen einiger Untersuchungen und Anwendungen auf besondere Fälle, Zusatz C zum vierzehnten und Zusatz C zum sechszehnten Capitel. Weitläuftiger als bey irgend einem andern Gegenstande habe ich in den Zusätzen zum siebenten und achten Capitel, welche die Theorie der Logarithmen betreffen, seyn müssen; und so wie ich bey den übrigen fast durchaus aus andern Eulerischen Schriften schöpfen konnte, so habe ich mich hier zum Theil ganz von Eulern zu entfernen gezwungen gesehen. Daß ich es darin nicht bloß bey der von ihm mitgetheilten Regel für die Er-

Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen bewenden gelassen, sondern außer einer ganz allgemeinen Regel auch die Regeln zur Erfindung der Logarithmen größerer und sehr großer Zahlen, die nicht in den Tafeln stehen, mitgetheilt habe, davon brauche ich nichts zu sagen, das wird hoffentlich den meisten Lesern willkommen seyn. Aber hier zeigten sich noch mehrere Lücken. Die gewöhnlichen Beweise der Formel

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \text{&c.}$$

erstrecken sich nicht weiter als für den Fall, wenn x eine positive oder absolute Zahl ist; daß

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{&c.}$$

sey; erfordert einen besondern Beweis, den ich S. 486 und 487. Abs. 9 u. 10 geführt habe: allein dabey gilt diese Formel auch nur für den Fall, wenn x ein ächter Bruch ist, und doch muß man beyde Formeln, selbst wegen §. 140 der Einleitung, ohne Einschränkung als wahr ansehen können. Nun scheint es zwar, als ob die angeführten Sätze durch die Differential Rechnung eine weitere Ausdehnung erhalten, allein da man dabey die Formel, $dlx = \frac{dx}{x}$, braucht, und diese bey genauerer

Erwägung durch die gewöhnlichen Beweise, zu keiner allgemeinen Formel erhoben wird, so verschwindet dadurch dieser Schein wieder. Gleichwohl kann man nicht zugeben, daß die Formel $d\,lx = \frac{dx}{x}$ nicht für jeden Werth von x richtig sey, und ohne die Theorie der Logarithmen der nicht absoluten Zahlen vollständig entwickelt zu haben, hat man doch kein Recht, sie als allgemein gültig zu betrachten. Aus diesen Gründen hielt ich es für meine Pflicht von den Logarithmen der nicht absoluten, und insbesondere der negativen und unmöglichen, Zahlen ausführlich zu reden: und wenn ich gleich das, was ich darüber beygebracht habe, für nichts weiter als für einen Versuch ausgeben kann, diese Materie aufzuklären, so scheint mir derselbe doch der prüfenden Aufmerksamkeit der Kenner nicht unwürdig, da die Resultate meiner Untersuchungen den gewöhnlichen Behauptungen oft geradezu widersprechen, und doch dadurch so manche Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen aus dem Wege geräumt werden. So muß ich z. B. die unendliche Menge der unmöglichen Logarithmen, die jede positive Zahl außer dem reellen haben soll, schlechthin leugnen, und dagegen jeder negativen und imaginären Zahl eben sowohl als den positiven einen reellen Logarithmen beylegen, und jeden Logarithmen als zu einer unendlichen Menge von Zahlen gehörig betrachten, davon aber der

größte

größte Theil imaginär und nur zwey reell sind. Gern will ich mich belehren lassen, wo ich gefehlt habe, indeß da ich alle meine Behauptungen mit Gründen zu belegen gesucht habe, so wünschte ich auch durch Gründe widerlegt zu werden, um dadurch entweder zur Verwerfung meiner Theorie bewogen, oder zu ihrer weitern Vervollkommnung in den Stand gesetzt zu werden.

Da die auf diese Art gelieferten Zusätze mehr als die Hälfte der Uebersetzung betragen, so habe ich vieles weglassen müssen, was ich so gern noch hinzugefügt hätte. Gern hätte ich z. B. den Beweis des Satzes, daß alle unmögliche Größen auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ gebracht werden können, mitgenommen; gern die Lehre von der Summation unendlicher Reihen auch aus den Schriften anderer Mathematiker, unter andern aus des für die Erweiterung der Grenzen der höhern Mathematik viel versprechenden Herrn Prof. Pfaffs Versuche einer neuen Summations-Methode, Berlin 1788, bereichert; gern die Theorie der continuirlichen Brüche weiter ausgeführt, und eben so gern die Geschichte mancher Sätze ausführlicher mitgetheilt. Wird indeß das was ich geliefert habe, von Kennern nicht für unzweckmäßig erkannt; darf ich hoffen, dadurch Liebhabern der Mathematik einen nicht unangenehmen Dienst zu leisten: so habe ich mir bereits zu einem dritten Theile, der lauter Zusätze enthalten soll, eine beträchtliche Menge

von

von Materien gesammlet, und da ich darin nicht so sehr, wie in den gegenwärtigen Zusätzen, den Gebrauch der Differential- und Integral-Rechnung zu vermeiden haben würde, so werde ich da auch mehrere Untersuchungen weit vollständiger und zweckmäßiger liefern können, als es hier möglich oder nützlich gewesen wäre.

Daß übrigens dieser erste Band später erscheint, als er versprochen war, daran ist lediglich der Mangel an Papier Ursach gewesen, der verwichenen Winter so allgemein statt gefunden hat. Beym zweyten Theil, an den bereits gedruckt wird, soll, hoffe ich, dieses Hinderniß nicht eintreten, und dann erscheint derselbe gegen Weyhnachten. Diesem zweyten Theile werde ich auch ein vollständiges Verzeichniß der eingeschlichenen Druckfehler in beyden Theilen beyfügen, vorläufig sind am Ende einige angezeigt. Berlin, den 16ten August 1788.

Vorrede

des

Verfassers.

Die Schwierigkeiten, welche Liebhaber der Mathematik bey der Erlernung der Analysis des Unendlichen anzutreffen pflegen, rühren, wie ich oft bemerkt habe, größtentheils daher, daß sie sich sogleich, wenn sie kaum die Anfangs-Gründe der Algebra begriffen haben, zu diesem Theile der höhern Mathematik wenden: ein Verfahren, wobey sie nicht nur auf halben Wege stehen zu bleiben gezwungen sind, sondern auch schwerlich andere als falsche Be-

griffe von dem mathematischen Unendlichen haben können. Denn obgleich die Analysis des Unendlichen keine vollkommene Kenntniß der gemeinen Algebra und aller bis jetzt entdeckten Kunstgriffe voraussetzt; so giebt es doch eine Menge von Untersuchungen, wodurch der Weg zu dieser erhabenen Wissenschaft gebahnt werden kann, und die gleichwohl in den gewöhnlichen Compendien entweder ganz übergangen, oder doch nicht mit der erforderlichen Sorgfalt angestellt werden. Diesem Mangel hoffe ich durch das gegenwärtige Werk abzuhelfen. Denn ich habe darin nicht nur die Gegenstände, welche die Analysis des Unendlichen nothwendig voraussetzt, vollständiger und deutlicher abgehandelt als es gewöhnlich geschiehet; sondern es enthält dasselbe auch sehr viele Untersuchungen, wodurch die Leser allmählich und gleichsam unvermerkt mit dem Begriffe des Unendlichen vertraut werden. Außerdem sind darin mehrere Aufgaben, die man sonst erst in der Analysis des Unendlichen findet, bloß mit Hülfe der gemeinen Algebra aufgelöset, wodurch denn die vollkommene Uebereinstimmung beyder Methoden in der Folge deutlich in die Augen fällt.

Ich habe dieses Werk in zwey Bücher getheilt. Das erste beschäftiget sich mit bloß analytischen Ge-

gen-

genständen, das andere aber enthält die nöthigen geometrischen Untersuchungen, weil man auch mit dem Vortrage der Analysis des Unendlichen die Anwendung derselben auf die Geometrie zu verbinden pflegt. In beyden Büchern habe ich, mit Weglassung des Elementarischen, bloß solche Materien abgehandelt, welche sonst entweder gar nicht, oder nicht auf die bequemste Art untersucht, oder aus andern Quellen abgeleitet werden.

Im ersten Buche findet man also, weil die veränderlichen Größen und die Funktionen derselben den Gegenstand der Analysis des Unendlichen ausmachen, zuvörderst eine ausführliche Betrachtung der Funktionen, ihrer Umformung, Auflösung, und Entwickelung durch unendliche Reihen. Ich habe dabey die verschiedenen Arten der Funktionen angeführt, die in der höhern Analysis vorkommen. Ich theile die Funktionen zuerst in algebraische und in transcendente; jene werden nach den in der gemeinen Algebra üblichen Operationen aus den veränderlichen Größen zusammengesetzt, diese hingegen erhält man theils auf andern Wegen, theils durch die erwähnten Operationen, aber unendlichemal wiederholt. Von den Unterabtheilungen der algebraischen Funktionen ist vorzüglich die Eintheilung derselben in rationale und in irratio-

nale wichtig. Jene habe ich sowohl in einfachere Theile als in ihre Faktoren auflösen gelehret; eine Operation, die in der Integral-Rechnung die größten Vortheile gewährt: von diesen aber habe ich gezeigt, wie man sie durch geschickte Substitutionen in rationale Funktionen verwandeln kann. Die Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen erstreckt sich auf beyde Arten, und kann selbst mit dem größten Nutzen auf die transcendenten Funktionen angewandt werden: was für Erweiterungen aber die höhere Analysis der Lehre von den unendlichen Reihen verdankt, ist allgemein bekannt. Ich habe daher einige Capitel hinzugefügt, in welchen ich mich mit der Untersuchung der Eigenschaften und der Summen verschiedener unendlichen Reihen beschäftige, und manche davon sind von der Art, daß sie der Hülfe der Analysis des Unendlichen kaum entbehren zu können scheinen. Hieher gehören insbesondere die Reihen, deren Summen durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausgedrückt werden. Denn da diese Größen transcendent sind, und zu ihrer Bestimmung die Quadratur der Hyperbel und des Kreises erfordert wird: so pflegt man sie größtentheils erst in der Analysis des Unendlichen zu betrachten. Weil ich aber von den Potestäten zu den Exponential-Größen, die nichts anders als Potestäten mit veränderlichen Exponenten sind,

sind, fortgegangen bin: so bin ich dadurch zu einem sehr natürlichen und fruchtbaren Begriffe von den Logarithmen gekommen, woraus sich nicht nur der außerordentliche Nutzen derselben von selbst ergiebt, sondern auch alle die unendlichen Reihen, wodurch man diese Größen gewöhnlich ausdruckt, hergeleitet werden können; auch hat sich dabey eine sehr leichte Art logarithmische Tafeln zu verfertigen dargeboten. Einen ähnlichen Weg habe ich bey der Betrachtung der Kreisbogen genommen, einer Gattung von Größen, die bey aller ihrer Verschiedenheit von den Logarithmen doch so genau mit denselben verbunden ist, daß jede Art dann, wenn sie imaginär zu werden scheint, in die andere übergeht. Nach einer kurzen Wiederholung dessen, was in der Geometrie über die Erfindung der Sinus und Cosinus der Bogen, die vielfache von andern sind, gelehret wird, habe ich aus dem Sinus und Cosinus jedes Bogens den Sinus und Cosinus des kleinsten und gleichsam verschwindenden Bogens gesucht, und dadurch unendliche Reihen gefunden, aus welchen sich, da beym Verschwinden des Bogens der Sinus dem Bogen und der Cosinus dem Radius gleich wird, der Bogen mit seinem Sinns und Cosinus vermittelst ohne Ende fortlaufender Reihen vergleichen läßt. Hierdurch habe ich eine solche Menge theils endlicher theils unendlicher Ausdrücke für diese

Gattung von Größen erhalten, daß zur Erklärung der Natur derselben die Infinitesimal-Rechnung gar nicht weiter nöthig ist. Und so wie die Logarithmen einen besondern Algorithmus nothwendig machen, dessen Nutzen sich durch die ganze Analysis verbreitet: so habe ich auch die Kreisgrößen einem ähnlichen Algorithmus unterworfen, damit sie in dem Calcul eben so bequem als die Logarithmen, ja selbst als die algebraischen Größen gebraucht werden könnten. Wie sehr hierdurch die Auflösung der schwersten Aufgaben erleichtert wird, solches zeigen nicht nur mehrere Capitel dieses Buchs zur Genüge, sondern es könnte solches auch durch eine Menge von Beyspielen aus der Analysis des Unendlichen dargethan werden, wenn diese nicht schon ohnehin bekannt wären, und sich von Tage zu Tage immer mehr vermehrten. Den größten Nutzen aber gewährt diese Untersuchung bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen in reelle Faktoren; und da man diese Operation in der Integral-Rechnung auf keine Weise entbehren kann, so habe ich davon umständlich gehandelt. Hierauf habe ich die unendlichen Reihen betrachtet, die aus der Entwickelung dieser Funktionen entspringen und wiederkehrende Reihen genannt werden; und dabey sowohl die Summen als die allgemeinen Glieder derselben, nebst andern merkwürdigen Eigenschaften,

wodurch

wodurch sie sich auszeichnen, untersucht. Da ich hierauf durch die Auflösung in Faktoren geführt wurde, so habe ich darauf ebenfalls gezeigt, wie Produkte, die aus mehrern, ja selbst aus unendlich vielen Faktoren bestehen, in Reihen verwandelt werden können. Diese Untersuchung hat nicht nur den Weg zur Kenntniß unzähliger Reihen gebahnt, sondern auch, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, Reihen in Produkte aus unzähligen Faktoren zu verwandeln, sehr bequeme Zahl-Ausdrücke zur Berechnung der Logarithmen der Sinus, der Cosinus und der Tangenten an die Hand gegeben. Aus eben dieser Quelle habe ich außerdem die Auflösung vieler Aufgaben von der Theilung der Zahlen geschöpft, welche sonst die Kräfte der Analysis zu übersteigen scheinen. Bey einer so großen Verschiedenheit der Materien wäre es leicht gewesen, mehrere Bände anzufüllen; ich habe aber alles so sehr als möglich zusammen zu drängen gesucht, so daß ich zwar den Grund von allen deutlich gezeigt, die weitere Ausführung aber den Lesern überlassen habe, um ihnen auf diese Art Gelegenheit zur Uebung ihrer Kräfte und zur Erweiterung der Grenzen der Analysis zu geben. Denn ich trage kein Bedenken zu behaupten, nicht nur, daß dieses Buch viele neue Entdeckungen enthält, sondern auch, daß darin Quellen geöffnet

sind, woraus noch eine Menge anderer wichtiger Entdeckungen geschöpft werden kann.

Eben dasselbe Verfahren habe ich bey dem zweyten Buche beobachtet, welches sich mit den Gegenständen beschäftiget, die man gewöhnlich unter dem Titel, höhere Geometrie, abhandelt. Ich habe darin vor der Betrachtung der Kegelschnitte, worauf man sich sonst fast allein einschränkt, die Theorie der krummen Linien auf eine solche Art vorgetragen, daß man dieselbe bey der Untersuchung jeder Gattung dieser Linien mit Nutzen gebrauchen kann. Ich brauche dazu nichts weiter als die Gleichung, wodurch die Natur jeder krummen Linie ausgedruckt wird, und zeige, wie man daraus sowohl die Gestalt als die vornehmsten Eigenschaften derselben zu finden im Stande ist. Vorzüglich glaube ich dieses bey den Kegel-Schnitten geleistet zu haben, die man sonst entweder bloß geometrisch, oder auf eine unvollkommene und nicht genug natürliche Weise analytisch untersucht hat. Ich habe nemlich zuvörderst aus der allgemeinen Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung ihre allgemeinen Eigenschaften abgeleitet, und darauf dieselben in Geschlechter oder Arten eingetheilt. Hierbey habe ich darauf Rücksicht genommen, ob die Curve ohne Ende fortlaufende Schenkel hat, oder in

einen

einen endlichen Raum eingeschlossen ist, und im ersten Falle wieder auf die Zahl und Beschaffenheit jener Schenkel gesehen, ob sie nemlich geradlinige Asymtoten haben oder nicht. Auf diese Art habe ich die drey bekannten Arten der Kegel-Schnitte erhalten, die Ellipse, die ganz in einem endlichem Raume enthalten ist, die Hyperbel, die vier ohne Ende fortlaufende und geraden Asymtoten sich nähernde Schenkel hat, und die Parabel, deren zwey ohne Ende fortgehende Schenkel keine Asymtoten haben. Auf eine ähnliche Art habe ich die Linien der dritten Ordnung betrachtet, und dieselben, nach der Auseinandersetzung ihrer allgemeinen Eigenschaften, in sechszehn Geschlechter getheilt, unter welchen die von Newton angenommenen zwey und siebenzig Arten insgesammt begriffen sind. Das Verfahren dabey ist von mir so deutlich und vollständig beschrieben worden, daß es bey der Eintheilung der Linien aller übrigen Ordnungen leicht nachgeahmt werden kann, indeß habe ich es gleichwohl noch bey den Linien der vierten Ordnung angewandt. Nachdem ich auf diese Art das Nöthige von den Ordnungen der Linien gesagt habe, kehre ich wieder zur Erklärung der allgemeinen Eigenschaften aller Linien zurück. Hier beschreibe ich die Methode, die Tangenten und Normalen der Curven, ja selbst ihre Krümmung,

die

die man aus dem Krümmungs-Halbmesser beurtheilt, zu bestimmen. Eigentlich gehören zwar diese Gegenstände in die Differential-Rechnung, allein ich habe hier eben das bloß durch die gemeine Algebra geleistet, so daß in der Folge der Uebergang von der Analysis des Endlichen zu der Analysis des Unendlichen desto leichter ist. Auch habe ich die Wendungs-Punkte, die Spitzen, die doppelten und vielfachen Punkte der Curven betrachtet, und gezeigt, wie alle diese Dinge aus den Gleichungen auf eine leichte Art bestimmt werden; ob ich gleich nicht leugnen will, daß die Differential-Rechnung hierzu noch bequemere Wege enthalte. Eben so findet man den Streit wegen der Spitze der zweyten Art, wenn beyde in der Spitze zusammenkommende Bogen ihre Krümmung nach eben der Seite kehren, berührt, und hoffentlich auf eine solche Art entschieden, daß weiter kein Zweifel statt finden kann. Endlich habe ich einige Capitel hinzugefügt, um die Erfindung der krummen Linien aus gegebenen Eigenschaften von ihnen zu lehren, und außerdem verschiedene Aufgaben, besondere Sectionen des Kreises betreffend, aufgelöset. Da dieses die geometrischen Gegenstände sind, deren Kenntniß vorzüglich zur Erlernung der Analysis des Unendlichen erfordert wird: so habe ich Anhangsweise

weise aus der Stereometrie die Theorie der Körper und ihrer Oberflächen analytisch behandelt, und gezeigt, wie die Natur einer jeden Oberfläche durch eine Gleichung dreyer veränderlicher Größen bestimmt werden kann. Nachdem ich die Flächen nach der Anzahl der Dimensionen der veränderlichen Größen in der Gleichung, auf eine der bey den Linien ähnliche Art, in Ordnungen getheilt; so habe ich gezeigt, daß die erste Ordnung bloß die Ebene enthält. Die Flächen der zweyten Ordnung aber habe ich, in Ansehung der ins Unendliche sich erstreckenden Theile, in sechs Classen gebracht, und auf eine ähnliche Art lassen sich auch die Flächen der übrigen Ordnungen eintheilen. Zugleich habe ich die Durchschnitte zweyer Flächen betrachtet, und, da dieselben meistens krumme Linien sind, die nicht in einer Ebene liegen, dabey gezeigt, wie man sie durch Gleichungen ausdrucken kann. Endlich habe ich die Lage der berührenden Ebenen und der geraden Linien, die auf Flächen senkrecht stehen, zu bestimmen gesucht.

Uebrigens muß ich bey der Menge der in diesem Werke vorkommenden auch schon von andern untersuchten Gegenstände um Verzeihung bitten, daß ich derer, die vor mir eben dieselben Materien bear-

bearbeitet haben, nicht allenthalben rühmliche Erwähnung gethan. Bey meinem Vorsatze, alles so kurz als möglich zu behandeln, würde die Geschichte jedes Satzes das Werk zu sehr vergrößert haben. Indeß sind auch die mehresten von den sonst schon aufgelösten Aufgaben hier aus ganz andern Gründen aufgelöset worden, so daß ich mir davon keinen unbeträchtlichen Theil zueigenen darf. Ich hoffe aber, daß sowohl dieses als auch insbesondere dasjenige, was ganz neu ist, den Liebhabern dieser Wissenschaft nicht unangenehm seyn wird.



Inhalt

Inhalt des ersten Buchs.

Erstes Capitel.
Von den Funktionen überhaupt.

Zweytes Capitel.
Von der Umformung der Funktionen.

Drittes Capitel.
Von der Verwandlung der Funktionen durch Substitution.

Viertes Capitel.
Von der Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen.

Fünftes Capitel.
Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen.

Sechstes Capitel.
Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

Siebentes Capitel.
Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch Reihen.

Achtes Capitel.
Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

Neuntes Capitel.
Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

Zehntes Capitel.

Von dem Gebrauche der gefundenen Faktoren bey der Summirung unendlicher Reihen.

Eilftes Capitel.

Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

Zwölftes Capitel.

Von der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen.

Dreyzehnten Capitel.

Von den wiederkehrenden Reihen.

Vierzehntes Capitel.

Von der Multiplication und Division der Winkel.

Funfzehntes Capitel.

Von den Reihen, die aus der Entwickelung der Faktoren entspringen.

Sechszehntes Capitel.

Von der Theilung der Zahlen.

Siebenzehntes Capitel.

Von dem Nutzen der wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen.

Achtzehntes Capitel.

Von den continuirlichen Brüchen.

Ein-

Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen.

Erstes Buch.

Von den Funktionen, ihrer Auflösung in Faktoren und Entwickelung durch unendliche Reihen: desgleichen die Lehre von den Logarithmen, den Zirkelbögen und ihren Sinus und Tangenten; nebst vielen andern in der Analysis des Unendlichen unentbehrlichen Gegenständen.

Erstes Buch.

Erstes Capitel.

Von den Funktionen überhaupt.

§. 1.

Eine beständige Größe ist eine bestimmte Größe, die immer denselben Werth behält.

Zu diesen Größen gehören z. B. alle Zahlen, indem sie den ihnen einmal beygelegten Werth beständig behalten: und wenn dergleichen beständige Größen allgemein ausgedruckt werden sollen, so gebraucht man dazu die ersten Buchstaben des Alphabeths a, b, c u. s. f. Zwar pflegt man in der gemeinen Analysis, wo man bloß bestimmte Größen untersucht, durch diese ersten Buchstaben des Alphabets die bekannten, und durch die letzten dagegen die unbekannten Größen zu bezeichnen; allein in der höhern Analysis sieht man nicht so sehr auf diesen Unterschied, sondern theilt daselbst die Größen vorzüglich in beständige und in veränderliche ein.

§. 2.

Eine veränderliche Größe ist eine unbestimmte oder allgemeine Größe, die alle bestimmte Werthe ohne Ausnahme unter sich begreift.

Da man einen jeden bestimmten Werth durch eine Zahl ausdrucken kann, so schließt also eine veränderliche Größe

alle Zahlen ohne Ausnahme in sich. Auf eben die Art nemlich, als man die Begriffe der Gattungen und der Geschlechter aus den Begriffen der einzelnen Dinge ableitet, ist auch die veränderliche Größe ein Geschlecht, unter welchem alle bestimmte Größen begriffen sind. Dergleichen veränderliche Größen bezeichnet man durch die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x u. s. f.

§. 3.

Eine veränderliche Größe wird bestimmt, wenn ihr irgend ein bestimmter Werth beygelegt wird.

Es kann daher eine veränderliche Größe auf unzählige Arten bestimmt werden, indem man für sie jede Zahl ohne Ausnahme setzen kann. Auch wird die Bedeutung einer veränderlichen Größe nicht erschöpft, bevor nicht alle bestimmte Werthe für sie gesetzt worden sind. Die veränderliche Größe begreift daher alle nur irgend gedenkbare Zahlen, die positiven und negativen, die ganzen und die gebrochenen, die rationalen, irrationalen und transcendenten *) unter sich; ja selbst die Null und die imaginären Zahlen sind davon nicht ausgeschlossen.

*) Das Beywort, Transcendent, steht der Benennung, Algebraisch entgegen. Algebraische Größen werden diejenigen Größen genannt, deren Verhältniß zu gegebenen Größen durch Gleichungen von einem bestimmten Grade ausgedruckt werden kann; und unter transcendenten Größen hat man daher solche zu verstehen, bey welchen dieses nicht möglich ist. Auf diese Art erklärt Leibnitz die transcendenten Größen, Opp. Tom. III. p. 106. nach der Genfer Ausgabe vom Jahr 1768. Ein Beyspiel einer transcendenten Größe hat man an einem unbestimmten Kreisbogen, von welchem erwiesen ist, daß zwischen ihm und seinem Halbmesser keine algebraische Gleichung statt findet.

§. 4.

§. 4.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein algebraischer Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder beständigen Größen zusammengesetzt ist.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, der außer der veränderlichen Größe z lauter beständige Größen enthält, ist also eine Funktion dieser z. So sind $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z; u. s. f. Funktionen von z.

§. 5.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist daher selbst eine veränderliche Größe.

Denn da man für die veränderliche Größe jeden bestimmten Werth setzen kann, so kann auch die Funktion derselben unzählige bestimmte Werthe erhalten; ja es läßt sich, da die veränderliche Größe auch die imaginären Werthe unter sich begreift, kein bestimmter Werth gedenken, den die Funktion nicht sollte erhalten können. So kann zwar die Funktion $\sqrt{(9 - zz)}$, wenn man für z bloß die möglichen Zahlen setzt, nie einen größern Werth als 3 bekommen; allein setzt man dafür auch die imaginären Zahlen von der Form $5\sqrt{-1}$, so läßt sich kein bestimmter Werth angeben, den man nicht aus der Formel $\sqrt{(9 - zz)}$ sollte herleiten können. Es giebt indeß auch Ausdrücke, die, ob sie gleich dem Scheine nach zu den Funktionen gehören, dennoch nichts anders als beständige Größen sind, weil sie bey aller Veränderung der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe immer einen und denselben Werth behalten; z. B. z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$.

§. 6.

Der Hauptunterschied der Funktionen beruhet auf der Art und Weise, wie sie aus der veränderlichen und aus beständigen Größen zusammengesetzt sind.

Er hängt also von den Operationen ab, durch welche Größen mit einander verbunden werden können, als der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potestäten, Extraction der Wurzeln, so wie auch der Auflösung der Gleichungen. Außer diesen sogenannten algebraischen Operationen giebt es noch eine Menge anderer, welche den Beynamen der transcendenten führen, und wohin die Formation der Exponential- und der logarithmischen Größen und unzählige andere gehören, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt.

Inzwischen können einige Arten der Funktionen bemerkt werden; als die Vielfachen $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az; die Potestäten von z, z. B. z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; u. s. f.: und so wie diese auf einer einzigen Operation beruhen, so werden auch die Ausdrücke, die durch jede andere Operation entstehen, mit dem Namen der Funktionen belegt. *)

*) Vielleicht soll dies so viel sagen: So wie diese auf einer einzigen Operation beruhende Arten, so werden auch die Ausdrücke, die durch jede andere Operation entstehen, mit einem daher genommenen Namen belegt.

§. 7.

Man theilt die Funktionen in Algebraische und Transcendente ein; unter jenen versteht man die, in welchen bloß die algebraischen, unter diesen aber die, in welchen transcendente Operationen vorkommen.

Es sind also die Vielfachen und die Potestäten von z, so wie auch alle die Ausdrücke, welche durch die vorhin genannten

nannten algebraischen Operationen formiret werden, z. B. $\frac{a \dagger bz^n - c\sqrt{(2z-zz)}}{aaz-3bz^3}$, algebraische Funktionen. Ja öfters können die algebraischen Funktionen nicht einmal entwickelt dargestellt werden, wie die Funktion Z von z, wenn sie durch folgende Gleichung gegeben wird. $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 \dagger cz^3Z - 1$. Denn obgleich diese Gleichung nicht aufgelöset werden kann, so ist doch ausgemacht, daß Z einem gewissen aus der veränderlichen Größe z und verschiedenen beständigen Größen zusammengesetzten Ausdrucke gleich, und deswegen eine Funktion von z ist. In Ansehung der transcendenten Funktionen aber ist zu merken, daß sie nur dann wirklich transcendent sind, wenn die darin vorkommende transcendente Operation die veränderliche Größe betrifft. *) Denn wenn die transcendenten Operationen nur die beständigen Größen angehen, so bleibt die Funktion algebraisch. Bedeutet z. B. c den Umkreis eines Zirkels, dessen Halbmesser = 1 ist: so ist c allerdings eine transcendente Größe, **) aber die Ausdrücke $c \dagger z$; cz^2; $4z^c$; u. d. g. sind nichts desto weniger algebraische Funktionen von z. Wenn übrigens einige Bedenken tragen, z^0 zu den algebraischen Funktionen zu rechnen, oder Potestäten von z mit irrationalen Exponenten, wie $z^{\sqrt{2}}$ lieber interscendente als algebraische Funktionen nennen wollen, so ist das eine Sache von geringer Erheblichkeit. ***)

*) Man vergleiche hiermit die Erklärung der transcendenten Funktionen in des Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen §. 571.

**) Ob sich der ganze Umfang des Kreises nicht durch den Halbmesser, freylich vermittelst Wurzelgrößen, ausdrucken lasse? darüber ist selbst nach einer Erinnerung Eulers im zweyten Theile seiner Opusc. analyt. Petersburg 1785, noch nichts

ausgemacht. Ließe sich das thun, so wäre die Peripherie des Kreises nicht transcendentisch.

***) Dieses thut Leibnitz in dem Briefe an Wallis, in welchem die bey §. 3 angeführte Stelle steht, in der Nachschrift. Cramer geht in seiner Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750, S. 8 hier noch weiter im Unterscheiden.

§. 8.

Die algebraischen Funktionen werden wieder in Rationale und in Irrationale eingetheilt; jene sind solche, in welchen die veränderliche Größe kein Wurzelzeichen hat, diese aber solche, in welchen Wurzelzeichen bey der veränderlichen Größe anzutreffen sind.

In den rationalen Funktionen kommen also weiter keine Operationen vor als die Addition, die Subtraction, die Multiplication, die Division, und die Erhebung zu Potestäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind: und es sind also $a+z$; $a-z$; az; $\frac{aa+zz}{a+z}$; az^3-bz^5; u. s. f. rationale; hingegen $\sqrt{z}$; $a+\sqrt{(aa-zz)}$; $\sqrt[3]{(a-2z+zz)}$; $\frac{aa-z\sqrt{(aa+zz)}}{a+z}$ irrationale Funktionen von z.

Die irrationalen Funktionen sind ferner entweder Entwickelte oder Verwickelte.

Entwickelt heißt eine irrationale Funktion, wenn sie vermittelst der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt ist, wie in den angeführten Beyspielen. Die verwickelten irrationalen Funktionen rühren von der Unvollständigkeit der Auflösungskunst oder Algebra her. So ist Z eine verwickelte Funktion von z, wenn es durch die Gleichung $Z^7=azZ^2-bz^5$ gegeben wird; denn man ist, wenn man auch die Wurzel-

zeichen

zeichen gebrauchen will, nicht im Stande, den Werth von Z abgesondert darzustellen.

§. 9.

Die rationalen Funktionen werden wieder in ganze und in gebrochene eingetheilt.

In den ganzen rationalen Funktionen kommt weder z mit einem negativen Exponenten, noch ein Bruch vor, dessen Nenner die z enthielte; und gebrochene Funktionen sind also solche, worin entweder Brüche mit z im Nenner, oder z mit einem negativen Exponenten vorkommt. Die allgemeine Formel für die ganzen Funktionen ist: $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ u. s. w. denn es läßt sich keine ganze Funktion von z gedenken, die nicht in dieser Formel begriffen seyn sollte. Die allgemeine Formel für die gebrochenen Funktionen hingegen ist, da mehrere Brüche in Einen verwandelt werden können,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \text{ꝛc.}}$$

Die beständigen Größen a, b, c, d, ꝛc. α, β, γ, δ, ꝛc. machen keine Veränderung, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen, und man kann sich darunter sowohl positive als negative, sowohl ganze als gebrochene, desgleichen rationale, irrationale, ja selbst transcendente Größen gedenken.

§. 10.

Hiernächst ist die Eintheilung der Funktionen in Einförmige und Vielförmige zu merken.

Einförmig ist eine Funktion, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z nicht mehr als einen einzigen, vielförmig aber, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z mehrere bestimmte Werthe bekömmt. Die rationalen, ganzen

sowohl als gebrochenen, Funktionen sind daher einförmige Funktionen; denn sie geben für jedes bestimmte z nie mehr als einen bestimmten Werth, wie man auch z bestimmen mag. Die irrationalen Funktionen hingegen sind vielförmige, weil die Wurzelzeichen auf mehr als einen Werth führen. Auch die transcendenten Funktionen sind theils einförmig, theils vielförmig; ja es giebt darunter selbst unendlich vielförmige, z. B. den Bogen, der zu dem Sinus x gehört, indem jeder Sinus als ein Sinus von unendlich vielen Bogen betrachtet werden kann. Zur Bezeichnung einzelner einförmigen Funktionen wollen wir uns der Buchstaben P, Q, R, S, T ꝛc. bedienen.

§. 11.

Eine Funktion von z heißt zweyförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen doppelten Werth giebt.

Dergleichen Funktionen geben die Quadratwurzeln, z. B. $\sqrt{(2z+zz)}$: denn hier giebt jeder Werth von z einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen. Ueberhaupt aber ist Z eine zweyförmige Funktion von z, wenn es durch die quadratische Gleichung $Z^2 - PZ + Q = 0$ bestimmt wird, und P und Q einförmige Funktionen von z sind. Denn es ist alsdenn $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ u. Z erhält für jeden bestimmten Werth von z einen doppelten Werth. Uebrigens sind entweder beyde Werthe von Z reell, oder beyde imaginär, und, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, ihre Summe $= P$ und ihr Produkt $= Q$.

§. 12.

Eine Funktion von z heißt dreyförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen dreyfachen Werth giebt.

Der-

Dergleichen Funktionen entspringen aus der Auflösung der cubischen Gleichungen. Sind nemlich P, Q und R einförmige Funktionen von z, und $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$; so ist Z ein dreyförmige Funktion von z, weil es für jeden bestimmten Werth von z einen dreyfachen Werth bekömmt. Diese drey Werthe von Z sind entweder alle drey reell, oder es ist solches nur der eine, und die beyden übrigen sind imaginär. Auch ist bekannt, daß ihre Summe = P, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen = Q, und das Produkt aus allen dreyen = R ist.

§. 13.

Eine Funktion von z heißt vierförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen vierfachen Werth giebt.

Dergleichen Funktionen entspringen aus der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Bedeuten nemlich P, Q, R und S einförmige Funktionen von z, und ist $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$: so ist Z eine vierförmige Funktion von z, weil Z für jedes bestimmte z einen vierfachen Werth bekommt. Diese vier Werthe sind nun entweder alle vier reell, oder alle viere imaginär, oder es sind davon zwey reell und zwey imaginär. Ferner ist ihre Summe = P, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen = Q, die Summe aus je drey und dreyen = R, und das Produkt aus allen vieren = S. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den fünfförmigen und den übrigen vielförmigen Funktionen.

§. 14.

Es ist also Z eine vielförmige Funktion von z, wenn $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \text{&c.} = 0$, und also Z für jedes bestimmte z so viel bestimmte Werthe giebt, als n Einheiten enthält.

Es

Es muß aber n eine ganze Zahl seyn, und also die Gleichung, wodurch Z gegeben wird, auf die rationale Form gebracht werden, wenn man beurtheilen will, wie vielförmig Z ist; wo alsdann der Exponent der höchsten Potestät von Z die Menge der Werthe anzeigt, die für jedes bestimmte z zu Z gehören. Außerdem müssen P, Q, R, S ꝛc. einförmige Funktionen von z seyn. Denn sobald einige von diesen Buchstaben vielförmige Funktionen von z anzeigen, so giebt Z für jedes bestimmte z viel mehr Werthe, als n Einheiten enthält. Sind unter diesen Werthen imaginäre Werthe, so ist ihre Zahl allezeit gerade; und wenn also n eine ungerade Zahl ist, so muß zum wenigstens ein Werth von Z reell seyn; ist aber n eine gerade Zahl, so können auch alle Werthe von Z imaginär seyn.

§. 15.

Wenn Z eine solche vielförmige Funktion von z ist, daß es nie mehr als einen reellen Werth giebt; so wird es gewissermaßen eine einförmige Funktion von z, und kann auch meistens als eine einförmige Funktion gebraucht werden.

Dergleichen Funktionen sind $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$ ꝛc. denn diese haben nie mehr als einen reellen Werth, vorausgesetzt, daß P eine einförmige Funktion von z ist. Aus eben der Ursache kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, wenn n eine ungerade Zahl ist, zu den einförmigen Funktionen zählen, m mag eine gerade, oder eine ungerade Zahl seyn. Ist hingegen n eine gerade Zahl, so hat $P^{\frac{m}{n}}$ entweder gar keinen oder zwey reelle Werthe; und ist daher n eine gerade Zahl und $\frac{m}{n}$ ein Bruch, der durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, als eine zweyförmige Funktion betrachten

§. 16

§. 16.

Wenn y eine Funktion von z ist, so ist auch z eine Funktion von y.

Denn da y eine Funktion von z ist, so giebt es, was auch y für eine Funktion von z seyn mag, eine Gleichung, worin y durch z und beständige Größen gegeben ist. Aus dieser Gleichung läßt sich aber auch umgekehrt z durch y und beständige Größen bestimmen; und da y eine veränderliche Größe ist, so wird alsdann z einem aus y und aus beständigen Größen zusammengesetzten Ausdrucke gleich, und also eine Funktion von y. Nun läßt sich auch beurtheilen, eine wievielförmige Funktion z von y ist, und es kann z eine vielförmige Funktion von y werden, wenn gleich y eine einförmige Funktion von z ist. Ist z. B. $y^3 = ayz - bzz$; so ist y eine dreyförmige Funktion von z, allein z nur eine zweyförmige von y.

§. 17.

Wenn y und x Funktionen von z sind, so ist auch y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y.

Denn da y eine Funktion von z ist, so ist auch z eine Funktion von y [§. 16.] und eben so z eine Funktion von x. Folglich ist die Funktion von y der Funktion von x gleich; und da aus dieser Gleichung sowohl y durch x als x durch y bestimmt werden kann, so ist klar, daß y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y ist. Oft ist man zwar wegen der Unzulänglichkeit der Algebra nicht im Stande, diese Funktionen entwickelt darzustellen: allein das hindert die Ueberzeugung von der angeführten Behauptung nicht. Das lehrt aber die Algebra, wie man aus zwey Gleichungen, davon die eine y und z, die andere hingegen x und z

ent-

enthält, eine andere herleitet, worin bloß x und y enthalten sind. *)

*) Man findet solches z. B. in Newtons Arithmetica universali, in dem Abschnitte: De duabus pluribusve aequationibus in unam transformandis, ut incognitae quantitates exterminentur, in der, Leyden 1732 herausgekommenen, Gravesandischen Ausgabe, S. 57. f.; in des Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen, in dem Abschnitte von den Gleichungen §. 199. f. und in Eulers Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, in der Histoire de l'Academie royale des Sciences & belles Lettres vom Jahr 1764. Was ich darüber hier beybringen zu müssen geglaubt habe, findet man im Anhange zu dem gegenwärtigen ersten Theile unter der ersten Nummer.

§. 18.

Endlich sind noch einige besondere Arten von Funktionen zu merken. So ist eine Funktion eine gerade Funktion von z, wenn sie eben denselben Werth giebt, man mag für z entweder + k oder — k setzen.

Eine solche gerade Funktion von z ist zz; denn man mag für z entweder + k oder — k setzen, so erhält man in beyden Fällen für zz einerley Werth, nemlich $zz = +kk$. Aus eben dem Grunde sind auch diese Potestäten von z, z^4, z^6, z^8, und überhaupt z^m, wenn m eine gerade, positive entweder oder negative, Zahl ist, gerade Funktionen von z.

Ja da auch $z^{\frac{m}{n}}$ zu den einförmigen Funktionen gerechnet werden kann, wenn n eine ungerade Zahl ist [§. 15]: so ist auch $z^{\frac{m}{n}}$ eine gerade Funktion von z, wenn m eine gerade, n aber eine ungerade Zahl ist. Es werden daher auch alle Ausdrücke, die aus dergleichen Potestäten, auf was für eine Art

Art man will, zusammengesetzt sind, gerade Funktionen von z seyn. So ist Z eine gerade Funktion von z, wenn

$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{&c.}$ oder $Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{&c.}}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{&c.}}$

desgleichen wenn $Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{5}} + dz^{\frac{4}{7}} + \text{&c.}$ oder $Z =$

$a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \text{&c.}$ oder $Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}$

ist. Und da dergleichen Ausdrücke insgesammt zu den einförmigen Funktionen von z gehören, so kann man sie auch gerade einförmige Funktionen von z nennen.

§. 19.

Eine vielförmige gerade Funktion von z ist eine Funktion, die zwar für jedes z verschiedene Werthe, aber doch immer eben dasselbe giebt, man mag $z = +k$ oder $= -k$ setzen.

Es sey Z eine solche vielförmige gerade Funktion von z Da die Natur einer vielförmigen Funktion durch eine Gleichung zwischen Z und z ausgedruckt wird, in welcher Z so viel Dimensionen hat, als es verschiedene Werthe unter sich begreift: so ist offenbar, daß Z eine vielförmige gerade Funktion seyn wird, wenn die veränderliche Größe z in der Gleichung, welche die Natur von Z ausdruckt, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen hat. So ist Z eine zweyförmige gerade Funktion von z, wenn $Z^2 = az^4Z + bz^2$, und eine dreyförmige, wenn $Z^3 - az^2Z^2 + bz^4Z - cz^8 = o$. Ueberhaupt ist $Z^2 - PZ + Q = o$, eine zweyförmige gerade, $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = o$ eine dreyförmige gerade Funktion von z, u. s. f., wenn P, Q, R, S u. s. w. einförmige gerade Funktionen von z sind.

§. 20

§. 20.

Es ist also jede, einförmige sowohl als vielförmige, gerade Funktion von z ein Ausdruck, der auf die Art aus der veränderlichen Größe z und aus beständigen Größen zusammengesetzt ist, daß die Anzahl der Dimensionen von z allenthalben eine gerade Zahl ist.

Außer den einförmigen Funktionen, wovon vorhin schon [§. 18] Beyspiele angeführt worden sind, gehören also hieher, $a + \sqrt{(bb - zz)}$; $azz + \sqrt[3]{(a^6 z^4 - bz^2)}$ desgleichen $az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(z^2 + \sqrt{(a^4 - z^4)})}$ u. s. w.

Hieraus erhellet, daß man die geraden Funktionen auch durch Funktionen von zz erklären kann.

Denn ist Z irgend eine Funktion von y, so erhält man, wenn man darin allenthalben zz anstatt y setzt, eine solche Funktion von z, in welcher die Anzahl der Dimensionen von z allenthalben eine gerade Zahl ist. Doch muß man den Fall ausnehmen, wenn in dem Ausdrucke für Z, $\sqrt{y}$ und andere ähnliche Formen vorkommen, welche dadurch, daß man zz für y setzt, die Wurzelzeichen verlieren. Denn wenn auch gleich $y + \sqrt{ay}$ eine Funktion von y ist, so wird doch dieser Ausdruck, wenn man $y = zz$ setzt, keine gerade Funktion von z, weil alsdann $y + ay = zz + z\sqrt{a}$ ist. Diese Fälle also ausgenommen, so ist die gegebene Erklärung der geraden Funktionen richtig, und sehr brauchbar, wenn man dergleichen Funktionen machen will.

§. 21.

Eine ungerade Funktion von z ist eine Funktion, deren Werth negativ wird, wenn man — z anstatt z setzt.

Dergleichen ungerade Funktionen sind alle Potestäten von z, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, z. B. z^1, z^3, z^5, z^7, u. s. w. ferner z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} u. s. f. so wie

auch

auch $z^{\frac{m}{n}}$, wenn sowohl m als n eine ungerade Zahl ist. Ueberhaupt aber ist jeder Ausdruck, der aus solchen Potestäten von z zusammengesetzt ist, eine ungerade Funktion von z, z. B. $az + bz^3$; $az + az^{-1}$; desgleichen $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{5}{3}}$ u. s. f. Was aber die Natur dieser Funktionen und die Art und Weise betrifft, dergleichen zu erfinden: so läßt sich beydes aus dem, was über die geraden Funktionen gesagt worden ist, leicht abnehmen.

§. 22.

Wenn man eine gerade Funktion von z durch z oder irgend eine ungerade Funktion von z multiplicirt, so ist das Produkt eine ungerade Funktion von z.

Es sey P eine gerade Funktion von z, die folglich dieselbe bleibt, wenn man darin $-z$ anstatt z setzt. Setzt man also in dem Produkte Pz, $-z$ anstatt z, so erhält man $-Pz$, und Pz ist daher eine ungerade Funktion von z. Ferner sey P eine gerade und Q eine ungerade Funktion von z. Hier fließt aus der Erklärung der geraden und ungeraden Funktion [§. 21. 18.] daß P stets einerley Werth behält, man mag z positiv oder negativ nehmen, Q aber negativ wird, wenn man darin $-z$ anstatt z setzt. Es wird also auch das Produkt PQ, wenn man z negativ nimmt, in $-PQ$, oder in eine negative Größe, verwandelt, und es ist daher PQ eine ungerade Funktion von z. So ist das Produkt aus $a + \sqrt{(aa + zz)}$, einer geraden, und z^3, einer ungeraden Funktion von z, nemlich $az^3 + z^3\sqrt{(aa + zz)}$, eine ungerade Funktion von z; und eben das ist das Produkt $z \times \frac{a + bzz}{\alpha + \beta zz} = \frac{az + bz^3}{\alpha + \beta z^2}$. Hieraus aber erhellet auch, daß $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{Q}{P}$ eine ungerade Funktion von z seyn

wird, wenn von den beyden Funktionen P und Q die eine eine gerade und die andere eine ungerade Funktion ist.

§. 23.

Wenn eine ungerade Funktion durch eine ungerade Funktion multiplicirt oder dividirt wird: so ist das Produkt oder der Quotient eine gerade Funktion.

Es seyen Q und S zwey ungerade Funktionen von z, so daß, wenn man $-z$ anstatt z setzt, Q in $-Q$, und S in $-S$ übergeht: so fällt in die Augen, daß sowohl das Produkt QS als der Quotient $\frac{Q}{S}$ eben denselben Werth behält, man mag z positiv oder negativ nehmen, und es sind daher beyde gerade Funktionen von z. Auch ist nunmehr offenbar, daß das Quadrat einer ungeraden Funktion eine gerade, der Cubus aber eine ungerade, das Biquadrat davon wiederum eine gerade Funktion u. s. w. ist.

§. 24.

Wenn y eine ungerade Funktion von z ist, so ist auch z eine ungerade Funktion von y.

Da y eine ungerade Funktion von z ist, so muß sich, wenn man $-z$ statt z setzt, y in $-y$ verwandeln. Wird daher z durch y bestimmt, so muß auch z in $-z$ übergehen, wenn man $-y$ anstatt y setzt, und also z eine ungerade Funktion von y seyn. Ist also $y = z^3$, folglich y eine ungerade Funktion von z; so ist auch aus der Gleichung $z^3 = y$ oder $z = y^{\frac{1}{3}}$, z eine ungerade Funktion von y. Und da für $y = az + bz^3$, y eine ungerade Funktion von z ist, so ist auch, wenn man aus der Gleichung $bz^3 + az = y$ den Werth von z durch y ausdruckt, dieser Werth eine ungerade Funktion von y.

§. 25.

§. 25.

Wenn die Natur einer Funktion von y durch eine solche Gleichung bestimmt wird, daß die Dimensionen, welche y und z zusammengenommen in einem jeden Gliede haben, entweder allenthalben eine gerade, oder allenthalben eine ungerade Zahl ausmachen: so ist y eine ungerade Funktion von z.

Denn wenn man in einer solchen Funktion nicht nur $-z$ anstatt z, sondern auch $-y$ anstatt y setzt: so bleiben entweder alle Glieder der Gleichung unverändert, oder sie werden negativ; allein die Gleichung bleibt in beyden Fällen dieselbe. Hieraus erhellet, daß $-y$ eben so durch $-z$, als $+y$ durch $+z$ bestimmt wird, und daß also, wenn man $-z$ anstatt z setzt, der Werth von y in $-y$ übergehen, und also y eine ungerade Funktion von z seyn muß. Ist z. B. $yy = ayz + bzz + c$; oder $y^3 + ayyz = byzz + cy + dz$: so ist y aus beyden Gleichungen eine ungerade Funktion von z.

§. 26.

Wenn Z eine Funktion von z, und Y eine Funktion von y ist, und Y auf eben die Art durch y und beständige Größen, als Z durch z und beständige Größen bestimmt wird: so werden diese Funktionen Y und Z ähnliche Funktionen von y und z genannt.

So sind Z und Y ähnliche Funktionen von z und y, wenn $Z = a + bz + cz^2$, und $Y = a + by + cy^2$; oder um auch vielförmige Funktionen anzuführen, wenn $Z^3 = azzZ + b$, und $Y^3 = ayyY + b$. Wenn daher Y und Z dergleichen ähnliche Funktionen von y und z sind: so verwandelt sich die Funktion Z, wenn man darin y anstatt z

setzt, in die Funktion Y. Man pflegt diese Aehnlichkeit auch auf die Art auszudrucken, daß man sagt, Y sey eine eben solche Funktion von y als Z von z; und diese Ausdrücke werden gebraucht, es mögen z und y von einander abhängen oder nicht. Es ist daher $a(y+n)+b(y+n)^3$ eine eben solche Funktion von $y+n$, als $ay+by^3$ von y; und $\frac{azz+bz+c}{\alpha zz+\beta z+\gamma}$ eine eben solche Funktion von $\frac{1}{z}$, als $\frac{a+bz+czz}{\alpha+\beta z+\gamma zz}$ von z ist: im ersten Falle ist $z=y+n$, und im andern $y=\frac{1}{z}$. Hieraus erhellet sehr deutlich, was es mit der Aehnlichkeit der Funktionen, die in der ganzen höhern Analyse ein Gegenstand von der äußersten Wichtigkeit ist, für eine Bewandniß hat. Uebrigens kann das, was bisher über die Natur der Funktionen Einer veränderlichen Größe überhaupt gesagt worden ist, hier hinreichen, da die weitere Auseinandersetzung desselben bey der folgenden Anwendung vorkommt.



Zweytes Capitel.

Von der Umformung der Funktionen.

§. 27.

Die Funktionen können auf eine zwiefache Weise in andere verwandelt, oder auf eine andere Form gebracht werden, indem man dabey entweder die veränderliche Größe beybehalten, oder an ihrer Stelle eine andere einführen kann.

Wenn die veränderliche Größe beybehalten wird, so wird die Funktion eigentlich nicht verändert, sondern nur auf eine andere Art ausgedruckt; so wie aus der Algebra bekannt ist, daß man eine und dieselbe Größe auf mancherley Weise darstellen kann. Beyspiele von dergleichen Verwandlungen sind, wenn man anstatt der Funktion $2 - 3z + zz$, diese, $(1 - z)(2 - z)$; oder $(a + z)^3$ anstatt $a^3 + 3aaz + 3azz + z^3$; oder $\frac{a}{a - z} + \frac{a}{a + z}$ anstatt $\frac{2aa}{aa - zz}$; oder $\sqrt{(1 + zz)} + z$ anstatt $\frac{1}{\sqrt{(1 + zz)} - z}$ setzt: denn so verschieden auch die Gestalt dieser Ausdrücke ist, so bedeuten sie doch vollkommen ein und dasselbe. Oft ist aber die eine Art des Ausdrucks zu der gegenwärtigen Absicht passender als ein anderer gleichbedeutender, und man muß deswegen jedesmal den schicklichsten wählen.

Die andere Art der Verwandlung der Funktionen, wobey man anstatt der veränderlichen Größe z eine andere y nimmt, welche zu z ein gegebenes Verhältniß hat, nennt

man die Verwandlung durch Substitution; und ihrer muß man sich auf die Weise bedienen, daß die gegebene Funktion dadurch kürzer und bequemer ausgedruckt wird. So erhält man, wenn man in der Funktion von z, $a^4 - 4a^3z + 6aazz - 4az^3 + z^4$, für $a - z$ die veränderliche Größe y setzt, die viel einfachere Funktion y^4 von y; und wenn man in der irrationalen Funktion $\sqrt{(aa + zz)}$ von z, $z = \frac{aa - yy}{2y}$ nimmt, an ihrer Stelle die rationale Funktion $\frac{aa + yy}{2y}$ von y. Von dieser letzten Art der Verwandlung der Funktionen soll in dem folgenden, so wie von der, wobey keine Substitution statt findet, in dem gegenwärtigen Capitel gehandelt werden.

§. 28.

Die ganzen Funktionen werden öfters sehr vortheilhaft in ihre Faktoren aufgelöset, und in ein Produkt verwandelt.

Wenn eine ganze Funktion in ihre Faktoren aufgelöset wird, so fällt ihre Beschaffenheit weit leichter in die Augen; denn man sieht alsdann sogleich ein, in was für Fällen ihr Werth $= 0$ wird. Verwandelt man z. B. diese Funktion von z, $6 - 7z + z^3$ in das Produkt $(1 - z)(2 - z)(3 + z)$: so ist sogleich offenbar, daß sie in drey Fällen $= 0$ wird; nemlich wenn $z = 1$, $z = 2$, und $z = -3$ ist, welches man aus dem Ausdrucke $6 - 7z + z^3$ selbst weit schwerer erkennt. Man nennt aber dergleichen Faktoren, worin bloß die erste Potestät von z vorkommt, zum Unterschiede von den zusammengesetzten Faktoren, welche das Quadrat, oder den Cubus, oder irgend eine andere höhere Potestät von z enthalten, einfache Faktoren;

ren; und ihre allgemeine Form ist $f + gz$, so wie der allgemeine Ausdruck der doppelten Faktoren $f + gz + hzz$, und der dreyfachen, $f + gz + hzz + iz^3$ u. s. w. *) Dabey fällt in die Augen, daß ein jeder doppelter Faktor zwey einfache, ein jeder dreyfache Faktor drey einfache u. s. w. in sich fasse. Wenn der Exponent der höchsten Potestät von z in einer ganzen Funktion von $z = n$ ist: so enthält die Funktion n einfache Faktoren; und sind unter ihren Faktoren etwa auch doppelte oder dreyfache u. s. w. so läßt sich die Anzahl ihrer Faktoren nach dem Angeführten ebenfalls beurtheilen.

*) Wenn ein doppelter Faktor zwey einander gleiche einfache Faktoren hat, so heißt er ein quadratischer Faktor, wie $aa + 2az + zz$ §. 150, und $\frac{xx}{ii}$ §. 155.

§. 29.

Man findet die einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion Z von z, wenn man die Funktion Z gleich o setzt, und aus dieser Gleichung die Wurzeln von z zu erhalten sucht; indem eine jede Wurzel von z einen einfachen Faktor der Funktion Z giebt.

Ist daher von der Gleichung $Z = o$ irgend eine Wurzel $z = f$; so ist $z - f$ ein Divisor und folglich auch ein Faktor der Funktion Z. Sucht man also alle Wurzeln der Gleichung $Z = o$, nemlich $z = f$, $z = g$, $z = h$, u. s. w.: so wird dadurch die Funktion Z in ihre Faktoren aufgelöset, und in das Produkt $(z - f)(z - g)(z - h)$ ꝛc. verwandelt; wobey indeß zu merken ist, daß man dies Produkt, wenn der Coefficient der höchsten Potestät von z nicht $= + 1$ ist, noch durch diesen Coefficienten multipliciren muß. Ist z. B. $Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} +$ ꝛc. so ist $Z =$

$A(z-f)(z-g)(z-h)$ ꝛc. *) Ist hingegen $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Cz^4 +$ u. s. f. und sind die Wurzeln der Gleichung $Z = o$, f; g; h; i; u. s. w. so ist $Z = A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)$ u. s. f. **) Auch erhellet hieraus, daß umgekehrt $Z = o$ werden muß, wenn $z - f$, oder $1 - \frac{z}{f}$ ein Faktor der Funktion Z ist, und man f anstatt z setzt. Denn ist $z = f$, so wird ein Faktor von der Funktion Z, $z - f$ oder $1 - \frac{z}{f}$, und also auch die Funktion selbst $= o$.

*) Aus

$$Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + Dz^{n-3} +$$ ꝛc.

folgt,

$$Z = A\left(z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3} +\text{ ꝛc.}\right)$$

Verwandelt man also

$$z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3}$$ ꝛc.

in das Produkt

$$(z-f)(z-g)(z-h)(z-i)(z-k)$$ ꝛc.

so wird

$$Z = A(z-f)(z-g)(z-h)$$ ꝛc.

**) Aus

$$Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$$ ꝛc.

folgt

$$Z = A\left(1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 +\text{ ꝛc.}\right.$$

Verwandelt man also

$$1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 +$$ ꝛc.

in das Produkt

$$\left(1-\frac{z}{f}\right)$$

$$\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\left(1-\frac{z}{i}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right)\text{ ꝛc.}$$

so wird

$$Z = A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\text{ ꝛc.}$$

§. 30.

Die einfachen Faktoren sind entweder reell oder imaginär; und wenn die Funktion Z imaginäre Faktoren hat, so ist ihre Anzahl immer eine gerade Zahl.

Denn da die einfachen Faktoren aus den Wurzeln der Gleichung $Z = o$ entspringen: so müssen die reellen Wurzeln reelle Faktoren und die imaginären Wurzeln imaginäre Faktoren geben. Und da die Anzahl der imaginären Wurzeln einer jeden Gleichung eine gerade Zahl ist: so muß die Funktion Z entweder gar keine, oder zwey, oder vier oder sechs, u. s. w. imaginäre Faktoren haben. Hat nun die Funktion Z nur zwey imaginäre Faktoren, so ist das Produkt derselben ein reelles Produkt, und giebt also einen reellen doppelten Faktor. Denn setzt man das Produkt aus allen reellen Faktoren $= P$, so ist das Produkt der beyden imaginären Faktoren $= \frac{Z}{P}$, und also reell. Auf eben die Art ist das Produkt aller imaginären Faktoren, wenn die Funktion Z deren viere, oder sechs, oder achte u. s. w. hat, immer reell; weil es jedesmal dem Quotienten gleich ist, den man aus der Division der Funktion Z durch das Produkt aller reellen Faktoren erhält.

§. 31.

Wenn Q ein reelles Produkt aus vier einfachen imaginären Faktoren ist, so kann man dasselbe in zwey doppelte reelle Faktoren zerfällen.

Denn es hat alsdann Q die Form $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$; und sollte es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden können, so müßte es ein Produkt aus zwey doppelten imaginären Faktoren seyn. Ferner wäre die Form dieser beyden doppelten imaginären Faktoren

$$zz - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1}$$
$$zz - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1}$$

denn es lassen sich keine andere imaginäre Formen gedenken, deren Produkt reell und $= z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ wäre. Aus diesen zwey doppelten imaginären Faktoren erhielte man aber folgende vier einfache imaginäre Faktoren von Q,

1. $z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$
2. $z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$
3. $z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$
4. $z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$

Und multiplicirte man nun den ersten und dritten dieser Faktoren mit einander, und setzte dabey der Kürze wegen $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$: so erhielte man zum Produkte

$$zz - (2p - \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})z + pp + qq$$
$$- p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}$$
$$- q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$$

welches allerdings ein reelles Produkt ist. Eben so ist das Produkt aus dem zweyten und vierten Faktor reell, und $=$

$$zz - (2p + \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})z + pp + qq$$
$$+ p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}$$
$$+ q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$$

Auf diese Weise ist das Produkt Q, wovon angenommen wurde, daß es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren aufgelöset

gelöset werden könne, wirklich in dergleichen aufgelöset worden. *)

*) Wenn man $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$ setzt, so erhalten die einfachen imaginären Faktoren von Q folgende Gestalt.

1. $z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$
2. $z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$
3. $z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$
4. $z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$

Setzt man nun ferner

$\sqrt{(t + u\sqrt{-1}}\sqrt{} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})} = a - b\sqrt{-1}$

so erhält man, wenn man die Quadrate nimmt,

$t + u\sqrt{-1} = aa + 2ab\sqrt{-1} - bb$
$t - u\sqrt{-1} = aa - 2ab\sqrt{-1} - bb$

folglich

$t = aa - bb$, und $u = 2ab$.

Dieses giebt

$(aa + bb)^2 = (aa - bb)^2 + 4aabb = tt + uu$

woraus $aa + bb = \sqrt{(tt + uu)}$ wird. Nunmehr ist also

$aa = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$
$bb = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$ und folglich
$a = \sqrt{(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})}$ und
$b = \sqrt{(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})}$.

Wenn man daher den Größen a, b, aa, bb, die hier gefundenen Werthe beylegt, so sind selbige reell, und überdies hat man dabey $\sqrt{(t + u\sqrt{-1})} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})} = a - b\sqrt{-1}$. Hierdurch aber werden die einfachen imaginären Faktoren von Q

1. $z - p - q\sqrt{-1} + a + b\sqrt{-1} = z - p + a + (b - q)\sqrt{-1}$
2. $z - p - q\sqrt{-1} - a - b\sqrt{-1} = z - p - a - (b + q)\sqrt{-1}$

3. $z - p + q\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = z - p + a - (b - q)\sqrt{-1}$

4. $z - p + q\sqrt{-1} - a + b\sqrt{-1} = z - p - a + (b + q)\sqrt{-1}$

Und da das Produkt aus 1. und 3.

$$(z - p + a)^2 + (b - q)^2$$

das Produkt aus 2. und 4. aber

$$(z - p - a)^2 + (b + q)^2$$

ist, so fällt hieraus auch die Realität dieser Produkte, welche entwickelt die im § geben, in die Augen. Daß $2\sqrt{(\pm \frac{1}{2}t + \sqrt{(tt + uu)}} = \sqrt{(\pm 2t + 2\sqrt{(tt + uu)}}$ sey, braucht hier wohl kaum erinnert zu werden.

§. 32.

Wenn eine ganze Funktion Z von z imaginäre Faktoren hat, deren Anzahl übrigens so groß oder so klein seyn kann, als sie will; so kann man allemal je zwey und zwey davon auf eine solche Art mit einander verbinden, daß ihr Produkt reell wird.

Da die Anzahl der imaginären Faktoren immer eine gerade Zahl ist, so kann man sie durch $2n$ ausdrucken, und aus §. 30 ist bekannt, daß das Produkt aus allen diesen imaginären Faktoren reell ist. Giebt es daher nur zwey imaginäre Faktoren, so ist aus diesem Grunde ihr Produkt nothwendiger Weise reell; und sind der imaginären Faktoren viere, so läßt sich ihr Produkt nach dem vorhergehenden § in zwey doppelte reelle Faktoren von der Form $fzz + gz + h$ verwandeln. Nun läßt sich zwar diese Beweisart nicht auf die höhern Potestäten ausdehnen; indeß verliert dadurch der angeführte Satz nichts von seiner Gewißheit, so daß also allezeit anstatt jeder $2n$ einfachen imaginären Faktoren n doppelte reelle Faktoren erhalten, und daher

jed

jede ganze Funktion von z entweder in reelle einfache oder in reelle doppelte Faktoren aufgelöset werden kann. In der Folge [im neunten Capitel §. 143 — §. 154] werden Funktionen wie $a + bz^n$; $a + bz^n + cz^{2n}$; $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$; u. s. f. wirklich in dergleichen doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden; und fehlt es daher gleich hier an einem strengen Beweise, so wird doch alsdann aller Zweifel verschwinden. *)

*) Da der Satz: Jede ganze rationale Funktion von x, als $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$, läßt sich in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösen, in der Integral-Rechnung von der größten Wichtigkeit ist, so hat ihn Euler in seinen Recherches sur les racines imaginaires des équations, in der Histoire de l'Academie royale des Sciences & belles Lettres, vom Jahr 1749, durch verschiedene Beweise außer Zweifel zu setzen gesucht. Einen vollständigen Auszug aus diesen Untersuchungen findet man in dem Anhange zu dem gegenwärtigen ersten Theile unter der zweyten Nummer.

§. 33.

Wenn eine ganze Funktion Z für $z = a$ den Werth A, und für $z = b$ den Werth B erhält: so kann dieselbe dadurch, daß man für z Werthe setzt, die zwischen a und b fallen, jeden zwischen A und B liegenden Werth bekommen.

Denn da Z eine einförmige Funktion von z ist, so muß es bey der Substitution eines jeden reellen Werthes für z auch allemal einen reellen Werth bekommen. Da nun Z, wenn man $z = a$ setzt, den Werth A, und wenn man $z = b$ setzt, den Werth B bekömmt, so kann es nicht anders von dem Werthe A zu dem Werthe B, als durch alle zwischen beyden liegenden Werthe, übergehen. Hat also die Gleichung

chung $Z - A = o$ eine reelle Wurzel, und die Gleichung $Z - B = o$ ebenfalls: so muß auch $Z - C = o$ eine reelle Wurzel haben, wenn C zwischen A und B liegt. Geben also die Ausdrücke $Z - A$, $Z - B$ einen einfachen reellen Faktor, so muß auch dem Ausdrucke $Z - C$, wofern nur C zwischen A und B fällt, ein einfacher reeller Faktor zukommen.

§. 34.

Wenn der Exponent der höchsten Potestät von z in einer ganzen Funktion Z eine ungerade Zahl $2n + 1$ ist: so hat die Funktion Z zum wenigsten Einen reellen einfachen Faktor.

Z hat in diesem Falle die Form $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2}$ u. s. f. Setzt man nun darin $z = \infty$, so wird $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$, weil alsdann alle folgende Glieder gegen das erste gehalten verschwinden; und es hat also $Z - \infty$ einen einfachen reellen Faktor, nemlich $z - \infty$. Setzt man ferner $z = -\infty$, so wird $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$; und es hat daher $Z + \infty$ den einfachen reellen Faktor $z + \infty$. Da also $Z - \infty$ und $Z + \infty$ einen einfachen reellen Faktor haben, so muß auch $Z + C$ ein einfacher reeller Faktor zukommen, wofern C zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ enthalten, d. h. irgend eine reelle Zahl ist, sie mag nun positiv oder negativ seyn. Setzt man daher $C = o$, so hat auch die Funktion Z selbst einen einfachen reellen Faktor $z - c$, und c fällt zwischen $+\infty$ und $-\infty$ und ist folglich entweder eine positive oder negative Größe oder $= o$.

§. 35.

Es hat daher jede ganze Funktion Z, worin der Exponent der höchsten Potestät von z eine ungerade Zahl ist, ent-

entweder einen, oder drey, oder fünf, oder sieben u. s. f. reelle einfache Faktoren.

Denn da bewiesen worden ist, [§. 34.] daß die Funktion Z allemal Einen reellen einfachen Faktor $z - c$ hat, so nehme man an, daß ihr auch außerdem der Faktor $z - d$ zukomme. Dividirt man nun die Funktion Z, in welcher die höchste Potestät von z, z^{2n+1} ist, durch das Produkt $(z - c)(z - d)$ so ist die höchste Potestät des Quotienten $= z^{2n-1}$, und da dient der ungerade Exponent $2n - 1$ zum Beweise, daß die Funktion Z außer jenen Faktoren noch einen einfachen reellen Faktor hat. Wenn also die Funktion Z mehr als einen reellen einfachen Faktor hat, so hat sie entweder drey, oder, da man auf diesem Wege fortgehen kann, fünfe, oder sieben u. s. f. Es ist also die Anzahl der reellen einfachen Faktoren immer eine ungerade Zahl; und da die Zahl aller einfachen Faktoren $= 2n + 1$ ist, so ist auch hieraus die Anzahl der imaginären Faktoren eine gerade Zahl. *)

*) Dieser Satz kann wegen §. 29. auch auf die Art bewiesen werden, daß man zeigt, daß jede Gleichung, worin der Exponent der höchsten Potestät eine ungerade Zahl ist, also jede Gleichung von der Form

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

zum wenigsten eine reelle Wurzel, und wenn sie deren mehrere hat, solche immer in ungerader Anzahl habe. Man setze also

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = y$$

und betrachte die krumme Linie, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird. Hier ist offenbar, daß zu jeder Abscisse x nicht mehr als eine Applicate y gehört, und daß, wenn $y = 0$ wird, der Werth der Abscisse x eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Es wird daher diese Gleichung auch so viel reelle Wurzeln haben, als es Stellen giebt, wo

y ver-

y verschwindet, und weil dies da geschieht, wo die krumme Linie die Abscissen-Linie durchschneidet, so wird die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung der Menge der Punkte gleich seyn, in welchen die krumme Linie die Axe schneidet, worauf man die Abscissen nimmt. Um nun die Menge dieser Durchschnitts-Punkte zu bestimmen, setze man zuvörderst $x = +\infty$. Alsdann wird $y = \infty^{2m+1} = \infty$, und es liegt daher der Theil der krummen Linie, der zu den unendlich großen positiven Abscissen gehört, über der Axe, weil seine Applicaten y positiv sind. Nun setze man ferner $x = -\infty$. Dann wird $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$, und es sind also in diesem Falle die Applicaten negativ, und der zugehörige Theil der krummen Linie liegt unter der Axe. Da nun beyde gedachte Theile der krummen Linie Theile von Einer continuirlichen Linie sind, weil zu jeder Abcisse x nicht mehr als eine Applicate y gehört: so muß diese Linie nothwendig die Axe irgendwo schneiden, und wenn sie solches in mehrern Punkten thut, so muß die Anzahl dieser Punkte jederzeit eine ungerade Zahl seyn. Hieraus folgt, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten eine reelle Wurzel, und wenn sie deren mehrere enthält, solche jederzeit in ungerader Anzahl hat.

§. 36.

Ferner ist die Anzahl der einfachen reellen Faktoren einer jeden Funktion Z, worin der Exponent der höchsten Potestät von z eine gerade Zahl 2n ist, entweder zwey oder viere oder sechs u. s. f.

Denn nimmt man an, daß die Funktion Z, 2m + einfache reelle Faktoren habe: so erhält man, wenn man die Funktion durch das Produkt aller dieser Faktoren dividirt, einen Quotienten, worin die höchste Potestät von $z = z^{2n-2m-1}$, und also eine Potestät mit einem ungeraden Exponenten ist. Es muß also die Funktion Z außer jenen Faktoren nothwendig noch Einen reellen einfachen

Fakto

Faktor haben, und die Anzahl aller Faktoren wird also zum wenigsten $= 2m + 2$, und folglich eine gerade Zahl, und die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren ebenfalls eine gerade Zahl seyn. Es ist also die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion, so wie auch schon vorhin [§. 30] bewiesen worden ist, eine gerade Zahl. *)

*) Auch dieser Satz läßt sich auf eine der beym vorhergehenden §. berührten ähnliche Art, oder so beweisen, daß man zeigt, daß die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln hat. Denn setzt man

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = y$$

und betrachtet man die krumme Linie, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird: so wird y, sowohl wenn man $x = +\infty$, als wenn man $x = -\infty$ nimmt, $= +\infty$, und es liegt daher nicht nur der Theil der Curve, welcher zu den unendlich großen positiven, sondern auch der, welcher zu den unendlich großen negativen Abscissen gehört, über der Axe. Es kann daher die durch die gegebene Gleichung ausgedruckte krumme Linie die Axe gar nicht schneiden; aber wenn sie es irgendwo thut, und dadurch in die Gegend unter der Axe kommt, so muß sie es auch jederzeit noch einmal thun, um dadurch wieder in die Gegend über der Axe zu kommen. Es giebt daher hier entweder gar keinen oder eine gerade Anzahl von Durchschnitts-Punkten, und es hat folglich auch die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln.

§. 37.

Wenn in einer ganzen Funktion Z der Exponent der höchsten Potestät von z eine gerade Zahl ist, und die ab-

solute oder beständige Größe das Zeichen — vor sich hat: so hat die Funktion Z zum wenigsten zwey einfache reelle Faktoren.

Eine solche Funktion hat diese Form: $z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \ldots \pm rz - A$. Setzt man nun $z = \infty$ so wird [S. 34] $Z = \infty$, und setzt man $z = o$, so wird $Z = -A$. Es hat also $Z - \infty$ den einfachen reellen Faktor $z - \infty$, und $Z + A$ den einfachen reellen Faktor $z - o$; und da nun o zwischen die Grenzen $-\infty$ und $+A$ fällt, so muß auch $Z + o$ den einfachen reellen Faktor $z - c$ haben, wobey c zwischen o und ∞ enthalten ist. Setzt man nun ferner $z = -\infty$, so wird $Z = \infty$; und da alsdann $Z - \infty$ den Faktor $z + \infty$, und $Z + A$ den Faktor $z + o$ hat: so muß $Z + o$ auch einen einfachen reellen Faktor $z + d$ haben, wobey d zwischen o und ∞ fällt, und daraus ist das zu Beweisende klar. Wenn also Z eine Funktion von der beschriebenen Art ist, so muß die Gleichung $Z = o$ zum wenigsten zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, haben. So hat z. B. die Gleichung $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - aa = o$ zwey reelle Wurzeln, und die eine davon ist positiv und die andere negativ. *)

*) Vermittelst einer geometrischen Construction kann man sich von diesem Satze auf folgende leichte Art überzeugen. Man setze

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots - OO = y$$

so erstreckt sich die Curve, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird, nach der Anmerkung zum vorhergehenden §. auf beyden Seiten über der Axe ins Unendliche. Setzt man nun $x = o$, so wird $y = -OO$, und der Punkt der Curve, der zu $x = o$ gehört, liegt also unter der Axe, und es muß daher die Curve, um sich von diesem Punkte auf gedachten beyden Seiten über der Axe continuirlich ins Unendliche erstrecken zu können, auch auf beyden Seiten dieses

dieses Punktes die Axe schneiden, um in die Gegend über ihr zu kommen. Da nun jeder Durchschnitts-Punkt eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung giebt, und von den gefundenen zwey Durchschnitts-Punkten der eine zu einer positiven und der andere zu einer negativen Abscisse führt, so ist klar, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative hat.

Dieser Beweis, so wie auch die in den Anmerkungen zu den beyden vorhergehenden §§. enthaltenen, sind aus Eulers beym 22sten §. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations entlehnt.

§. 38.

Wenn die veränderliche Größe z in einer gebrochenen Funktion eben so viel oder noch mehr Dimensionen im Zähler als im Nenner hat: so läßt sich die Funktion in zwey Theile auflösen, davon der eine eine ganze, der andere aber eine gebrochene Funktion ist, wo die veränderliche Größe z im Zähler weniger Dimensionen hat als im Nenner.

Denn wenn der Exponent der höchsten Potestät von z im Zähler größer ist als im Nenner, so darf man nur den Zähler auf die gewöhnliche Art durch den Nenner dividiren, und die Division abbrechen, wenn bey der Fortsetzung derselben in den Quotienten negative Exponenten von z kommen würden. Der so gefundene Quotient besteht aus einem ganzen und einem gebrochenen Theile, der Zähler des letztern enthält z mit weniger Dimensionen als der Nenner, und beyde Theile sind zusammengenommen der gegebenen Funktion gleich. Wäre z. B. die gebrochene Funktion

$\frac{1 + z^4}{1 + zz}$ gegeben, so lösete man dieselbe durch die Division auf folgende Art auf:

$$zz + 1 \;\Big|\; z^4 + 1 \;\Big|\; zz - 1 + \frac{2}{zz + 1}$$

$$z^4 + zz$$
$$-zz + 1$$
$$-zz - 1$$
$$+2$$

und es ist folglich

$$\frac{1 + z^4}{1 + zz} = zz - 1 + \frac{2}{1 + zz}.$$

Man kann solche gebrochene Funktionen, in welchen die veränderliche Größe z im Zähler mehr Dimensionen hat als im Renner, nach dem Beyspiele der Arithmetik, welche die Brüche in unächte und ächte theilt, entweder ebenfalls unächte Brüche oder unächte gebrochene Funktionen nennen, und sie dadurch von den ächten gebrochenen Funktionen oder solchen unterscheiden, wo die veränderliche Größe im Zähler weniger Dimensionen hat als im Renner. Es kann also jede unächte gebrochene Funktion in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion aufgelöset werden, und diese Auflösung geschieht auf dem Wege der gemeinen Division.

§. 39.

Wenn der Nenner einer gebrochenen Funktion ein Produkt aus zwey Faktoren ist, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben: so kan man diese Funktion in zwey Brüche auflösen, deren Nenner jenen beyden Faktoren gleich sind.

Ungeachtet diese Auflösung eben so wohl bey den unächten als bey den ächten gebrochenen Funktionen statt findet; so haben wir doch dieselbe vorzüglich bey den ächten

gebro-

gebrochenen Funktionen zu betrachten. Zerfällt man aber den Nenner einer solchen Funktion in zwey Faktoren, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so läßt sich die Funktion selbst in zwey andere ächte gebrochene Funktionen verwandeln, deren Nenner den Faktoren des Nenners der gegebenen Funktion gleich sind. Ueberdies giebt es bey den ächten gebrochenen Funktionen nicht mehr als Einen Weg, diese Auflösung zu verrichten; wovon man sich durch ein Beyspiel noch deutlicher als durch allgemeine Schlüsse überzeugen kann.

Es sey also die gebrochene Funktion $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gegeben. Da der Nenner dieser Funktion $1 + 4z^4$ dem Produkte $(1 + 2z + 2zz)(1 - 2z + 2zz)$ gleich ist: so läßt sich die Funktion in zwey Brüche auflösen, davon der eine $1 + 2z + 2zz$, und der andere $1 - 2z + 2zz$ zum Nenner hat. Um diese Brüche zu finden, setze man, da sie ächte Brüche sind, die Zähler derselben, und zwar in der Ordnung, worin die Nenner angeführt worden sind, $\alpha + \beta z$, und $\gamma + \delta z$. Alsdann ist

$$\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\gamma + \delta z}{1 - 2z + 2zz}$$

Addirt man nun diese beyden Brüche, so erhält man für die Summe

zum Zähler	und zum Nenner
$\alpha - 2\alpha z + 2\alpha zz$ $+ \beta z - 2\beta zz + 2\beta z^3$ $\gamma + 2\gamma z + 2\gamma zz$ $+ \delta z + 2\delta zz + 2\delta z^3$	$1 + 4z^4$

Da nun der Nenner dieser Summe dem Nenner der gegebenen gebrochenen Funktion gleich ist, so müssen auch die Zähler von beyden gleich werden; und da es hier eben so viel unbekannte Größen giebt, als Glieder, die einander gleich

gesetzt werden müssen, so kann solches allerdings, aber auch nur auf eine einzige Art geschehen. Man erhält nemlich die vier Gleichungen

1. $\alpha + \gamma = 1$
2. $-2\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = -2$
3. $2\alpha - 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 3$, und
4. $2\beta + 2\delta = -4$;

und da $\alpha + \gamma = 1$, und $\beta + \delta = -2$ ist, so geben die zweyte und dritte Gleichung (wenn man -2 statt $\beta + \delta$ in die zweyte, und 2 statt $2\alpha + 2\gamma$ in die dritte Gleichung bringt,) $\alpha - \gamma = 0$, und $\delta - \beta = \frac{1}{2}$. Hieraus aber wird $\alpha = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{5}{4}$; $\delta = -\frac{3}{4}$, und folglich die gegebene gebrochene Funktion $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gleich folgenden beyden $\frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z}{1 - 2z + 2zz}$. Es ist leicht einzusehen, daß diese Auflösung allemal müsse angestellt werden können, weil allemal so viel unbekannte Größen angenommen werden, als erforderlich sind, um den Zähler zu entwickeln. Wenn aber die gedachten Faktoren des Nennners der gegebenen Funktion keine Prim-Größen zu einander sind, oder einen gemeinschaftlichen Divisor haben: so läßt sich aus dem, was in der gemeinen Arithmetik von den Brüchen gelehret wird, einsehen, daß eine solche Auflösung nicht statt findet. *)

*) Was Euler hier gesagt hat, kann allerdings hinreichen; indeß habe ich, da es vielleicht manchem nicht unangenehm ist, diesen Gegenstand ganz allgemein behandelt zu finden, das in dieser Rücksicht Nöthige im Anhange beygebracht.

gebracht. Man findet es daselbst unter der zweyten Nummer, unter dem Titel: Zusatz zu §. 39.

§. 40.

Es kann daher eine jede gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ in so viel einfache Brüche von der Form $\frac{A}{p - qz}$ aufgelöset werden, als der Nenner N einfache und einander ungleiche Faktoren hat.

Es stellt dieser Bruch $\frac{M}{N}$ eine jede ächte gebrochene Funktion vor, so daß M und N ganze Funktionen von z sind, und die höchste Potestät von z in M niedriger ist als in N. Wird nun der Nenner N in seine einfachen Faktoren zerfällt, und sind dieselben einander ungleich: so kann die Funktion $\frac{M}{N}$ in so viel Brüche aufgelöset werden, als N einfache Faktoren enthält; weil ein jeder Faktor der Nenner eines solchen Partial-Bruchs wird. Ist daher $p - qz$ ein Faktor von N, so ist er auch der Nenner eines der Partial-Brüche von $\frac{M}{N}$; und da z in dem Zähler dieses Bruchs weniger Dimensionen haben muß, als in dem Nenner, so muß daher der Zähler nothwendiger Weise eine beständige Größe seyn. Es erwächst also aus jedem einfachen Faktor $p - qz$ des Nenners N ein einfacher Bruch von der Form $\frac{A}{p - qz}$, und die Summe aller dieser Brüche ist der gegebenen gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempe

Es sey die Funktion $\frac{1+zz}{z-z^3}$ gegeben. Da hier die einfachen Faktoren des Nenners, z, $1-z$, $1+z$, sind, so läßt sich diese Funktion in die drey einfachen Brüche $\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{1+zz}{z-z^3}$ auflösen, wo die beständigen Zähler A, B und C zu bestimmen sind. Bringt man diese Brüche auf eine gemeinschaftlichen Nenner, der $z - z^3$ ist: so muß die Summe ihrer Zähler $= 1 + zz$ seyn; und daher entsteht die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + Bz - Azz \\ + Cz + Bzz \\ - Czz \end{array}\right\} = 1 + 0z + zz$$

und aus dieser Gleichung ergeben sich wieder eben so viel andere, als man unbekannte Größen in A, B, und C hat. Es ist nemlich

1. $A = 1$
2. $B + C = 0$
3. $-A + B - C = 1$.

Hieraus ergiebt sich $B - C = 2$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -1$; und die Funktion $\frac{1+zz}{z-z^3}$ ist also gleich $\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$.

Daß man auf eine ähnliche Art bey einer jeden Anzahl von einfachen und einander ungleichen Faktoren in N verfahren, und den Bruch $\frac{M}{N}$ jedesmal in eben so viel einfache Brüche auflösen könne, als N einfache Faktoren enthält, läßt sich leicht begreifen: wenn aber einige dieser Faktoren einander gleich sind, so ist ein anderer Weg nöthig, von welchem nachher [§. 42. f.] geredet werden soll.

§. 41.

§. 41.

Da also ein jeder einfacher Faktor des Nenners N einen einfachen Bruch zur Auflösung der Funktion $\frac{M}{N}$ an die Hand giebt: so frägt sich, wie man, wenn man einen einfachen Faktor des Nenners N kennt, den dazu gehörigen einfachen Bruch findet?

Es sey $p - qz$ ein einfacher Faktor von N, so daß $N = (p - qz)\,S$, und S eine ganze Funktion von z sey. Setzt man nun den Bruch, der aus dem Faktor $p - qz$ erwächst, $= \frac{A}{p - qz}$, und den Bruch, der aus dem andern Faktor des Nenners S entspringt $= \frac{P}{S}$, so daß nach §. 39.

$\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz)S}$: so ist $\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)S}$

wo nothwendig $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar seyn muß, weil die ganze Funktion P dem daher sich ergebenden Quotienten gleich ist. Setzt man also $z = \frac{p}{q}$ und zwar auch in M und in S, so wird $M - AS = o$, folglich $A = \frac{M}{S}$ u. auf diese Art ist also der Zähler A des Bruchs $\frac{A}{p - qz}$ gefunden.

Macht man aus einem jeden einfachen Faktor des Nenners N, vorausgesetzt, daß keine darunter gleich sind, dergleichen Brüche, so ist die Summe derselben der gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempel.

Wenn man z. B. in dem vorhergehenden Exempel $\frac{1 + zz}{z - z^3}$, wo $M = 1 + zz$, und $N = z - z^3$ ist, z als ei-

nen einfachen Faktor annimmt, so ist $S = 1 - zz$, und der Zähler des einfachen Bruchs $\frac{A}{z}$, den z an die Hand giebt, $A = \frac{1 + zz}{1 - zz} = 1$, wenn man $z = 0$ setzt; und diesen Werth erhält man dadurch, daß man den einfachen Faktor, der hier selbst z ist, $= 0$ setzt. Eben so wird, wenn man den einfachen Faktor des Nenners $1 - z$ nimmt, wodurch $S = z + zz$ wird, $A = \frac{1 + zz}{z + zz}$, für $1 - z, = 0$: also $A = 1$, und der Bruch, der aus dem Faktor $1 - z$ entspringt, $= \frac{1}{1 - z}$. Der dritte Faktor $1 + z$ endlich giebt, da dadurch $S = z - zz$, und $A = \frac{1 + zz}{z - zz}$, für $1 + z = 0$, oder $z = -1$, wird, $A = -1$, und den einfachen Bruch $= \frac{-1}{1 + z}$. Man findet also auf diesem Wege eben so wie vorhin [§. 40.] $\frac{1 + zz}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$.

§. 42.

Eine gebrochene Funktion von der Form $\frac{P}{p - q z^n}$, in welcher die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät ist, als die höchste Potestät eben dieser z in dem Nenner $(p - qz)^n$, kann in Partial-Brüche von der Form $\frac{A}{(p - qz)^n} + \frac{B}{(p - qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qz)^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{K}{p - qz}$ verwandelt werden, deren Zähler insgesammt beständige Größen sind.

Da

Da die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät als z^n ist, so muß sie z^{n-1} seyn, und also P die Form haben:

$$\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + K z^{n-1},$$

wo die Anzahl aller Glieder $= n$, und außerdem P dem Zähler der Summe aller gedachten Partial-Brüche, nachdem man dieselben zuvor auf den gemeinschaftlichen Nenner $(p - qz)^n$ gebracht hat, oder $A + B(p - qz) + C(p - qz)^2 + D(p - qz^3 + \ldots\ldots + (p - qz)^{n-1} = \alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + K z^{n-1}$ ist. In dieser Gleichung ist aber die höchste Potestät von z auf beyden Seiten dieselbe, nemlich z^{n-1}, und überdies hat man darin eben so viel unbekannte Größen A, B, C, D..... K (in allen n) als man Glieder gleich setzen muß. Man kann daher die beständigen Größen A, B, C u. s. w. auf die Art bestimmen, daß die ächte gebrochene Funktion $\frac{P}{(p-qz)^n} = \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \ldots + \frac{K}{p-qz}$ wird; und die sogleich folgenden §. §. werden diese Bestimmung auf eine sehr leichte Art verrichten lehren.

§. 43.

Wenn der Nenner der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$, $(p - qz)^2$ zum einfachen Faktor hat, so lassen sich die Partial-Brüche, die aus diesem Faktor entspringen, auf folgende Art finden.

Es ist in dem Vorhergehenden [§. 40. 41.] gezeigt worden, wie man die Partial-Brüche findet, die aus den einfachen Faktoren des Nenners entspringen, wenn alle diese Fakto-

Faktoren ungleich sind; jetzt nehme man an, daß zwey von diesen Faktoren gleich seyen, oder man betrachte $(p-qz)^2$ als einen Faktor des Nenners N. Aus diesem Faktor entspringen nach dem vorhergehenden §. die Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$. Nun sey $N = (p-qz)^2 S$, so wird $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$, wenn $\frac{P}{S}$ alle die einfachen Brüche zusammengenommen bedeutet, die aus dem Faktor S des Nenners N entspringen. Dann ist $\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$, und $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2} =$ einer ganzen Funktion, und $M - AS - B(p-qz)S$ durch $(p-qz)^2$ theilbar. Es sey zuvörderst durch $p-qz$ theilbar, so wird der ganze Ausdruck $M - AS - B(p-qz)S$ verschwinden, wenn man $p - qz = o$, oder $z = \frac{p}{q}$ setzt. Setzt man also allenthalben $\frac{p}{q}$ anstatt z, so wird $M - AS = o$, und folglich $A = \frac{M}{S}$, oder es giebt der Bruch $\frac{M}{S}$, wenn man darin allenthalben $\frac{p}{q}$ anstatt z setzt, den Werth der beständigen Größe A. Hat man diesen gefunden, so ist nun auch die Größe $M - AS - B(p-qz)S$ durch $(p-qz)^2$, oder $\frac{M-AS}{p-qz} - BS$ durch $p-qz$ theilbar. Setzt man also allenthalben $z = \frac{p}{q}$, so wird $\frac{M-AS}{p-qz} = BS$, und folglich

lich $B = \frac{M - AS}{(p-qz)S} = \frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S} - A\right)$; wo aber zu bemerken ist, daß man, da $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar ist, diese Theilung vor der Substitution von $\frac{p}{q}$ für z anstellen muß. Oder man setze $\frac{M - AS}{p-qz} = T$, so wird $B = \frac{T}{S}$ wenn man $z = \frac{p}{q}$ annimmt. Hat man nun die Zähler A und B gefunden, so sind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^2$ des Nenners N entspringen, $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$.

Erstes Exempel.

Es sey die Funktion $\frac{1 - zz}{zz(1 + zz)}$ gegeben. Da hier das Quadrat zz ein Faktor des Nenners ist, so ist $S = 1 + zz$, und $M = 1 - zz$. Nennt man nun die aus zz entspringende Partial-Brüche $\frac{A}{zz} + \frac{B}{z}$, so wird $A = \frac{M}{S} = \frac{1-zz}{1+zz}$, wenn der Faktor $z = o$ gesetzt wird; folglich $A = 1$. Ferner ist nun $M - AS = -2zz$, welches, durch den einfachen Faktor z dividirt, $T = -2z$ giebt; und hieraus ergiebt sich $B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1+zz}$, wenn man $z = o$ setzt. Es ist daher $B = o$, und es entspringt folglich aus dem Faktor des Nenners zz bloß dieser eine Partial-Bruch $\frac{1}{zz}$.

Zweytes Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion. $\frac{z^3}{(1-z)^2(1+z^4)}$ gegeben. Da hier das Quadrat $(1-z)^2$ ein Faktor des Nenners ist, so kann man die Partial-Brüche $= \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$ setzen. Ferner ist $M = z^3$, und $S = 1+z^4$; folglich $A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1+z^4}$, für $1-z = 0$, oder $z = 1$; also $A = \frac{1}{2}$. Hieraus ergiebt sich weiter $M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4$, welches, durch $1+z$ dividirt, $T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3$, und also $B = \frac{T}{S} = \frac{-1-z-zz+z^3}{2+2z^4}$, für $z = 1$, giebt. Es ist also $B = -\frac{1}{2}$, und die gesuchten Partial-Brüche sind $\frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2(1-z)}$.

§. 44.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p-qz)^3$ hat: so findet man die aus diesem Faktor entspringenden Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$ auf folgende Art.

Man setze $N = (p-qz)^3 S$, und den Bruch, der aus dem Faktor S entspringt, $= \frac{P}{S}$, so ist $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3} =$ einer ganz-

zen Funktion. Hier muß zuvörderst der Zähler $M - AS - B(p - qz)S - C(p - qz)^2 S$ durch $p - qz$ theilbar seyn; und setzt man daher $p - qz = o$, oder $z = \frac{p}{q}$, so wird $M - AS - B(p - qz)S - C(p - qz)^2 S = o$, und $M - AS = o$, und folglich $A = \frac{M}{S}$, für $z = \frac{p}{q}$. Hat man auf diese Weise A gefunden, so ist $M - AS$ durch $p - qz$, und wenn man $\frac{M - AS}{p - qz} = T$ setzt, $T - BS - C(p - qz)S$ noch durch $(p - qz)^2$ theilbar. Nimmt man daher $p - qz = o$, so wird $T - BS - C(p - qz)S = o$, und $B = \frac{T}{S}$, für $z = \frac{p}{q}$. Ist auf diesem Wege auch B gefunden worden, so setze man $\frac{T - BS}{p - qz} = V$; wo also $V - CS$ durch $q - pz$ theilbar, und daher $V - CS = o$ werden muß, wenn man $p - qz = o$ setzt. Es ist daher $C = \frac{V}{S}$, wenn man $z = \frac{p}{q}$ nimmt; und kennt man nun die Zähler A, B und C, so sind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^3$ des Nenners N entspringen, $\frac{A}{(p - qz)^3} + \frac{B}{(p - qz)^2} + \frac{C}{p - qz}$.

Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{zz}{(1 - z)^3 (1 + zz)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, die aus dem cubischen Faktor $(1 - z)^3$ des Nenners derselben entspringen, seyen $\frac{A}{(1 - z)^3} +$

$\frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}$. Alsdann ist $M = zz$, und $S = 1 + zz$; und daraus ergiebt sich zuvörderst $A = \frac{zz}{1+zz}$, für $1-z=0$, oder $z=1$; also $A = \frac{1}{2}$. Ferner ist nun hieraus und aus $T = \frac{M-AS}{1-z}$, $T = \frac{\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}}{1-z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$; und daher $B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1+zz}$, für $z=1$, folglich $B = -\frac{1}{2}$. Endlich ist $V = \frac{T - BS}{1-z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1-z} = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zz}{1-z} = -\frac{1}{2}z$; folglich $C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1+zz}$, für $z=1$, also $C = -\frac{1}{4}$. Es sind daher die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(1-z)^3$ des Nenners entspringen, $\frac{1}{2(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{4(1-z)}$.

§. 45.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p-qz)^n$ hat: so findet man die daraus entspringenden Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{K}{p-qz}$ auf folgende Art.

Man setze den Nenner $N = (p-q)z^n Z$, und schließe wie vorhin. Auf diese Art findet man

1. $A = \frac{M}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $P = \frac{M - AZ}{p-qz}$ setzt,

2. $B = \frac{P}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $Q = \frac{P - BZ}{p-qz}$ setzt,

3. $C = \frac{Q}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $R = \frac{Q - CZ}{p - qz}$ setzt,

4. $D = \frac{R}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $S = \frac{R - DZ}{p - qz}$ setzt,

5. $E = \frac{S}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$ u. s. w.

Bestimmt man aber hiernach alle einzelne Zähler, oder die beständigen Größen A, B, C, D, E u. s. w. so werden dadurch auch die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^n$ des Nenners N entspringen, gefunden.

Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{1 + zz}{z^5 (1 + z^3)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, die aus dem Faktor z^5 des Nenners entspringen, seyen $\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}$. Sollen nun nun die beständigen Zähler dieser Brüche gefunden werden, so ist $M = 1 + zz$; $Z = 1 + z^3$; und $\frac{p}{q} = 0$. Man rechne daher auf folgende Art.

Zuvörderst ist hier $A = \frac{M}{Z} = \frac{1 + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $A = 1$.

Nun setze man $P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{zz - z^3}{z} = z - zz$; so ist zum andern $B = \frac{P}{Z} = \frac{z - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $B = 0$.

Ferner setze man $Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$; so ist drittens $C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $C = 1$.

Weiter setze man $R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - zz$; so ist viertens $D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $D = -1$.

Endlich setze man $S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-zz + z^3}{z} = -z + zz$; so ist fünftens $E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $E = 0$.

Es sind daher die gesuchten Brüche, $\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$.

§. 46. a.

Wenn daher irgend eine gebrochene rationale Funktion $\frac{M}{N}$ in summirende Theile aufgelöset, und auf die einfachste Art ausgedruckt werden soll: so kann solches auf folgende Weise geschehen.

Man sucht alle einfache Faktoren des Renners N, sie mögen nun reell oder imaginär seyn; nimmt von denen, die nicht mehr als einmal vorkommen, einen jeden besonders, und entwickelt nach §. 41. den aus ihm entspringenden Partial-Bruch. Kommt ein oder der andere Faktor mehr als einmal vor, so sucht man das Produkt aller einander gleichen Faktoren, welches die Form $(p - qz^n$ haben wird, und entwickelt die dazu gehörigen Partial-Brüche, nach § 45. Hat man auf diese Art aus den einzelnen einfachen Faktoren des Renners die daraus entspringenden Partial-Brüche gefunden: so ist das Aggregat derselben der

gege

gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich, wofern sie nicht eine unächte gebrochene Funktion ist. Denn ist sie dies, so muß noch außerdem die ganze Funktion von ihr abgesondert und zu jenen Partial-Brüchen hinzugesetzt werden, wenn der Werth der Funktion $\frac{M}{N}$, auf die einfachste Art ausgedruckt, dargestellt werden soll. Es ist indeß gleich, ob man diese Absonderung der ganzen Funktion vor der Findung der Partial-Brüche oder nach derselben vornimmt. Denn man erhält aus den einzelnen Faktoren des Renners N eben dieselben Partial-Brüche, man mag den Zähler M selbst oder diesen Zähler um ein Vielfaches von N vermehrt oder vermindert nehmen; so wie solches, wenn man die erklärten Regeln sorgfältig überdenkt, bald in die Augen fällt.

Exempel.

Soll z. B. der Werth der Funktion $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$ auf die einfachste Art ausgedruckt werden; so nehme man zuerst den nur einmal vorkommenden Faktor $1+z$, welcher $\frac{p}{q} = -1$ giebt. Nun ist hier $M = 1$, und $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$. Man hat also, um den Bruch $\frac{A}{1+z}$ zu finden, $A = \frac{1}{z^3 - 2z^4 + z^5}$, wenn $z = -1$ gesetzt wird; und folglich ist $A = -\frac{1}{4}$, und der aus $1+z$ entspringende Partial-Bruch $= \frac{-1}{4(1+z)}$. Hierauf nehme man den quadratischen Faktor $(1-z)^2$, der $\frac{p}{q} = 1$, $M = 1$, und $Z = z^3 + z^4$ giebt. Setzt man also die daraus entsprin-

genden Partial-Brüche $= \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$; so wird $A = \frac{1}{z^3 + z^4}$, wenn man $z = 1$ annimmt; und folglich $A = \frac{1}{2}$. Nun sey $P = \frac{M - \frac{1}{2}Z}{1-z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1-z} = 1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3$; so ist $B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3}{z^3 + z^4}$, wenn man $z = 1$ setzt; folglich $B = \frac{7}{4}$, und die gesuchten Partial-Brüche $= \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}$. Endlich giebt der dritte cubische Faktor z^3 den Quotienten $\frac{p}{q} = 0$, $M = 1$, und $Z = 1 - z - zz + z^3$. Setzt man daher die dazu gehörigen Partial-Brüche $\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$; so ist zuvörderst $A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - zz + z^3}$, wenn man $z = 0$ setzt; folglich $A = 1$. Nun sey $P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - zz$; so ist $B = \frac{P}{Z}$, wenn man $z = 0$ nimmt, und also $B = 1$. Ferner sey $Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - zz$; so wird $C = \frac{Q}{Z}$, wenn man $z = 0$ setzt; folglich $C = 2$. Es erhält also die gegebene Funktion $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$ diese Form: $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}$; denn es kommt hierzu kein ganzer Theil, weil die gegebene Funktion keine unächte Funktion ist.

Drittes

Drittes Capitel.

Von der Verwandlung der Funktionen durch Substitution.

§. 46. b.

Wenn y irgend eine Funktion von z ist, und z durch eine neue veränderliche Größe x bestimmt wird, so kann auch y durch x bestimmt werden.

Durch die Einführung einer solchen neuen veränderlichen Größe x kann man daher, wenn y eine Funktion von z ist, sowohl y als z bestimmen. Ist z. B. $y = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, so wird, wenn man $z = \frac{1 - x}{1 + x}$ setzt, und diesen Werth von z in $\frac{1 - zz}{1 + zz}$ anstatt z bringt, $y = \frac{2x}{1 + xx}$. Setzt man daher irgend einen bestimmten Werth für x, so findet man dadurch nicht nur für z, sondern auch für y einen bestimmten Werth; und der Werth, den man für y erhält, ist zugleich der Werth, welchen y durch z bekommt, wenn man dafür seinen auf diesem Wege gefundenen bestimmten Werth setzt. Nimmt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, so wird $z = \frac{1}{3}$, und $y = \frac{4}{5}$; aber eben diesen Werth erhält y auch, wenn man in dem Ausdrucke, $\frac{1 - zz}{1 + zz}$, dem y gleich ist, $z = \frac{1}{3}$ setzt.

Man bedient sich aber dieser Einführung einer neuen veränderlichen Größe in einer doppelten Absicht. Denn

einmal schafft man dadurch die Irrationalität weg, wenn sich dergleichen in dem Ausdrucke, worin y durch z bestimmt wird, befindet; und zweytens kann man, wenn das Verhältniß zwischen y und z in einer Gleichung von einem so hohen Grade gegeben wird, daß man daraus keine entwickelte y gleiche Funktion von z abzuleiten im Stande ist, durch die Einführung einer andern veränderlichen Größe x aus der gegebenen eine andre Gleichung machen, aus welcher sich y und z bequem finden lassen. Schon hieraus erhellet der außerordentliche Nutzen dieser Substitution; es wird aber derselbe durch das Folgende noch viel deutlicher dargestellt werden.

§. 47.

Wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$; so findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch sowohl z als y rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Da sowohl z als y eine rationale Funktion von x werden soll; so setze man $\sqrt{(a + bz)} = bx$; wobey leicht einzusehen ist, daß man dadurch seine Absicht erhalten werde. Denn es wird alsdann einmal $y = bx$, und zweytens $a + bz = bbxx$; folglich $z = bxx - \frac{a}{b}$. Es wird daher sowohl z als y durch eine rationale Funktion von x ausgedruckt; und man darf dazu nur, wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$ ist, $z = bxx - \frac{a}{b}$ setzen, indem alsdann $y = bx$ wird.

§. 48.

Wenn $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ ist; so findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch sowohl y als z rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Man

Man setze $y = x^m$, so wird $(a + bz)^{\frac{m}{n}} = x^m$, und $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$; folglich $a + bz = x^n$, und $z = \frac{x^n - a}{b}$. Es wird daher in der gegebenen Funktion sowohl y als z rational ausgedruckt, wenn man $z = \frac{x^n - a}{b}$ setzt, indem diese Substitution $y = x^m$ giebt. Ohnerachtet man also weder y durch z, noch z durch y rational ausdrucken kann; so sind dennoch beyde Funktionen durch die Einführung der veränderlichen Größe x rational gemacht worden, so wie solches der Endzweck der Substitution erforderte.

§. 49.

Es ist $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}}$; man soll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch sowohl y als z rational ausgedruckt werden kann.

Zuvörderst fällt hier bald in die Augen, daß man der Aufgabe ein Genüge thun werde, wenn man $y = x^m$ setzt. Denn es wird alsdann $\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$, folglich $\frac{a + bz}{f + gz} = x^n$; und aus dieser Gleichung ergiebt sich $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$, so wie diese Substitution hinwiederum $y = x^m$ giebt.

Zum andern aber läßt sich nun auch leicht einsehen, daß man sowohl y als z, wenn $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^m$ ist, rational werde ausdrucken können, wenn man beyde gegebene Ausdrücke $= x^{mn}$ setzt. Denn es wird alsdann $y = \frac{\alpha - \gamma x^m}{\delta x^m - \beta}$ und $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$.

§. 50.

Wenn $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))}$; so findet man die Substitution, wodurch y und z rational ausgedruckt werden können, auf folgende Art.

Man setze $\sqrt{((a + bz)(c + dz)} = (a + bz)x$; denn es ist leicht einzusehen, daß z daher einen rationalen Werth bekommen werde, weil der Werth von z in einer einfachen Gleichung gegeben ist. Alsdann wird $c + dz = (a + bz)xx$, und hieraus $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$. Ferner ist nunmehr $a + bz = \frac{bc - ad}{bxx - d}$; u. wegen $y = \sqrt{((a+bz)(c + dz))} = (a+bz)x$, $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$. Es wird also die irrationale Funktion $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$ durch die Substitution $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$ zur Rationalität gebracht, indem dieselbe $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$ giebt. Ist z. B. $y = \sqrt{(aa - zz)} = \sqrt{((a+z)(a-z)}$: so setze man, da $b = 1, c = a$, und $d = -1$ ist, $z = \frac{a - axx}{1 + xx}$, wo denn $y = \frac{2ax}{1 + xx}$ seyn wird. So oft daher die Größe unter dem Zeichen $\sqrt{}$ zwey einfache reelle Faktoren hat, kann man sich dieser Art, sie auf die Rationalform zu bringen, bedienen; wenn aber die beyden einfachen Faktoren imaginär sind, so ist folgender Weg vorzüglicher.

§. 51.

Es ist $y = \sqrt{(p + qz + rzz)}$; man soll eine Substitution für z finden, wodurch der Werth von y rational wird.

Es kann dies auf mehrere Arten geschehen, je nachdem p und q positive oder negative Größen sind. Es sey zuvör-

derst

derst p positiv und = aa; denn wenn auch p kein Quadrat ist, so verursacht doch bey dem gegegenwärtigen Geschäfte die Irrationalität der beständigen Größen keine Schwierigkeit. Es sey also

1. $y = \sqrt{(aa + bz + czz)}$. Setzt man hier $\sqrt{(aa + bz + czz)} = a + xz$, so wird $b + cz = 2ax + xxz$; und also $z = \frac{b - 2ax}{xx - c}$: folglich $y = a + xz = \frac{bx - axx - ac}{xx - c}$, wo z und y rationale Funktionen von x sind. Ferner sey.

2. $y = \sqrt{(aazz + bz + c)}$. Setzt man nun $\sqrt{(aazz + bz + c)} = az + x$, so wird $bz + c = 2axz + xx$, und $z = \frac{xx - c}{b - 2ax}$. Dann aber ist $y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}$.

3. Wenn p und r negativ sind, so ist der Werth von y, wofern nicht qq größer als 4pr ist, allezeit imaginär. Ist aber qq größer als 4pr; so kann der Ausdruck $p + qz + rzz$ in zwey Faktoren aufgelöset werden, und dann gehört dieser Fall unter den vorhergehenden §. Oft kann man aber denselben bequemer auf diese Form bringen, $y = \sqrt{(aa + (b + cz)(d + ez))}$; und um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man $y = a + (b + cz)x$. Dann ist $d + ez = 2ax + bxx + cxxz$, und daher $z = \frac{d - 2ax - bxx}{cxx - e}$, und $y = \frac{-ae + (cd - be)x - acxx}{cxx - e}$. Oft ist die Reduction auf diese Form leichter, $y = \sqrt{(aazz + (b + cz)(d + ez)}$. Dann setze man $y = az + (b + cz)x$, wo $d + ez = 2axz + bxx + cxxz$, und $z = \frac{bxx - d}{e - 2ax - cxx}$, und $y = \frac{-ad + (be - cd)x - abxx}{e - 2ax - cxx}$ wird.

Exempel.

Hätte man die irrationale Funktion von z, $y = \sqrt{(-1 + 3z - zz)}$; so könnte man dieselbe auf die Form, $y = \sqrt{(1 - 2 + 3z - zz} = \sqrt{(1 - (1-z)(2-z))}$ bringen. Setzt man aber darauf $y = 1 - (1-z)x$; so wird $-2 + z = -2x + xx - xxz$, und $z = \frac{2 - 2x + xx}{1 + xx}$; und dann ist $1 - z = \frac{-1 + 2x}{1 + xx}$, und $y = 1 - (1-z)x = \frac{1 + x - xx}{1 + xx}$. Und dies sind ohngefehr die Fälle, welche die unbestimmte Analytik, oder die Diophantäische Analysis darbietet; denn es lassen sich keine andere irrationale Formeln, die nicht unter den erwogenen begriffen wären, durch die Substitution rational machen. Es soll daher nunmehr von dem andern Nutzen der Substitution geredet werden.

§. 52.

Es ist y eine solche Funktion von z, daß $ay^{\alpha} + bz^{\beta} + cy^{\gamma}z^{\delta} = o$: man soll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch man die Werthe von y und z entwickelt darstellen kann.

Da man keine allgemeine Regel für die Auflösung der Gleichungen hat; so kann aus dieser Gleichung weder y durch z, noch z durch y entwickelt dargestellt werden. Um also dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, setze man $y = x^m z^n$, wo dann $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^{\beta} + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = o$ seyn wird, und bestimme darauf den Exponenten n so, daß der Werth von z aus dieser letzten Gleichung entwickelt werden kann. Dies kann auf dreyerley Arten geschehen.

I. Es

1. Es sey $\alpha n = \beta$, und also $n = \frac{\beta}{\alpha}$; so ist, wenn man die gedachte Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ dividirt, $a x^{\alpha m} + b + c x^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = o$. Hieraus ergiebt sich

$$z = \left(\frac{-a x^{\alpha m} - b}{c x^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-a x^{\alpha m} - b}{c x^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-a x^{\alpha m} - b}{c x^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

2. Es sey $\beta = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$; so ist, wenn man die obige Gleichung durch $z^{\beta} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $a x^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + c x^{\gamma m} = o$. Hieraus ergiebt sich

$$z = \left(\frac{-b - c x^{\gamma m}}{a x^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-b - c x^{\gamma m}}{a x^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-b - c x^{\gamma m}}{a x^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

3. Es sey $\alpha n = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$; so ist, wenn man dieselbe Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $a x^{\alpha m} + b z^{\beta - \alpha n} + c x^{\gamma m} = o$. Hieraus ergiebt sich

$z =$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

Hier sind also auf drey verschiedene Arten Funktionen von x gefunden worden, die z und y gleich sind. Uebrigens kann man für m eine Zahl setzen, was für eine man will, bloß die Null ausgenommen; und auf diese Art lassen sich die Formeln auf die bequemste Form bringen.

Exempel.

Es sey die Natur der Funktion y durch die Gleichung $y^3 + z^3 - cyz = 0$ gegeben, und es werde verlangt, daß man Funktionen von x finden soll, die den Funktionen y und z gleich sind.

Hier ist also $a = -1$; $b = -1$; $\alpha = 3$; $\beta = 3$; $\gamma = 1$; und $\delta = 1$. Folglich giebt die erste Bestimmungsart, wenn man $m = 1$ setzt, $z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$, und $y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$ oder $z = \frac{cx}{1 + x^3}$ und $y = \frac{cxx}{1 + x^3}$: wo so gar beyde Formeln rational sind.

Die andere Art führt zu folgenden Werthen:

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ und } y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}; \text{ oder}$$

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)} \text{ und } y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Die

Die dritte endlich giebt

$$z = (cx - x^3)^{\frac{2}{3}}, \text{ und } y = x(cx - z^3)^{\frac{1}{3}}$$

§. 53.

Hieraus läßt sich rückwärts beurtheilen, wie die Gleichungen, in welchen y durch z gegeben ist, beschaffen seyn müssen, wenn sie durch die Einführung einer neuen veränderlichen Größe x sollen entwickelt werden können.

Denn nimmt man an, daß man durch eine bereits vorgenommene Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{&c.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{&c.}}\right)^{p:r} \text{ und}$$

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{&c.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{&c.}}\right)^{q:r}$$

erhalten habe; so wird daher $y^p = x^p z^q$, [weil aus den angenommenen Gleichungen $z^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{q}}$, und hieraus $z^q = \left(\frac{y}{x}\right)^p$ wird] und also $x = yz^{-q:p}$. Da also

$$z^{r:p} = \frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{&c.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{&c.}}:$$

so wird, wenn man in diese Gleichung den Werth $yz^{-q:p}$ von x anstatt x setzt,

$$z^{r:p} = \frac{ay^{\alpha}z^{-\alpha q:p} + by^{\beta}z^{-\beta q:p} + cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \text{&c.}}{A + By^{\mu}z^{-\mu q:p} + Cy^{\nu}z^{-\nu q:p} + \text{&c.}},$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich ferner

$$Az^{r:p} + By^{\mu}z^{(r-\mu q):p} + Cy^{\nu}z^{(r-\nu q):p} + \text{ꝛc.} =$$

$$ay^{\alpha}z^{-\alpha q:p} + by^{\beta}z^{-\beta q:p} + cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus, wenn man mit $z^{\alpha q:p}$ multiplicirt,

$$Az^{(\alpha q+r):p} + By^{\mu}z^{(\alpha q-\mu q+r):p} + Cy^{\nu}z^{(aq-\nu q+r):p} + \text{ꝛc.}$$

$$= ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{(\alpha q-\beta q):p} + cy^{\gamma}z^{(\alpha q-\gamma q):p} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun $\frac{aq+r}{p} = m$, und $\frac{\alpha q-\beta q}{p} = n$; so wird

$p = \alpha - \beta$, $q = n$, und $r = \alpha m - \beta m - \alpha n$;

folglich

$$Az^{m} + By^{\mu}z^{m-\mu n:(\alpha-\beta)} + Cy^{\nu}z^{m-\nu n:(\alpha-\beta)} + \text{ꝛc.} =$$

$$ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{n} + cy^{\gamma}z^{(\alpha-\gamma)n:(\alpha-\beta)} + \text{ꝛc.}$$

und dies ist die Gleichung, aus welcher man bey der Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{ꝛc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{ꝛc.}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha m-\beta m-\alpha n}}$$ und

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{ꝛc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{ꝛc.}}\right)^{\frac{n}{\alpha m-\beta m-\alpha n}}$$

erhält.

Oder man setze $\frac{\alpha q+r}{p} = m$, und $\frac{\alpha q-\mu q+r}{p} = n$; so wird $m-n = \frac{\mu q}{p}$; $\frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu}$, und $\frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m+\alpha n}{\mu}$;

ferner $p = \mu$, $q = m-n$, und $r = \mu m - \alpha m + \alpha n$.

Vermittelst dieser Werthe aber wird

$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{\mu m - \nu(m-n):\mu} + u.s.f. =$

$ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu} + u.s.f.$; und dies ist nunmehr die Gleichung, welche bey der Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + u.s.f.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + u.s.f.}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + u.s.f.}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + u.s.f.}\right)^{\frac{m-n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$

giebt.

§. 54.

Wenn y auf die Art mit z verbunden ist, daß $ayy + byz + czz + dy + ez = o$ ist: so findet man mit Hülfe einer neuen veränderlichen Größe x sowohl für y als für z auf folgendem Wege einen rationalen Ausdruck.

Man setzet $y = xz$, und dividirt die dadurch aus $ayy + byz + czz + dy + ez = o$ entstehende Gleichung durch z. Alsdann hat man $axxz + bxz + cz + dx + e = o$; und hieraus

$$z = \frac{-dx - e}{axx + bx + c} \text{ und } y = \frac{-dxx - ex}{axx + bx + c}.$$

Auf die gegebene Form kann man aber auch diese Gleichung zwischen y und z, $ayy + byz + czz + dy + ez + f = o$ bringen; wenn man beyde veränderliche Größen um eine gewisse beständige Größe vermehrt oder vermindert; daher sich auch diese Gleichung durch eine neue veränderliche Größe x entwickeln läßt.

§. 55.

Wenn y auf die Art von z abhängt, daß $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = o$ ist: so

läßt

läßt sich sowohl y als z auf folgende Art rational ausdrucken.

Man setzet $y = xz$, und dividirt, wenn man hiernach die gegebene Gleichung verändert hat, dieselbe durch zz. Dadurch erhält man $ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = o$; und hieraus wird

$$z = \frac{-exx - fx - g}{ax^3 + bxx + cx + d} \text{ u. } y = \frac{-ex^3 - fxx - gx}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Aus diesen Beyspielen läßt sich leicht erkennen, wie die Gleichungen von höhern Graden zwischen y und z beschaffen seyn müssen, wenn eine ähnliche Auflösung statt finden soll. Uebrigens sind dieselben unter den Formeln des 53sten §. begriffen; aber wegen der Schwierigkeit, womit die Anwendung der allgemeinen Formeln auf diese öfters vorkommende Fälle verknüpft ist, schien es zweckmäßig, einige davon besonders zu entwickeln.

§. 56.

Wenn das Verhältniß zwischen y und z durch die Gleichung $ayy + byz + czz = d$ gegeben ist: so lassen sich beyde Größen y und z auf folgende Art durch eine neue veränderliche Größe x bestimmen.

Man setzt $y = xz$, und da dadurch $(axx + bx + c) \times zz = d$ wird, so bekommt man

$$z = \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}} \text{ und } y = x\sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}.$$

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fx$ ist, durch die Substitution $y = xz$ und durch die Division der daher entstandenen Gleichung durch z, $(ax^3 + bxx + cx + d)zz = ex + f$; und folglich

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}, \text{ und } y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$$

Es sind aber diese, so wie auch alle übrigen Fälle, die eine ähnliche Auflösung zulassen, unter dem allgemeinen Falle des folgenden §. begriffen.

§. 57.

Wenn das Verhältniß zwischen y und z durch die Gleichung $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \text{&c.} = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \text{&c.}$ gegeben ist: so läßt sich sowohl y als z auf folgende Art bequem durch eine neue veränderliche Größe x darstellen.

Man setze $y = xz$, so kann man, nachdem man vermittelst dieser Substitution die gegebene Gleichung abgeändert hat, die ganze abgeänderte Gleichung, vorausgesetzt, daß der Exponent m größer als n ist, durch z^n dividiren, und dadurch erhält man $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{&c.}) \times z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{&c.}$ Hieraus aber fließt

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{&c.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{&c.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{&c.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{&c.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

Es findet nemlich diese Auflösung alsdann statt, wenn in der ganzen zwischen y und z gegebenen Gleichung nicht mehr als eine doppelte Menge von Dimensionen beyder veränderlichen Größen y und z vorkommt; so wie in dem betrachteten Falle die Anzahl dieser Dimensionen in jedem einzelnen Gliede der Gleichung entweder m oder n ist.

§. 58.

Wenn in einer Gleichung zwischen y und z dreyerley Dimensionen vorkommen, so daß die höchste die mittelste in Ansehung der Höhe um eben so viel übersteigt, als die niedrigste unter der mittelsten ist: so kann man mit

Hülfe der Auflösung der quadratischen Gleichungen die veränderlichen Größen y und z durch eine neue veränderliche Größe x ausdrucken.

Denn setzt man $y = xz$, und dividirt man die durch diese Substitution erhaltene Gleichung durch die niedrigste Potestät von z; so läßt sich nun der Werth von z, durch x bestimmt, vermittelst der Extraction der Quadrat-Wurzel erhalten. Folgende Beyspiele werden dieses deutlich machen.

Erstes Exempel.

Es sey $ay^3 + by^2z + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gzz + hy + iz$. Setzt man nun $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z; so bekommt man

$(ax^3 + bxx + cx + d)zz = 2(exx + fx + g)z + hx + i$

und hieraus $z =$

$$\frac{exx + fx + g \pm \sqrt{((exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bxx + cx + d)(hx + i))}}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Hat man aber z gefunden, so ist $y = xz$.

Zweytes Exempel.

Es sey $y^5 = 2az^3 + by + cz$. Setzt man nun wieder $y = xz$, so wird $x^5z^4 = 2azz + bx + c$; und hieraus findet man

$$zz = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}}{x^5}$$

so wie hieraus

$$z = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{xx\sqrt{x}} \text{ und}$$

$$y = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{x\sqrt{x}}$$

Drittes Exempel.

Es sey $y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cy^4$; wo man also die Dimensionen 10, 7 und 4 hat. Setzt man $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z^4;

so

so erhält man, $x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$, oder $z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}}$. Hieraus ergiebt sich

$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}}{x^{10}}, \text{ und folglich ist}$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^3}, \text{ und}$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^2}$$

Aus diesen Beyspielen läßt sich die Art des Gebrauchs dieser Substitutionen zur Genüge einsehen.

Viertes Capitel.

Von der Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen.

Die zu diesem Capitel nöthigen Zusätze stehen insgesammt im Anhange unter der dritten Nummer.

§. 59.

Da die gebrochenen und irrationalen Funktionen von z nicht unter der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. begriffen sind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche Zahl ist: so pflegt man ähnliche ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke zu suchen, welche den Werth einer jeden gebrochenen und irrationalen Funktion darstellen. Ja man ist selbst die Natur der transcendenten Funktionen besser im Stande einzusehen, wenn man sie durch dergleichen ins Unendliche fortlaufende Formeln ausdruckt. Denn so wie man die Natur einer ganzen Funktion am leichtesten erkennt, wenn man sie nach den in ihr vorkommenden verschiedenen Potestäten von z entwickelt, und also auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. bringt: so ist auch eben diese Form vor allen andern geschickt, der Seele einen deutlichen Begriff von der Natur einer jeden andern Funktion zu ertheilen, wenn gleich die Anzahl der darin vorkommenden Glieder unendlich ist. Es fällt aber in die Augen, daß keine andern, als bloß die ganzen Funktionen von z durch eine endliche Menge solcher Glieder, $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. ausgedruckt werden können: denn sollte das Gegentheil möglich seyn, so würden eben dadurch die Funktionen

zu

zu ganzen Funktionen. Und sollte jemand daran zweifeln, ob man die übrigen Arten der Funktionen außer den ganzen durch eine unendliche Anzahl solcher Glieder ausdrucken könne: so wird die wirkliche Entwickelung aller dieser Funktionen in dergleichen unendliche Reihen diesen Zweifel hinlänglich aus dem Wege räumen. Damit aber diese Entwickelung einen desto größern Umfang erhalte, so müssen außer den Potestäten von z, deren Exponent eine ganze Zahl ist, auch alle übrigen Potestäten von z zugelassen werden. Auf diese Art leidet es gar keinen Zweifel, daß eine jede Funktion von z durch eine unendliche Reihe von dieser Form $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}$ + u. s. f. ausgedruckt werden kann, indem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. f. ganz allgemeine Zahlzeichen sind, und man also dafür, was für eine Zahl man will, setzen kann.

§. 60.

Es ist bekannt, daß man den Bruch $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ durch eine ohne Ende fortgehende Division in diese unendliche Reihe verwandeln kann: $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ &c. Da darin jedes Glied zu dem unmittelbar folgenden das beständige Verhältniß $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$ hat, so nennt man selbige eine geometrische Reihe.

Man kann aber diese Reihe auch auf die Art finden, daß man sie anfangs als unbekannt betrachtet. Denn setzt man

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{&c.}$$

und sucht man, um diese Gleichheit wirklich hervorzubringen, die Coefficienten A, B, C, D, E u. s. f. so wird

$$a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{&c.}$$

Multiplicirt man nun wirklich, so bekommt man

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{u. s. f.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{u. s. f.}$$

Es muß also $a = \alpha A$, folglich $A = \frac{a}{\alpha}$, und der Coefficient einer jeden Potestät von z gleich Null gesetzt werden. Dies giebt folgende Gleichungen

$$\alpha B + \beta A = 0$$
$$\alpha C + \beta B = 0$$
$$\alpha D + \beta C = 0$$
$$\alpha E + \beta D = 0.$$
$$\text{u. s. f.}$$

Kennt man also irgend einen von den Coefficienten, so läßt sich daraus der folgende leicht finden. Denn setzt man den Coefficienten irgend eines Gliedes $= P$, und den Coefficienten des unmittelbar folgenden Gliedes $= Q$: so ist $\alpha Q + \beta P = 0$, und folglich $Q = \frac{\beta P}{\alpha}$. Da also das erste Glied A bestimmt und $= \frac{a}{\alpha}$ ist: so findet man daraus die folgenden Größen B, C, D u. s. f., eben so, als sie sich aus der Division ergaben. Uebrigens sieht man ohne Mühe, daß der Coefficient von z^n in der gefundenen unendlichen Reihe $= \pm \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$ ist, wobey das Zeichen + alsdann statt findet, wenn n eine gerade, — aber, wenn n eine ungerade Zahl ist; mit andern Worten: der Coefficient ist allezeit $= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

§. 61.

§. 61.

Auf eine ähnliche Art kann der Bruch $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ durch eine ohne Ende fortgehende Division in eine unendliche Reihe verwandelt worden.

Da inzwischen diese Division mühsam ist, und man dabey die Natur der gefundenen unendlichen Reihe nicht so leicht übersieht: so ist es vortheilhafter, die gesuchte Reihe willkührlich anzunehmen, und sie dann auf eben die Art wie vorhin zu bestimmen. Es sey also

$$\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{u. s. f.}$$

Multiplicirt man hier auf beyden Seiten durch $\alpha + \beta z + \gamma zz$; so erhält man

$$\begin{aligned} a + bz = {} & \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{u. s. f.} \\ & + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{u. s. f.} \\ & + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich $\alpha A = a$; $\alpha B + \beta A = b$; und folglich ist $A = \frac{a}{\alpha}$, und $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$. Die übrigen Buchstaben erhalten ihre Bestimmung aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha C + \beta B + \gamma A &= 0 \\ \alpha D + \beta C + \gamma B &= 0 \\ \alpha E + \beta D + \gamma C &= 0 \\ \alpha F + \beta E + \gamma D &= 0 \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Man findet hier also aus den Coefficienten jeder zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder den Coefficienten des nächsten Gliedes. Sind z. B. die Coefficienten zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder P und Q, und der Coefficient des nächsten Gliedes R: so ist $\alpha R +$

$\beta Q + \gamma P = 0$, oder $R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}$. Da nun die beyden ersten Buchstaben A und B bereits bekannt sind, so findet man aus ihnen nach und nach alle folgenden C, D, E, F, u. s. f. und auf diese Weise erhält man $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ &c.} = \frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$.

Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{1 + 2z}{1 - z - zz}$ gegeben, und ihm werde die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{&c.}$ gleich gesetzt. Alsdann ist, da $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, und $\gamma = -1$ ist, $A = 1$, $B = 3$; und folglich

$C = B + A$
$D = C + B$
$E = D + C$
$F = E + D$
u. s. w.

Ein jeder Coefficient ist also die Summe der beyden vorhergehenden; und kennt man daher die Coefficienten zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder P und Q, so ist der nächste $R = P + Q$.

Da nun die beyden ersten Coefficienten A und B bekannt sind, so giebt der Bruch $\frac{1 + 2z}{1 - z - zz}$ folgende unendliche Reihe: $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5$ u. s. w. die man ohne Mühe, so weit als man will, fortsetzen kann.

§. 62.

Hieraus ist man bereits im Stande, die Natur der unendlichen Reihen, worin gebrochene Funktionen verwandelt werden können, zu begreifen. Es findet nemlich bey denselben ein solches Gesetz statt, daß ein jedes ihrer Glieder aus einem oder einigen von den vorhergehenden gefunden werden kann. Ist z. B. der Nenner des gegebenen Bruchs $= \alpha + \beta z$, und setzt man die unendliche Reihe

$A + Bz + Cz^2 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \text{&c.}$; so wird jeder Coefficient Q aus dem unmittelbar vor ihm hergehenden allein auf die Art bestimmt, daß $\alpha Q + \beta P = o$ wird. Bestände der Nenner aus drey Theilen, $\alpha + \beta z + \gamma zz$; so würde jeder Coefficient in der unendlichen Reihe, R, aus den beyden vorhergehenden gefunden werden, wenn man $\alpha R + \beta Q + \gamma P = o$ setzte. Wäre der Nenner viertheilig, wie $\alpha + \beta z, \gamma zz + \delta z^3$; so würde jeder Coefficient in der unendlichen Reihe, S, erhalten werden, wenn man ihn so annähme, daß $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = o$ würde; und so geht dies immer weiter fort. Es wird daher in diesen unendlichen Reihen jedes Glied aus einem oder einigen von den unmittelbar vorhergehenden Gliedern nach einem gewissen beständigen Gesetze bestimmt, und dieses Gesetz läßt sich aus dem Nenner des Bruchs, der in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, ohne Mühe erkennen. Man nennt aber diese Reihen mit dem berühmten Moivre, der sich mit der Untersuchung derselben vorzüglich beschäftiget hat, wiederkehrende Reihen, weil man bey denselben immer zu den vorhergehenden Gliedern zurückkehren muß, wenn man die folgenden bestimmen will.

§. 63.

Es ist aber zur Erhaltung solcher Reihen nothwendig, daß der beständige Theil des Nenners nicht $= o$ sey; denn da das erste Glied derselben $A = \frac{a}{\alpha}$ ist §. 60. 61. so würde nicht nur dieses Glied, sondern auch alle folgenden unendlich werden, wenn $\alpha = o$ wäre. Diesen Fall also ausgenommen, der nachher betrachtet werden soll, so läßt sich jede gebrochene Funktion, die in eine unendliche Reihe

verwandelt werden soll, auf diese Form bringen: $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{&c.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{&c.}}$ wo das erste Glied des Nenners $= 1$ gesetzt worden ist, weil sich auf diese Art alle Brüche ausdrucken lassen, sobald das gedachte Glied nicht $= 0$ ist; die übrigen Theile des Nenners aber haben deswegen alle das Zeichen —, damit alle Glieder der Reihe positiv werden. Denn setzt man die daraus entspringende wiederkehrende Reihe $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ u. s. f. so werden die Coefficienten auf die Art bestimmt, daß

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e$$

u. s. w.

ist. Ein jeder Coefficient ist also ein Aggregat des Vielfachen eines oder mehrerer vorhergehenden Coefficienten, und einer gewissen Zahl, welche der Zähler an die Hand giebt. Wenn indeß der Zähler nicht aus einer unendlichen Menge von Theilen besteht, so hört das Hinzukommen dieser Zahl bald auf, und dann wird jeder folgende Coefficient nach einem beständigen Gesetze bloß aus den vorhergehenden Coefficienten bestimmt. Damit nun die Folge unter den Gliedern der Reihe ununterbrochen fortgehe, so muß man zu der gegenwärtigen Verwandlung ächte gebrochene Funktionen nehmen; denn bey den unächten gebrochenen Funktionen ändert die darin enthaltene ganze Funktion in den Gliedern, in welche sie kommt, das Fortschreiten der Reihe.

So giebt z. B. der unächte Bruch $\frac{1 + 2z - z^3}{1 - z - zz}$ diese Reihe:

$1 + 3z + 4zz + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 +$ u. s. f.; es macht aber das vierte Glied $6z^3$ eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jeder Coefficient die Summe der beyden vorhergehenden ist.

§. 64.

Unter den wiederkehrenden Reihen, die man durch die bisher beschriebene Entwickelung der Funktionen erhält, verdienen diejenigen, die aus Brüchen entspringen, deren Renner eine Potestät ist, eine besondere Betrachtung. So findet man z. B. wenn man den Bruch $\frac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$ in eine solche Reihe auflöset, diese:

$$a + 2\alpha a_z + 3\alpha^2 a_{z2} + 4\alpha^3 a_{z3} + 5\alpha^4 a_{z4} + \text{ꝛc.}$$
$$+ b + 2\alpha b + 3\alpha^2 b + 4\alpha^3 b + \text{ꝛc.}$$

und der Coefficient von der Potestät z^n ist $(n + 1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b$. Es ist indeß auch diese Reihe eine wiederkehrende, weil darin ein jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird; und man erkennt das Gesetz, nach welchem solches geschiehet, aus dem entwickelten Renner, der $1 - 2\alpha z + \alpha\alpha zz$ ist. Setzt man $\alpha = 1$ und $z = 1$; so geht die Reihe in eine allgemeine arithmetische Progression, $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) +$ u. s. f. über, deren Differenzen unveränderlich oder einander gleich sind. Es ist daher eine jede arithmetische Progression eine wiederkehrende Reihe. Denn druckt man dieselbe auf diese Art aus $A + B + C + D + E + F +$ ꝛc. so ist $C = 2B - A$; $D = 2C - B$; $E = 2D - C$; u. s. f.

§. 65.

§. 65.

Ferner wird der Bruch $\frac{a + bz + czz}{(1-\alpha)^3}$, da $\frac{1}{(1-\alpha z)^3} =$ $(1-\alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 +$ u. s. f. ist, in diese unendliche Reihe verwandelt:

$$\begin{array}{llllll} a + 3\alpha a_z & + 6\alpha^2 a_{z2} & + 10\alpha^3 a_{z3} & + 15\alpha^4 a_{z4} & + \text{u. s. f.} \\ + \quad b & + 3\alpha b & + 6\alpha^2 b & + 10\alpha^3 b & + \ldots \\ + \quad c & + 3\alpha c & + 6\alpha^2 c & + \ldots & \end{array}$$

worin der Coefficient der Potestät $z^n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2.}\alpha^n a +$ $\frac{n(n+1)}{1.\ 2.}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1.\ 2.}\alpha^{n-2} c$ ist. Setzt man aber $\alpha = 1$, und $z = 1$; so geht diese Reihe in eine allgemeine Progression der zweyten Ordnung über, deren zweyte Differenzen unveränderlich sind. Es bezeichne $A + B + C + D + E +$ &c. eine solche Progression, so wird dieselbe zugleich eine wiederkehrende Reihe seyn, worin jedes Glied aus den drey vorhergehenden auf die Art bestimmt wird, daß $D = 3C - 3B + A$; $E = 3D - 3C + B$; $F = 3E - 3D + C$; u. s. f. ist. Da in einer arithmetischen Progression die zweyten Differenzen ebenfalls einander gleich sind, indem dieselben $= o$ werden: so kommt diese Eigenschaft auch den arithmetischen Progressionen zu.

§. 66.

Auf eine ähnliche Art giebt der Bruch $\frac{a + bz + czz + dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ eine unendliche Reihe, in welcher die Potestät z^n den Coefficienten $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$ $\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3.}$ $\alpha^{n-3} d$ hat. Setzt man daher $\alpha = 1$, und $z = 1$; so begreift

greift diese Reihe alle algebraische Progressionen der dritten Ordnung, deren dritte Differenzen unveränderlich sind, unter sich. Alle Progressionen von dieser Ordnung, dergleichen hier wider $A + B + C + D + E + F +$ u. s. f. vorstellen mag, sind daher zugleich wiederkehrende Reihen, die aus dem Renner $1 - 4z + 6zz - 4z^3 + z4$ entspringen. Es ist folglich $E = 4D - 6C + 4B - A$; $F = 4E - 6D + 4C - B$; u. s. f., und diese Eigenschaft kommt zugleich allen Progressionen der niedern Ordnungen zu.

§. 67.

Auf diese Art läßt sich zeigen, daß alle algebraische Progressionen einer jeden Ordnung, welche zuletzt auf unveränderliche Differenzen führen, wiederkehrende Reihen sind, und daß das Gesetz, nach welchem jedes Glied aus den vorhergehenden gemacht wird, durch den Renner $(1 - z)^n$ gegeben wird, wobey n eine größere Zahl ist, als diejenige, welche die Ordnung der Progression anzeigt. Da also $a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m +$ u. s. w. eine Progression von der Ordnung m darstellt: so ist wegen der Natur der wiederkehrenden Reihen.

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a + b)^m + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}(a + 2b)^m - \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3.}(a + 3b)^m + \ldots\ldots \pm \frac{n}{1}(a + (n-1)b)^m \mp (a + nb)^m;$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern aber, wenn n eine ungerade Zahl ist. Diese Gleichung ist allgemein wahr, wenn n eine ganze Zahl und größer als m ist. Hieraus läßt sich beurtheilen, von was für einem weiten Umfange die Lehre von den wiederkehrenden Reihen ist.

§. 68.

§. 68.

Wenn der Nenner eine Potestät, nicht einer zweytheiligen, sondern einer vieltheiligen Wurzel ist: so läßt sich die Natur der daraus entstehenden wiederkehrenden Reihe auch auf eine andere Art erklären. Es sey nemlich der Bruch

$$\frac{1}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{&c.})^{m+1}}$$

gegeben; so ist die daher entspringende unendliche Reihe

$$1 + \frac{(m+1)}{1}\alpha z + \frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2.}\alpha^2 z^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^3 + \frac{(m+1)}{1}\beta + \frac{m+1)(m+2)}{1.\ 2.}2\alpha\beta z^3 + \text{&c.} + \frac{(m+1)}{1}\gamma$$

Um die Natur dieser Reihe desto besser einzusehen, drücke man sie durch allgemeine Buchstaben aus. Man erhält alsdann

$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{&c.}$ und ein jeder Coefficient N wird auf die Art aus so viel vorhergehenden, als Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. f. da sind, bestimmt, daß $N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta I + \text{&c.}$ ist. Ob nun gleich hier das Gesetz der Fortschreitung nicht beständig ist, sondern von dem Exponenten der Potestät z abhängt; so richtet sich doch gleichwohl eben diese Reihe nach einem andern beständigen Gesetze, welches man aus dem entwickelten Nenner findet, und welches der Natur der wiederkehrenden Reihen gemäß ist. Jenes nicht beständige Gesetz hat aber nur alsdann statt, wenn der Zähler des Bruchs die Einheit, oder eine beständige Größe ist; denn wenn er zugleich

Pote-

Potestäten von z enthält, so wird dasselbe noch viel zusammengesetzter. Dies wird sich nach der Erklärung der Anfangsgründe der Differential-Rechnung mit größerer Leichtigkeit zeigen lassen.

§. 69.

Bisher haben wir angenommen, daß der erste und beständige Theil des Nenners nicht = o sey; und haben an seiner Stelle die Einheit gesetzt. Nun wollen wir untersuchen, was man für Reihen erhält, wenn das beständige Glied des Nenners verschwindet. In diesem Falle hat die gebrochene Funktion folgende Form:

$$\frac{a + bz + czz + \text{&c.}}{z\,(1 - \alpha z - \beta zz - \text{&c.})}$$

Läßt man hier den Faktor des Nenners z aus der Acht, so giebt der Bruch, $\frac{a + bz + czz + \text{&c.}}{1 - \alpha z - \beta zz - \text{&c.}}$ der dann übrig bleibt, die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{&c.}$ und so ist offenbar, daß

$$\frac{a + bz + cz\,\text{&c.}}{z(1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 - \text{&c.})} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \text{&c.}$$

seyn werde. Auf eine ähnliche Art wird $\frac{1 - \alpha z - \beta z^2 - \text{&c.}}{z^2(a + bz + cz^2 + \text{&c.})}$

$= \frac{A}{zz} + \frac{B}{z} + C + Dz + Bz^2 + \text{&c.}$ und überhaupt ist

$$\frac{a + bz + cz^2 + \text{&c.}}{z^m(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \text{&c.})} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + \text{&c.}$$

m mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will.

§. 70.

Da man durch die Substitution eine andere veränderliche Größe x anstatt der z in die gebrochenen Funktionen einführen, und also jede gebrochene Funktion auf unzählige Arten ausdrucken kann: so kann man auch eine und dieselbe gebrochene Funktion auf unendlich viele Arten durch wiederkehrende Reihen darstellen. Ist z. B. der Bruch $y = \frac{1 + z}{1 - z - zz}$ gegeben, wo also $y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 +$ &c. wird: so erhält man, wenn man $z = \frac{1}{x}$ setzt, $y = \frac{xx + x}{xx - x - 1} = \frac{-x(1+x)}{1 + x - xx}$; und da $\frac{1+x}{1+x-xx} = 1 + 0x + xx - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 -$ &c. so wird nun $y = -x - 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 +$ &c. Setzt man ferner $z = \frac{1-x}{1+x}$; so wird $y = \frac{-2-2x}{1-4x-xx}$, und daraus $y = -2 - 10x - 42xx - 178x^3 - 754x^4 -$ &c. und auf diese Weise lassen sich für y unzählige wiederkehrende Reihen finden.

§. 71.

Die irrationalen Funktionen verwandelt man nach dem Theorem, daß

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{n-3n}{n}} Q^3 +$$ &c.

in unendliche Reihen: dann es laufen hier die Glieder, wenn $\frac{m}{n}$ keine ganze positive Zahl ist, ohne Ende fort. Setzt man nun statt m und n bestimmte Zahlen, so ist

(P + Q)

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}Q - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}P^{-\frac{3}{2}}Q^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{5}{2}}Q^3 - \text{&c.}$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}P^{-\frac{5}{2}}Q^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{7}{2}}Q^3 + \text{&c.}$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}Q - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}P^{-\frac{5}{3}}Q^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{8}{3}}Q^3 - \text{&c.}$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}P^{-\frac{4}{3}}Q + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}Q^{-\frac{7}{3}}Q^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{10}{3}}Q^3 + \text{&c.}$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}P^{-\frac{1}{3}}Q - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 6}P^{-\frac{4}{3}}Q^2 + \frac{2\cdot 1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{7}{3}}Q^3 - \text{&c.}$$

u. s. f.

§. 72.

Die Glieder dieser Reihen folgen also auf die Art auf einander, daß man ein jedes aus dem vorhergehenden erhalten kann. Denn ist irgend ein Glied der Reihe, welche aus $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ entspringt, $= MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$, so ist das folgende $= \frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}$. Man muß aber hierbey bemerken, daß in jedem folgenden Gliede der Exponent von P um eins abnimmt, und dagegen der Exponent von Q um eins wächset. Und damit die Anwendung auf einzelne Fälle leichter werde, so kann man die allgemeine Form $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ so ausdrucken $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; denn entwickelt man den Ausdruck $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$, und multiplicirt

man die daraus entspringende Reihe durch $P^{\frac{m}{n}}$, so erhält man dadurch die vorhergehende. Ferner kann man, da m nicht bloß die ganzen Zahlen, sondern auch jeden Bruch vorstellt, n immer der Einheit gleich setzen. Thut man nun dieses, so wird, wenn man $\frac{Q}{P}$, welches eine Funktion von z ist, $= Z$ setzt,

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \text{&c.}$$

Um aber die folgenden Progressions-Gesetze zu finden, ist es dienlich, auch diese Verwandlung der allgemeinen Formel in eine Reihe zu bemerken

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \text{&c.}$$

§. 73.

Es sey also zuvörderst $Z = \alpha z$, so ist $(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{&c.}$

Setzt man nun anstatt dieser Reihe die allgemeine Formel:

$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{u. s. f.}$

so wird ein jeder Coefficient N aus dem vorhergehenden M auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{m-n}{n}\alpha M$ ist. So ist, wenn man $n = 1$ setzt, da alsdann $M = 1$ ist, $N = A = \frac{m-1}{1}\alpha$; ferner, wenn man $n = 2$ setzt, da alsdann $M = A = \frac{m-1}{1}\alpha$ ist, $N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M =$

(m–

$\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2$; und eben so $C = \frac{m-3}{3} \alpha B$
$= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3$ u. s. f. gerade so, als wir die Coefficienten in der vorhin gefundenen Reihe gehabt haben.

§. 74.

Ferner sey $Z = \alpha z + \beta zz$. Alsdann ist $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1} =$
$1 + \frac{(m-1)}{1}(\alpha z + \beta zz) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(\alpha z + \beta zz)^2 +$ u. s. f.

Ordnet man nun die Glieder nach den Potestäten von z, so wird $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1} =$

$1 + \frac{(m-1)}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-3)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 +$ &c.
$+ \frac{(m-1)}{1} \beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} 2\alpha\beta z^3 +$ &c.

Setzt man daher anstatt dieser Reihe die allgemeine Formel:
$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots . Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n +$ &c.
so wird jeder Coefficient aus den beyden vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{m-n}{n} \alpha M + \frac{2m-n}{n} \beta L$ ist; und hiernach lassen sich die Coefficienten aller Glieder aus dem ersten $= 1$ finden. Es ist nemlich

$$A = \frac{(m-1)}{1} \alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2} \alpha A + \frac{(2m-2)}{2} \beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3} \alpha B + \frac{(2m-3)}{3} \beta A$$

$$D = \frac{(m-4)}{4} \alpha C + \frac{(2m-4)}{4} \beta B$$

u. s. f.

§. 75.

Wenn $Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$ ist, so ist

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^2 + \text{&c.}$$

und ordnet man die Glieder dieser Reihe nach den Potestäten von z, so erhält man

$$1 + \frac{(m-1)}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{&c.}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \text{&c.}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}\gamma z^3 + \text{&c.}$$

Damit aber das Gesetz dieser Reihe desto besser in die Augen falle, so setze man an ihrer Stelle

$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$.

Hier wird der Coefficient eines jeden Gliedes aus den drey vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{(m-n)}{n}\alpha M + \frac{(2m-n)}{n}\beta L + \frac{(3m-n)}{n}\gamma K$ ist. Da nun das erste Glied $= 1$, und die vor demselben vorhergehenden $= 0$ sind; so ist

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A$$

E =

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B$$

u. s. f.

§. 76.

Ueberhaupt also werden, wenn

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{ꝛc.})^{m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ꝛc.}$$

gesetzt wird, die Coefficienten eines jeden einzeln Gliedes aus dem vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A + \frac{(4m-4)}{4}\delta$$

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B + \frac{(4m-5)}{5}\delta A + \frac{(5m-5)}{5}\varepsilon$$

u. s. f.

Es wird nemlich ein jedes Glied aus so viel vorhergehenden bestimmt, als man Buchstaben α, β, γ, δ, u. s. f. in der Funktion von z hat, deren Potestät in eine wiederkehrende Reihe verwandelt wird. Uebrigens stimmt dieses Gesetz mit dem §. 68, wo wir die ähnliche Formel $(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \text{u. s. w.})^{-m-1}$ in eine unendliche Reihe

auflösten, überein. Denn wenn man — m anstatt m setzt, und die Buchstaben α, β, γ, δ, u. s. f. negativ nimmt, so erhält man in beyden Fällen durchaus einerley Reihen. Inzwischen ist hier nicht der Ort, dieses Gesetz aus allgemeinen Gründen zu beweisen, dies kann erst dann auf eine bequeme Art geschehen, wenn die Anfangsgründe der Differential-Rechnung vorausgesetzt werden können: jetzt ist es hinlänglich, die Richtigkeit desselben durch die Anwendung auf alle darunter begriffene einzelne Fälle gezeigt zu haben.

Fünftes Capitel.

Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 77.

Ob wir gleich bisher mehrere veränderliche Größen betrachtet haben, so waren dieselben doch immer von der Art, daß sie insgesammt Funktionen von einer einzigen veränderlichen Größe waren, und daß, wenn man eine davon bestimmte, dadurch zugleich alle übrigen bestimmt wurden. Allein die veränderlichen Größen, die wir nunmehr betrachten werden, sind so beschaffen, daß keine von der andern abhängt, und daß bey der Bestimmung der einen die übrigen nichts desto weniger unbestimmt und veränderlich bleiben. Dergleichen veränderliche Größen, z. B. x, y, z, stimmen also in Ansehung ihrer Bedeutung mit einander überein, weil eine jede alle bestimmte Werthe unter sich begreift; allein, wenn man sie unter einander vergleicht, so findet darunter die größte Verschiedenheit statt; indem, wenn die eine z einen bestimmten Werth erhält, die übrigen x und y noch eben so weit sich erstrecken, als vorher. Der Unterschied zwischen von einander abhängigen und von einander unabhängigen veränderlichen Größen besteht also darin, daß die Bestimmung der einen bey jenen zugleich die Bestimmung aller übrigen nach sich zieht, bey diesen aber auf die Bedeutung der übrigen nicht den geringsten Einfluß hat.

§. 78.

Eine Funktion zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen x, y, z, ist daher ein Ausdruck, der auf irgend eine Art aus diesen Größen zusammengesetzt ist.

Es ist also $x^3 + xyz + az^2$ eine Funktion dreyer veränderlichen Größen x, y, z; und es bleibt diese Funktion, wenn auch darin eine veränderliche Größe z. B. z bestimmt, d. h. an ihrer Stelle eine beständige Größe gesetzt wird, noch immer eine veränderliche Größe, nemlich eine Funktion von x und y; ja wenn auch außer z noch y bestimmt wird, so ist sie doch noch eine Funktion von x. Es erhält daher eine solche Funktion mehrerer veränderlichen Größen nicht eher einen bestimmten Werth, als bis alle einzelne veränderlichen Größen derselben bestimmt sind. Da nun jede veränderliche Größe auf unendlich viele Arten bestimmt werden kann, so muß eine Funktion zweyer veränderlicher Größen, da sie für jede dieser Größen unendlich vieler Bestimmungen fähig ist, auf unendliche mal unendlich viele Arten bestimmt werden können. Bey einer Funktion dreyer veränderlichen Größen ist aus eben dem Grunde die Anzahl der Bestimmungen noch unendlich vielmal größer, und auf eine ähnliche Art wächst dieselbe, wenn noch mehr veränderliche Größen da sind.

§. 79.

Man theilt die Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, eben so wie die Funktionen einer einzigen, sehr bequem in algebraische und transcendente ein.

Unter jenen versteht man solche, deren Zusammensetzung bloß auf den algebraischen Operationen beruht; unter diesen aber diejenigen, zu welchen zugleich transcendente Operationen erfordert werden. Man könnte diese letztern von

neuem

neuem darnach eintheilen, daß die transcendenten Operationen entweder alle, oder nur einige, oder gar nur eine einzige veränderliche Größe angehen können. Man nehme z. B. den Ausdruck $zz + y\log.z$. Dies ist allerdings eine transcendente Funktion von y und z, weil sie den Logarithmen von z enthält; aber sie ist solches gleichwohl nur in einem niedrigen Grade, weil bey der Bestimmung der veränderlichen Größe z eine algebraische Funktion von y übrig bleibt. Indeß wäre es von keinem Nutzen, wenn man durch dergleichen Unterabtheilungen die Untersuchung weitläuftiger machte.

§. 80.

Ferner werden die algebraischen Funktionen in rationale und irrationale, und die rationalen wieder in ganze und gebrochene eingetheilt.

Was man unter einer jeden dieser Arten von Funktionen zu verstehen habe, ist aus dem ersten Capitel [§. 8 und 9] bekannt. Eine Funktion ist nemlich alsdann rational, wenn keine von den veränderlichen Größen, von welchen sie eine Funktion ist, ein Wurzelzeichen vor sich hat, und eine ganze Funktion, wenn darin keine veränderlichen Brüche vorkommen, so wie sie in diesem Falle ein Bruch ist. Der allgemeine Ausdruck einer ganzen Funktion zweyer veränderlichen Größen ist daher: $\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta z^3 + \vartheta y^2 z + \iota yz^2 + \varkappa z^3 +$ u. s. f.; und wenn P und Q dergleichen ganze Funktionen entweder zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen bedeuten, so ist $\frac{P}{Q}$ ein allgemeiner Ausdruck der gebrochenen Funktionen. Die irrationalen Funktionen endlich sind auch hier wieder entweder entwickelte oder verwickelte; jene werden vermittelst

der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt, diese aber in einer unauflösbaren Gleichung gegeben. So ist V eine verwickelte irrationale Funktion von y und z, wenn $V^5 = (ayz + z^3)V^2 + (y^4 + z^4)V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$ ist.

§. 81.

Auch findet bey den gegenwärtigen Funktionen die Eintheilung in einförmige und vielförmige eben so gut statt, als bey den Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe.

So sind die rationalen Funktionen einförmige, weil sie, wenn man jede ihrer veränderlichen Größen bestimmt, nicht mehr als einen Werth geben. Läßt man nun P, Q, R, S, u. s. f. rationale oder einförmige Funktionen von x, y, z bedeuten, so ist V eine zweyförmige Funktion eben dieser Größen, wenn $V^2 - PV + Q = o$ ist; denn in diesem Falle erhält V, man mag x, y und z, was für einen bestimmten Werth man will ertheilen, nie Einen, sondern allezeit einen doppelten bestimmten Werth. Auf eine ähnliche Art ist V eine dreyförmige Funktion, wenn $V^3 - PV^2 + QV - R = o$; und eine vierförmige, wenn $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = o$ ist. Hieraus läßt sich leicht beurtheilen, wie es mit den übrigen vielförmigen Funktionen beschaffen ist.

§. 82.

So wie, wenn man eine Funktion Einer veränderlichen Größe $= o$ setzt, dadurch die veränderliche Größe z einen bestimmten, einfachen entweder oder vielfachen, Werth erhält: so wird, wenn man eine Funktion zweyer veränderlichen

lichen Größen x und z gleich o setzt, jede von diesen veränderlichen Größen durch die andere bestimmt, und daher eine Funktion derselben, ohnerachtet sie vorher nicht von einander abhiengen. Auf eine ähnliche Art wird, wenn man eine Funktion dreyer veränderlichen Größen x, y und $z = o$ setzt, jede dieser veränderlichen Größen durch die beyden übrigen bestimmt, und eine Funktion derselben. Eben das geschieht, wenn eine Funktion nicht der Null, sondern einer beständigen Größe, oder auch einer andern Funktion gleich gesetzt wird; denn es wird aus jeder Gleichung, so viel veränderliche Größen sie auch enthalten mag, doch immer die eine veränderliche Größe durch die übrigen bestimmt, und eine Funktion derselben: zwey verschiedene Gleichungen aber zwischen ein und denselben veränderlichen Größen bestimmen je zwey und zwey davon durch die übrigen u. s. f.

§. 83.

Vorzüglich merkwürdig aber ist die Eintheilung der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen in homogene und heterogene.

Homogen ist eine Funktion, wenn darin allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen der veränderlichen Größen befindlich ist; und heterogen, wenn die Anzahl dieser Dimensionen verschieden ist. Es wird aber hierbey eine jede einzelne veränderliche Größe für eine Dimension, das Quadrat davon, oder ein Produkt aus zweyen, für zwey Dimensionen, ein Produkt aus dreyen, sie mögen nun einander gleich oder ungleich seyn, für drey Dimensionen gerechnet, u. s. w. und auf die beständigen Größen sieht man bey der Zählung der Dimensionen gar nicht. Auf diese Art legt man den Ausdrücken αy; βz eine; diesen, αy^2; βyz; γz^2, zwey; den folgenden, αy^3; $\beta y^2 z$; $\gamma y z^2$; δz^3, drey;

drey; und diesen αy^4; $\beta y^3 z$; $\gamma y^2 z^2$; $\delta y z^3$; εz^4, vier Dimensionen bey, u. s. f.

§. 84.

Wir wollen diese Eintheilungen zuvörderst auf die ganzen Funktionen, und zwar bloß auf die ganzen Funktionen zweyer veränderlichen Größen anwenden, indem mehr veränderliche Größen hier keinen Unterschied machen.

Es ist also eine ganze Funktion eine homogene Funktion, wenn sich in allen ihren Gliedern, einzeln genommen, eine gleiche Anzahl von Dimensionen findet.

Diese Funktionen theilt man wieder sehr bequem nach der Anzahl der Dimensionen ein, welche man allenthalben in ihnen antrifft. So ist $\alpha y + \beta z$ die allgemeine Form der ganzen Funktion von einer Dimension; $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$ hingegen die allgemeine Form der Funktionen von zwey Dimensionen; ferner $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3$ die allgemeine Form der Funktionen von drey Dimensionen; $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4$ die allgemeine Form der Funktionen von vier Dimensionen; u. s. f. Nach der Analogie kann man daher auch eine beständige Größe α, ohne alle veränderliche Größe, eine Funktion von keiner Dimension nennen.

§. 85.

Eine gebrochene Funktion ferner ist homogen, wenn ihr Zähler und Nenner homogene Funktionen sind.

So ist dieser Bruch $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ eine homogene Funktion von y und z. Was aber die Anzahl der Dimensionen bey dergleichen Funktionen betrifft, so erhält man sie, wenn man die Zahl der Dimensionen im Nenner von der Zahl

der

der Dimensionen im Zähler abzieht; so daß also der angeführte Bruch eine Funktion von einer Dimension, und $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ eine Funktion von drey Dimensionen ist. Wenn daher der Zähler und Nenner gleiche Mengen von Dimensionen enthalten, so wird der Bruch eine Funktion von keiner Dimension, wie solches bey $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$, desgleichen bey $\frac{y}{z}$; $\frac{azz}{yy}$; $\frac{\beta y^3}{z^3}$, statt findet: und ist die Anzahl der Dimensionen im Nenner größer als im Zähler, so wird die Zahl der Dimensionen des Bruchs negativ. So ist z. B. $\frac{y}{zz}$ eine Funktion von — 1 Dimension; $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ eine Funktion von — 3 Dimensionen; $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ eine Funktion von — 5 Dimensionen, weil in dem Zähler gar keine Dimension anzutreffen ist. Uebrigens erhellet von selbst, daß mehrere homogene Funktionen, die alle eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wieder eine homogene Funktion von eben der Anzahl von Dimensionen geben. So ist der Ausdruck $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 + \delta z^4}{yyz + yzz}$ eine Funktion von einer, dieser hingegen $\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma zz}{yy} + \frac{yy + zz}{yy - zz}$ eine Fnnktion von gar keiner Dimension.

§. 86.

Was bisher von den homogenen Funktionen gesagt worden ist, erstreckt sich auch auf die irrationalen Funktionen. Ist daher P irgend eine homogene Funktion, und die Zahl ihrer

ihrer Dimensionen also n: so ist $\sqrt{P}$ eine Funktion von $\frac{1}{2}n$, $\sqrt[3]{P}$ eine Funktion von $\frac{1}{3}n$, und überhaupt $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ eine Funktion von $\frac{\mu}{\nu}n$ Dimensionen. Es ist folglich $\sqrt{(yy+zz)}$ eine Funktion von einer, $\sqrt[3]{(y^9+z^9)}$ eine Funktion von dreyen, $(yz+zz)^{\frac{3}{4}}$ eine Funktion von $\frac{3}{2}$ Dimensionen, und $\frac{yy+zz}{\sqrt{(y^4+z^4}}$ eine Funktion von keiner Dimension. Dieses mit dem vorhergehenden zusammengenommen, so erhellet, daß

$$\frac{1}{y}+\frac{y\sqrt{(yy+zz)}}{z^3}-\frac{y}{\sqrt[3]{(y^6-z^6)}}+\frac{y\sqrt{z}}{zz\sqrt{y}+\sqrt{(y^5+z^5)}}$$

eine homogone Funktion von — 1 Dimension ist.

§. 87.

Ob eine verwickelte irrationale Funktion homogen sey oder nicht? läßt sich hieraus leicht erkennen. Es sey V eine solche verwickelte Funktion, und $V^3+PV^2+QV+R=0$, so daß P, Q und R Funktionen von y und z sind. Hier fällt nun zuvörderst in die Augen, daß V keine homogene Funktion seyn kann, wofern nicht auch P, Q und R homogene Funktionen sind. Setzt man ferner die Anzahl der Dimensionen in V gleich n, so ist V^2 eine Funktion von 2n, und V^3 eine Funktion von 3n Dimensionen; und da nun allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen statt finden muß, so muß P eine Funktion von n, Q eine Funktion von 2n, und R eine Funktion von 3n Dimensionen seyn. Wenn also P, Q und R in der Ordnung, in welcher sie hier stehen, homogene Funktionen von n, 2n, 3n Dimensionen, sind,

sind, so schließt man daraus, daß V eine Funktion von n Dimensionen sey. Ist z. B. $V^5 + (y4 + z4) V^3 + ay^8 V - z^{10} = o$; so ist V eine homogene Funktion von zwey Dimensionen von y und z.

§. 88.

Wenn V eine homogene Funktion von n Dimensionen von y und z ist, und man darin allenthalben $y = uz$ setzt: so verwandelt sich die Funktion V in ein Produkt aus der Dignität z^n in eine Funktion der veränderlichen Größe u.

Es werden nemlich durch die Substitution $y = uz$ in alle einzelne Glieder eben so hohe Potestäten von z gebracht, als sie vorher von y enthielten: und da die Anzahl der Dimensionen von y und z in jedem Gliede n war, so muß nun die veränderliche Größe z allenthalben n Dimensionen haben, und also in jedem Gliede die Dignität z^n seyn. Nunmehr ist daher auch die Funktion V durch z^n theilbar, und der Quotient wird, wenn man wirklich theilt, eine Funktion von der einzigen veränderlichen Größe u. Um dieses zuvörderst an einer ganzen Funktion zu zeigen, so sey $V = \alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$. Setzt man hier $y = uz$, so wird $V = z^3 (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)$. Aber auch von den Brüchen gilt diese Behauptung. Denn es sey $V = \frac{\alpha y + \beta z}{yy + zz}$, und also eine Funktion von — 1 Dimension. Macht man wieder $y = uz$, so wird $V = z^{-1} \left(\frac{\alpha u + \beta}{uu + 1} \right)$

Ja selbst die irrationalen Funktionen sind nicht davon ausgeschlossen. Denn ist $V = \frac{y + \sqrt{(yy + zz)}}{z \sqrt{(y^3 + z^3)}}$, und also eine Funktion von $-\frac{3}{2}$ Dimensionen: so wird, wenn man $y = uz$ setzt,

setzt, $V = z^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{u + \sqrt{(uu+1)}}{\sqrt{(u^3+1)}}\right)$. Auf diese Art lassen sich daher die homogenen Funktionen Zweyer veränderlichen Größen in Funktionen von Einer veränderlichen Größe verwandeln; denn die Potestät von z ist, da sie ein Faktor ist, nicht mit in der Funktion von u enthalten.

§. 89.

Wenn also V eine homogene Funktion der beyden veränderlichen Größen y und z von keiner Dimension ist, so wird sie, wenn man $y = uz$ setzt, in eine reine Funktion einer einzigen veränderlichen Größe u verwandelt.

Denn da die Zahl der Dimensionen $= 0$ ist, so wird die Dignität von z, womit die Funktion von u multiplicirt werden muß, $z^0 = 1$, und in diesem Falle fällt die veränderliche Größe z ganz aus der Rechnung weg. Ist z. B. $V = \frac{y+z}{y-z}$, so wird, wenn man $y = uz$ setzt, $V = \frac{u+1}{u-1}$; und ist die Funktion irrational, und z. B. $V = \frac{y-\sqrt{(yy-zz)}}{z}$, so wird, wenn man $y = uz$ setzt, $V = u - \sqrt{(uu-1)}$.

§. 90.

Eine jede ganze homogene Funktion zweyer veränderlichen Größen y und z kann in so viele einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ aufgelöset werden, als sie Dimensionen hat.

Denn weil die Funktion homogen ist, so wird sie durch die Substitution $y = uz$ in ein Produkt aus z^n in eine ganze Funktion von u verwandelt, welche folglich in einfache Faktoren von der Form $\alpha u + \beta$ aufgelöset werden kann. Multiplicirt man nun alle diese Faktoren mit z, so

wird

wird ein jeder auf die Form $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$ gebracht, indem $uz = y$ ist; und da z^n ein Multiplicator ist, so entstehen daher so viel solcher Faktoren, als n Einheiten hat. Es sind aber diese einfachen Faktoren entweder reell oder imaginär, d. h. die Coefficienten α und β sind entweder reelle oder imaginäre Größen.

Hieraus folgt also, daß die Funktion von zwey Dimensionen $ayy + byz + czz$ zwey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$; die Funktion $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ aber drey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ hat; und auf eine ähnliche Art verhält es sich ferner mit den übrigen ganzen homogenen Funktionen von mehrern Dimensionen. *)

*) Die entwickelte Form einer ganzen homogenen Funktion von y und z ist:

$Ay^n + By^{n-1}z + Cy^{n-2}z^2 + Dy^{n-3}z^3 + \ldots + Oz^n$

und selbige verwandelt sich durch die Substitution $y = uz$ in

$z^n (Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots\ldots + O)$

Da nun

$Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O = A \times (u + a)(u + b)(u + c)(u + d)$ &c.

ist: so wird

$z^n(Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O) = Az^n(u + a)(u + b)(u + c)(u + d)$ &c.

und hiervon sind die Faktoren

$uz\sqrt[n]{A} + az\sqrt[n]{A}$;

$uz\sqrt[n]{A} + bz\sqrt[n]{A}$;

$uz\sqrt[n]{A} + cz\sqrt[n]{A}$;

$uz\sqrt[n]{A} + dz\sqrt[n]{A}$; u. s. w.

Setzt man also in diesen Faktoren $uz = y$, $\sqrt[n]{A} = \alpha$, und $\sqrt[n]{A}$, mit a oder b oder c oder d ꝛc. multiplicirt, $= \beta$, so erhält man für einen jeden die Form $\alpha y + \beta z$.

§. 91.

So wie daher der Ausdruck $\alpha y + \beta z$ eine allgemeine Form für die ganzen Funktionen von einer Dimension ist: so ist $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ eine allgemeine Form der ganzen Funktionen von zwey, und $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \xi z)$ eine allgemeine Form der ganzen Funktionen von drey Dimensionen; und auf eine ähnliche Art kann man jede ganze homogene Funktion durch ein Produkt aus so viel Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ darstellen, als die Funktion Dimensionen hat. Man findet aber diese Faktoren auf eben die Art durch die Auflösung der Gleichungen, auf welche nach dem Obigen die einfachen Faktoren der ganzen Funktionen Einer veränderlichen Größe gefunden werden. Uebrigens erstreckt sich diese Eigenschaft der homogenen Funktionen zweyer veränderlichen Größen nicht auf die homogenen Funktionen dreyer oder mehrerer veränderlichen Größen: denn die allgemeine Form dieser Funktionen von nicht mehr als zwey Dimensionen, nemlich $\alpha yy + byz + cyx + dxz + exx + fzz$, läßt sich nicht in jedem Falle auf ein Produkt von der Form $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \xi x)$ bringen; und noch weniger ist man im Stande die Funktionen von noch mehrern Dimensionen in dergleichen Produkte zu verwandeln.

§. 92.

Aus dem, was von den homogenen Funktionen gesagt worden ist, erhellet zugleich, was man unter einer hetero-

genen

genen Funktion zu verstehen hat; dies sind nemlich solche, wo in den einzelnen Gliedern nicht allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen statt findet. Es lassen sich aber die heterogenen Funktionen nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden verschiedenen Dimensionen in Arten eintheilen. So ist eine Funktion zweytheilig, wenn darin eine doppelte Anzahl von Dimensionen statt findet, so daß man sie als ein Aggregat zweyer homogenen Funktionen, die in der Zahl ihrer Dimensionen verschieden sind, betrachten kann. So ist $y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$ eine zweytheilige Funktion, weil sie theils fünf, theils zwey Dimensionen enthält. Eine dreytheilige Funktion hingegen ist eine solche, worin eine dreyfache Anzahl von Dimensionen angetroffen wird, oder welche in drey homogene Funktionen zerlegt werden kann; z. B. $y^6 + y^2z^2 + z^4 + y - z$. Außerdem giebt es aber auch gebrochene und irrationale heterogene Funktionen, die so vermischt sind, daß sie in keine homogene Funktionen aufgelöset werden können; z. B. $\frac{y^3 + ayz}{by + zz}$; $\frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}$.

§. 93.

Bisweilen kann man eine heterogene Funktion durch eine geschickte Substitution, entweder für eine oder für beyde veränderliche Größen, in eine homogene verwandeln; indeß ist es nicht leicht, die Fälle anzugeben, wo solches geschehen kann. Es wird daher hinlänglich seyn, einige Beyspiele anzuführen, wobey eine solche Reduction statt findet. Ist also die Funktion $y^5 + zzy + y^3z + \frac{z^3}{y}$ gegeben: so fällt bey einiger Ueberlegung in die Augen, daß man dieselbe durch die Substitution $z = xx$ in eine homo-

gene Funktion verwandeln kann; indem man dadurch y^5 $x^4y + y^3xx + \frac{x^6}{y}$ erhält, welches eine homogene Funktion von fünf Dimensionen von x und y ist. Ferner wird die Funktion $y + y^2x + y^3xx + y^5x^4 + \frac{a}{x}$ in eine homogene Funktion verwandelt, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzt; denn man erhält dadurch diese Funktion von einer Dimension $y + \frac{yy}{z} + \frac{y^3}{zz} + \frac{y^5}{z^4} + az$. Wenn man aber seinen Endzweck nicht durch eine so einfache Substitution erreichen kann, so ist dieses Geschäft mit viel größern Schwierigkeiten verknüpft.

§. 94.

Auch verdient noch die sehr gebräuchliche Eintheilung der ganzen Funktionen nach ihrer Ordnung, wobey man auf die größte Zahl der in der Funktion vorkommenden Dimensionen sieht, besonders bemerkt zu werden. So ist $xx + yy + zz + ay - aa$ eine Funktion von der zweyten Ordnung, weil darin zwey Dimensionen vorkommen; und $y^4 + y^3 - ay^2z + abyz - aayy + b^4$ eine Funktion von der vierten Ordnung. Auf diese Eintheilung nimmt man vorzüglich in der Lehre von den krummen Linien Rücksicht.

§. 95.

Endlich ist noch die Eintheilung der ganzen Funktionen in complexe und incomplexe übrig. Complex nennt man eine Funktion, wenn man dieselbe in rationale Faktoren auflösen kann, oder wenn sie ein Produkt aus zweyen oder mehr

mehrern rationalen Funktionen ist. Ein Beyspiel einer solchen Funktion giebt $y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byzz - aazz + 2abzy - bbyy$, welches ein Produkt aus den beyden Funktionen $(yy + zz - az + by)(yy - zz + az - by)$ ist. Auf diese Weise haben wir gesehen, daß eine jede ganze homogene Funktion von nicht mehr als zwey veränderlichen Größen eine complexe Funktion ist, weil sie so viel einfache Faktoren von der Form $ay + \beta z$ hat, als sie Dimensionen enthält. Incomplex ist hingegen eine ganze Funktion, wenn sie auf keine Art in rationale Faktoren aufgelöset werden kann; wie $yy + zz - aa$, denn davon fällt solches bald in die Augen. Uebrigens ergiebt es sich bey der Aufsuchung der Divisoren, ob eine Funktion complex ist oder nicht.



Sechstes Capitel.

Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

Auch bey diesem und dem folgenden Capitel hat es mir besser geschienen, alle dabey nöthigen Zusätze in den schon öfters gedachten Anhang zu bringen. Man findet sie daselbst unter der vierten Nummer.

§. 96.

Obgleich die Betrachtung der transcendenten Funktionen eigentlich das Geschäft der Integral-Rechnung ist: so ist es dennoch nützlich, vorher einige der leichtesten Arten, und die zugleich zu mehrern Untersuchungen den Weg bahnen, zu erwägen. Dahin gehören nun zuvörderst die Exponential-Größen, oder die Potestäten, deren Exponent eine veränderliche Größe ist: denn daß dergleichen Größen nicht zu den algebraischen Funktionen gehören, ist daraus klar, weil in diesen keine andre als bloß beständige Exponenten vorkommen dürfen. Es giebt aber verschiedene Arten von Exponential-Größen, je nachdem entweder bloß der Exponent, oder außerdem auch die zu einer Potestät erhobene Größe veränderlich ist. Zu jenen gehört a^z; zu diesen hingegen y^z. Ja es kann auch der Exponent eine Exponential-Größe seyn, wie in a^{a^z}; a^{y^z}; y^{a^z}; x^{y^z}. Wir setzen indeß jetzt diese Eintheilung bey Seite, weil man die

Natur

Natur der Exponential-Größen durch die Betrachtung der Form a^z hinlänglich zu erkennen im Stande ist.

§. 97.

Es sey also die Exponential-Größe a^z gegeben, welche eine Potestät der beständigen Größe a mit einem veränderlichen Exponenten ist. Da nun der Exponent z alle bestimmte Zahlen unter sich begreift, so ist zuvörderst klar, daß man, wenn man dafür nach und nach alle ganze positive Zahlen setzt, für a^z die bestimmten Werthe, a^1; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; u. s. f. erhält. Setzt man hingegen für z nach und nach die negativen Zahlen -1; -2; -3; u. s. f. so bekommt man $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^4}$; u. s. f. und wenn $z = 0$ ist, so ist allemal $a^0 = 1$. Setzt man für z gebrochene Zahlen, wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; u. s. f. so entstehen dadurch die Werthe $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{aa}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{a^3}$ u. s. f. Diese Werthe sind an sich betrachtet vielfach, weil die Extraction der Wurzel allezeit auf vielförmige Werthe, führt: allein man pflegt dafür nur immer die Hauptwerthe, d. h. die reellen und positiven zu nehmen, weil man die Größe a^z als eine einförmige Funktion von z betrachtet. So hat $a^{\frac{1}{2}}$ einen gewissen Werth, der zwischen a^2 und a^3 fällt, und ist daher eine Größe von eben der Art; und obgleich der Werth von $a^{\frac{1}{2}}$ eben sowohl $= -aa\sqrt{a}$, als $= +aa\sqrt{a}$ ist, so wird doch bloß der letzte in Betrachtung gezogen. Eben so verhält es sich, wenn der Werth von dem Exponenten z irrational wird. Denn da es in diesem Falle schwer seyn würde, sich die Anzahl der a^z alsdann zukommenden Werthe zu gedenken, so betrachtet man bloß den einen reellen dar-

von. Auf diese Art ist $a^{\sqrt{7}}$ ein bestimmter Werth, der zwischen a^2 und a^3 fällt.

§. 98.

Vorzüglich aber hängen die Werthe der Exponential-Größe a^z von der Größe der beständigen Zahl a ab. Denn ist $a = 1$, so ist stets $a^z = 1$, z mag einen Weth bekommen, was für einen es will: ist aber a größer als 1, so wird der Werth von a^z desto größer, je größer die Zahl ist, die man für z setzt, und wächst selbst ins unendliche, wenn $z = \infty$ wird; wird $z = 0$, so wird $a^z = 1$, und ist z kleiner als 0, so werden die Werthe von a^z kleiner als die Einheit, bis, für $z = -\infty$, $a^z = 0$ wird. Das Gegentheil findet statt, wenn a kleiner als 1, aber doch eine positive Größe ist: denn alsdann nimmt a^z ab, wenn z über 0 hinauf wächst, und wächst, wenn man für z negative Zahlen setzt. Wenn nemlich a kleiner als 1 ist, so ist $\frac{1}{a}$ größer als 1; setzt man also $\frac{1}{a} = b$, so wird $a^z = b^{-z}$, wonach man den zweyten Fall aus dem ersten beurtheilen kann.

§. 99.

Ist $a = 0$, so findet sich zwischen den Werthen von a^z ein sehr großer Sprung. Denn so lange z eine positive Zahl, oder größer als nichts ist, so ist stets $a^z = 0$; ist $z = 0$, so wird $a^0 = 1$; ist aber z eine negative Zahl, so erhält a^z einen unendlich großen Werth. So ist, wenn $z = -3$ gesetzt wird, $a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$, und also unendlich. Noch viel größere Sprünge kommen vor, wenn die bestän-

dige

dige Größe a einen negativen Werth, z. B. — 2 bekommt. Denn setzt man alsdann anstatt z die ganzen Zahlen, so werden die Werthe von z wechselsweise positiv und negativ, wie aus dieser Reihe erhellet:

a^{-4}; a^{-3}; a^{-2}; a^{-1}; a^0; a^1; a^2; a^3; a^4; ꝛc.

$+\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $+\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; 1; −2; + 4; − 8; + 16; ꝛc.

Setzt man ferner Brüche für z, so bekommt $a^z = (-2)^z$ bald reelle bald imaginaire Werthe; indem z. B. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginär, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ hingegen reell ist. Ob aber, wenn z irrational genommen wird, a^z reelle oder imaginäre Werthe gebe, läßt sich nicht einmal bestimmen.

§. 100.

Wegen dieser Unbequemlichkeiten bey den negativen Werthen von a wollen wir a positiv und größer als die Einheit annehmen, weil man die Fälle, wo a eine positive und kleinere Zahl als die Einheit ist, leicht hierauf zurückführen kann. Nimmt man also $a^z = y$, so erhält y, wenn man für z alle reelle positive Zahlen, die zwischen $+\infty$ und $-\infty$ fallen, setzt, alle reelle positive Werthe, die zwischen $+\infty$ und o liegen. Denn ist $z = \infty$, so wird $y = \infty$; ist $z = o$, so wird $y = 1$; und wird $z = -\infty$, so wird $y = o$. Umgekehrt wird daher auch jeder positive Werth, den man für y annimmt, einen reellen Werth für z geben, so daß $a^z = y$ ist; wenn aber y ein negativer Werth beygelegt wird, so kann z keinen reellen Werth haben.

§. 101.

Wenn also $y = a^z$ ist, so ist y eine Funktion von z; und wie y von z abhange, das läßt sich aus der Natur der Potestäten erkennen, denn dadurch wird, wenn man z einen gewissen Werth beylegt, der Werth von y bestimmt.

Es ist aber $yy = a^{2z}$; $y^3 = a^{3z}$; und überhaupt $y^n = a^{nz}$; woraus folgt, daß $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$; $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$; $\frac{1}{y} = a^{-z}$; $\frac{1}{yy} = a^{-2z}$; $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$; u. s. f. seyn werde.

Ferner ist, wenn $v = a^x$ gesetzt wird, $vy = a^{x+z}$; und $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. Vermittelst dieser Formeln kann man den Werth von y aus dem gegebenen Werthe von z leicht finden.

Exempel.

Wenn $a = 10$ ist, so lassen sich die Werthe von y wenn man für z ganze Zahlen setzt, ohne alle Rechnung finden. Es ist nemlich $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; und $10^0 = 1$; ferner $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$. Wenn aber für z Brüche gesetzt werden, so kann man die Werthe von y vermittelst der Extraction der Wurzeln erhalten. So ist $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162277$, u. s. f.

§. 102.

So wie man aber, wenn die Zahl a gegeben ist, aus jedem Werthe von z den Werth von y finden kann: so läßt sich auch umgekehrt aus jedem positiven Werthe von y der dazu gehörige Werth von z bestimmen, so daß $a^z = y$ wird; und dieser Werth von z pflegt, in so fern er als eine Funktion von y betrachtet wird, der Logarithme von y genennt zu werden. Es macht daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer gewissen beständigen Zahl für a nothwendig, und man nennt deswegen auch diese Zahl die Basis der Logarithmen. So bald sie festgesetzt ist, so ist

der

der Logarithme einer jeden Zahl y der Exponent der Potestät a^z, wobey denn die Potestät a^z selbst der Zahl y gleich ist; den Logarithmen der Zahl y aber anzuzeigen, bedient man sich dieser Bezeichnung, ly. Ist also $a^z = y$ so ist $z = ly$; woraus erhellet, daß die Basis der Logarithmen, wenn sie gleich übrigens willkührlich angenommen werden kann, dennoch größer als die Einheit seyn muß, und daß also bloß die positiven Zahlen reelle Logarithmen haben.

§. 103.

Was man nun aber auch für eine Zahl für die Basis der Logarithmen a annehmen mag, so ist doch allezeit $l1 = 0$; denn wenn man in der Gleichung $a^z = y$, welche mit dieser $z = ly$ übereinstimmt, $y = 1$ setzt, so wird $z = 0$. Ferner sind die Logarithmen der Zahlen, die größer als die Einheit sind, positiv, und richten sich nach dem Werthe der Basis a. So ist $la = 1$; $laa = 2$; $la^3 = 3$; $la^4 = 4$; u. s. f. daher man auch rückwärts aus den Logarithmen die Basis erkennen kann, indem dieselbe allezeit die Zahl ist, deren Logarithme $= 1$ ist. Die Logarithmen der Zahlen hingegen, die kleiner als die Einheit aber doch positiv sind, sind negativ, nemlich $l\frac{1}{a} = -1$; $l\frac{1}{aa} = -2$; $l\frac{1}{a^3} = -3$ u. s. f. Die Logarithmen der negativen Zahlen endlich sind keine reelle, sondern imaginäre Zahlen, wie bereits angemerkt worden ist.

§. 104.

Auf eine ähnliche Art ist, wenn $ly = z$ gesetzt wird, $lyy = 2z$; $ly^3 = 3z$; und überhaupt $ly^n = nz$, oder $ly^n = n\,ly$, weil $z = ly$ ist. Man findet also den Logarithmen einer jeden Potestät von y, wenn man den Logarithmen von y mit dem Exponenten dieser Potestät multiplicirt. So ist

$l\sqrt{y}$

$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}z, = \frac{1}{2}ly$; $l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$; u. s. f.

so daß man also aus dem Logarithmen einer jeden Zahl die Logarithmen aller ihrer Potestäten zu finden im Stande ist. Hat man aber bereits zwey Logarithmen, z. B. $ly = z$, und $lv = x$ gefunden, so ist, wegen $y = a^z$, und $v = a^x$, $lvy = x + z = lv + ly$; und man erhält also den Logarithmen eines Produkts in der Summe der Logarithmen seiner Faktoren. Auf eine ähnliche Art ist $l\frac{v}{y} = z - x = lv - ly$; und der Logarithme eines Bruchs wird daher gefunden, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abzieht. Diese Regeln dienen dazu, um aus einigen bekannten Logarithmen die Logarithmen vieler andern Zahlen zu finden.

§. 105.

Es erhellet aber auch hieraus, daß es weiter keine rationale Logarithmen als von den Potestäten der Basis a giebt. Denn wofern eine andere Zahl b keine Potestät von der Basis a ist, so kann auch ihr Logarithme durch keine rationale Zahl ausgedruckt werden. Ferner ist auch der Logarithme von b keine Irrationalzahl: denn wäre $lv = \sqrt{n}$, so wäre $a^{\sqrt{n}} = b$, und dies kann nicht statt finden, wenn a und b Rationalzahlen sind. Man pflegt aber nur die Logarithmen der rationalen und der ganzen Zahlen zu suchen, weil man daraus die Logarithmen der Brüche und der Irrationalzahlen finden kann. Da also die Logarithmen der Zahlen, die keine Potestäten von der Basis a sind, weder rational noch irrational dargestellt werden können, so werden sie mit Recht zu den transcendenten Größen gerechnet,

und

und dies ist der Grund, warum man die Logarithmen zu den transcendenten Größen zählt.

§. 106.

Aus diesem Grunde können die Logarithmen der Zahlen bloß näherungsweise durch die Decimal-Brüche ausgedruckt werden, die der Wahrheit desto näher kommen, auf je mehrere Zehntheiler-Stellen sie gefunden worden sind. Man kann aber auf diese Art den Logarithmen jeder Zahl bloß durch die Extraction der Quadratwurzel finden. Denn da, wenn man $1y = z$, $1v = x$ setzt, $1\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$ ist, so suche man, wenn die gegebene Zahl b zwischen a^2 und a^3 fällt, wovon die Logarithmen 2 und 3 sind, den Werth von $a^{2\frac{1}{2}}$ oder $a^2\sqrt{a}$, wo denn b entweder zwischen a^2 und $a^{2\frac{1}{2}}$, oder zwischen $a^{2\frac{1}{2}}$ und a^3 fallen wird. Es sey das eine oder das andere, so erhält man, wenn man von neuem die mittlere Proportional-Zahl sucht, andere nähere Grenzen; und fährt man auf diesem Wege fort, so muß man endlich zu Grenzen gelangen, die von einander um weniger als eine gegebene Größe entfernt sind, und welche man daher ohne Irrthum anstatt der Größe b nehmen kann. Da aber die Logarithmen aller gefundenen Grenzen gegeben werden, so wird auf diese Art endlich der Logarithme von b gefunden.

Exempel.

Man setze die Logarithmische Basis $a = 10$, so wie solches in den gewöhnlichen Logarithmischen Tafeln zu geschehen pflegt, und suche den Logarithmen der Zahl 5 näherungsweise. Da diese Zahl zwischen 1 und 10 liegt, wovon die Logarithmen 0 und 1 sind: so ziehe man nach der folgenden

Tabelle

Tabelle die Quadratwurzeln aus, und fahre damit so lange fort, bis die gefundenen Grenzen sich nicht weiter von der gegebenen Zahl 5 unterscheiden.

A = 1,000000;	lA = 0,0000000;	Es sey
B = 10,000000;	lB = 1,0000000;	C = √AB
C = 3,162277;	lC = 0,5000000;	D = √BC
D = 5,623413;	lD = 0,7500000;	E = √CD
E = 4,216964;	lE = 0,6250000;	F = √DE
F = 4,869674;	lF = 0,6875000;	G = √DF
G = 5,232991;	lG = 0,7187500;	H = √FG
H = 5,048065;	lH = 0,7031250;	I = √FH
I = 4,958069;	lI = 0,6953125;	K = √HI
K = 5,002865;	lK = 0,6992187;	L = √IK
L = 4,980416;	lL = 0,6972656;	M = √KL
M = 4,991627;	lM = 0,6982421;	N = √KM
N = 4,997242;	lN = 0,6987304;	O = √KN
O = 5,000052;	lO = 0,6989745;	P = √NO
P = 4,998647;	lP = 0,6988525;	Q = √OP
Q = 4,999350;	lQ = 0,6989135;	R = √OQ
R = 4,999701;	lR = 0,6989440;	S = √OR
S = 4,999876;	lS = 0,6989592;	T = √OS
T = 4,999963;	lT = 0,6989668;	V = √OT
V = 5,000008;	lV = 0,6989707;	W = √TV
W = 4,999984;	lW = 0,6989687;	X = √WV
X = 4,999997;	lX = 0,6989697;	Y = √VX
Y = 5,000003;	lY = 0,6989702;	Z = √XY
Z = 5,000000;	lZ = 0,6989700;	

Auf diese Art erhält man, indem man immer die mittlere Proportional-Zahl sucht, endlich Z = 5,000000, und es ist daher der gesuchte Logarithme von 5, wenn man die Logarithmische Basis = 10 setzt = 0,6989700; folglich beynahe

nahe $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Auf diese Art ist das gemeine Logarithmische System von Brigge und Vlacq berechnet worden, ob man gleich nachmals weit kürzere Wege entdeckt hat, auf welchen man die Logarithmen viel leichter und schneller findet.

§. 107.

Es lassen sich also so viel Logarithmische Systeme gedenken, als man verschiedene Zahlen für die Basis a setzen kann, und ihre Anzahl ist daher unendlich groß. Es haben aber die Logarithmen zweyer verschiedener Systeme, die zu einer und derselben Zahl gehören, immer ein und dasselbe Verhältniß zu einander. Denn es sey die Basis des einen Systems $= a$, und die Basis eines andern $= b$; ferner der Logarithme der Zahl n aus dem ersten System $= p$, und aus dem andern $= q$. Alsdann ist $a^p = n$, und $b^q = n$; folglich $a^p = b^q$, und $a = b^{\frac{q}{p}}$; und es muß daher der Bruch $\frac{q}{p}$ einen beständigen Werth bekommen, man mag für n eine Zahl, was für eine man will, setzen. Hat man daher die Logarithmen irgend eines Systems berechnet, so lassen sich daraus die Logarithmen eines jeden andern Systems sehr leicht vermittelst der Regel de Tri finden. So kann man, wenn die Logarithmen für die Basis 10 bekannt sind, die Logarithmen für jede andere Basis z. B. 2 finden. Denn man suche den Logarithmen der Zahl n für die Basis 2, welchen wir $= q$ setzen wollen, so wie der Logarithme eben dieser Zahl n, für die Basis 10, p heissen mag. Da nun für die Basis 10, $l2 = 0,3010300$, und für die Basis 2, $l2 = 1$ ist, so ist $0,3010300 : 1 = p : q$,

und

und folglich $q = \frac{p}{0,3010300} = 3,3219277 \cdot p$. Wenn man daher alle gemeine Logarithmen mit 3,3219277 multiplicirt, so erhält man Logarithmische Tafeln für die Basis 2.

§. 108.

Hieraus folgt, daß die Logarithmen zweyer Zahlen in jedem System einerley Verhältniß zu einander haben.

Denn sind die Logarithmen der Zahlen M und N für die Basis a, m und n, so ist $M = a^m$ und $N = a^n$, und folglich $a^{mn} = M^n = N^m$; also $M = N^{\frac{m}{n}}$: und da in dieser Gleichung a nicht weiter enthalten ist, so ist daraus klar, daß der Werth des Bruchs $\frac{m}{n}$ nicht von a abhängt. Denn man nenne die Logarithmen eben dieser Zahlen für eine andere Basis b, u und v, so ist nach eben den Schlüssen, wie vorhin $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$; folglich $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$, und daraus $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$, oder $m : n = \mu : \nu$. So haben wir bereits gesehen, daß in jedem Logarithmischen Systeme die Logarithmen zweyer verschiedenen Potestäten von einer und derselben Zahl z. B. y^m und y^n in dem Verhältnisse der Exponenten dieser Potestäten m : n stehen [§. 103. 104.]

§. 109.

Um also ein Logarithmisches System für irgend eine Basis a zu verfertigen ist es genug, wenn man nur die Logarithmen der Prim-Zahlen auf dem beschriebenen oder einem andern bequemern Wege sucht. Denn da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen den Summen der Logarithmen

men ihrer Faktoren gleich sind, so lassen sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus den Logarithmen der Prim-Zahlen durch eine bloße Addition finden. So ist, wenn die Logarithmen der Zahlen 3 und 5 bekannt sind, $l15 = l3 + l5$; $l45 = 2l3 + l5$: und da vorhin [§. 106.] für die Basis $a = 10$, $l5 = 0{,}6989700$ gefunden worden ist, und überdies $l10 = 1$ ist; so ist $l\frac{10}{5} = l2 = l10 - l5$, und folglich $l2 = 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Aus diesen Logarithmen von 2 und 5 aber findet man die Logarithmen aller Zahlen, die aus 2 und 5 zusammengesetzt sind; z. B. 4, 8, 16, 32, 64, u. s. f. 20, 40, 80, 25, 50, u. s. f.

§. 110.

Der Nutzen, den die Logarithmischen Tafeln zur Verkürzung der Rechnung mit den bestimmten Zahlzeichen leisten, ist außerordentlich groß, weil man aus dergleichen Tafeln nicht bloß den Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl, sondern auch, wenn ein Logarithme gegeben ist, die dazu gehörige Zahl finden kann. Bedeuten z. B. c, d, e, f, g, h Zahlen, es sey nun von was für einer Art es wolle, so kann man den Werth dieses Ausdrucks $\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$ ohne alle Multiplication finden. Es ist nemlich der Logarithme dieses Ausdrucks $= 2lc + ld + \frac{1}{2}le - lf - \frac{1}{3}lg - \frac{1}{3}lh$; und sucht man nun die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl, so hat man den Werth von $\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$ gefunden. Vorzüglich wichtig aber ist der Gebrauch der Logarithmischen Tafeln bey sehr verwickelter Erhebungen zu Dignitäten und Wurzel-Extractionen, weil man dadurch diese Operationen in eine bloße Multiplication und Division verwandelt.

Erstes Exempel.

Man soll den Werth der Potestät $2^{\frac{7}{12}}$ finden. Da $l 2^{\frac{7}{12}} = \frac{7}{12} l 2$ ist, so multiplicire man den Logarithmen von 2, den man in den Tafeln = 0,3010300 findet, durch $\frac{7}{12}$, d. h. mit $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$. Hierdurch findet man $l 2^{\frac{7}{12}} = 0,1756008$; und da die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl = 1,498307 ist, so ist beynahe $2^{\frac{7}{12}} = 1,498307$.

Zweytes Exempel.

Wenn sich die Volksmenge eines Landes jährlich um $\frac{1}{30}$ vermehrt, und darin anfänglich 100000 Menschen gewesen sind, so findet man die Volksmenge dieses Landes nach 100 Jahren auf folgende Art. Man setze der Kürze wegen die anfängliche Volksmenge 100000 = n. Alsdann ist die Volksmenge nach dem ersten Jahre $= (1 + \frac{1}{30})n = \frac{31}{30}n$, nach dem zweyten Jahre $= (\frac{31}{30})^2 n$, nach dem dritten Jahre $= (\frac{31}{30})^3 n$, und also nach 100 Jahren $= (\frac{31}{30})^{100} n$, und der Logarithme von dieser Zahl ist $= 100\, l \frac{31}{30} + l 100000$. Es ist aber $l \frac{31}{30} = l 31 - l 30 = 0,014240439$, also $100\, l \frac{31}{30} = 1,4240439$, und addirt man dazu $l 100000 = 5$, so erhält man den Logarithmen der gesuchten Volksmenge $= 6,4240439 = l. 2654874$. Nach 100 Jahren ist also die Volksmenge um mehr als $26\frac{1}{2}$ mal so groß geworden.

Drittes Exempel.

Nach der Sündfluth wurde das menschliche Geschlecht von 6 Menschen fortgepflanzet. Angenommen nun, daß die Anzahl der Menschen nach 200 Jahren auf 1000000 gewachsen sey, so frägt sich, um den wievielsten Theil sich die Menschen jährlich vermehrt haben? Man setze diesen wievielsten Theil $= \frac{1}{x}$, so sind nach 200 Jahren $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6$ Men-

Menschen da gewesen. Da nun $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6 = 1000000$ ist, so wird $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$, folglich $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} l\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \times 5{,}2218487 = 0{,}0261092$; also $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$, und $1000000 = 61963x$, oder $x = 16$ ohngefehr. Es würde also die Zahl der Menschen in 200 Jahren zu der angeführten großen Menge angewachsen seyn, wenn sie sich jährlich um den sechszehnten Theil vermehrt hätten; und dies ist für das Alter, welches man ihnen beylegt, nicht viel. Hätten sie sich aber in einem fort in diesem Verhältnisse 400 Jahr hindurch vermehrt, so wäre ihre Anzahl bis auf $1000000 \cdot \frac{1000000}{6} = 166666666666$ angewachsen, eine Menge, zu deren Unterhaltung der Erdboden zu klein gewesen seyn würde.

Viertes Exempel.

Die jährliche Vermehrung der Menschen zu finden, wenn sich ihre Anzahl alle 100 Jahr verdoppelt. Wenn man die jährliche Vermehrung der Menschen $= \frac{1}{x}$, und ihre anfängliche Zahl $= n$ setzt, so ist die Menge derselben nach 100 Jahren $= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$. Da nun diese Menge das Doppelte der anfänglichen Menge, und also $= 2n$ seyn soll: so ist $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$, und $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} l\,2 = 0{,}0030103$; und hieraus ergiebt sich $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$

und also $x = \frac{10000000}{69555} = 144$ ohngefehr. Es ist folglich zur Verdoppelung der Menschen in jedem Jahrhunderte genug, wenn sich dieselben jährlich nur um den 144sten Theil vermehren, und es ist daher lächerlich, wenn einige leugnen, daß die ganze Erde von einem Menschenpaare in so kurzer Zeit habe bevölkert werden können.

§. 111.

Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bey der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist. Hat man z. B. die Gleichung $a^x = b$, und soll man daraus x entwickelt, so kann solches nicht anders als vermittelst der Logarithmen geschehen. Da nemlich $a^x = b$ ist, so ist $la^x = x\,la = lb$, und also $x = \frac{lb}{la}$. Dabey ist es übrigens gleich, was man sich für eines Logarithmischen Systems bedienen will, weil die Logarithmen der Zahlen a und b in allen Systemen einerley Verhältniß haben. [§. 108.]

Erstes Exempel.

Es wird gefragt, in wie viel Jahren das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache anwachse, wenn die jährliche Vermehrung $\frac{1}{100}$ ist? Es geschehe solches nach x Jahren, und die anfängliche Menge der Menschen sey $= n$, so wird ihre Menge nach x Jahren $= \left(\frac{101}{100}\right)^x n$ seyn. Da dieselbe nun auch das Zehnfache von der anfänglichen Menge seyn soll, so ist $\left(\frac{101}{100}\right)^x n = 10n$, oder $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$; folglich

lich $x \lg \frac{101}{100} = \lg 110$, und $x = \frac{\lg 110}{\lg 101 - \lg 100} = \frac{10000000}{43214}$ $= 231$. Nach 231 Jahren wird also die Anzahl der Menschen, wenn sie sich jährlich um den 100sten Theil vermehren, zehnmal so groß; und folglich nach 462 Jahren hundert, und nach 693 Jahren tausendmal so groß.

Zweytes Exempel.

Es hat jemand 400000 Fl. zu 5 pro C. aufgenommen, trägt aber jährlich 25000 Fl. ab, und es wird gefragt: In wie viel Jahren er die ganze Schuld bezahlt haben werde? Setzt man die schuldige Summe der 400000 Fl. $= a$, und den jährlichen Abtrag der 25000 Fl. $= b$; so ist er schuldig

nach dem ersten Jahre $\frac{105}{100} a - b$

nach dem zweyten Jahre $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \frac{105}{100} b - b$

nach dem dritten Jahre $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100} b - b$,

und nach x Jahren, wenn man der Kürze wegen $\frac{105}{100} = n$ setzt,

$n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b - \ldots - b =$ $n^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1})$. Da nun wegen der Natur der geometrischen Progressionen $1 + n + n^2 + n^3 + \ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$ ist: so ist die nach x Jahren noch übrige Schuld, die nach der Aufgabe Null seyn soll, $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1} = 0$, und folglich $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$, oder $(n - 1) n^x a = n^x b - b$. Hieraus ergiebt sich $(b - na + a) n^x = b$, und $n^x = \frac{b}{b - (n-1)a}$, woher

denn $x = \frac{1b - 1(b - (n-1)a)}{1n}$ wird. Da nun $a =$ 400000, $b = 25000$, $n = \frac{105}{100}$ ist; so ist $(n-1)a = 20000$, und $b - (n-1)a = 5000$, und die Zahl der Jahre, nach welchen die ganze Schuld bezahlt ist, $x = \frac{125000 - 15000}{1\frac{105}{100}}$ $= \frac{15}{1\frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}$, oder etwas kleiner als 33. Nach 33 Jahren nemlich wird nicht nur die ganze Schuld abgetragen seyn, sondern es muß alsdann der Creditor dem Debitor noch wieder herausgeben $\frac{(n^{33}-1)b}{n-1} - n^{33}a =$ $\frac{(\frac{21}{20})^{33} \times 5000 - 25000}{\frac{1}{20}} = 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000$ Fl.

Da also $1\frac{21}{20} = 0{,}021189299$ ist, so ist $1\left(\frac{21}{20}\right)^{33} =$ $0{,}69924687$, und $1100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469 =$ $1500318{,}8$. Es muß folglich der Creditor dem Debitor nach 33 Jahren noch $318\frac{4}{7}$ Fl. wieder herausgeben.

§. 112.

Es haben aber die gemeinen Logarithmen, deren Basis 10 ist, außer diesem Gebrauche, den sie mit allen andern Logarithmen gemein haben, in der Decadik noch einen besondern Vorzug, und gewähren daher auch vor andern Systemen einen besondern Vortheil. Denn da die Logarithmen aller Zahlen, die Potestäten von 10 ausgenommen, in Decimal-Brüchen ausgedruckt werden; so fallen die Logarithmen der Zahlen, die zwischen 1 und 10 enthalten sind, zwischen 0 und 1, die Logarithmen der Zahlen hingegen, die zwischen 10 und 100 liegen, zwischen 1 und 2

u. s. f.

u. s. f. Es besteht daher jeder Logarithme aus einer ganzen Zahl und einem Decimal-Bruche; und die ganze Zahl wird die Charakteristik, der Decimal-Bruch aber die Mantisse genannt. Die Charakteristik enthält daher immer eine Einheit weniger, als die Zahl, welche die ganzen Theile der zu dem Logarithmen gehörigen Zahl ausdruckt, Theile enthält; und es ist z. B. die Charakteristik des Logarithmen der Zahl 78509, = 4, weil diese Zahl eine fünftheilige ganze Zahl ist. Man kann demnach aus dem Logarithmen einer jeden Zahl sogleich erkennen, aus wie viel Theilen oder Zifern die Zahl bestehe; so ist z. B. die Zahl, welche zu dem Logarithmen 7,5804631 gehört, ihrem ganzen Theile nach eine achttheilige Zahl.

§. 113.

Wenn also die Mantissen zweyer Logarithmen einander gleich sind, und bloß die Charakteristik verschieden ist, so stehen die Zahlen, welche zu diesen Logarithmen gehören, in dem Verhältnisse einer Potestät der 10 zu der Einheit, und stimmen also in ihren Zifern mit einander überein. So sind z. B. die Zahlen, welche zu den Logarithmen 4,9130187 und 6,9130187 gehören, 81850 und 8185000; zu dem Logarithmen 3,9130187 aber gehört die Zahl 8185, und zu dem Logarithmen 0,9130187 endlich 8,185. Die Mantisse allein zeigt also die Zifern der Zahl an, welche zu einem Logarithmen gehört, und aus der Charakteristik erhellet, wie viel man davon zur Linken für die ganze Zahl abschneiden muß, wo denn die übrigen zur Linken einen Decimal-Bruch ausmachen. Ist z. B. der Logarithme 2,7603429 gefunden worden, so findet man nach der Mantisse die Zifern 5758945; die Charakteristik 2 aber bestimmt diese Zahl für den angeführten Logarithmen so: 575,8945. Wäre die Charakteristik = 0, so wäre die zugehörige Zahl

= 5,758945; und verminderte man sie noch um 1, so daß sie = — 1 würde, so wäre die zugehörige Zahl = 0,5758945, so wie die Charakteristik — 2 auf die Zahl 0,05758945 führt. Man setzt indeß anstatt dieser negativen Charakteristiken häufig die Zahlen 9, 8, 7 u. s. f. und setzt dabey voraus daß diese Logarithmen um 10 zu groß angenommen worden sind. Doch dies pflegt in den Einleitungen zu den Logarithmischen Tafeln hinlänglich aus einander gesetzt zu werden.

Exempel.

Es wird die Progression 2, 4, 16, 256 u. s. f. gegeben, in welcher jedes folgende Glied das Quadrat des vorhergehenden ist; man soll das fünf und zwanzigste Glied derselben finden. Man kann die Glieder dieser Progression auch auf folgende Art ausdrucken: 2^1, 2^2, 2^4, 2^8 u. s. f. wo denn in die Augen fällt, daß der Exponent des fünf und zwanzigsten Gliedes 2^{24} = 16777216, und also das gesuchte Glied selbst $2^{16777216}$ seyn wird, und davon ist der Logarithme 16777216. l 2. Da nun der Logarithme von 2 = 0 30102999566398119 5 ist, so ist der Logarithme der gesuchten Zahl 5050445, 25973367, aus dessen Charakteristik erhellet, daß die gesuchte Zahl, auf die gewöhnliche Art ausgedruckt, aus 5050446 Ziffern besteht. Sucht man aber die Mantisse 259733675932 in den Tafeln auf, so findet man die ersten Ziffern dieser Zahl 181858. Ob man also gleich diese Zahl nicht ganz finden kann, so weiß man doch mit Gewißheit, daß sie aus 5050446 Ziffern besteht, und daß die ersten davon 181858 sind, worauf noch 5050440 andere folgen. Einige davon können noch aus größern Logarithmischen Tafeln gefunden werden, wie denn die ersten eilf Ziffern dieser Zahl diese 18185852986 sind.

Sie-

Siebentes Capitel.

Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch Reihen.

§. 114.

Da $a^0 = 1$ ist, und der Werth von a, wenn a größer als 1 ist, mit dem Exponenten zugleich wächst: so folgt, daß die Potestät von a, wenn ihr Exponent die 0 nur um einen unendlich kleinen Theil übertrifft, ebenfalls nur um einen unendlich kleinen Theil größer seyn werde, als die Einheit. Es sey ω eine unendlich kleine Zahl, oder ein so geringer Bruch, daß sein Werth nur nicht $= 0$ sey; so wird $a^{\omega} = 1 + \psi$, so daß ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl ist: denn aus dem vorhergehenden Capitel erhellet, daß nur dann ω eine unendlich kleine Zahl seyn kann, wenn ψ eine unendlich kleine Zahl ist. Es wird daher entweder $\psi = \omega$, oder ψ größer als ω, oder ψ kleiner als ω seyn, und dies Verhältniß wird von dem Werthe von a abhängen. Da nun a noch eine unbekannte Größe ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen, so daß $a^{\omega} = 1 + k\omega$, und wenn man a zur Logarithmischen Basis macht, $\omega = l(1 + k\omega)$ sey.

Exempel.

Damit man desto deutlicher einsehe, wie die Zahl k von der Basis a abhange, so wollen wir $a = 10$ annehmen, und aus den gemeinen Logarithmischen Tafeln den Logarithmen einer Zahl suchen, die sich von der Einheit nur um ei-

nen sehr kleinen Theil unterscheidet. Es sey diese Zahl $1 + \frac{1}{1000000}$, und also $k\omega = \frac{1}{1000000}$; so ist $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)$ $= l\frac{1000001}{1000000} = 0,0000004343 = \omega$. Hieraus ergiebt sich, da $k\omega = 0,0000010000$ ist, $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$, und k $= \frac{100000}{43429} = 2,30258$; woraus erhellet, daß k eine endliche Zahl ist, die von dem Werthe der Basis a abhängt. Denn wenn man eine andere Zahl für die Basis a annähme, so würde der Logarithme von $1 + k\omega$ zu dem gefundenen ein bestimmtes Verhältniß haben, und deswegen auch k einen andern Werth erhalten.

§. 115.

Da $a^{\omega} = 1 + k\omega$, so ist $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, man mag für i eine Zahl setzen, was für eine man will, und es ist daher $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 +$ u. s. f. Setzt man also $i = \frac{z}{\omega}$, so daß z irgend eine endliche Zahl bedeutet: so wird, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, i eine unendlich große Zahl, und folglich $\omega = \frac{z}{i}$, oder gleich einem Bruche mit einem unendlichen Nenner, d. h. einer unendlich kleinen Zahl, so wie wir es angenommen haben. Setzt man nun $\frac{z}{i}$ anstatt ω, so wird $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i$ $= 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 +$ $\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 +$ u. s. f. eine Gleichung, die voll-

vollkommen wahr ist, wenn man i unendlich groß annimmt. k ist darin eine endliche Zahl, deren Werth von a abhängt, wie bereits gezeigt worden ist.

§. 116.

Da aber i eine unendlich große Zahl ist, so ist $\frac{i-1}{i} = 1$;

denn es ist offenbar, daß der Bruch $\frac{i-1}{i}$ sich desto mehr der Einheit nähert, je größer i angenommen wird, und daß er also der Einheit gleich werden muß, wenn i größer wird, als jede endliche Zahl, die sich angeben läßt. Aus eben dem Grunde wird $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$; u. s. f. und daher ist $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; u. s. w. Gebraucht man nun diese Werthe, so erhält man $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4}$ + u. s. f. ohne Ende. Es erhellt aber aus dieser Gleichung auch das Verhältniß zwischen a und k; denn setzt man $z = 1$, so wird $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4}$ + u. s. f. und wenn $a = 10$ seyn soll, so muß k ohngefähr $= 2{,}30258$ seyn, so wie wir es vorhin gefunden haben.

§. 117.

Setzt man $b = a^n$, so wird, wenn man a zur Logarithmischen Basis annimmt, $lb = n$; und da nun $b^z = a^{nz}$ ist, so entsteht daher die unendliche Reihe $b^z = 1 + \frac{knz}{1}$ +

$+\frac{k^2n^2z^2}{1.2}+\frac{k^3n^3z^3}{1.2.3}+\frac{k^4n^4z^4}{1.2.3.4}+$ u. s. f; oder, wenn lb anstatt n setzt: $b^z = 1+\frac{kz}{1}lb+\frac{k^2z^2}{1.2}(lb)^2+\frac{k^3z^3}{1.2.3}(lb)^3+\frac{k^4z^4}{1.2.3.4}(lb)^4+$ u. s. f. Da nun der Werth von k aus dem gegebenen Werthe der Basis a gefunden werden kann, so läßt sich eine jede Exponential-Größe b^z durch eine unendliche Reihe ausdrucken, deren Glieder nach den Potestäten von z fortschreiten. Nachdem wir dieses gezeigt haben, so wollen wir nun auch untersuchen, wie man die Logarithmen durch unendliche Reihen ausdrucken kann.

§. 118.

Da $a^\omega = 1+k\omega$, wenn ω ein unendlich kleinen Bruch bedeutet, und das Verhältniß zwischen a und k durch die Gleichung bestimmt wird, $a = 1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3.}+$ &c. so ist, wenn man a als die Logarithmische Basis betrachtet, $\omega = l(1+k\omega)$, und $i\omega = l(1+k\omega)^i$. Hierbey ist klar, daß die Potestät $(1+k\omega)^i$ die Einheit um so mehr übersteigen werde, je größer i angenommen wird, und daß sie, wenn man i ohne alle Grenze wachsen läßt, jede Zahl, die größer als die Einheit ist, erreichen kann. Setzt man daher $(1+k\omega)^i = 1+x$, so wird $l(1+x) = i\omega$; und da $i\omega$ eine endliche Zahl, nemlich der Logarithme von $1+x$, ist, so erhellet hieraus, daß i eine unendlich große Zahl seyn muß, weil sonst $i\omega$ keinen endlichen Werth haben könnte.

§. 119.

Da wir $(1+k\omega)^i = 1+x$ gesetzt haben, so ist $1+k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}}$, und $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1$, folglich $i\omega = \frac{1}{k}$

$\frac{i}{k}((1+x)^{\frac{1}{i}}-1)$. Da aber $i\omega = l(1+x)$ ist, [§. 118,] so ist $l(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, wenn i eine unendlich große Zahl ist. Nun ist $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i.2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.2i.3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.2i.3i.4i}x^4 + \text{ꝛc.}$ und, weil i unendlich groß ist, so ist $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$; ꝛc. Folglich ist $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ꝛc.}$ und $l(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ꝛc.})$ wenn die Logarithmische Basis $= a$ ist, und k eine Zahl bedeutet, die zu dieser Basis gehört, so daß $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$ ist.

§. 120.

Da wir nunmehr eine Reihe haben, welche dem Logarithmen von $1+x$ gleich ist, so können wir vermittelst derselben, wenn die Basis a gegeben ist, den Werth der Zahl k bestimmen. Denn setzt man $1+x = a$, so ist, weil $la = 1$ ist, $1 = \frac{1}{k}(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ꝛc.})$; folglich $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ꝛc.}$ und der Werth dieser Reihe muß, wenn man $a = 10$ setzt, ohngefehr $= 2{,}30258$ seyn;

seyn; ob gleich schwer einzusehen ist, wie $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} +$ &c. seyn könne, da die folgenden Glieder dieser Reihe immer größer werden, und man die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, daß man einige Glieder davon zusammen vereiniget. Es wird sich indeß bald ein Mittel, dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, darbieten.

§. 121.

Da $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{&c.}\right)$ ist, so ist, wenn man x negativ nimmt, $l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{&c.}\right)$ [Besonders bewiesen findet man diesen Satz im Anhange S. 487. Absatz 9. 10.] Subtrahirt man diese Reihe von der vorhergehenden, so erhält man $l(1+x) - (1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{&c.}\right)$ Setzt man nun $\frac{1+x}{1-x} = a$, so daß $x = \frac{a-1}{a+1}$ wird, so ist, da $la = 1$, nunmehr $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{&c.}\right)$ und aus dieser Gleichung läßt sich der Werth von k aus der Basis a finden. Setzt man daher $a = 10$, so ist $k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \text{&c.}\right)$ und da die Glieder dieser Reihe sehr merklich abnehmen, so geben sie auch den Werth von k sehr bald mit einer hinlänglichen Genauigkeit.

§. 122.

§. 122.

Da man bey der Verfertigung eines Logarithmischen Systems a nach Gefallen annehmen kann, so kann es auch so gewählt werden, daß $k = 1$ ist. Es sey also $k = 1$, so ist aus der oben §. 116 gefundenen Reihe $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ u. s. f. Verwandelt man diese Brüche in Decimal-Brüche, und addirt man sie wirklich, so erhält man $a = 2{,}718281828459045235360028$, wo auch noch die letzte Zifer genau ist. Nimmt man nun diese Zahl zur Basis an, so heißen die zu ihr gehörigen Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, weil die Quadratur der Hyperbel durch diese Logarithmen ausgedruckt werden kann. Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,718281828459 u. s. w. immer durch e bezeichnen, so daß also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, wofür $k = 1$ ist; oder es soll e die Summe dieser Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ u. s. w. ohne Ende, ausdrucken.

§. 123.

Die hyperbolischen Logarithmen haben also die Eigenschaft, daß die Zahl $1 + \omega$ den Logarithmen ω hat, wenn ω eine unendlich kleine Größe bedeutet; und da hieraus der Werth von $k = 1$ bekannt ist, so lassen sich die hyperbolischen Logarithmen aller Zahlen finden. Wenn daher e die vorhin, [§. 122] gefundene Zahl bedeutet, so ist allezeit $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4}$ u. s. f.; die hyperbolischen Logarithmen selbst aber ergeben sich aus diesen Reihen.

$l(1+x)$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{&c.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{&c.}$$

die in einem hohen Grade convergiren, wenn man für x einen kleinen Bruch annimmt, so daß man aus dieser letzten Reihe die Logarithmen der Zahlen, die nicht viel grösser als die Einheit sind, sehr leicht findet. Setzt man nemlich $x = \frac{1}{5}$, so ist $l\frac{6}{4} = l\frac{3}{2} = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \text{&c.}$; setzt man $x = \frac{1}{7}$, so wird $l\frac{4}{3} = \frac{2}{1 \cdot 7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \text{&c.}$; und setzt man $x = \frac{1}{9}$, so wird $l\frac{5}{4} = \frac{2}{1 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \text{&c.}$ Aus den Logarithmen dieser Brüche aber findet man ferner die Logarithmen der ganzen Zahlen, indem wegen der Natur der Logarithmen $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; ferner nun $l\frac{3}{2} + l2 = l3$; und $2l2 = l4$; desgleichen nunmehr $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $3l2 = l8$; $2l3 = l9$; und $l2 + l5 = l10$ ist.

Exempel.

Es sind daher die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis zu 10 folgende:

l1 = 0,00000 00000 00000 00000 00000
l2 = 0,69314 71805 59945 30941 72321
l3 = 1,09861 22886 68109 69139 52452
l4 = 1,38629 43611 19890 61883 44642

15 = 1,60943 79124 34100 37460 07593
16 = 1,79175 94692 28055 00081 24773
17 = 1,94591 01490 55313 30510 54639
18 = 2,07944 15416 79835 92825 16964
19 = 2,19722 45773 36219 38279 04905
110 = 2,30258 50929 94045 68401 79914

Es sind nemlich alle diese Logarithmen durch obige drey Reihen gefunden worden, bis auf den Logarithmen von 7, wobey folgende Verkürzung gebraucht worden ist. Dadurch daß in der letzten Reihe $x = \frac{1}{99}$ gesetzt wurde, ergab sich daraus $1\frac{100}{98} = 1\frac{50}{49} = 0,020202707317519448407823 0$, welcher, von $150 = 215 + 12 = 3,912023005428146058618750 8$ abgezogen, den Logarithmen von 49 giebt, dessen Hälfte = 17 ist.

§. 124.

Setzt man den hyperbolischen Logarithmen von $1 + x$, oder $l(1 + x) = y$; so ist $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{&c}$ Nimmt man aber a zur Basis, und setzt den Logarithmen eben derselben Zahl $1 + x$ gleich v; so ist, wie wir [§. 119.] gesehen haben, $v = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{&c.}) = \frac{y}{k}$, und folglich $k = \frac{y}{v}$. Hieraus läßt sich der für die Basis a zu k gehörige Werth sehr bequem auf die Art bestimmen, daß man sagt, es sey k gleich dem Quotienten, welchen man durch die Division des hyperbolischen Logarithmen einer jeden Zahl durch den zur Basis a gehörigen Logarithmen eben derselben Zahl erhält. Setzt man da-

her diese Zahl = a, so wird v = 1, und also k gleich dem hyperbolischen Logarithmen der Basis a. In dem gemeinen Logarithmischen Systeme, wo a = 10 ist, wird daher k = dem hyperbolischen Logarithmen von 10, oder k = 2,3025 85092994045684017991 4, [§. 123.] Wenn man also die hyperbolischen Logarithmen durch diese Zahl k dividirt, oder welches einerley ist, durch 0,43429448190325182765 11289 multiplicirt: so erhält man die gemeinen Logarithmen, deren Basis a = 10 ist.

§. 125.

Da $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$ ist, [§. 123;] so wird, wenn man $a^y = e^z$ setzt, und die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $y\,la = z$, weil $le = 1$ ist. Setzt man nun diesen Werth für z, so wird $a^y = 1 + \frac{y\,la}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1.2} + \frac{y^3(la)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$ [§. 117.] und es kann daher auch jede Exponential-Größe vermittelst der hyperbolischen Logarithmen durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Bedeutet ferner i eine unendlich große Zahl, so kann man sowohl die Exponential-Größen als die Logarithmen durch Potestäten ausdrucken. Es ist nemlich alsdann $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, und folglich $a^y = (1 + \frac{y\,la}{i})^i$, so wie ferner für die hyperbolischen Logarithmen $l(1+x) = i((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1)$ ([§. 119], wenn man daselbst k = 1 setzt.) Was den weitern Gebrauch der hyperbolischen Logarithmen betrifft, so wird derselbe in der Integral-Rechnung ausführlich beschrieben werden.

Achtes

Achtes Capitel.

Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

§. 126.

Nach den Logarithmen und den Exponential-Größen müssen die Kreisbogen und ihre Sinus und Cosinus betrachtet werden, nicht nur, weil sie eine andere Art von transcendenten Größen ausmachen, sondern auch weil sie aus den Logarithmen und Exponential-Größen, wenn dieselben imaginäre Größen enthalten, entspringen.

Setzt man nun den Halbmesser eines Kreises oder den Sinus Totus = 1, so ist bekannt, daß man die Peripherie dieses Kreises in Zahlen nicht ganz genau ausdrucken kann, daß man aber durch die Näherung für den halben Umkreis die Zahl, 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 † gefunden hat*). Für diese Zahl wollen wir der Kürze wegen π setzen, so daß also π den halben Umkreis eines Zirkels, dessen Halbmesser = 1 ist, oder die Länge eines Bogens von 180 Graden bedeutet.

*) In den drey letzten §§ des gegenwärtigen Capitels kommen einige Arten vor, das Verhältniß der halben Peripherie eines Kreises zum Radius, oder der ganzen Peripherie zum Durchmesser desselben zu bestimmen.

§. 127.

Nun bedeute z einen jeden Bogen dieses Kreises, dessen Halbmesser beständig = 1 gesetzt werden soll, und sin. A. z oder sin. z den Sinus, so wie cos. A. z, oder cos. z den Cosinus des Bogens z: so ist, da π ein Bogen von 180° ist, sin. $0\pi = 0$; cos. $0\pi = 1$; ferner sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$; cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$; sin. $\pi = 0$; cos. $\pi = -1$; sin. $\frac{3}{2}\pi = -1$; cos. $\frac{3}{2}\pi = 0$; sin. $2\pi = 0$; cos. $2\pi = 1$. Es fallen also alle Sinus und Cosinus zwischen die Grenzen $+1$ und -1*). Ferner ist cos. z = sin. $(\frac{1}{2}\pi - z)$; sin. z = cos. $(\frac{1}{2}\pi - z)$; und $(\text{sin. } z)^2 + (\text{cos. } z)^2 = 1$. Außerdem müssen auch noch folgende Bezeichnungen gemerket werden: tang. z, welches die Tangente des Bogens z, cot. z, welches die Cotangente des Bogens z bedeutet. Daß tang. $z = \frac{\text{sin. } z}{\text{cos. } z}$, und cot. $z = \frac{\text{cos. } z}{\text{sin. } z} = \frac{1}{\text{tang. } z}$ ist, ist, so wie auch alles übrige aus der Trigonometrie bekannt.

*) Wenn also k jede ganze Zahl, die Null nicht ausgeschlossen, bedeutet, so ist sowohl Sin. $2k\pi$ als Sin. $(2k+1)\pi = 0$, hingegen cos. $2k\pi = +1$, und cos. $(2k+1)\pi = -1$. Umgekehrt ist also φ oder $n\varphi$, wenn Sin. φ oder Sin. $n\varphi = 0$ ist, entweder $2k\pi$ oder $(2k+1)\pi$, je nachdem der Cosinus davon entweder $= +1$ oder $= -1$ ist. In jenem Falle findet die Form $2k\pi$, in diesem aber $(2k+1)\pi$ statt.

§. 128.

Ferner wird daselbst erwiesen, daß, wenn y und z zwey Bogen bedeuten,

sin. $(y + z) =$ sin. y. cos. z + cos. y. sin. z,

cos. $(y + z) =$ cos. y. cos. z — sin. y sin. z, desgleichen

sin. $(y - z) =$ sin. y. cos. z — cos. y. sin. z, und

cos. $(y - z) =$ cos. y. cos. z + sin. y. sin. z ist. Setzt

man

man daher anstatt y die Bogen $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$; ꝛc. so wird

$\sin.(\frac{1}{2}\pi \pm z) = \pm \cos. z$	$\sin.(\frac{1}{2}\pi - z) = \pm \cos. z$
$\cos.(\frac{1}{2}\pi \pm z) = -\sin. z$	$\cos.(\frac{1}{2}\pi - z) = \pm \sin. z$
$\sin.(\pi \pm z) = -\sin. z$	$\sin.(\pi - z) = \pm \sin. z$
$\cos.(\pi \pm z) = -\cos. z$	$\cos.(\pi - z) = -\cos. z$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi \pm z) = -\cos. z$	$\sin.(\frac{3}{2}\pi - z) = -\cos. z$
$\cos.(\frac{3}{2}\pi \pm z) = \pm \sin. z$	$\cos.(\frac{3}{2}\pi - z) = -\sin. z$
$\sin.(2\pi \pm z) = \pm \sin. z$	$\sin.(2\pi - z) = -\sin. z$
$\cos.(2\pi \pm z) = \pm \cos. z$	$\cos.(2\pi - z) = \pm \cos. z$

Wenn also n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist

$\sin.(\frac{4n\pm1}{2}\pi \pm z) = \pm \cos. z$	$\sin.(\frac{4n\pm1}{2}\pi - z) = \pm \cos. z$
$\cos.(\frac{4n\pm1}{2}\pi \pm z) = -\sin. z$	$\cos.(\frac{4n\pm1}{2}\pi - z) = \pm \sin. z$
$\sin.(\frac{4n\pm2}{2}\pi \pm z) = -\sin. z$	$\sin.(\frac{4n\pm2}{2}\pi - z) = \pm \sin. z$
$\cos.(\frac{4n\pm2}{2}\pi \pm z) = -\cos. z$	$\cos.(\frac{4n\pm2}{2}\pi - z) = -\cos. z$
$\sin.(\frac{4n\pm3}{2}\pi \pm z) = -\cos. z$	$\sin.(\frac{4n\pm3}{2}\pi - z) = -\cos. z$
$\cos.(\frac{4n\pm3}{2}\pi \pm z) = \pm \sin. z$	$\cos.(\frac{4n\pm3}{2}\pi - z) = -\sin. z$
$\sin.(\frac{4n\pm4}{2}\pi \pm z) = \pm \sin. z$	$\sin.(\frac{4n\pm4}{2}\pi - z) = -\sin. z$
$\cos.(\frac{4n\pm4}{2}\pi \pm z) = \pm \cos. z$	$\cos.(\frac{4n\pm4}{2}\pi - z) = \pm \cos. z$

Und diese Formeln sind wahr, n mag eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten.

§. 129.

Wenn sin. $z = p$, und cos. $z = q$ gesetzt wird, so ist $pp + qq = 1$; und wenn sin. $y = m$, und cos. $y = n$ genommen wird, so ist auch $mm + nn = 1$. Die Sinus und Cosinus der aus diesen zusammengesetzten Bogen verhalten sich so, daß

sin. $z = p$

sin. $(y + z) = mq + np$

sin. $(2y + z) = 2mnq + (nn - mm)p$

sin. $(3y + z) = (3mn^2 - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$

u. s. f.

cos. $z = q$

cos. $(y + z) = nq - mp$

cos. $(2y + z) = (nn - mm)q - 2mnp$

cos. $(3y + z) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$

u. s. f. ist.

Die Bogen z, $y + z$, $2y + z$, $3y + z$ u. s. w. machen eine arithmetische Progression, ihre Sinus aber und ihre Cosinus eine wiederkehrende Reihe von der Art aus, als aus dem Renner $1 - 2nx + (mm + nn)xx$ entspringt. Es ist nemlich

sin. $(2y + z) = 2n$ sin. $(y + z) - (mm + nn)$ sin. z

oder

sin. $(2y + z) = 2$ cos. y. sin. $(y + z)$ — sin. z; und eben so

cos. $(2y + z) = 2$ cos. y. cos. $(y + z)$ — cos. z. Auf eine ähnliche Art findet man

sin. $(3y + z) = 2$ cos. y. sin. $(2y + z)$ — sin. $(y + z)$ und

cos. $(3y + z) = 2$ cos. y. cos. $(2y + z)$ — cos. $(y + z)$; desgleichen

sin. $(4y + z) = 2$ cos. y. sin. $(3y + z)$ — sin. $(2y + z)$ und

cos. $(4y + z) = 2$ cos. y. cos. $(3y + z)$ — cos. $(2y + z)$ u. s. f.

Nach diesem Gesetze lassen sich die Formeln für die Sinus

und

und Cosinus der Bogen, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so weit als man will, fortsetzen*).

*) Setzt man also $y = z = \varphi$, so erhält man für die Sinus

$\sin. \varphi = \sin. \varphi$
$\sin. 2\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. \varphi$
$\sin. 3\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. 2\varphi - \sin. \varphi$
$\sin. 4\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. 3\varphi - \sin. 2\varphi$
$\sin. 5\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. 4\varphi - \sin. 3\varphi$
$\sin. 6\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. 5\varphi - \sin. 4\varphi$

und überhaupt

$\sin. n\varphi = 2 \cos. \varphi . \sin. (n-1)\varphi - \sin. (n-2)\varphi$;

für die Cosinus

$\cos. \varphi = \cos. \varphi$
$\cos. 2\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. \varphi - 1$
$\cos. 3\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. 2\varphi - \cos. \varphi$
$\cos. 4\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. 3\varphi - \cos. 2\varphi$
$\cos. 5\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. 4\varphi - \cos. 3\varphi$
$\cos. 6\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. 5\varphi - \cos. 4\varphi$

und überhaupt

$\cos. n\varphi = 2 \cos. \varphi . \cos. (n-1)\varphi - \cos. (n-2)\varphi$.

§. 130.

Da $\sin. (y + z) = \sin. y . \cos. z + \cos. y . \sin. z$ und

$\sin. (y - z) = \sin. y . \cos. z - \cos. y . \sin. z$; so erhält man, wenn man diese Gleichungen theils addirt, theils subtrahirt

1. $\sin. y . \cos. z = \frac{\sin. (y + z) + \sin. (y - z)}{2}$

2. $\cos. y . \sin. z = \frac{\sin. (y + z) - \sin. (y - z)}{2}$

Da ferner $\cos. (y + z) = \cos. y . \cos. z - \sin. y . \sin. z$, und

$\cos. (y - z) = \cos. y . \cos. z + \sin. y . \sin. z$ ist, so erhält man auf eben die Art

3. $\cos. y. \cos. z = \frac{\cos.(y-z) + \cos.(y+z)}{2}$

4. $\sin. y. \sin. z = \frac{\cos.(y-z) - \cos.(y+z)}{2}$

Setzt man nun $y = z = \frac{1}{2}v$, so bekommt man aus diesen letztern Formeln:

5. $(\cos.\frac{1}{2}v)^2 = \frac{1+\cos. v}{2}$, und $\cos.\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos. v}{2}}$

6. $(\sin.\frac{1}{2}v)^2 = \frac{1-\cos. v}{2}$, und $\sin.\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos. v}{2}}$

wornach man aus dem Cosinus eines jeden Winkels den Sinus und Cosinus seiner Hälfte finden kann *).

*) Setzt man $\frac{1}{2}v = \varphi$, also $v = 2\varphi$, so wird
$2(\sin.\varphi)^2 = 1 - \cos. 2\varphi$, aus 6, und
$2(\cos.\varphi)^2 = 1 + \cos. 2\varphi$, aus 5.
Auch lassen sich hier schon die Bestimmungen für die übrigen Potestäten der Sinus und Cosinus finden, welche Euler am Ende des 14ten Capitels im 262 und 263sten §. mitgetheilt, aber bereits vorher öfters gebraucht hat. Denn einmal fließen die vier Gleichungen, die im Anfange des 262sten §. stehen, in der Ordnung, in welcher sie daselbst gefunden werden, sehr leicht aus 4, 2, 1 und 3 des gegenwärtigen §. Ferner sind die Bestimmungen für $2(\sin.\varphi)^2$ und $2(\cos.\varphi)^2$ so eben angeführt worden. Und was die übrigen Bestimmungen betrifft, so ist
$4(\sin.\varphi)^3 = 2\sin.\varphi \times 2(\sin.\varphi)^2 = 2\sin.\varphi(1-\cos. 2\varphi)$
$= 2\sin.\varphi - 2\cos. 2\varphi.\sin.\varphi$. Aber aus 2 im §. ist
$-2\cos. 2\varphi.\sin.\varphi = -\sin. 3\varphi + \sin.\varphi$; und also ist
$4(\sin.\varphi)^3 = 3\sin.\varphi - \sin. 3\varphi$

Ferner ist
$8(\sin.\varphi)^4 = 2\sin.\varphi \times 4(\sin.\varphi)^3 = 2\sin.\varphi(3\sin.\varphi - \sin. 3\varphi)$
$= 3.2\sin.\varphi^2 - 2\sin. 3\varphi.\sin.\varphi$. Es ist aber
$3.2(\sin.\varphi)^2 = 3 - 3\cos. 2\varphi$, und aus 4 im §. ist
$-2\sin. 3\varphi.\sin.\varphi = -\cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi$. Folglich
$8(\sin.\varphi)^4 = 3 - 4\cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi$

Ferner

Ferner ist

$16(\sin.\varphi)^5 = 2\sin.\varphi \times 8(\sin.\varphi)^4 = 2\sin.\varphi(3 - 4\cos.2\varphi + \cos.4\varphi)$

$= 6\sin.\varphi - 4 \times 2\cos.2\varphi.\sin.\varphi + 2\cos.4\varphi.\sin.\varphi$

Es ist aber aus 2 im §. $-4.2\cos.2\varphi.\sin.\varphi = -4\sin.3\varphi + 4\sin.\varphi$, und

$2\cos.4\varphi.\sin.\varphi = \sin.5\varphi - \sin.3\varphi$. Folglich

$16(\sin.\varphi)^5 = 10\sin.\varphi - 5\sin.3\varphi + \sin.5\varphi$.

Diese Beyspiele zeigen hinlänglich die Art und Weise, wie man aus $2(\sin.\varphi)^2 = 1 - \cos.2\varphi$, und $2(\cos.\varphi)^2 = 1 + \cos.2\varphi$, indem man jene Gleichung mit $2\sin.\varphi$ und diese mit $2\cos.\varphi$ fortgesetzt multiplicirt, und das daher sich Ergebende nach den vier ersten Gleichungen im § und den bereits gefundenen Bestimmungen abändert, die von Eulern am angeführten Orte mitgetheilten Bestimmungen der Potestäten von $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ findet; denn bey der Erfindung der Potestäten der Cosinus ist das Verfahren dem bey der Erfindung der Potestäten der Sinus bis auf das Angeführte durchaus ähnlich.

§. 131.

Setzt man ferner $y + z = a$, und $y - z = b$; so wird $y = \frac{a+b}{2}$ und $z = \frac{a-b}{2}$, und bringt man diese Werthe in die vorhergehende Formeln, so bekommt man diese Gleichungen, wovon jede einen Lehrsatz enthält:

1. $\sin.a + \sin.b = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\cos.\frac{a-b}{2}$

2. $\sin.a - \sin.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\sin.\frac{a-b}{2}$

3. $\cos.a + \cos.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\cos.\frac{a-b}{2}$

4. $\cos.b - \cos.a = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\sin.\frac{a-b}{2}$.

Hieraus ergiebt sich ferner vermittelst der Division

5. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} = \text{tang.} \frac{a+b}{2} \cdot \cot. \frac{a-b}{2} = \frac{\text{tang.} \frac{a+b}{2}}{\text{tang.} \frac{a-b}{2}}$

6. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \text{tang.} \frac{a+b}{2}$

7. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a-b}{2}$

8. $\frac{\sin. a - \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \text{tang.} \frac{a-b}{2}$

9. $\frac{\sin. a - \sin. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2}$

10. $\frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2} \cdot \cot. \frac{a-b}{2}$

Endlich findet man hieraus

11. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \frac{\cos. b - \cos. a}{\sin. a - \sin. b}$

12. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \left(\cot. \frac{a-b}{2}\right)^2$

13. $\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. a + \cos. b} = \left(\text{tang.} \frac{a+b}{2}\right)^2$

§. 132.

Da $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$ ist, so ist auch, wenn man die Faktoren nimmt, $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = 1$. Nun sind zwar diese Faktoren imaginär, allein sie gewähren nichts destoweniger bey der Multiplication und Combination der Bogen einen sehr großen Nutzen. Denn sucht man das Produkt dieser Faktoren

$(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)$;

so findet man

cos.

cos.y. cos.z — sin.y. sin.z ± (cos.y. sin.z ± sin.y. cos.z) $\sqrt{-1}$.

Da nun aber

cos. y. cos.z — sin. y. sin. z = cos. (y ± z), und

cos. y. sin. z ± sin. y. cos. z = sin. (y ± z) ist, [§. 130.]

so ist das Produkt

(cos.y ± $\sqrt{-1}$. sin.y) (cos.z ± $\sqrt{-1}$. sin.z) = cos. (y ± z) ± $\sqrt{-1}$. sin. (y ± z),

und auf eine ähnliche Art ergiebt sich

(cos. y — $\sqrt{-1}$. sin. y) (cos. z — $\sqrt{-1}$. sin. z) = cos. (y ± z) — $\sqrt{-1}$. sin. (y ± z).

Auch ist nunmehr leicht einzusehen, daß

(cos. x ± $\sqrt{-1}$. sin.x) (cos. y ± $\sqrt{-1}$. sin.y) (cos. z ± $\sqrt{-1}$. sin. z) = cos. (x ± y ± z) ± $\sqrt{-1}$. sin. (x ± y ± z); u. s. f seyn wird.

§. 133.

Hieraus ergiebt sich, [wenn man x = y = z setzt,]

(cos.z ± $\sqrt{-1}$. sin.z)^2 = cos.2 z ± $\sqrt{-1}$. sin.2z, desgleichen

(cos.z ± $\sqrt{-1}$. sin. z)^3 = cos.3 z ± $\sqrt{-1}$. sin.3 z, u. überhaupt

(cos. z ± $\sqrt{-1}$. sin.z)^n = cos.n z ± $\sqrt{-1}$. sin. n z; *) so wie hieraus, wegen der doppelten Zeichen,

$$\text{cos. n z} = \frac{(\text{cos.z} + \sqrt{-1}.\text{sin.z})^n + (\text{cos.z} - \sqrt{-1}.\text{sin.z})^n}{2}, \text{ und}$$

$$\text{sin. n z} = \frac{(\text{cos.z} + \sqrt{-1}.\text{sin.z})^n - (\text{cos.z} - \sqrt{-1}.\text{sin.z})^n}{2\sqrt{-1}} \text{ **)}$$

Entwickelt man aber diese Binomien durch Reihen, so wird

$$\text{cos. n z} = (\text{cos. z})^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\text{cos. z})^{n-2} (\text{sin. z})^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\text{cos. z})^{n-4} (\text{sin. z})^4$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (\text{cos.z})^{n-6} (\text{sin.z})^6 + \text{ic. u.}$$

$$\text{sin.}nz = \frac{n}{1}(\text{cos.}z)^{n-1}\text{sin.}z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\text{cos.}z)^{n-3}(\text{sin.}z)^3 +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\text{cos.}z)^{n-5}(\text{sin.}z)^5 - \text{&c.}$$

*) Daß

$(\text{cos.}z \pm \sqrt{-1}.\text{sin.}z)^n = \text{cos.}nz \pm \sqrt{-1}.\text{sin.}nz$

ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, ist durch den vorhergehenden und den gegenwärtigen §. außer allen Zweifel gesetzt. Es ist aber dieser Satz von einem weit größern Umfange, denn er gilt, n mag eine positive oder negative, eine ganze oder eine gebrochene, eine rationale oder eine irrationale Zahl bedeuten. Gelegentlich beweiset solches Euler in den bey §. 32. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations §. 85. allein mit Hülfe der Differential-Rechnung. Wie und wie weit man sich davon ohne den Gebrauch der Differential-Rechnung überzeugen könne? davon sehe man den Zusatz zu diesem §. im Anhange.

**) Es ist nemlich

$(\text{cos.}z + \sqrt{-1}.\text{sin.}z)^n = \text{cos.}nz + \sqrt{-1}.\text{sin.}nz$, und

$(\text{cos.}z - \sqrt{-1}.\text{sin.}z)^n = \text{cos.}nz - \sqrt{-1}.\text{sin.}nz$; und aus dem Aggregate dieser beyden Gleichungen erhält man die Bestimmung von cos. nz, so wie aus der Differenz derselben die Bestimmung von sin. nz.

§. 134.

Nun sey z ein unendlich kleiner Bogen, folglich sin. $z = z$, und cos. $z = 1$. Wenn alsdann n eine unendlich große Zahl bedeutet, so daß nz ein endlicher Bogen ist, den wir $= v$ setzen wollen; so ist, weil dann sin. $z = z = \frac{v}{n}$ ist,

$$\text{cos.}v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{&c.}, \text{ und}$$

sin.

$$\text{sin. } v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

Wenn also der Bogen v gegeben ist, so kann man vermittelst dieser Reihen seinen Sinus und Cosinus finden. Damit aber der Nutzen dieser Formeln desto deutlicher in die Augen falle, so wollen wir annehmen, daß v einen Bogen bedeute, der sich zum Quadranten oder 90° verhalte, wie m zu n, d. h. es soll $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ seyn. Da nun der Werth von π bekannt ist, so erhält man, wenn man denselben allenthalben substituirt,

$$\text{sin. } A = \frac{m}{n} \cdot 90° =$$

$$+ \frac{m}{n} \cdot 1,570796326794896619231321691 6$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,645964097506246253655756563 6$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,079692626246167045120505548 8$$

$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,004681754135318688100685463 2$$

$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,000160441184787359821872660 5$$

$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,000003598843235212085340458 0$$

$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,000000056921729219679268117 1$$

$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,000000000668035109811467224$$

$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,000000000006066935731106195 0$$

$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,000000000000437706546731370$$

+

$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}.0,000000000000000257142289285 6$$

$$-\frac{m^{23}}{n^{23}}.0,000000000000000012538995403$$

$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}.0,000000000000000000515645500$$

$$-\frac{m^{27}}{n^{27}}.0,000000000000000000018123939$$

$$+\frac{m^{29}}{n^{29}}.0,000000000000000000000549$$

und $\cos. A\frac{m}{n}.90^{\circ} =$

$$+ \quad 1,000000000000000000000000000$$

$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}.0,233700550136169827354311374 5$$

$$+\frac{m^{4}}{n^{4}}.0,253669507901048013636563365 9$$

$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}.0,020863480763352960873051636 4$$

$$+\frac{m^{8}}{n^{8}}.0,000919260274839426580241715 8$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}.0,000025202042373060605481052 6$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}.0,000000047108747788181715036 5$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.0,000000006386603083791852240 8$$

$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}.0,000000000065659631149794723 0$$

$$-\frac{m^{18}}{o^{18}}.0,000000000005294400200734620$$

$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}.0,000000000000343773917909 81$$

—

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}.0,000000000000000001835991652 12$$

$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}.0,000000000000000000820675327$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}.0,000000000000000000003115285$$

$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}.0,000000000000000000000101165$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}.0,000000000000000000000000026$$

Da es nun hinlänglich ist, wenn man die Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° weiß, [weil cos. z = sin. $(\frac{1}{2}\pi - z)$ und sin. z = cos. $(\frac{1}{2}\pi - z)$ §. 127. und 128.] so ist der Bruch $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, und die Potestäten des Bruchs $\frac{m}{n}$ nehmen daher sehr stark ab, so daß meistentheils einige wenige Glieder hinreichend sind, zumal, wenn man die Sinus und Cosinus nicht in so vielen Decimal-Theilen verlangt.

§. 135.

Hat man die Sinus und Cosinus gefunden, so kann man daraus allerdings nach den bekannten Analogien [§. 127.] die Tangenten und Cotangenten finden; allein weil die Multiplication und Division mit solchen vieltheiligen Zahlen, als wodurch die Sinus und Cosinus ausgedruckt werden, eine sehr beschwerliche Sache ist, so ist es besser, wenn man auch dafür besondere Formeln sucht. Es ist also

$$\text{tang. } v = \frac{\text{sin. } v}{\text{cos. } v} = \frac{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3\,4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}}{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}}$$

und

und

$$\cot.v = \frac{\cos.v}{\sin.v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}}{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}}$$

Setzt man daher wieder $v = \frac{m}{n} . 90^\circ$, so ist

$\text{tang. A.} \frac{m}{n} . 90^\circ =$		$\text{cot. A.} \frac{m}{n} . 90^\circ =$	
$+ \frac{2mn}{nn-mm}$	0,6366197723675	$+ \frac{n}{m}$	0,6366197723675
$+ \frac{m}{n}$	0,2975567820597	$\frac{-4mn}{4nn-mm}$	0,3183098861837
$+ \frac{m^3}{n^3}$	0,0186886502773	$- \frac{m}{n}$	0,2052888894145
$+ \frac{m^5}{n^5}$	0,0018424752034	$- \frac{m^3}{n^3}$	0,0065510747882
$+ \frac{m^7}{n^7}$	0,0001975800714	$- \frac{m^5}{n^5}$	0,0003450292554
$+ \frac{m^9}{n^9}$	0,0000216977245	$- \frac{m^7}{n^7}$	0,0000202791060
$+ \frac{m^{11}}{n^{11}}$	0,0000024011370	$- \frac{m^9}{n^9}$	0,0000012366527
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}}$	0,0000002664132	$- \frac{m^{11}}{n^{11}}$	0,0000000764959
$+ \frac{m^{15}}{n^{15}}$	0,0000000295864	$- \frac{m^{13}}{n^{13}}$	0,0000000047597
$+ \frac{m^{17}}{n^{17}}$	0,0000000032867	$- \frac{m^{15}}{n^{15}}$	0,0000000002969
$+ \frac{m^{19}}{n^{19}}$	0,0000000003651	$- \frac{m^{17}}{n^{17}}$	0,0000000000185
$+ \frac{m^{21}}{n^{21}}$	0,0000000000405	$- \frac{m^{19}}{n^{19}}$	0,0000000000011

†

$$\dagger \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}000000000045$$

$$\dagger \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}0000000000005$$

Der Grund hiervon wird weiter unten [§. 197. f.] vorkommen.

§. 136.

Es ist vorhin [§. 134.] bemerkt worden, daß man in den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° zugleich die Sinus und Cosinus aller übrigen größern Winkel habe; man kann aber auch schon aus den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 30° die Sinus und Cosinus der Winkel, die über 30° sind, durch eine bloße Addition und Subtraction finden. Denn da $\sin. 30° = \frac{1}{2}$ ist, so ist aus §. 130, wenn man $y = 30°$ setzt,

$$\cos. z = \sin. (30° \dagger z) \dagger \sin. (30° - z) \text{ und}$$
$$\sin. z = \cos. (30° - z) - \cos. (30° \dagger z)$$

und man erhält daher aus den Sinus und Cosinus der Winkel z und $30° - z$

$$\sin. (30° \dagger z) = \cos. z - \sin. (30° - z) \text{ und}$$
$$\cos. (30° \dagger z) = \cos. (30° - z) - \sin. z.$$

Hiernach kann man die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis zu 60°, und aus diesen dann auch alle übrigen finden.

§. 137.

Bey den Tangenten und Cotangenten giebt es ein ähnliches Hülfsmittel. Denn da $\text{tang.}(a \dagger b) = \frac{\text{tang. a} \dagger \text{tang. b}}{1 - \text{tang. a. tang. b}}$ ist *), so ist $\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. a}}{1 - \text{tang. a. tang. a}}$, und

$\cot. 2a = \frac{\cot. a - \tang. a}{2}$; **) und hiernach lassen sich aus den Tangenten und Cotangenten der Bogen, die kleiner sind als 30°, die Cotangenten der Bogen bis zu 60° finden.

Nun sey $a = 30° - b$, so ist $2a = 60° - 2b$, und $\cot. 2a = \tang. (30° + 2b)$; folglich

$$\tang. (30° + 2b) = \frac{\cot. (30° - b) - \tang. (30° - b)}{2};$$

wornach man auch die Tangenten der Bogen, die größer als 30° sind, findet.

Die Secanten und Cosecanten endlich lassen sich aus den Tangenten durch eine bloße Subtraction erhalten; denn es ist

$\cosec. z = \cot. \frac{1}{2} z - \cot. z$, und daher

$\sec. z = \cot. (45° - \frac{1}{2} z) - \tang. z$. ***) Hieraus erhellet zur Gnüge, wie die trigonometrischen Tafeln verfertiget werden können.

*) Es ist nemlich $\tang. (a + b) = \frac{\sin. (a + b)}{\cos. (a + b)}$ §. 127. $= \frac{\sin. a. \cos. b + \cos. a. \sin. b}{\cos. a. \cos. b - \sin. a. \sin. b}$, §. 128. und dividirt man den Zähler und Nenner dieses letzten Werthes durch $\cos. a. \cos. b$, so bekömmt man den obigen Werth für $\tang. (a + b)$, so wie hieraus, wenn man darin a für b setzt, den sogleich folgenden für $\tang. 2a$.

**) Dies folgt aus $\cot. 2a = \frac{1}{\tang. 2a}$, §. 127, $= \frac{1 - \tang. a. \tang. a}{2 \tang. a.}$

***) Da

***) Da tang. $z = \frac{2 \text{ tang.} \frac{1}{2} z}{1 - (\text{tang.} \frac{1}{2} z)^2}$, wie so eben gezeigt worden ist, so hat man daher tang. z — tang. z (tang. $\frac{1}{2}$ z)^2 = 2 tang. $\frac{1}{2}$ z, oder tang. z (tang. $\frac{1}{2}$ z)^2 + 2 tang. $\frac{1}{2}$ z = tang. z. Dividirt man nun hier allenthalben durch tang. z, so kommt (tang. $\frac{1}{2}$ z)^2 + 2 cot. z. tang. $\frac{1}{2}$ z = 1, und es ist also tang. $\frac{1}{2}$ z = — cot. z + $\sqrt{(1 + (\text{cot. z})^2)}$. Da nun $\sqrt{(1 + \text{cot. z})^2)}$ = cosec. z, so wird cosec. z = tang. $\frac{1}{2}$ z + cot. z. Es fließt aber aus (tang. $\frac{1}{2}$ z)^2 + 2 cot. z. tang. $\frac{1}{2}$ z = 1 auch, tang. $\frac{1}{2}$ z + 2 cot. z = cot. $\frac{1}{2}$ z, oder tang. $\frac{1}{2}$ z = cot. $\frac{1}{2}$ z — 2 cot. z, und diesen Werth in die vorhin für cosec. z gefundene Formel gesetzt, so ist

cosec. z = cot. $\frac{1}{2}$ z — cot. z

Nun setze man x = 90° — z, wodurch $\frac{1}{2}$ x = 45° — $\frac{1}{2}$ z, cosec. x = sec. z, und cot. x = tang. z wird; so wird aus cosec. x = cot. $\frac{1}{2}$ x — cot. x

sec. z = cot. (45° — $\frac{1}{2}$ z) — tang. z.

§. 138.

Nun sey abermals, wie §. 134., z ein unendlich kleiner Bogen, und n eine unendlich große Zahl i, so daß i z einen endlichen Werth v erhalte. Alsdann ist n z = v, und z = $\frac{v}{i}$, woher denn sin. z = $\frac{v}{i}$, und cos. z = 1 wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so bekommt man anstatt der Formeln §. 133. diese:

$$\text{cos. v} = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2} \text{ und}$$

$$\text{sin. v} = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In dem vorhergehenden Capitel ist aber bewiesen worden,

daß $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$ ist, wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet; und setzt man daher für z theils $+ v\sqrt{-1}$, theils $- v\sqrt{-1}$, so wird

$$\text{cos. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}, \text{ und}$$

$$\text{sin. } v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Hieraus erhellet, wie die imaginären Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus reeller Bogen zurückgebracht werden können. Es wird nemlich

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \text{cos. } v + \sqrt{-1}.\ \text{sin. } v, \text{ und}$$

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \text{cos. } v - \sqrt{-1}.\ \text{sin. } v.$$

§. 139.

Ferner sey in eben diesen Formeln §. 133. n eine unendlich kleine Zahl, oder $n = \frac{1}{i}$, indem i eine unendlich große Zahl bedeutet; so wird $\text{cos. } nz = \text{cos. } \frac{z}{i} = 1$, und $\text{sin. } nz = \text{sin. } \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$: denn der Sinus eines unendlich kleinen Bogens ist diesem Bogen selbst gleich, der Cosinus aber $= 1$. Gebraucht man nun diese Werthe in den gedachten Formeln, so erhält man

$$1 = \frac{(\text{cos. } z + \sqrt{-1}.\ \text{sin. } z)^{\frac{1}{i}} + (\text{cos. } z - \sqrt{-1}.\ \text{sin. } z)^{\frac{1}{i}}}{2}, \text{ und}$$

$$\frac{z}{i} = \frac{(\text{cos. } z + \sqrt{-1}.\ \text{sin. } z)^{\frac{1}{i}} - (\text{cos. } z - \sqrt{-1}.\ \text{sin. } z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Nun

Nun ist aber §. 125. gezeigt worden, daß, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$, oder $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} ly$ ist, indem man diese letztere Gleichung aus der vorhergehenden erhält, wenn man darin y anstatt $1+x$ setzt. Setzt man daher nunmehr anstatt y theils $\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z$, theils $\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z$, so erhält man

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i} l(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z) + 1 + \frac{1}{i} l(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)}{2} = 1,$$

weil die Logarithmen als unendlich kleine Größen verschwinden, so daß also hieraus nichts folgt. Die andere Gleichung, für den Sinus, hingegen, giebt

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i} l(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin.z) - \frac{1}{i} l(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin.z)}{2\sqrt{-1}},$$

woher denn

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z}{\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z}.$$

Hieraus erhellet, wie man die imaginären Logarithmen auf Kreisbogen zurückführen kann.

§. 140.

Da $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \text{tang. } z$, so wird der Bogen z durch seine Tangente auf diese Art ausgedruckt:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1 + \sqrt{-1}. \text{tang. } z}{1 - \sqrt{-1}. \text{tang. } z}.$$

Da nun nach §. 123.

$$l \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird, wenn man $x = \sqrt{-1}$. tang. z setzt,

$$z = \frac{\text{tang. } z}{1} - \frac{(\text{tang.}z)^3}{3} + \frac{(\text{tang.}z)^5}{5} - \frac{(\text{tang.}z)^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

Ist also tang. $z = t$, folglich z ein Bogen, dessen Tangente t ist, so daß man ihn durch A. tang. t. bezeichnen, und $z =$ A. tang. t setzen kann: so ist, wenn t bekannt ist, der zu dieser Tangente gehörige Bogen

$$z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{ꝛc.}$$

Da nun, wenn die Tangente t dem Radius 1 gleich wird, der zu ihr gehörende Bogen $z =$ einem Bogen von 45°, oder $= \frac{\pi}{4}$ ist, so hat man

$$z = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.}$$

welches die Reihe ist, die Leibnitz für den Werth der Peripherie des Zirkels erfunden hat **).

*) In der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus, welche man in den Actis eruditorum vom Jahr 1682. S. 41 f. und im dritten Theile der Genfer Ausgabe der Leibnitzischen Werke S. 140 f. findet.

§. 141.

Es fällt indeß in die Augen, daß man, um aus dieser Reihe die Größe eines Kreisbogens mit weniger Mühe zu bestimmen, für die Tangente t einen hinlänglich kleinen Bruch nehmen muß. So findet man z. B. daraus sehr leicht die Größe des Bogens z, dessen Tangente t gleich $\frac{1}{10}$ ist; denn da ist dieser Bogen $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000}$ ꝛc. und der Werth dieser Reihe läßt sich mit geringer Mühe in Decimal-Brüchen ausdrucken. Allein, wenn man auch

die

die Länge dieses Bogens kennt, so ist man doch nicht im Stande, daraus die Größe der ganzen Peripherie zu bestimmen, weil man das Verhältniß eines Bogens, dessen Tangente $= \frac{1}{10}$ ist, zur ganzen Peripherie nicht angeben kann. Man muß daher, um die Länge der Peripherie zu finden, einen Bogen suchen, der ein aliquoter Theil der Peripherie ist, und dessen Tangente durch einen kleinen Bruch bequem ausgedruckt werden kann. Weil nun die Tangenten der Bogen, die kleiner als 30° und dabey aliquote Theile der Peripherie sind, zu verwickelte irrationale Größen werden, so pflegt man zu dieser Absicht den Bogen von 30°, dessen Tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, zu nehmen. Da also der Bogen von $30° = \frac{\pi}{6}$ ist, so ist $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} -$ u. s. w. und

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 3^4} - \text{ꝛc.}$$

und vermittelst dieser Reihe hat man den oben [§. 126.] angeführten Werth von π mit unglaublicher Mühe gefunden.

§. 142.

Diese Arbeit ist deswegen so groß, einmal weil alle einzelne Glieder dieser Reihe Irrational-Zahlen sind, und zweytens weil jedes folgende ohngefehr nur dreymal kleiner als das vorhergehende ist. Dieser Unbequemlichkeit kann indeß auf folgende Art abgeholfen werden. Man nehme den Bogen von 45° oder $\frac{\pi}{4}$, und behalte dafür die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ u. s. f. ohnerachtet dieselbe nur in einem äußerst geringen Grade convergirt, bey, zerfälle aber den Bogen $\frac{\pi}{4}$ in die beyden a und b, so daß $a + b = \frac{\pi}{4} = 45°$ sey. Da nun

nun tang. $(a + b) = 1 = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$ ist, so ist auch $1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b = \text{tang. } a + \text{tang. } b$ und tang. $b = \frac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$. Setzt man nun tang. $a = \frac{1}{2}$, so wird tang. $b = \frac{1}{3}$, und vermittelst dieser Werthe kann man sowohl den Bogen a als den Bogen b durch eine rationale und weit mehr als die vorhergehende convergirende Reihe ausdrucken. Da ferner die Summe dieser beyden Bogen $= \frac{\pi}{4}$ ist, so hat man daher

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{ꝛc.} \\ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

Auf diese Art hätte man die Länge des halben Umkreises π weit leichter finden können, als es durch die vorhin [§. 141] gefundene Reihe geschehen ist.



Neun-

Neuntes Capitel.

Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

§. 143.

Wie man die einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion finde? ist oben [im 2ten Cap. §. 29. f.] gelehret, und daselbst gezeigt worden, daß man dazu durch die Auflösung der Gleichungen gelange. Ist nemlich irgend eine ganze Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{ꝛc.}$ gegeben, deren einfache Faktoren von der Form $p - qz$ gesucht werden sollen: so ist offenbar, daß diese Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{ꝛc.}$ wenn $p - qz$ ein Faktor derselben ist, für $z = \frac{p}{q}$, wobey $p - qz = o$ wird, auch selbst $= o$ werden muß. Ist also $p - qz$ ein Faktor oder Divisor der Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{ꝛc.}$ so ist $\alpha + \frac{\beta p}{q} + \frac{\gamma p^2}{q^2} + \frac{\delta p^3}{q^3} + \frac{\varepsilon p^4}{q^4} + \text{ꝛc.} = o$. Umgekehrt erhält man daher, wenn man alle Wurzeln $\frac{p}{q}$ dieser Gleichung sucht, durch dieselben eben soviel einfache Faktoren der gegebenen ganzen Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{ꝛc.}$ und zwar von der Form $p - qz$. Es erhellet aber hieraus zugleich, daß sich die Anzahl dieser einfachen Faktoren nach der höchsten Potestät von z richtet.

§. 144.

Auf diesem Wege lassen sich aber die imaginären Faktoren gewöhnlicher Weise sehr schwer finden, und es soll daher in dem gegenwärtigen Capitel ein besonderer Weg hiezu gezeigt werden. Da aber die einfachen imaginären Faktoren von der Art sind, daß die Produkte aus je zweyen reell werden, [§. 32]; so findet man die einfachen imaginären Faktoren, wenn man die doppelten Faktoren, oder die Faktoren von der Form $p - qz + rzz$ aufsucht, die zwar selbst reell sind, aber dabey aus einfachen imaginären Faktoren bestehen. Denn sind von der Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.}$ alle reelle doppelte Faktoren von dieser trinomischen Form $p - qz + rzz$ bekannt, so kann man daraus ferner alle imaginären einfachen Faktoren finden.

§. 145.

Es hat aber die Trinomie $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren, wenn $4pr$ größer als qq, oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ kleiner als 1 ist. Da nun die Sinus und Cosinus der Winkel kleiner als 1 sind, so hat daher der Ausdruck $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren, wenn $\frac{q}{2\sqrt{pr}} =$ dem Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels ist. Setzt man daher $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \text{cos. } \varphi$, oder $q = 2\sqrt{pr}.\ \text{cos. } \varphi$, so hat die Trinomie $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren. Damit aber die Irrationalität keine Schwierigkeit verursache, so wollen wir die Formel $pp - 2pqz.\ \text{cos. } \varphi + qqzz$ gebrauchen, deren einfache imaginäre Faktoren diese sind:

$qz -$

$qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ und
$qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$.

Hier fällt in die Augen, daß für $\cos.\varphi = \pm 1$, weil alsdann $\sin.\varphi = 0$ ist, beyde Faktoren einander gleich und reell werden.

§. 146.

Ist also eine ganze Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{&c.}$ gegeben, so findet man ihre einfachen imaginären Faktoren, wenn man daraus die Buchstaben p und q und den Winkel φ bestimmt, daß diese Trinomie $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ ein Faktor der Funktion wird; denn alsdenn hat sie auch die einfachen imaginären Faktoren $qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ und $qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$. Es wird daher die gegebene Funktion $= 0$, sowohl, wenn man $z = \frac{p}{q} \times (\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ als auch, wenn man $z = \frac{p}{q} \times (\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$. Thut man also solches wirklich, so erhält man eine doppelte Gleichung, woraus man sowohl den Bruch $\frac{p}{q}$ als den Bogen φ bestimmen kann.

§. 147.

So beschwerlich die gedachten Substitutionen für z beym ersten Anblick scheinen, so werden sie gleichwohl durch das, was im vorhergehenden Capitel gelehret worden ist, ohne große Mühe gemacht. Denn da daselbst [§. 133] gezeigt worden ist, daß $(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.\varphi$; so entstehen daher für die Potestäten von z folgende Substitutionen:

für

für den ersten Faktor:	für den zweyten Faktor:
$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$	$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos.2\varphi + \sqrt{-1}.\sin.2\varphi.)$	$z^2 = \frac{p}{q^2}(\cos.2\varphi - \sqrt{-1}.\sin.2\varphi.)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi + \sqrt{-1}.\sin.3\varphi)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi - \sqrt{-1}.\sin.3\varphi.)$
$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi + \sqrt{-1}.\sin.4\varphi.)$	$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi - \sqrt{-1}.\sin.4\varphi.)$
u. s. f.	u. s. f.

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{p}{q} = r$, und substituirt man wirklich, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} \\ + \beta r\sqrt{-1}.\sin.\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}.\sin.2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} \\ - \beta r\sqrt{-1}.\sin.\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}.\sin.2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}.\sin.3\varphi - \text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

§. 148.

Addirt und subtrahirt man diese beyden Gleichungen zu und von einander, und dividirt man im letztern Falle noch überdies durch $2\sqrt{-1}$; so erhält man daraus diese beyden reellen Gleichungen:

$0 = \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.}$

$0 = + \beta r.\sin.\varphi + \gamma r^2.\sin.2\varphi + \delta r^3.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.}$

welche auch sogleich aus der gegebenen Funktion

$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{ꝛc.}$

gefunden werden können, wenn man darin allenthalben einmal $z^n = r^n.\cos.n\varphi$, und dann $z^n = r^n.\sin.n\varphi$ setzt. Auf diese Art wird nemlich, da $\sin.0\varphi = 0$, und $\cos.0\varphi = 1$ ist, für z^0 oder 1 in dem beständigen Gliede im ersten Falle 1 im letzten aber 0 gesetzt. Wenn man daher aus diesen beyden Gleichungen die unbekannten Größen r und φ bestimmt,

so

so erhält man dadurch, da $r = \frac{p}{q}$ ist, einen Faktor der trinomischen Funktion $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$, welche zwey einfache imaginäre Faktoren in sich schließt.

§. 149.

Multiplicirt man die erste Gleichung durch $\sin. m\varphi$, und die andere durch $\cos. m\varphi$, und addirt und subtrahirt man darauf die erhaltenen Produkte zu und von einander, so bekommt man folgende zwey Gleichungen:

$$0 = \alpha.\sin. m\varphi + \beta r.\sin.(m+1)\varphi + \gamma r^2.\sin.(m+2)\varphi + \delta r^3.\sin.(m+3)\varphi + \text{ꝛc.}$$

$$0 = \alpha.\sin. m\varphi + \beta r.\sin.(m-1)\varphi + \gamma r^2.\sin.(m-2)\varphi + \delta r^3.\sin.(m-3)\varphi + \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man hingegen die erste Gleichung durch $\cos. m\varphi$, und die zweyte durch $\sin. m\varphi$, so entstehen hieraus durch die Addition und Subtraction diese Gleichungen:

$$0 = \alpha.\cos. m\varphi + \beta r.\cos.(m-1)\varphi + \gamma r^2.\cos.(m-2)\varphi + \delta r^3.\cos.(m-3)\varphi + \text{ꝛc.}$$

$$0 = \alpha.\cos. m\varphi + \beta r.\cos.(m+1)\varphi + \gamma r^2.\cos.(m+2)\varphi + \delta r^3.\cos.(m+3)\varphi + \text{ꝛc.}$$

Aus jedem Paare dieser Gleichungen ist man nun im Stande, die unbekannten Größen r und φ bestimmen; und da dasselbe meistens auf mehr denn eine Art geschehen kann, so erhält man auch zugleich mehrere trinomische Faktoren, ja man findet dadurch alle in der gegebenen Funktion enthaltenen *).

*) Dieses wird durch das Folgende klar.

§. 150.

Damit der Gebrauch dieser Regeln mit vollkommner Deutlichkeit gefaßt werden möge, so wollen wir die trinomischen

mischen Faktoren einiger öfters vorkommenden Funktionen aufsuchen, um dieselben bey vorkommender Gelegenheit von hier entlehnen zu können. Angenommen also, daß die trinomischen Faktoren von der Form $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ aus der Funktion $a^n + z^n$ gefunden werden sollen: so hat man, wenn man $r = \frac{p}{q}$ setzt, diese beyden Gleichungen.

$$o = a^n + r^n.\cos.n\varphi, \text{ und } o = r^n.\sin.n\varphi.$$

Hiervon giebt die letzte $\sin.n\varphi = o$, und es ist daher $n\varphi$ ein Bogen, der entweder unter den Ausdruck $(2k+1)\pi$ oder unter diesen $2k\pi$ gehört, [S. die Anmerk. zum 127. §.] wo k eine ganze Zahl bedeutet. Diese beyden Fälle müssen deswegen von einander unterschieden werden, weil darin die Cosinus verschieden sind, und im ersten $\cos.(2k+1)\pi = -1$, im letzten aber $\cos.2k\pi = +1$ ist. Hier fällt indeß in die Augen, daß die erste Form, oder $n\varphi = (2k+1)\pi$ genommen werden muß, weil dabey $\cos.n\varphi = -1$, und folglich $o = a^n - r^n$ ist, woraus sich denn $r = a = \frac{p}{q}$ ergiebt. Es ist also $p = a$, $q = 1$, und $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, und folglich $aa - 2az.\cos.\frac{(2k+1)\pi}{n} + zz$ ein Faktor der Funktion $a^n + z^n$. Da man nun für k jede ganze Zahl setzen kann, so entstehen dadurch mehrere Faktoren, deren Anzahl aber deswegen nicht unendlich ist, weil, wie jedes Beyspiel zeigen kann, die ersten Faktoren wiederkommen, wenn $2k+1$ über n vermehrt wird, indem $\cos.(2\pi \pm \varphi) = \cos.\varphi$ ist, [§. 128]. Ist ferner n eine ungerade Zahl, so erhält man, wenn man $2k+1 = n$ nimmt, den quadratischen Faktor $aa + 2az + zz$; doch folgt daraus nicht, daß das Quadrat $(a+z)^2$ ein Faktor

der

der Funktion $a^n \dagger z^n$ ist, weil man daraus nach [§. 148.] eine einzige Gleichung erhält, woraus man deutlich abnehmen kann, daß bloß $a \dagger z$ ein Faktor der Formel $a^n \dagger z^n$ ist. Diese Regel muß man immer vor Augen behalten, so oft cos. φ entweder $\dagger 1$ oder -1 ist.

Exempel.

Jetzt wollen wir einige Fälle, um jene Faktoren desto deutlicher vor Augen zu stellen, betrachten, und diese Fälle in zwey Classen theilen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Wenn $n = 1$, so hat die Formel $a \dagger z$ den Faktor $a \dagger z$	Wenn $n = 2$, so hat die Formel $a^2 \dagger z^2$ den Faktor $a^2 \dagger z^2$
Wenn $n = 3$, so hat die Formel $a^3 \dagger z^3$ die Faktoren $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{1}{3}\pi \dagger zz$ $a \dagger z$	Wenn $n = 4$, so hat die Formel $a4 \dagger z4$ die Faktoren $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{1}{4}\pi \dagger zz$ $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{3}{4}\pi \dagger zz$
Weun $n = 5$, so hat die Formel $a^5 \dagger z^5$ die Faktoren $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{1}{5}\pi \dagger zz$ $aa - 2az\ \text{cos.}\ \frac{3}{5}\pi \dagger zz$ $a \dagger z$	Wenn $n = 6$, so hat die Formel $a6 \dagger z6$ die Faktoren $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{1}{6}\pi \dagger zz$ $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{3}{6}\pi \dagger zz$ $aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{5}{6}\pi \dagger zz$

Aus diesen Beyspielen erhellet, daß man alle Faktoren findet, wenn man anstatt $2k \dagger 1$ alle ungeraden Zahlen, die nicht

nicht größer als der Exponent n sind, setzet, daß man aber alsdann, wenn sich ein quadratischer Faktor ergiebt, bloß seine Wurzel zu den Faktoren zählen muß.

§. 151.

Nun sey die Funktion $a^n - z^n$ gegeben, welche den trinomischen Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ haben wird, wenn man für $r = \frac{p}{q}$ die Gleichungen $o = a^n - r^n.\cos.n\varphi$, und $o = r^n.\sin.n\varphi$ erhält. Es ist daher auch hier $\sin.n\varphi = o$, und folglich $n\varphi = (2k+1)\pi$ oder $n\varphi = 2k\pi$. Da nun der letztere Werth genommen werden muß, und dabey $\cos.n\varphi = 1$, und folglich $o = a^n - r^n$, und $r = \frac{p}{q} = a$ wird: so ist hier $p = a$, $q = 1$, und $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$; folglich der trinomische Faktor der gegebenen Funktion $= aa - 2az.\cos.\frac{2k}{n}\pi + zz$. Setzt man in dieser Formel anstatt $2k$ alle gerade Zahlen, die nicht größer als n sind, so erhält man dadurch alle Faktoren; man muß aber dabey, wenn man auf quadratische Faktoren kommt, die vorhin gegebene Regel vor Augen behalten. Nimmt man also zuvörderst $k = o$, so entsteht der Faktor $aa - 2az + zz$, an dessen Stelle aber die Wurzel $a - z$ genommen werden muß. Eben so erhält man, wenn man $2k = n$ setzt, den Faktor $aa + 2az + zz$, woraus erhellet, daß $a + z$ ein Divisor der Funktion $a^n - z^n$ ist.

Exempel.

Auch hier entstehen, wie vorhin, zweyerley Fälle, je nachdem der Exponent n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Wenn

Wenn $n = 1$, so ist die Formel $a - z$ selbst der Faktor $a - z$	Wenn $n = 2$, so hat die Formel $a^2 - z^2$ die Faktoren $a - z$ und $a + z$
Wenn $n = 3$, so hat die Formel $a^3 - z^3$ die Faktoren $a - z$ $aa - 2az.\cos.\frac{2}{3}\pi + zz$	Wenn $n = 4$, so hat die Formel $a4 - z4$ die Faktoren $a - z.$ $aa - 2az.\cos.\frac{2}{4}\pi + zz$ $a + z$
Wenn $n = 5$, so hat die Formel $a^5 - z^5$ die Faktoren $a - z$ $aa - 2az.\cos.\frac{2}{5}\pi + zz$ $aa - 2az.\cos.\frac{4}{5}\pi + zz$	Wenn $n = 6$, so hat die Formel $a6 - z6$ die Faktoren $a - z.$ $aa - 2az.\cos.\frac{2}{6}\pi + zz$ $aa - 2az.\cos.\frac{4}{6}\pi + zz$ $a + z$

§. 152.

Hierdurch wird die oben [§. 32.] vorläufig beygebrachte Behauptung bestätiget, nemlich, daß jede ganze Funktion, wo nicht in einfache, doch in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden könne: denn wir haben gesehen, daß die in Ansehung ihrer Dimensionen ganz unbestimmte Funktion $a^n \pm z^n$ jederzeit, außer ihren einfachen reellen Faktoren, in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann. Wir wollen also nunmehr zu zusammengesetztern Funktionen fortgehen, dergleichen $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ ist. Hat diese Funk-

tion zwey Faktoren von der Form $\nu + \vartheta z^n$, so setzt das Vorhergehende zu ihrer Auflösung hinlänglich in den Stand; und es braucht daher hier nur gezeigt zu werden, wie man die Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$, wenn sie nicht zwey Faktoren von der Form $\nu + \vartheta z^n$ hat, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren, auflösen kann.

§. 153.

Man betrachte also diese Funktion: $a^{2n} - 2a^n z^n . \cos. g + z^{2n}$, welche nicht in zwey reelle Faktoren von der Form $\nu + \vartheta z^n$ aufgelöset werden kann. Nimmt man an, daß $pp - 2pqz . \cos. \varphi + qqzz$ ein doppelter reeller Faktor dieser Funktion sey, wenn $r = \frac{p}{q}$ gesetzt wird: so bekommt man folgende zwey Gleichungen aufzulösen:

$$0 = a^{2n} - 2a^n r^n . \cos. g . \cos. n\varphi + r^{2n} . \cos. 2n\varphi, \text{ und}$$

$$0 = -2a^n r^n . \cos. g . \sin. n\varphi + r^{2n} . \sin. 2n\varphi.$$

Man kann aber auch anstatt der ersten Gleichung aus §. 149., (wenn man $m = 2n$ setzt) diese nehmen:

$$0 = a^{2n} . \sin. 2n\varphi - 2a^n r^n . \cos. g . \sin. n\varphi;$$

und die Vergleichung derselben mit der vorhergehenden zweyten Gleichung giebt $r = a$, wodurch denn ferner $\sin. 2n\varphi = 2 \cos. g . \sin. n\varphi$ wird. Nun ist aber $\sin. 2n\varphi = 2 \sin. n\varphi . \cos. n\varphi$, und folglich $\cos. n\varphi = \cos. g$; und da allezeit $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$ ist, so erhält man $n\varphi = 2k\pi \pm g$, und $\varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$. Es ist also der allgemeine doppelte Faktor der gegebenen Funktion $= aa - 2az . \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz$; und man bekommt daher alle Faktoren, wenn man für $2k$ nach und nach alle gerade Zahlen setzt, die nicht größer als n sind, wie solches durch die Anwen-

dung

dung des Gefundenen auf einen wirklichen Fall erhellen wird.

Exempel.

Wir wollen, um diese Faktoren genauer kennen zu lernen, für n nach und nach 1, 2, 3, 4 u. s. f. setzen. Es hat also

die Formel

$a^2 - 2az.\ cos.\ g + zz$

den einzigen Faktor

$a^2 - 2az.\ cos.\ g + zz$

---

die Formel

$a^4 - 2a^2z^2.\ cos.\ g + z^4$

zwey Faktoren

$a^2 - 2az.\ cos.\ \frac{g}{2} + z^2$

$a^2 - 2az.\ cos.\ \left(\frac{2\pi \mp g}{2}\right) + z^2$ oder $a^2 + 2az.\ cos.\ \frac{g}{2} + zz$

---

die Formel

$a^6 - 2a^3z^3.\ cos.\ g + z^6$

drey Faktoren

$a^2 - 2az.\ cos.\ \frac{g}{3} + z^2$

$a^2 - 2az.\ cos.\ \left(\frac{2\pi - g}{3}\right) + z^2$

$a^2 - 2az.\ cos.\ \left(\frac{2\pi + g}{3}\right) + z^2$

---

die Formel

$a^8 - 2a^4z^4.\ cos.\ g + z^8$

vier Faktoren

$$a^2 - 2az.\cos.\frac{g}{4} + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi - g}{4}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi + g}{4}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi \pm g}{4}\right) + z^2 \text{ oder } a^2 + 2az.\cos.\frac{g}{4} + z^2$$

---

die Formel

$$a^{10} - 2a^5z^5.\cos.g + z^{10}$$

fünf Faktoren

$$a^2 - 2az.\cos.\frac{g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi - g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi + g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi - g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi + g}{5}\right) + z^2$$

Durch diese Beyspiele erhält der Satz, daß man eine jede ganze Funktion in reelle, einfache oder doppelte Faktoren auflösen könne, eine neue Bestätigung. *)

*) Eine sehr schöne Anwendung des Bisherigen findet man auch in der Abhandlung über die Art, die Sinus und Cosinus der Vielfachen der Winkel durch Produkte auszudrucken, welche im ersten Bande der Eulerschen Opusc. analytic. Petersburg 1783. S. 353. f. steht. Man lese hierbey dasjenige, was im Anhange unter dem Titel: Zusätze zum neunten Capitel, befindlich ist.

§. 154.

Nun können wir zu der Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$ fortgehen, von der ausgemacht ist, daß sie einen reellen Faktor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ hat, und dessen reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren lassen sich finden. Was aber den andern Multiplicator, dessen Form diese ist, $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$, betrifft: so kann man ihn, er mag beschaffen seyn, wie er will, nach dem vorhergehenden §. auflösen. Ferner kann auch diese Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$, da sie stets zwey reelle Faktoren von der Form $\eta + \vartheta z^n + \iota z^{2n}$ hat, in reelle einfache oder doppelte Faktoren aufgelöset werden. Ja auch diese Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}$ ist nun in reelle, einfache oder doppelte Faktoren auflösbar, da sie ausgemachter Weise einen Faktor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ hat, und der andere unter die vorhergehende Form gehört. Wenn es daher auch bis jetzt noch zweifelhaft gewesen wäre, ob jede ganze Funktion auf diese Art aufgelöset werden könne: so so ist doch durch das Bisherige aller Zweifel darüber gänzlich gehoben werden.

§. 155.

Man kann aber diese Auflösung in Faktoren auch auf die unendlichen Reihen anwenden. Denn da wir gesehen haben, [§. 125.] daß $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$ $= e^x$, und $e^x = (1 + \frac{x}{i})^i$ ist, wenn i eine unendlich große Zahl bedeutet: so ist offenbar, daß die Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{&c.}$ unendlich viel einander gleiche Faktoren, nem-

lich $1 + \frac{x}{i}$ habe. Zieht man aber von dieser Reihe das erste Glied 1 ab, so wird $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} = e^x - 1$ $= (1 + \frac{x}{i})^i - 1$: und vergleicht man diese Form mit der im 151sten §. wodurch man $a = 1 + \frac{x}{i}$; $n = i$, und $z = 1$ erhält, so bekommt man zum allgemeinen Faktor $(1 + \frac{x}{i})^2$ $- 2(1 + \frac{x}{i}) \cos. \frac{2k}{i} \pi + 1$; woraus sich denn, wenn man für $2k$ nach und nach alle gerade Zahlen setzt, alle Faktoren ergeben. Setzt man $2k = 0$, so bekommt man den quadratischen Faktor $\frac{xx}{ii}$, für welchen man aber, wegen der [§. 150.] angeführten Gründe, die Wurzel $\frac{x}{i}$ nehmen muß, und es ist daher x ein Faktor des Ausdrucks $e^x - 1$ wie solches auch schon von selbst in die Augen fällt. Um die übrigen Faktoren zu finden, muß bemerkt werden, daß $\cos. \frac{2k}{i} \pi$, weil $\frac{2k}{i} \pi$ ein unendlich kleiner Bogen ist, $= 1 - \frac{2kk}{ii} \pi\pi$ genommen werden kann, indem die übrigen Glieder, wenn man denselben nach §. 134. sucht, wegen der unendlichen Größe von i verschwinden. Man bekommt folglich den allgemeinen Faktor $\frac{xx}{ii} + \frac{4kk}{ii} \pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{i^3} x$, und es ist also der Ausdruck $e^x - 1$ durch $1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}$ theilbar *). Aus allen diesen Sätzen

folgt,

folgt, daß der Ausdruck $e^x - 1 = x(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.})$ außer dem Faktor x folgende ohne Ende fortgehende Faktoren $(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi})(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi})(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi})(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi})$ ꝛc. habe.

*) Da $e^x - 1 = (1 + \frac{x}{i})^i - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} = x(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.})$, und davon der Faktor x bereits gefunden worden ist: so muß der noch übrige allgemeine Faktor von $e^x - 1$ die Form $1 + \alpha x + \beta xx$ haben, daß man bey einer wirklichen Multiplication der aus ihm entstehenden besondern Faktoren die Reihe $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$ erhalten kann. Man findet aber diese Form aus $\frac{xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{i^3}x$, wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{4kk\pi\pi}{ii}$ dividirt. Der Quotient ist nemlich $1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}$.

§. 156.

Da aber diese Faktoren einen unendlich kleinen Theil $\frac{x}{i}$ enthalten, und derselbe nicht weggelassen werden kann, weil er in jedem Faktor vorkommt, und, da die Anzahl derselben $= \frac{1}{2}i$ ist, durch die Multiplication aller das Glied $\frac{x}{2}$ giebt: so wollen wir, um diese Unbequemlichkeit zu ver-

meiden, den Ausdruck $e^x - e^{-x}$ betrachten. Da also $e^x - e^{-x} = (1 + \frac{x}{i})^i - (1 - \frac{x}{i})^i = 2(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.})$ ist, indem $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$ ist: so erhält man, durch die Vergleichung mit §. 151, $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$, und $z = 1 - \frac{x}{i}$; und diese Werthe geben den Faktor des angeführten Ausdrucks $= aa - 2az \cos. \frac{2k}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii}) \cos. \frac{2k}{i}\pi = \frac{4xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i4}$, indem $\cos. \frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$ ist.

Es ist daher die Funktion $e^x - e^{-x}$ durch $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$ theilbar,*) und man kann $\frac{xx}{ii}$ sicher aus diesem Faktor weglassen, weil es, auch mit i multiplicirt, doch noch eine unendlich kleine Größe bleibt. Setzt man nun überdies, wie vorhin, $k = o$, so wird der erste Faktor $= x$; und bringt man nunmehr jene Faktoren in Ordnung, so findet man

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x(1 + \frac{xx}{\pi\pi})(1 + \frac{xx}{4\pi\pi})(1 + \frac{xx}{9\pi\pi})(1 + \frac{xx}{16\pi\pi})(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}) \text{ ꝛc.}$$

$$= x(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x4}{1.2.3.4.5} + \frac{x6}{1.2.....7} + \text{ꝛc.})$$

Es ist hier nemlich einem jeden Faktor eine solche Form gegeben worden, daß bey einer wirklichen Multiplication das erste Glied x herausgebracht werden kann.

*) Man erhält nemlich diese Form, wenn man $\frac{4xx}{ii} + \frac{4kk}{}$

$\frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i4}$ durch $\frac{4kk\pi\pi}{ii}$ dividirt, und sie ist nothwendig, damit das erste Glied des Produkts der aus ihr abgeleiteten Faktoren $= 1$ werde.

§. 157.

Da ferner $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$ $= \frac{(1+\frac{x}{i})^i + (1-\frac{x}{i})^i}{2}$ ist, so findet man durch die Vergleichung dieser Formel mit der obigen $a^n + z^n$, [§. 150.] $a = 1 + \frac{x}{i}$; $z = 1 - \frac{x}{i}$; und $n = i$; woher denn der allgemeine Faktor $= aa - 2az.\ \text{cos.}\ \frac{2k+1}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii})\ \text{cos.}\ \frac{2k+1}{i}\pi$ wird. Da nun $\text{cos.}\ \frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{2ii}$, so erhält dadurch der gedachte Faktor die Form $\frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2\varpi\varpi}{ii}$, indem das Glied, dessen Nenner $i4$ ist, verschwindet. Weil aber jeder Faktor des Ausdrucks $1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$ die Form $1 + \alpha xx$ haben muß, so muß man den gefundenen Faktor durch $\frac{(2k+1)^2\varpi\varpi}{ii}$ dividiren, wodurch derselbe auf die verlangte Form gebracht, und $= 1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2\varpi\varpi}$ wird. Hieraus findet man alle, der Anzahl nach unendliche, Faktoren, wenn man für $2k+1$ nach und nach alle ungeraden Zahlen setzt, und es ist daher

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x4}{1.2.3.4} + \frac{x6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.} =$$

$$(1 + \frac{4xx}{\varpi\varpi})(1 + \frac{4xx}{9\varpi\varpi})(1 + \frac{4xx}{25\varpi\varpi})(1 + \frac{4xx}{49\varpi\varpi})\text{ ꝛc.}$$

§. 158.

Wenn x eine imaginäre Größe wird, so verwandeln sich diese Exponential-Formeln in den Sinus und Cosinus irgend eines reellen Bogens. Denn setzt man $x = z\sqrt{-1}$, so ist [§. 138.]

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{sin. } z = z - \frac{z^3}{1.2.3} +$$

$$\frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc. [§. 134.]}$$

und dieser Ausdruck hat daher folgende, der Zahl nach unendliche, Faktoren:

$$z(1 - \frac{zz}{\varpi\varpi})(1 - \frac{zz}{4\varpi\varpi})(1 - \frac{zz}{9\varpi\varpi})(1 - \frac{zz}{16\varpi\varpi})$$

$$(1 - \frac{zz}{25\varpi\varpi})\text{ ꝛc. oder es ist}$$

$$\text{sin. } z = z(1 - \frac{z}{\varpi})(1 + \frac{z}{\varpi})(1 - \frac{z}{2\varpi})(1 + \frac{z}{2\varpi})$$

$(1 - \frac{z}{3\varpi})(1 + \frac{z}{3\varpi})$ ꝛc. So oft also der Bogen z so beschaffen ist, daß irgend einer von diesen Faktoren verschwindet, welches geschieht, wenn $z = 0$; $z = \pm\varpi$; $z = \pm 2\varpi$; und überhaupt, wenn $z = \pm k\varpi$ ist, so daß k jede ganze Zahl bedeutet: so muß auch der Sinus dieses Bogens $= 0$ seyn; ein Umstand, der so bekannt ist, daß man daraus auch rückwärts jene Faktoren finden kann.

Eben

Eben so ist, da $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos. z$ ist, [§. 138]

$$\cos. z = (1 - \frac{4zz}{\varpi\varpi})(1 - \frac{4zz}{9\varpi\varpi})(1 - \frac{4zz}{25\varpi\varpi})(1 - \frac{4zz}{49\varpi\varpi})\text{ꝛc.}$$ [§. 157.]

oder, wenn man jeden dieser Faktoren in zwey auflöset,

$$\cos. z = (1 - \frac{2z}{\pi})(1 + \frac{2z}{\pi})(1 - \frac{2z}{3\pi})(1 + \frac{2z}{3\pi})(1 - \frac{2z}{5\pi})(1 + \frac{2z}{5\pi})\text{ꝛc.}$$

und auch hieraus erhellet auf gleiche Art, daß $\cos. z = 0$ ist, wenn $z = \pm \frac{(2k+1)}{2}\pi$; eine Eigenschaft, die auch aus der Natur des Kreises bekannt ist.

§. 159.

Aus § 153. ist man ferner im Stande die Faktoren dieses Ausdrucks

$$e^x - 2\cos. g + e^{-x} = 2(1 - \cos. g + \frac{xx}{1.2} + \frac{x4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.})$$

[§. 157.] zu finden. Man kann nemlich diesen Ausdruck in folgenden verwandeln, $(1 + \frac{x}{i})^i - 2\cos. g + (1 - \frac{x}{i})^i$ [§. 156 125.] aus welchem man durch die Vergleichung mit der Formel §. 153. $2n = i$; $a = 1 + \frac{x}{i}$; und $z = 1 - \frac{x}{i}$ erhält. Daher ist der allgemeine Faktor der obigen Formel $= aa - 2az.\cos.\frac{2k\pi \pm g}{n} + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii})$ $\cos.\frac{2(2k\pi \pm g)}{i}$; und da $\cos.\frac{2(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - \frac{2(2k\pi \pm g)^2}{ii}$ [§. 134.] ist, so erhält man dafür $\frac{4xx}{ii} + \frac{4(2k\pi \pm g)^2}{ii}$, oder diese Form $1 + \frac{xx}{(2k\pi \pm g)^2}$. Divi-

dir

dirt man also die gegebene Formel durch $2(1-\cos. g)$, damit die unendliche Reihe ein beständiges Glied, $= 1$, erhalte: so bekommt man, wenn man die Faktoren nimmt,

$$\frac{e^x - 2\cos. g + e^{-x}}{2.(1-\cos. g)} = (1+\frac{xx}{gg})(1+\frac{xx}{(2\pi-g)^2})(1+\frac{xx}{(2\pi+g)^2})$$

$$(1+\frac{xx}{(4\pi-g)^2})(1+\frac{xx}{(4\pi+g)^2})(1+\frac{xx}{(6\pi-g)^2})(1+\frac{xx}{(6\pi+g)^2})\text{ &c.}$$

und wenn man $z\sqrt{-1}$ anstatt x setzt, so wird

$$\frac{\cos. z - \cos. g}{1-\cos. g} = (1-\frac{z}{g})(1+\frac{z}{g})(1-\frac{z}{2\pi-g})(1+\frac{z}{2\pi-g})$$

$$(1-\frac{z}{2\pi+g})(1+\frac{z}{2\pi+g})(1-\frac{z}{4\pi-g})(1+\frac{z}{4\pi-g})\text{ &c.} = 1-$$

$$\frac{zz}{1.2.(1-\cos. g)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1-\cos. g)} - \frac{z^6}{1.2.....6(1-\cos. g)} + \text{&c.}$$

Von dieser Reihe sind alle Faktoren, so weit man sie auch fortsetzen mag, bekannt.

§. 160.

Auch von dieser Funktion

$$e^{b+x} \pm e^{c-x}$$

lassen sich die Faktoren insgesammt bequem finden und darstellen. Denn da man dafür $(1+\frac{b+x\,i}{i}) \pm (1+\frac{c-x\,i}{i})$ setzen kann, so erhält man durch die Vergleichung dieser Form mit der $a^i \pm z^i$, den Faktor $aa - 2az.\cos.\frac{m\pi}{i} + zz$, so daß m für das obere Zeichen eine ungerade Zahl, und für das untere eine gerade Zahl bedeutet. Da aber i eine unendlich große Zahl ist, so ist $\cos.\frac{m\pi}{i} = 1 - \frac{mm\pi\pi}{2ii}$, [§. 155. 134.] und hierdurch verwandelt sich jener allgemeine

meine Faktor in $(a - z)^2 + \frac{mm\pi\pi}{ii} az$. Nun ist aber in dem gegenwärtigen Falle $a = 1 + \frac{b+x}{i}$, und $z = 1 + \frac{c-x}{i}$, folglich $(a-z)^2 = \frac{(b-c+2x)^2}{ii}$, und $az = 1 + \frac{b+c}{i} + \frac{bc+(c-b)x-xx}{ii}$. Hieraus ergiebt sich, wenn man mit ii multiplicirt, und die Glieder, welche durch i oder ii dividirt werden, weil dieselben gegen die übrigen Glieder verschwinden, wegläßt, der Faktor $(b-c)^2 + 4(b-c)x + 4xx + mm\pi\pi$; und wenn man das beständige Glied desselben durch die Division auf 1 reducirt, $1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{mm\pi\pi+(b-c)^2}$.

§. 161.

Da nun in allen Faktoren ein beständiges Glied, $= 1$, ist, so muß auch die Funktion $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ durch eine solche beständige Größe dividirt werden, daß ihr beständiges Glied, oder ihr Werth, wenn man $x = 0$ setzt, $= 1$ wird. Weil nun $e^b \pm e^c$ ein solcher Divisor ist, so kann man, wenn man dadurch dividirt, den Ausdruck $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ in Faktoren, die ohne Ende fortlaufen, auflösen. Gebraucht man daher das obere Zeichen, und läßt man dabey m eine ungerade Zahl bedeuten: so wird

$$\frac{e^{b+x}+e^{c-x}}{e^b+e^c} = (1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{\pi\pi+(b-c)^2})(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{9\pi\pi+(b-c)^2})$$

$(1 + \frac{4(b-c)x+4xx}{25\pi\pi+(b-c)^2})$ &c.; wenn aber das untere Zeichen gilt, und daher m eine gerade Zahl bedeutet: so wird, vor-

vorausgesetzt, daß bey $m = o$ die Wurzel des quadratischen Faktors genommen werde,

$$\frac{e^{b+x}-e^{c-x}}{e^{b}-e^{c}} = (1+\frac{2x}{b-c})(1+\frac{4(b-)cx+4xx}{4\pi\pi+(b-c)^2})(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{16\pi\pi+(b-c)^2})$$
$$(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{36\pi\pi+(b-c)^2})\ \text{&c.}$$

§. 162.

Setzt man $b = o$, welches ohne Nachtheil der Allgemeinheit geschehen kann: so wird

$$\frac{e^{x}+e^{c}.e^{-x}}{1+e^{c}} = (1-\frac{4cx+4xx}{\pi\pi+cc})(1-\frac{4cx+4xx}{9\varpi\varpi+cc})$$
$$(1-\frac{4cx+4xx}{25\varpi\varpi+cc})\ \text{&c.}$$

$$\frac{e^{x}-e^{c}.e^{-x}}{1-e^{c}} = (1-\frac{2x}{c})(1-\frac{4cx+4xx}{4\pi\pi+cc})(1-\frac{4cx+4xx}{16\varpi\varpi+cc})$$
$$(1-\frac{4cx+4xx}{36\varpi\varpi+cc})\ \text{&c.}$$

Setzt man c negativ, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{e^{x}+e^{-c}.e^{-x}}{1+e^{-c}} = (1+\frac{4cx+4xx}{\varpi\varpi+cc})(1+\frac{4cx+4xx}{9\varpi\varpi+cc})$$
$$(1+\frac{4cx+4xx}{25\varpi\varpi+cc})\ \text{&c.}$$

$$\frac{e^{x}-e^{-c}.e^{-x}}{1-e^{-c}} = (1+\frac{2x}{c})(1+\frac{4cx+4xx}{4\varpi\varpi+cc})(1+\frac{4cx+4xx}{16\varpi\varpi+cc})$$
$$(1+\frac{4c+4xx}{36\varpi\varpi+cc})\ \text{&c.}$$

Multiplicirt man nun die erste Form durch die dritte, so erhält man $\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^{c}+e^{-c}}{2+e^{c}+e^{-c}}$; und setzt man y anstatt $2x$, so wird

er

$$\frac{e^{y}+e^{-y}+e^{c}+e^{-c}}{2+e^{c}+e^{-c}} = \left(1-\frac{2cy+yy}{\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{9\varpi\varpi+cc}\right)$$

$$\left(1+\frac{2cy+yy}{9\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{25\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{25\varpi\varpi+cc}\right)\text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man aber die erste Form durch die vierte, so ist das Produkt $= \frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^{c}-e^{-c}}{e^{c}-e^{-c}}$; und setzt man abermals y anstatt 2x, so wird

$$\frac{e^{y}-e^{-y}+e^{c}-e^{-c}}{e^{c}-e^{-c}} = \left(1+\frac{y}{c}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{4\varpi\varpi+cc}\right)$$

$$\left(1-\frac{2cy+yy}{9\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{16\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{25\varpi\varpi+cc}\right)\text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man die zweyte Form mit der dritten, so kommt eben diese Gleichung, außer daß man c negativ nehmen muß. Es ist nemlich

$$\frac{e^{c}-e^{-c}-e^{y}+e^{-y}}{e^{c}-e^{-c}} = \left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{4\varpi\varpi+cc}\right)$$

$$\left(1+\frac{2cy+yy}{9\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{16\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{25\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{36\varpi\varpi+cc}\right)\text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man endlich die zweyte Form mit der vierten, so wird

$$\frac{e^{y}+e^{-y}-e^{c}-e^{-c}}{2-e^{c}-e^{-c}} = \left(1-\frac{yy}{cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{4\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{4\varpi\varpi+cc}\right)$$

$$\left(1-\frac{2cy+yy}{16\varpi\varpi+cc}\right)\left(1+\frac{2cy+yy}{16\varpi\varpi+cc}\right)\left(1-\frac{2cy+yy}{36\varpi\varpi+cc}\right)$$

$$\left(1+\frac{2cy+yy}{36\varpi\varpi+cc}\right)\text{ꝛc.}$$

§. 163.

Diese vier Combinationen lassen sich nunmehr sehr bequem auf den Kreis anwenden, wenn man $c = g\sqrt{-1}$, und

und $y = v\sqrt{-1}$ setzt: denn es wird alsdann

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \text{ cos. } v;$$

$$e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}. \text{ sin. } v;$$

$$e^{g\sqrt{-1}} + e^{-g\sqrt{-1}} = 2 \text{ cos. } g; \text{ und}$$

$$e^{g\sqrt{-1}} - e^{-g\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}. \text{ sin. } g. \text{ [§. 138.]}$$

Hiernach giebt die erste Combination

$$\frac{\text{cos. } v + \text{cos. } g}{1 + \text{cos. } g} = 1 - \frac{v^2}{1.2.(1 + \text{cos. } g)} + \frac{v^4}{1.2.3.4.(1+\text{cos. } g)} - \frac{v^6}{1.2\ldots6\,(1 + \text{cos. } g)} + \text{ꝛc.}$$

$$= (1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg})(1 - \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg})(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg})$$

$$(1 - \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg})(1 + \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg})(1 - \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg})\text{ ꝛc.}$$

$$= (1 + \frac{v}{\pi - g})(1 - \frac{v}{\pi + g})(1 - \frac{v}{\pi - g})(1 + \frac{v}{\pi + g})$$

$$(1 + \frac{v}{3\pi - g})(1 - \frac{v}{3\pi + g})(1 - \frac{v}{3\pi - g})(1 + \frac{v}{3\pi + g})\text{ ꝛc.}$$

$$= (1 - \frac{vv}{(\pi - g)^2})(1 - \frac{vv}{(\pi + g)^2})(1 - \frac{vv}{(3\pi - g)^2})$$

$$(1 - \frac{vv}{(3\pi + g)^2})(- \frac{vv}{(5\pi - g)^2})\text{ ꝛc.}$$

Hingegen giebt die vierte Combination

$$\frac{\text{cos. } v - \text{cos. } g}{1 - \text{cos. } g} = 1 - \frac{v^2}{1.2\,(1 - \text{cos. } g)} + \frac{v^4}{1.2.3.4(1 - \text{cos. } g)} - \frac{v^6}{1.2\ldots6\,(1 - \text{cos. } g)} + \text{ꝛc.}$$

$$= (1 - \frac{vv}{gg})(1 + \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg})(1 - \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg})(1 + \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg})$$

$$(1 - \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg})\text{ ꝛc.} =$$

$$= (1-\frac{v}{g})(1+\frac{v}{g})(1+\frac{v}{2\varpi-g})(1-\frac{v}{2\varpi+g})(1-\frac{v}{2\varpi-g})$$
$$(1+\frac{v}{2\varpi+g})(1+\frac{v}{4\varpi-g})(1-\frac{v}{4\varpi+g})\,\&c.$$

$$= (1-\frac{vv}{gg})(1-\frac{vv}{(2\varpi-g)^2})(1-\frac{vv}{(2\varpi+g)^2})(1-\frac{vv}{(4\varpi-g)^2})$$
$$(1-\frac{vv}{(4\varpi+g)^2})\,\&c.$$

Ferner giebt die zweyte Combination:

$$\frac{\text{sin. } g+\text{sin. } v.}{\text{sin. } g} = 1+\frac{v}{\text{sin. } g}-\frac{v^3}{1.2.3\,\text{sin. } g}+\frac{v^5}{1.2...5.\text{sin. } g}-\&c.$$

$$= (1+\frac{v}{g})(1+\frac{2gv-vv}{\varpi\varpi-gg})(1-\frac{2gv-vv}{4\varpi\varpi-gg})(1+\frac{2gv-vv}{9\varpi\varpi-gg})$$
$$(1-\frac{2gv-vv}{16\varpi\varpi-gg})\,\&c.$$

$$= (1+\frac{v}{g})(1+\frac{v}{\pi-g})(1-\frac{v}{\pi+g})(1-\frac{v}{2\pi-g})(1+\frac{v}{2\pi+g})$$
$$(1+\frac{v}{3\pi-g})(1-\frac{v}{3\varpi+g})(1-\frac{v}{5\varpi-g})\,\&c.$$

Nimmt man endlich v negativ, so erhält man die dritte Combination.

§. 164.

Es können aber auch die Ausdrücke des 162sten §. selbst auf folgende Art auf Kreisbogen gebracht werden. Da

$$\frac{e^x+e^c.e^{-x}}{1+e^c} = \frac{(1+e^{-c})(e^x+e^c.e^{-x})}{2+e^c+e^{-c}} = \frac{e^x+e^{-x}+e^{c-x}+e^{-c+x}}{2+e^c+e^{-c}}$$

ist, und diese Formel, wenn man darin $c = g\sqrt{-1}$ und $x = z\sqrt{-1}$ setzt, in folgende, $\frac{\text{cos. } z+\text{cos. } (g-z)}{1+\text{cos. } g} = \text{cos. } z+\frac{\text{sin. } g.\text{sin. } z}{1+\text{cos. } g}$, verwandelt wird: so ist,

da $\frac{\text{sin. g}}{1 + \text{cos. g}} = \text{tang.} \frac{1}{2} g$ ist

$$\text{cos. z} + \text{tang.} \tfrac{1}{2} g . \text{sin. z} = 1 + \frac{z}{1} \text{tang.} \tfrac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} \times$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \text{tang.} \tfrac{1}{2} g - \text{&c.}$$

$$= (1 + \frac{4gz - 4zz}{\pi\pi - gg})(1 + \frac{4gz - 4zz}{9\pi\pi - gg})(1 + \frac{4gz - 4zz}{25\pi\pi - gg}) \text{&c.}$$

$$= (1 + \frac{2z}{\varpi - g})(1 - \frac{2z}{\varpi + g})(1 + \frac{2z}{3\varpi - g})(1 - \frac{2z}{3\varpi + g})$$

$$(1 + \frac{2z}{5\varpi - g})(1 - \frac{2z}{5\varpi + g}) \text{&c.}$$

Auf eine ähnliche Art verwandelt sich der andere Ausdruck, wenn man Zähler und Nenner durch $1 - e^{-c}$ multiplicirt, in diesen, $\frac{e^x + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-c+x}}{2 - e^c - e^{-c}}$; und setzt man auch darin $c = g\sqrt{-1}$, und $x = z\sqrt{-1}$, so bekommt man

$$\frac{\text{cos. z} - \text{cos.}(g - z)}{1 - \text{cos. g}} = \text{cos. z} - \frac{\text{sin. g. sin. z}}{1 - \text{cos. g}} = \text{cos. z} - \frac{\text{sin. z}}{\text{tang.} \frac{1}{2} g}.$$

Es ist demnach

$$\text{cos. z} - \text{cot.} \tfrac{1}{2} g . \text{sin. z} = 1 - \frac{z}{1} \text{cot.} \tfrac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} \times$$

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5}{1.2 \ldots 5} \text{cot.} \tfrac{1}{2} g + \text{&c.}$$

$$= (1 - \frac{2z}{g})(1 + \frac{4gz - 4zz}{4\varpi\varpi - gg})(1 + \frac{4gz - 4zz}{16\varpi\varpi - gg})(1 + \frac{4gz - 4zz}{36\pi\pi - gg}) \text{&c.}$$

$$= (1 - \frac{2z}{g})(1 + \frac{2z}{2\varpi - g})(1 - \frac{2z}{2\varpi + g})(1 + \frac{2z}{4\varpi - g})(1 - \frac{2z}{4\varpi + g}) \text{&c.}$$

Setzt man also $v = 2z$, oder $z = \frac{1}{2} v$, so hat man

$$\frac{\text{cos.} \frac{1}{2}(g - v)}{\text{cos.} \frac{1}{2} g} = \text{cos.} \tfrac{1}{2} v + \text{tang.} \tfrac{1}{2} g . \text{sin.} \tfrac{1}{2} v = (1 + \frac{v}{\varpi - g})$$

$$(1 - \frac{v}{\varpi + g})(1 + \frac{v}{3\varpi - g})(1 - \frac{v}{3\varpi + g}) \text{&c. desgleichen}$$

cos.

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}(g+v)}{\cos.\frac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v - \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = (1-\frac{v}{\pi-g})$$

$$(1+\frac{v}{\pi+g})(1-\frac{v}{3\pi-g})(1+\frac{v}{3\pi+g})\ \text{&c.}$$ Ferner

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(g-v)}{\sin.\frac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v - \cot.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = (1-\frac{v}{g})$$

$$(1+\frac{v}{2\pi-g})(1-\frac{v}{2\pi+g})(1+\frac{v}{4\pi-g})(1-\frac{v}{4\pi+g})\ \text{&c.}$$

Endlich

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(g+v)}{\sin.\frac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v + \cot.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = (1+\frac{v}{g})$$

$$(1-\frac{v}{2\pi-g})(1+\frac{v}{2\pi+g})(1-\frac{v}{4\pi-g})(1+\frac{v}{4\pi+g})\ \text{&c.}$$

Das Gesetz, nach welchem diese Faktoren fortschreiten, ist hinlänglich einfach und einförmig, und durch die Multiplication erhält man aus diesen Ausdrücken diejenigen, welche wir in dem vorhergehenden §. gefunden haben.

Zehntes Capitel.

Von dem Gebrauche der gefundenen Faktoren bey der Summirung unendlicher Reihen.

§. 165.

Wenn $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ꝛc.} = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)$ ꝛc. ist: so müssen diese Faktoren, ihre Zahl mag endlich oder unendlich seyn, wenn man sie wirklich mit einander multiplicirt, jene Reihe, $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ꝛc.}$, hervorbringen. Es muß daher auch unter der angeführten Voraussetzung

$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ꝛc.}$ = der Summe aller dieser Größen, einzeln genommen, ꝛc.

$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \text{ꝛc.}$ = der Summe aller Produkte aus je zweyen und zweyen dieser Größen,

$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \text{ꝛc.}$ = der Summe aller Produkte aus je dreyen und dreyen dieser Größen, ferner

D = der Summe aller Produkte aus je vier und vieren,

E = der Summe aller Produkte aus je fünf und fünfen von diesen Größen, u. s. f. seyn. Dieses ist aus der gemeinen Algebra bekannt.

§. 166.

§. 166.

Da also die Summe der Größen $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ u. s. f. und die Summe aller Produkte aus je zweyen von ihnen bekannt ist: so ist dadurch auch die Summe der Quadrate $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ ꝛc. gegeben; indem dieselbe gleich ist dem Quadrate der Summe der einzelnen Größen weniger den doppelten Produkten aus je zweyen. Auf eine ähnliche Art läßt sich die Summe der Würfel, der Biquadrate und der höhern Potestäten bestimmen. Denn wenn man

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ꝛc.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{ꝛc.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{ꝛc.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \text{ꝛc.}$$
$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \text{ꝛc.}$$
$$V = \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \text{ꝛc.}$$

setzt: so ergeben sich die Werthe von P, Q, R, S, T, V ꝛc. aus den bekannten Größen A, B, C, D, E ꝛc. auf folgende Art:

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F.$$

u. s. f.

Von der Richtigkeit dieser Bestimmungen überzeugt man sich bey angestellter Prüfung leicht; indeß wird dieselbe in der Differential-Rechnung mit der größten Schärfe erwiesen. *)

*) Diese Bestimmung des Verhältnisses der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln findet man schon in Newtons Arithmetica universali, in dem Abschnitte, de transmutationibus aequationum.

S. 192. der Gravesandschen Ausgabe, aber eben so wie hier ohne Beweis. Es läßt sich von Eulern erwarten, daß er diesen so wichtigen Satz nicht unbewiesen gelassen haben werde; auch findet man im zweyten Bande seiner Opuscu-lorum varii argumenti, der zu Berlin 1750, so wie der erste 1746, und der dritte 1751 herausgekommen ist, S. 108 bis 120, denselben von ihm theils mit theils ohne Hülfe der Differential-Rechnung außer allen Zweifel gesetzt. Da diese Beweise für den gegenwärtigen Ort zu weitläuftig sind, so verweise ich ihrentwegen auf die Zusätze zum zehnten Capitel im Anhange, wo man auch von dem, was Euler über eben diese Bestimmung in seinen Opusculis analyticis, im ersten Bande, S. 337 bis 340, gesagt hat, und von den Bemühungen anderer Mathematiker über eben diesen Gegenstand Nachricht findet.

§. 167.

Da also §. 156. bewiesen worden, daß

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x4}{1.2.3.4.5} + \frac{x6}{1.2.3\ldots7} + \text{&c.}\right) =$$

$$x\left(1+\frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{25\pi\pi}\right)\text{&c.}$$

ist: so ist

$$1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x4}{1.2.3.4.5} + \frac{x6}{1.2.3\ldots7} + \text{&c.} = \left(1+\frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{16\pi\pi}\right)\text{&c.}$$

und setzt man hierin $xx = \pi\pi z$, so wird

$$1 + \frac{\pi\pi}{1.2.3}z + \frac{\pi4}{1.2.3.4.5}z^2 + \frac{\pi6}{1.2.3\ldots7}z^3 + \text{&c.} =$$

$$(1+z)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right).$$

Hierauf nun die obige Regel angewandt, so ist $A = \frac{\pi\pi}{6}$;

$B = \frac{\varpi^4}{120}$; $C = \frac{\varpi^6}{5040}$; $D = \frac{\varpi^8}{362880}$; ꝛc. und läßt man daher

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \text{ꝛc.}$$

$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \text{ꝛc.}$$

$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \text{ꝛc.}$$

seyn: so wird, wenn man den Werth dieser Buchstaben aus A, B, C, D u. s. w. bestimmt, $P = \frac{\varpi\varpi}{6}$; $Q = \frac{\varpi^4}{90}$; $R = \frac{\varpi^6}{945}$; $S = \frac{\varpi^8}{9450}$; $T = \frac{\varpi^{10}}{93555}$; ꝛc.

§. 168.

Es fällt hieraus in die Augen, daß man die Summe aller der unendlichen Reihen, die unter dieser allgemeinen Form $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ꝛc.}$ begriffen sind, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, durch die Pripherie des Kreises ϖ ausdrucken kann, weil die gedachte Summe mit ϖ^n immer in einem rationalen Verhältnisse steht. Um aber den Werth dieser Summen desto deutlicher vor Augen zu stellen, wollen wir einige davon, auf eine bequemere Art ausgedruckt, hersetzen.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.} = \frac{2^0}{1.2.3}, \frac{1}{1}\varpi^2.$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{&c.}=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{&c.}=\frac{2^4}{1.2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{&c.}=\frac{2^6}{1.2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{&c.}=\frac{2^8}{1.2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{&c.}=\frac{2^{10}}{1.2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\text{&c.}=\frac{2^{12}}{1.2.3\ldots15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\text{&c.}=\frac{2^{14}}{1.2.3\ldots17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\text{&c.}=\frac{2^{16}}{1.2.3\ldots19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\text{&c.}=\frac{2^{18}}{1.2.3\ldots21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\text{&c.}=\frac{2^{20}}{1.2.3\ldots23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\text{&c.}=\frac{2^{22}}{1.2.3\ldots25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\text{&c.}=\frac{2^{24}}{1.2.3\ldots27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

Bis hieher ließen sich die Coefficienten der Potestäten von π durch einen anderwärts zu erklärenden Kunstgriff fortsetzen; ich habe indeß denselben hier beygebracht, weil die beym ersten Anblicke sehr unordentliche Reihe von Brüchen, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}$ &c. in sehr vielen Fällen von außerordentlichem Nutzen ist.

§. 169.

§. 169.

Um die §. 157 gefundene Gleichung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x4}{1.2.3.4} + \frac{x6}{1.2.3.4\,5.6} + \text{ꝛc.}$$

$$= (1 + \frac{4xx}{\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi})\ \text{ꝛc.}$$

auf eben die Art zu behandeln, so sey $xx = \frac{\pi\pi}{4} z$, wodurch denn

$$1 + \frac{\pi\pi}{1.2.4} z + \frac{\pi 4}{1.2.3.4.4^2} zz + \frac{\pi 6}{1.2\ldots6.4^3} z^3 + \text{ꝛc.}\ 1$$

$$= (1 + z)(1 + \frac{1}{9} z)(1 + \frac{1}{25})(1 + \frac{1}{49} z)\ \text{ꝛc.}$$

wird. Hier ist nun aus [§. 165] $A = \frac{\pi\pi}{1.2.4}$; $B = \frac{\pi 4}{1.2.3.4.4^2}$;

$C = \frac{\pi 6}{1.2\,3\ldots6.4^3}$; ꝛc. und setzt man daher

$$P = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \text{ꝛc.}$$

$$R = 1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \text{ꝛc.}$$

$$S = 1 + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \text{ꝛc.}$$

so findet man für P, Q, R, S u. s. w. diese Werthe:

$$P = \frac{1}{1.} \cdot \frac{\pi^2}{2^3};\qquad Q = \frac{2}{1.2.3.} \cdot \frac{\pi 4}{2^5};$$

$$R = \frac{16}{1.2.3.4.5.} \cdot \frac{\pi 6}{2^7};\qquad S = \frac{272}{1.2.3\ldots7.} \cdot \frac{\pi 8}{2^9};$$

$$T = \frac{7936}{1.2.3\ldots9.} \cdot \frac{\pi 10}{2^{11}};\qquad V = \frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11.} \cdot \frac{\pi 12}{2^{13}};$$

$$W = \frac{22368256}{1.2.3\ldots\ldots13.} \cdot \frac{\pi 14}{2^{15}}.$$

§. 170.

Eben diese Summen der Potestäten der ungeraden Zahlen lassen sich auch aus den vorhergehenden Summen, in welchen alle Zahlen vorkommen, finden. Denn wenn man

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{ꝛc.}$$

setzt, so erhält man, wenn man diese Gleichung durch $\frac{1}{2^n}$ multipl.

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{ꝛc.}$$

und zieht man nun diese Gleichung, welche bloß die geraden Zahlen enthält, von der vorhergehenden ab, so bekommt man eine, worin bloß die ungeraden Zahlen enthalten sind; oder es ist

$$M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{ꝛc.}$$

Zieht man aber die Reihe $\frac{M}{2^n}$ doppelt genommen von M ab, so erhält man eine Reihe mit abwechselnden Zeichen; oder es ist

$$M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

Es lassen sich also nach den erklärten Sätzen die Reihen

$$1 \mp \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \mp \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \mp \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \mp \text{ꝛc.}$$

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.}$$

summiren, wenn n eine gerade Zahl ist; und die Summe ist $= A\pi^n$, so daß A eine Rational-Zahl ist.

§. 171.

§. 171.

Außerdem geben auch die im 164sten §. betrachteten Ausdrücke, wenn man sie auf eine ähnliche Art behandelt, sehr merkwürdige Reihen. Denn da

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}v + \text{tang.}\tfrac{1}{2}g.\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}v = (1+\frac{v}{\pi-g})(1-\frac{v}{\pi+g})(1+\frac{v}{3\pi-g})\ \text{ꝛc.}$$

ist, so wird, wenn man $v = \frac{x}{n}\pi$, und $g = \frac{m}{n}\pi$ setzt,

$$(1+\frac{x}{n-m})(1-\frac{x}{n+m})(1+\frac{x}{3n-m})(1-\frac{x}{3n+m})(1+\frac{x}{5n-m})(1-\frac{x}{5n+m})\ \text{ꝛc.} =$$

$$\text{cos.}\frac{x\pi}{2n} + \text{tang.}\frac{m\pi}{2n}.\ \text{sin.}\frac{x\pi}{2n} = 1 + \frac{\pi x}{2n}\ \text{tang.}\frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi\pi xx}{2.4nn} - \frac{\pi^3x^3}{2.4.6.n^3}\ \text{tang.}\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4x^4}{2.4.6.8.n^4} + \text{ꝛc.}$$

Vergleicht man aber diesen ohne Ende fortlaufenden Ausdruck mit §. 165. so erhält man daher

$$A = \frac{\pi}{2n}\ \text{tang.}\frac{m\pi}{2n};\quad B = \frac{-\pi\pi}{2.4.nn};\quad C = \frac{-\pi^3}{2.4.6.n^3}.\ \text{tang.}\frac{m\pi}{2n};$$

$$D = \frac{\pi^4}{2.4.6.8n^4};\quad E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10.n^5}\ \text{tang.}\frac{m\pi}{2n}\ \text{ꝛc.}$$

Weiter ist

$$\alpha = \frac{1}{n-m};\quad \beta = -\frac{1}{n+m};\quad \gamma = \frac{1}{3n-m};\quad \delta = -\frac{1}{3n+m};\quad \varepsilon = \frac{1}{5n-m};\quad \zeta = -\frac{1}{5n+m}\ \text{ꝛc.}$$

§. 172.

§. 172.

Hieraus ergeben sich nach §. 166 folgende Reihen:

$$P = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \text{&c.}$$

$$Q = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \text{&c.}$$

$$R = \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3} - \text{&c.}$$

$$S = \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \text{&c.}$$

$$T = \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} + \text{&c.}$$

$$V = \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \text{&c.}$$

Setzt man aber $\text{tang.} \frac{m\pi}{2n} = k$; so ist [§. 166.]

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} = \frac{k\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nn} = \frac{(2kk+2)\pi^2}{2.4.n.n}$$

$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2.4.6.n^3}$$

$$S = \frac{(3k^4+4kk+1)\pi^4}{48n^4} = \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2.4.6.8n^4}$$

$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} = \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2.4.6.8.10.n^5}$$

§. 173.

Auf gleiche Art giebt die letzte Gleichung des 164sten §.

$$\text{cos.} \tfrac{1}{2}v + \text{cot.} \tfrac{1}{2}g \cdot \text{sin.} \tfrac{1}{2}v = (1 + \frac{v}{g})(1 - \frac{v}{2\pi - g}$$

(1

$(1 \dagger \frac{v}{2\pi \dagger g})(1 - \frac{v}{4\pi - g})(1 \dagger \frac{v}{4\pi \dagger g})$ ꝛc., wenn man in diesem Ausdrucke $v = \frac{x}{n}\pi$, $g = \frac{m}{n}\pi$, und tang. $\frac{m\pi}{2n} =$ k setzt, so daß cot. $\frac{1}{2}g = \frac{1}{k}$ ist,

$$\text{cos. } \frac{\pi x}{2n} \dagger \frac{1}{k} \cdot \text{ sin. } \frac{\pi x}{2n} = 1 \dagger \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi\pi xx}{2.4nn} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6n^3k} \dagger \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8n^4} \dagger \frac{\pi^5 x^5}{2.4.6.8.10.n^5k} - \text{ꝛc.} =$$

$$(1 \dagger \frac{x}{m})(1 - \frac{x}{2n-m})(1 \dagger \frac{x}{2n\dagger m})(1 - \frac{x}{4n-m})(1 \dagger \frac{x}{4n\dagger m})\text{ ꝛc.}$$

Durch die Vergleichung mit der allgemeinen Form §. 165. findet man also hier

$$A = \frac{\pi}{2nk};\ B = \frac{-\pi\pi}{2.4.n^2};\ C = \frac{-\pi^3}{2.4.6n^3k};\ D = -\frac{\pi^4}{2.4.6.8n^4};$$

$$E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10n^5k};$$ und aus den Faktoren erhält man

$$\alpha = \frac{1}{m};\ \beta = \frac{-1}{2n-m};\ \gamma = \frac{1}{2n\dagger m};\ \delta = \frac{-1}{4n-m};\ \varepsilon = \frac{1}{4n\dagger m};\ \text{ꝛc.}$$

§. 174.

Hieraus lassen sich nach §. 166. folgende Reihen formiren, und ihre Summen angeben.

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} \dagger \frac{1}{2n\dagger m} - \frac{1}{4n-m} \dagger \frac{1}{4n\dagger m} - \text{ꝛc.}$$

$$Q = \frac{1}{m^2} \dagger \frac{1}{(2n-m)^2} \dagger \frac{1}{(2n\dagger m)^2} \dagger \frac{1}{(4n-m)^2} \dagger \frac{1}{(4n\dagger m)^2} \dagger \text{ꝛc.}$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} \dagger \frac{1}{(2n\dagger m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} \dagger \frac{1}{(4n\dagger m)^3} - \text{ꝛc.}$$

$$S = \frac{1}{m^4} \dagger \frac{1}{(2n-m)^4} \dagger \frac{1}{(2n\dagger m)^4} \dagger \frac{1}{(4n-m)^4} \dagger \frac{1}{(4n\dagger m)^4} \dagger \text{ꝛc.}$$

T =

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \text{&c.}$$

u. s. f.

Die Summen P, Q, R, S u. s. w. aber sind

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} = \frac{1\pi}{2nk},$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nnkk} = \frac{(2+2kk)\pi^2}{2.4n^2k^2}$$

$$R = \frac{(kk+1)\pi^3}{8n^3k^3} = \frac{(6+6kk)\pi^3}{2.4.6.n^3k^3}$$

$$S = \frac{(k^4+4kk+3)\pi^4}{48n^4k^4} = \frac{(24+32kk+3k4)\pi^4}{2.4.6.8.n^4k^4}$$

$$T = \frac{(2k^4+5kk+3)\pi^5}{96n^5k^5} = \frac{(120+200kk+80k4)\pi^5}{2.4.6.8.10n^5k^5}$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^{16}} = \frac{(720+1440kk+816k^4+96k^6)\pi^6}{2.4.6.8.10.21.n^6k^6}$$

u. s. f.

§. 175.

Diese allgemeine Reihen verdienen, daß wir daraus einige besondere Fälle ableiten; und man findet dergleichen, wenn man das Verhältniß m:n durch Zahlen ausdruckt. Es sey also zuvörderst $m = 1$, und $n = 2$; wo denn $k = \text{tang.}\frac{\pi}{4} = \text{tang.}\,45^\circ = 1$ wird, und beyde Arten von Reihen in eine verwandelt werden. Es ist daher

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{&c.}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{&c.}$$

$$\frac{\pi^3}{3^2} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{&c.}$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{ꝛc.}$$

u. s. f.

Von diesen Reihen haben wir die erste bereits §. 140. gefunden, und von den übrigen ergaben sich diejenigen, die aus Potestäten mit geraden Exponenten bestehen, §. 169., so daß also nur die, worin die Exponenten ungerade Zahlen sind, hier zum erstenmale vorkommen. Man sieht daher aus dem Gegenwärtigen, daß man auch die Summen aller dieser Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} - \text{ꝛc.}$$

durch den Werth von π auszudrucken im Stande ist.

§. 176.

Ferner sey $m = 1$, $n = 3$; so wird $k = \text{tang.} \frac{\pi}{6} = \text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; und die Reihen des 172sten §. geben

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi\pi}{27} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{16^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \text{ꝛc.}$$

u. s. f. oder

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{4\varpi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \text{ꝛc.}$$

u. s. f.

In diesen Reihen fehlen alle durch 3 theilbare Zahlen; daher kann man auch die von geraden Dimensionen aus den vorher gefundenen auf folgende Art ableiten. Da [§. 167. 168.]

$$\frac{\varpi\varpi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc. ist, so ist}$$

$$\frac{\varpi\varpi}{6.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\varpi}{54}$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 theilbare Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleiben alle durch 3 nicht theilbare Zahlen übrig; und es ist daher

$$\frac{8\varpi\varpi}{54} = \frac{4\varpi\varpi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ꝛc.,}$$ so wie wir es gefunden haben.

§. 177.

Eben dieselbe Voraussetzung, daß nemlich $m = 1$, $n = 3$, und $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, auf den 174sten §. angewandt, giebt

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \text{ꝛc.}$$

u. s. f.

wo in den Nennern bloß die ungeraden Zahlen, die durch 3 theil-

3 theilbaren ausgenommen, vorkommen. Uebrigens kann man auch die Reihen von geraden Dimensionen auf folgende Art aus den vorher gefundenen herleiten. Da [§. 169.]

$$\frac{\varpi\varpi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc.}, \text{ so ist}$$

$$\frac{\varpi\varpi}{8.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\varpi}{72}.$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 theilbare ungerade Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleibt die Reihe der Quadrate der ungeraden nicht durch 3 theilbaren Zahlen übrig; und es ist daher

$$\frac{\varpi\varpi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{ꝛc.}$$

§. 178.

Wenn man die Reihen im 172sten und 174sten §. zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, so erhält man ebenfalls andere merkwürdige Reihen. Es ist nemlich aus den beyden angeführten §§.

$$\frac{k\varpi}{2n} + \frac{\varpi}{2nk} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{(kk+1)\varpi}{2nk}. \text{ Da aber}$$

$$k = \text{tang.}\ \frac{m\varpi}{2n}\ [\text{§. 172.}] = \frac{\text{sin.}\ \frac{m\varpi}{2n}}{\text{cos.}\ \frac{m\varpi}{2n}}, \text{ und}$$

$$1 + kk = \frac{1}{(\text{cos.}\ \frac{m\varpi}{2n})^2} \text{ ist, woher}$$

$$\frac{2k}{1+kk} = 2\sin.\frac{m\pi}{2n}.\cos.\frac{m\pi}{2n} = \sin.\frac{m\pi}{n},$$

wird, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes

$$\frac{\pi}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} +$$

$$\frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man durch die Subtraction

$$\frac{\pi}{2nk} - \frac{k\pi}{2n} = \frac{(1-kk)\pi}{2nk} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} -$$

$$\frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m} - \text{ꝛc.}$$

Da aber $\frac{2k}{1-kk} = \text{tang.}\,2\frac{m\pi}{2n} = \text{tang.}\frac{m\pi}{n} = \frac{\sin.\frac{m\pi}{n}}{\cos.\frac{m\pi}{n}}$ ist:

so folgt daraus

$$\frac{\pi\cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} -$$

$$\frac{1}{3n-m} + \text{ꝛc.}$$

Die sich hieraus ergebenden Reihen der Quadrate und der höhern Potestäten lehrt die Differential-Rechnung auf eine leichtere Art finden.

§. 179.

Da wir bereits die Fälle betrachtet haben, wo $m = 1$, und $n = 2$ oder $= 3$ ist: so wollen wir nunmehr $m = 1$, und $n = 4$ setzen. Alsdann ist $\sin.\frac{m\pi}{n} = \sin.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

und

und $\cos. \frac{\varpi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hierdurch erhält man

$$\frac{\varpi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.},$$

$$\frac{\varpi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.}$$

Ferner sey $m = 1$, und $n = 8$, so wird $\frac{m\varpi}{n} = \frac{\varpi}{8}$,

$\sin. \frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}})}$, $\cos. \frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}})}$ und

$\frac{\cos. \frac{\varpi}{8}}{\sin. \frac{\varpi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\varpi}{4\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{23} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\varpi}{8(\sqrt{2}-1)} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{ꝛc.}$$

Endlich sey $m = 3$, und $n = 8$, wo denn $\frac{m\varpi}{n} = \frac{3\varpi}{8}$, und

$\sin. \frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}})}$, und $\cos. \frac{3\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}})}$,

folglich $\frac{\cos. \frac{3}{8}\varpi}{\sin. \frac{3}{8}\varpi} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ wird. Daraus aber erhält man die Reihen

$$\frac{\varpi}{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\varpi}{8(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \text{ꝛc.}$$

§. 180.

Aus diesen Reihen entsteht, wenn man dieselben mit einander combinirt,

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{8}(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}-1) = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{8}(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}+1) = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+1+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}) = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+1-\sqrt{(4-2\sqrt{2})}) = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\text{ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art kann man, wenn man $n = 16$, und m entweder 1, oder 3, oder 5, oder 7 annimmt, weiter fortgehen, und so die Summen der Reihen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

$\frac{1}{}$ ꝛc. finden, worin die Abwechselungen der Zeichen + und $\frac{9}{}$ andern Gesetzen folgen.

§. 181.

Wenn man in den Reihen des 178sten §. je zwey und zwey Glieder in eine Summe vereiniget; so erhält man aus der ersten

$$\frac{\varpi}{n.\sin.\frac{m\varpi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} + \frac{2m}{9nn-mm}$$

$$- \frac{2m}{16nn-mm} + \frac{2m}{25nn-mm} - \text{ꝛc. und also}$$

$$\frac{1}{nn-mm} - \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} - \frac{1}{16nn-mm} + \text{ꝛc.} =$$

$$\frac{\varpi}{2mn.\sin.\frac{m\varpi}{n}} - \frac{1}{2mm}.$$

Die andere Reihe hingegen giebt

$$\frac{\varpi}{n\tang.\frac{m\varpi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} -$$

$$\frac{2m}{9nn-mm} - \text{ꝛc. und also}$$

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{16nn-mm} \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\varpi}{2mn\tang.\frac{m\varpi}{n}}$$

Diese beyden Reihen aber zu einander addirt, geben:

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\tang.\frac{m\varpi}{2n}}{4mn}$$

Läßt man nun in dieser Reihe $n = 1$, und m jede gerade Zahl $= 2k$ seyn, so erhält man, da tang. $k\varpi = 0$ ist, den Fall, da $k = 0$ ausgenommen, allezeit,

$$\frac{1}{1-4kk} + \frac{1}{9-4kk} + \frac{1}{25-4kk} + \frac{1}{49-4kk} + \text{&c.} = 0$$

Wenn aber darin $n = 2$ wird, und m irgend eine ungerade Zahl, $= 2k + 1$, ist, so wird, da $\frac{1}{\text{tang.}\frac{m\varpi}{n}} = 0$,

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2} + \frac{1}{16-(2k+1)^2} + \frac{1}{36-(2k+1)^2} + \text{&c.} = \frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

§. 182.

Multiplicirt man die gefundenen Reihen durch nn, und setzt man dabey $\frac{m}{n} = p$, so erhält man diese Formen:

$$\frac{1}{1-pp} - \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} - \frac{1}{16-pp} + \frac{1}{25-pp} - \text{&c.} = \frac{\varpi}{2p\sin. p\varpi} - \frac{1}{2pp}.$$

$$\frac{1}{1-pp} + \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} + \frac{1}{16-pp} + \frac{1}{25-pp} + \text{&c.} = \frac{1}{2pp} - \frac{\varpi}{2p\,\text{tang.}\,p\varpi}.$$

Setzt man $pp = a$, so entstehen daraus diese Reihen:

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} - \frac{1}{16-a} + \text{&c.} = \frac{\varpi\sqrt{a}}{2a\sin.\varpi\sqrt{a}} - \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} + \frac{1}{16-a} + \text{&c.} = \frac{1}{2a} - \frac{\varpi\sqrt{a}}{2a\,\text{tang.}\,\varpi\sqrt{a}}.$$

Wofern also a nur keine negative und keine ganze Quadrat-

zahl

zahl ist, so kann die Summe dieser Reihen durch den Kreis ausgedruckt werden.

§. 183.

Vermittelst der oben [§ 138.] erklärten Reduktion der imaginären Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus kann man aber auch die Summen dieser Reihen angeben, wenn a eine negative Zahl ist. Denn da $e^{x\sqrt{-1}} = \text{cos.}x + \sqrt{-1}\ \text{sin.}\,x$, und $e^{-x\sqrt{-1}} = \text{cos.}\,x - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,x$ ist, so ist auch, wenn man $y\sqrt{-1}$ anstat x setzt,

$$\text{cos.}\,y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \text{ und } \text{sin.}\,y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ist daher $a = -b$, und $y = \pi\sqrt{b}$, so ist

$$\text{cos.}\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} + e^{\pi\sqrt{b}}}{2}, \text{ und}$$

$$\text{sin.}\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}; \text{ folglich}$$

$$\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}} + e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}}; \text{und hieraus}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\text{sin.}\,\pi\sqrt{-b}} = \frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}; \text{ und}$$

$$\frac{\varpi\sqrt{-b}}{\text{tang.}\,\varpi\sqrt{-b}} = \frac{(e^{-\varpi\sqrt{b}} + e^{\varpi\sqrt{b}})\varpi\sqrt{b}}{e^{-\varpi\sqrt{b}} - e^{\varpi\sqrt{b}}}.$$

Dies vorausgesetzt, so wird

$$\frac{1}{1+b} - \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} - \text{ꝛc.} = \frac{1}{2b} - \frac{\varpi\sqrt{b}}{(e^{\varpi\sqrt{b}} - e^{-\varpi\sqrt{b}})b}$$

und

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \text{ꝛc.} = \frac{(e^{\varpi\sqrt{b}} + e^{-\varpi\sqrt{b}})\varpi\sqrt{b}}{2b(e^{\varpi\sqrt{b}} - e^{-\varpi\sqrt{b}})} - \frac{1}{2b}.$$

Eben diese Reihen hätten durch die im gegenwärtigen Capitel gebrauchte Methode aus dem 162sten §. hergeleitet werden können. Weil aber die Reduktion der Sinus und Cosinus imaginärer Kreisbogen auf reelle Exponential-Größen durch den betretenen Weg beträchtlich erläutert wird, so schien mir diese Entwickelung der andern vorgezogen werden zu müssen.



Eilftes Capitel.

Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

§. 184.

Da wir §. 158. gesehen haben, daß, wenn z irgend einen Kreisbogen bedeutet,

$$\text{sin. } z = z\left(1-\frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{16\pi\pi}\right)\text{ꝛc. und}$$

$$\text{cos. } z = \left(1-\frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{49\pi\pi}\right)\text{ꝛc. ist:}$$

so ist auch, wenn man den Bogen $z = \frac{m\pi}{n}$ setzt,

$$\text{sin. } \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{mm}{16nn}\right)\text{ꝛc.}$$

und

$$\text{cos. } \frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4mm}{nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{25nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{49nn}\right)\text{ꝛc.}$$

oder wenn man 2n anstatt n nimmt,

$$\text{sin. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4nn-mm}{4nn}\right)\left(\frac{16nn-mm}{16nn}\right)\left(\frac{36nn-mm}{36nn}\right)\text{ꝛc. und}$$

$$\text{cos. } \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{nn-mm}{nn}\right)\left(\frac{9nn-mm}{9nn}\right)\left(\frac{25nn-mm}{25nn}\right)\left(\frac{49nn-mm}{49nn}\right)\text{ꝛc.}$$

Löset man nun diese Reihen in einfache Faktoren auf, so wird

$$\text{sin.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\text{ &c.}$$

und

$$\text{cos.}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\text{ &c.}$$

Setzt man endlich $n-m$ anstatt m, so erhält man, weil

$$\text{sin.}\frac{(n-m)\pi}{2n} = \text{cos.}\frac{m\pi}{2n}, \text{ und cos.}\frac{(n-m)\pi}{2n} = \text{sin.}\frac{m\pi}{2n} \text{ ist,}$$

$$\text{cos.}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6}\right)\text{ &c.}$$

$$\text{sin.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\text{ &c.}$$

§. 185.

Da man auf diese Art sowohl für den Sinus als für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ zwey Reihen hat, so erhält man, wenn man die eine davon durch die andere dividirt,

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\text{ &c. und also}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.}\text{ &c. oder}$$

den Ausdruck für die Peripherie des Kreises, welchen Wallis in seiner Arithmetica infinitorum erfunden hat. Vermittelst des ersten Ausdrucks für den Sinus kann man aber unzählige andere diesem ähnliche Ausdrücke erhalten. Denn man findet daraus die Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\cdot\text{sin.}\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\text{ &c.}$$

welche,

welche, wenn man darin $\frac{m}{n} = 1$ setzt, die angeführte Wallisische Bestimmung giebt. Läßt man aber $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ seyn, so ist, weil $\sin. \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \text{ ꝛc.}$$

und setzt man $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, so wird, weil $\sin. \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \text{ ꝛc.}$$

Dividirt man den Wallisischen Ausdruck durch den, wo $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18}{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19} \text{ ꝛc.}$$

§. 186.

Da die Tangente eines jeden Winkels dem Sinus desselben, durch seinen Cosinus dividirt, gleich ist: so kann man auch die Tangente durch dergleichen unendliche Faktoren ausdrucken. Dividirt man daher den ersten Ausdruck für den Sinus durch den zweyten für den Cosinus, so ist

$$\text{tang.} \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m} \left(\frac{2n-m}{n+m}\right) \left(\frac{2n+m}{3n-m}\right) \left(\frac{4n-m}{3n+m}\right) \left(\frac{4n+m}{5n-m}\right) \text{ ꝛc.}$$

$$\text{cot.} \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m} \left(\frac{n+m}{2n-m}\right) \left(\frac{3n-m}{2n+m}\right) \left(\frac{3n+m}{4n-m}\right) \left(\frac{5n-m}{4n+m}\right) \text{ ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man für die Secanten und Cosecanten

[weil $\text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos. } x}$, und $\text{cosec. } x = \frac{1}{\sin. x}$ ist]

sec.

$$\text{sec.}\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)$$
$$\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\text{ &c.}$$

$$\text{cosec.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)$$
$$\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\text{ &c.}$$

Wenn man aber die beyden andern Formeln für den Sinus und Cosinus nimmt, so wird

$$\text{tang.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\text{ &c.}$$

$$\text{cot.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\text{ &c.}$$

$$\text{sec.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\text{ &c.}$$

$$\text{cosec.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\text{ &c.}$$

§. 187.

Wenn man k anstatt m setzt, so kann man auf eine ähnliche Art den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{k\pi}{2n}$ finden; und wenn man die auf diese Art erhaltenen Ausdrücke durch die vorhergehenden dividirt, so bekommt man:

$$\frac{\text{sin.}\frac{m\pi}{2n}}{\text{sin.}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\text{ &c.}$$

$$\frac{\text{sin.}\frac{m\pi}{2n}}{\text{cos.}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\text{ &c.}$$

cos.

$$\frac{\text{cos.}\frac{m\pi}{2n}}{\text{cos.}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdot\frac{5n-m}{5n-k}\text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\text{cos.}\frac{m\pi}{2n}}{\text{sin.}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdot\frac{5n-m}{4n+k}\text{ ꝛc.}$$

Nimmt man also für den Winkel $\frac{k\pi}{2n}$ einen Winkel an, dessen Sinus und Cosinus bekannt sind, so kann man daraus den Sinus und Cosinus eines jeden andern Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ finden.

§. 188.

Umgekehrt kann man nun auch die wahren Werthe von dergleichen ohne Ende fortlaufenden Ausdrücken entweder durch den Umfang des Kreises, oder durch bekannte Sinus und Cosinus erhalten: und dies ist allerdings von beträchtlicher Wichtigkeit, da man bis jetzt noch keine andere Methoden kennt, um den Werth solcher unendlichen Produkte wirklich darzustellen. Zur Bestimmung von π aber, oder zur Berechnung der Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$, auf dem Wege der Näherung, sind dergleichen Ausdrücke unbequem. Denn ob man gleich die Multiplication der Faktoren von $\frac{\pi}{2} = 2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)$ u. s. f. in Decimal-Brüchen leicht verrichten kann, so muß man doch, selbst wenn man den Werth von π nur auf zehn Stellen genau finden will, eine so große Menge derselben nehmen, daß dadurch dieser Weg höchst beschwerlich wird.

§. 189.

§. 189.

Der größte Nutzen, den diese Ausdrücke, ihrer unendlichen Form ungeachtet, gewähren, zeigt sich bey der Erfindung der Logarithmen, welche ohne dieselbe mit den äussersten Schwierigkeiten verknüpft seyn würde. Zuvörderst nemlich hat man, da $\pi = 4(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{25})(1-\frac{1}{49})$ &c. ist, wenn man die Logarithmen nimmt, $l\pi = l4 + l(1-\frac{1}{9}) + l(1-\frac{1}{25}) + l(1-\frac{1}{49}) +$ &c. oder $l\pi = l2 - l(1-\frac{1}{4}) - l(1-\frac{1}{16}) - l(1-\frac{1}{36}) -$ &c. man mag die gemeinen oder hyperbolischen Logarithmen nehmen. Da man indeß die gemeinen Logarithmen aus den hyperbolischen leicht finden kann, so kann man auch diese zuerst suchen, und dann kann man sich die Erfindung des hyperbolischen Logarithmen von π ungemein erleichtern.

§. 190.

Da nemlich, wenn man die hpperbolischen Logarithmen nimmt, $l(1-x) = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} -$ &c. [§. 122. 121.] ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder entwickelt,

$$l\pi = l4 \begin{cases} -\frac{1}{9} - \frac{1}{2.9^2} - \frac{1}{3.9^3} - \frac{1}{4.9^4} - \text{&c.} \\ -\frac{1}{25} - \frac{1}{2.25^2} - \frac{1}{3.25^3} - \frac{1}{4.25^4} - \text{&c.} \\ -\frac{1}{49} - \frac{1}{2.49^2} - \frac{1}{3.49^3} - \frac{1}{4.49^4} - \text{&c.} \end{cases}$$

u. s. f.

Wenn

Wenn man in diesen aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Reihen vertical herunter geht, so erhält man solche Reihen als diejenigen sind, wovon oben [§. 169. 170.] die Summen gefunden wurden. Setzt man daher der Kürze wegen

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ꝛc.}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{ꝛc.}$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

so ist $l\pi = 14 - (A - 1) - \frac{1}{2}(B - 1) - \frac{1}{3}(C - 1) - \frac{1}{4}(D - 1) - \text{ꝛc.}$ Wenn man aber die oben gefundenen Summen näherungsweise sucht, so wird

A = 1, 233700550136169827354 31
B = 1, 014678031604192054546 25
C = 1, 001447076640942121906 47
D = 1, 000155179025296119302 98
E = 1, 000017041363044825508 16
F = 1, 000001885848583119575 90
G = 1, 000000209240519211500 10
H = 1, 000000023237157379156 70
I = 1, 000000002581437556659 77
K = 1, 000000000286807697455 58
L = 1, 000000000031866775140 44
M = 1, 000000000003540722943 92
N = 1, 000000000000393412466 91
O = 1, 000000000000043712448 59

P = 1, 000000000000000485693682
Q = 1, 000000000000000053965957
R = 1, 000000000000000005996217
S = 1, 000000000000000000666246
T = 1, 000000000000000000074027
V = 1, 000000000000000000008225
W = 1, 000000000000000000000913
X = 1, 000000000000000000000101

Hieraus findet man ohne verdrießliche Weitläuftigkeit den hyperbolischen Logarithmen von $\pi = 1,144729885849400174143 42$, und multiplicirt man denselben durch 0,43429 ꝛc., so findet man den gemeinen Logarithmen von $\pi = 0,497149872694133854351 26$.

§. 191.

Da wir ferner auch für den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ einen aus unendlich vielen Faktoren bestehenden Ausdruck gefunden haben, so können wir auch die Logarithmen dieses Sinus und Cosinus dadurch auf eine bequeme Art ausdrucken. Es ist nemlich [aus §. 184.]

$$1 \sin. \frac{m\pi}{2n} = 1\pi + 1\frac{m}{2n} + 1(1 - \frac{mm}{4nn}) + 1(1 - \frac{mm}{16nn}) + 1(1 - \frac{mm}{36nnn}) \text{ ꝛc.}$$

$$1 \cos. \frac{m\pi}{2n} = 1(1 - \frac{mm}{nn}) + 1(1 - \frac{mm}{9nn}) + 1(1 - \frac{mm}{25nn}) + 1(1 - \frac{mm}{49nnn}) \text{ ꝛc.}$$

Hiernach lassen sich zuvörderst die hyperbolischen Logarithmen eben so wie vorhin auf eine leichte Art durch sehr convergirende Reihen ausdrucken. Damit wir aber die

die unendlichen Reihen nicht ohne Noth vervielfältigen, so wollen wir die Logarithmen von den ersten Gliedern nicht in dergleichen Reihen entwickeln, und dann ist

$$\text{l sin.}\frac{m\omega}{2n} = \text{l}\omega + \text{l}m + \text{l}(2n-m) + \text{l}(2n+m) - 18 - 3\text{l}n$$
$$- \frac{mm}{16nn} - \frac{m4}{2.16^2n4} - \frac{m6}{3.16^3n6} - \frac{m8}{4.16^4n8} - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{mm}{36nn} - \frac{m4}{2.36^2n4} - \frac{m6}{3.36^3n6} - \frac{m8}{4.36^4n8} - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{mm}{64nn} - \frac{m4}{2.64^2n4} - \frac{m6}{3.64^3n6} - \frac{m8}{4.64^4n8} - \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

$$\text{l cos.}\frac{m\omega}{2n} = \text{l}(n-m) + \text{l}(n+m) - 2\text{l}n$$
$$- \frac{mm}{9nn} - \frac{m4}{2.9^2n4} - \frac{m6}{3.9^3n6} - \frac{m8}{4.9^4n8} - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{mm}{25nn} - \frac{m4}{2.25^2n4} - \frac{m6}{3.25^3n6} - \frac{m8}{4.25^4n8} - \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{mm}{49nn} - \frac{m4}{2.49^2n4} - \frac{m6}{3.49^3n6} - \frac{m8}{4.49^4n8} - \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

§. 192.

Es sind also die geraden Potestäten von $\frac{m}{n}$ in diesen Reihen durch solche Reihen multiplicirt, als wir oben bereits summiren gelernt haben. Es ist nemlich

$$\text{l sin.}\frac{m\omega}{2n} = \text{l}m + \text{l}(2n-m) + \text{l}(2n+m) - 3\text{l}n + \text{l}\omega - 18$$
$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{12^8}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. w.

$$\text{l cos.}\frac{m\pi}{2n} = \text{l}(n-m)+\text{l}(n+m)-2\text{l}n$$

$$-\frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. w.

Die Summen dieser letzten Reihen findet man §. 190. Was die vorhergehenden Reihen betrifft, so könnten ihre Summen allerdings aus diesen hergeleitet werden; damit aber ihr Gebrauch erleichtert werde, so mögen sie gleichfalls hier stehen.

§. 193.

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\text{ꝛc.}$$

$$\beta = \frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\text{ꝛc.}$$

$$\gamma = \frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\text{ꝛc.}$$

$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

so sind diese Summen näherungsweise ausgedruckt,

$\alpha = 0,411233516712056609118 10$

$\beta = 0,067645202106946136969 75$

$\gamma = 0,015895985343507017808 04$

$\delta = 0,003922177172648220075 70$

$\varepsilon = 0,000977533764773259848 98$

$\zeta = 0,000244200704724928722 74$

$\eta = 0,000061038894539493329 15$

$\vartheta = 0,000015259022251272699 77$

$\iota = 0,000003814711827443180 08$

$\varkappa = 0,000000953675226175340 53$

$\lambda = 0,000000238418635952591 54$

$\mu = 0,000000059604648328315 55$

$\nu = 0,000000014901161415898 13$

$\xi = 0,000000003725290312339 86$

$o = 0,000000000931322575482 84$

$\varpi = 0,000000000232830643708 07$

$\rho = 0,000000000058207660916 85$

$\sigma = 0,000000000014551915228 58$

$\tau = 0,000000000003637978807 10$

$\upsilon = 0,000000000000909494701 77$

$\varphi = 0,000000000000227373675 44$

$\chi = 0,000000000000056843418 86$

$\psi = 0,000000000000014210854 71$

$\omega = 0,000000000000003552713 67$

Die übrigen Summen erhält man, wenn man jede vorhergehende durch 4 dividirt.

§. 194.

Nimmt man nun dieses zu Hülfe, so ist

$$\text{l sin.}\frac{m\varpi}{2n} = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln + l\varpi - l8$$
$$-\frac{mm}{nn}\left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^4}{2n^4}\left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^6}{3n^6}\left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) - \text{&c.}$$

$$\text{l cos.}\frac{m\varpi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$
$$-\frac{mm}{nn}(A-1) - \frac{m^4}{2n^4}(B-1) - \frac{m^6}{3n^6}(C-1) - \text{&c.}$$

Da nun die Logarithmen von ϖ und 8 bekannt sind, so ist der hyperbolische Logarithme des Sinus des Winkels

$$\frac{m}{n}\,90^\circ = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln$$
$$- \quad 0,934711655830435754 10$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,161233516712056609 11$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,002572601053473068 48$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000090328447835672 60$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000003981793162055 01$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000194252954651 96$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000010013287488 12$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000000534041356 18$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000000029148596 58$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000001617979 79$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000000009097690$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000000000516827$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000000029607$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000000001708$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,000000000000000000099$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,000000000000000000005$$

Dagegen ist der hyperbolische Logarithme des Cosinus des Winkels $\frac{m}{n} 90^\circ = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,233700550136169827350$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,007339015802096027270$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000482358880314040630$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000038794756324029820$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000003408272608965100$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000314308097186590$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000029891502744500$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000002904644672390$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000286826395 18$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000268076974$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000028969795 6$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} 0,000000000002950602 4$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} 0,000000000000302624 9$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} 0,000000000000031223 2$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} 0,000000000000003237 9$$

$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} 0,000000000000000337 3$$

$$- \frac{m^{34}}{n^{34}} 0,000000000000000035 2$$

$$- \frac{m^{36}}{n^{36}} 0,000000000000000003 7$$

$$- \frac{m^{38}}{n^{38}} 0,000000000000000000 4$$

§. 195.

Multiplicirt man diese hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus durch 0,4342944819 u. s. f. so erhält man ihre gemeinen Logarithmen für den Radius = 1. Da aber in den trigonometrischen Tafeln der Sinus des rechten Winkels = 10 angenommen zu werden pflegt, so muß man, um die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so wie sie in den Tafeln stehen, zu erhalten, nach der gedachten Multiplication noch 10 dazu addiren. Hiernach ist der

tabu-

tabularische Logarithme des Sinus des Winkels $\frac{m}{n}90^\circ =$

$$l\,m + l(2n - m) + l(2n + m) - 3\,l\,n$$

$$+ \quad 9,594059885702190$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,070022826605901$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,001117266441661$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000039229146453$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000001729270798$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000084362986$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000004348715$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000000231931$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000000012659$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000000702$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000000039$$

und der tabularische Logarithme des Cosinus des Winkels

$$\frac{m}{n}\,90^\circ = l(n - m) + l(n + m) - 2\,l\,n$$

$$+ \quad 10,000000000000000$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,101494859341892$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,003187294065451$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000209485800017$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000016848348597$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001480193986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000136502272$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000012981715$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000001261471$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000124567$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000012456$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000001258$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000128$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000013$$

§. 196.

Vermittelst dieser Formeln kann man sowohl die hyperbolischen als die gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus eines jeden Winkels finden, ohne daß man dabey die Sinus und Cosinus selbst zu wissen braucht. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus aber findet man die Logarithmen der Tangenten, der Cotangenten, der Secanten und der Cosecanten durch eine bloße Subtraction, und es sind also dazu keine besondere Formeln nöthig. Uebrigens

gens muß bemerkt werden, daß man von den Zahlen m, n, n — m, n + m u. s. f. entweder die hyperbolischen oder die gemeinen Logarithmen zu nehmen hat, je nachdem man die hyperbolischen oder die gemeinen Logarithmen der Sinus und der Cosinus sucht. Ueberdies zeigt der Bruch $\frac{m}{n}$ das Verhältniß an, welches der gegebene Winkel zum rechten Winkel hat; und da die Sinus der Winkel, die größer sind als ein halber rechter Winkel, den Cosinus der Winkel, die um eben so viel kleiner sind als ein halber R, gleich sind: so braucht der Bruch $\frac{m}{n}$ nie größer als $\frac{1}{2}$ angenommen zu werden, und es convergiren daher die angeführten Glieder weit stärker, so daß man meistens nur die Hälfte davon zu nehmen braucht.

§. 197.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, müssen wir noch eine bequemere Art die Tangenten und Secanten eines jeden Winkels zu finden, als das vorhergehende Capitel an die Hand giebt, mittheilen. Denn wenn man gleich die Tangenten und Secanten aus den Sinus und Cosinus erhalten kann, so ist doch dieser Weg, da man dabey die Division gebraucht, in so großen Zahlen zu lästig. Zwar haben wir die Formeln für die Tangenten und Cotangenten schon oben §. 135 gegeben, allein wir waren da noch nicht im Stande, den Grund davon zugleich beyzufügen. Dies ist dem gegenwärtigen Capitel vorbehalten worden.

§. 198. a.

Zuvörderst leiten wir also aus §. 181. einen Ausdruck für die Tangente des Winkels $\frac{m}{2n} * \text{her}$. Da nemlich

$$\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \frac{1}{25nn - mm} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{\pi}{4mn} \cdot \text{tang.} \frac{m}{2n} \pi$$

ist, so ist

$$\text{tang.} \frac{m}{2n} \pi = \frac{4mn}{\pi} \left(\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \frac{1}{25nn - mm} + \text{&c.} \right)$$

Da ferner

$$\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \text{&c.} = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn} \cdot \cot. \frac{m}{n} \pi$$

ist [§. 181.] so erhält man, wenn man $2n$ anstatt n setzt,

$$\cot. \frac{m}{2n} \pi = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi} \left(\frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{16nn - mm} + \frac{1}{36nn - mm} + \text{&c.} \right)$$

Verwandelt man nun diese Brüche, die ersten ausgenommen, wobey solches nicht nöthig ist, in unendliche Reihen, so wird

$$\text{tang.} \frac{m}{2n} \pi = \frac{mn}{nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi}$$
$$+ \frac{4}{\pi} \left(\frac{m}{3^2 n} + \frac{m^3}{3^4 n^3} + \frac{m^5}{3^6 n^5} + \text{&c.} \right)$$
$$+ \frac{4}{\pi} \left(\frac{m}{5^2 n} + \frac{m^3}{5^4 n^3} + \frac{m^5}{5^6 n^5} + \text{&c.} \right)$$
$$+ \frac{4}{\pi} \left(\frac{m}{7^2 n} + \frac{m^3}{7^4 n^3} + \frac{m^5}{7^6 n^5} + \text{&c.} \right)$$

u. s. w.

$$\cot. \frac{m}{2n} \pi = \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi}$$
$$- \frac{4}{\pi} \left(\frac{m}{4^2 n} + \frac{m^3}{4^4 n^3} + \frac{m^5}{4^6 n^5} + \text{&c.} \right)$$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2 n}+\frac{m^3}{64 n^3}+\frac{m^5}{6^6 n^5}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2 n}+\frac{m^3}{8^4 n^3}+\frac{m^5}{8^6 n^5}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. f.

§. 198 b.

Aus dem bekannten Werthe von π aber findet man

$$\frac{1}{\pi}=0,318309886183790671537767926745028724;$$

und außerdem kommen hier eben die Reihen vor, welche wir oben [§. 190 und 193.] durch die Buchstaben A, B, C, D u. s. f. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. s. f. bezeichnet haben. Dies vorausgesetzt, so ist

$$\text{tang.}\frac{m}{2n}\pi=\frac{mn}{nn-mm}\cdot\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}(A-1)+\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}(B-1)+\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}(C-1)+\frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{4}{\pi}(D-1)+\text{ꝛc.}$$

desgleichen

$$\text{cot.}\frac{m}{2n}\varpi=\frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\varpi}-\frac{4mn}{4nn-mm}\cdot\frac{1}{\varpi}-\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\varpi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\text{ꝛc.}$$

Aus diesen Formeln nun sind die Ausdrücke entstanden, welche oben §. 135. für die Tangenten und die Cotangenten gegeben worden sind; und zugleich ist §. 137. gezeigt worden, wie man die Secanten und Cosecanten aus den Tangenten und Cotangenten durch eine bloße Addition zu finden im Stande ist. Vermittelst dieser Regeln könnten daher die ganzen trigonometrischen Tafeln auf eine viel leichtere Art berechnet werden, als es von den ersten Verfertigern derselben geschehen ist.

Zwölf-

Zwölftes Capitel.

Von der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen.

§. 199.

Es ist bereits oben, im zweyten Capitel, gezeigt worden, wie man eine jede gebrochene Funktion in so viel Theile auflösen kann, als der Nenner derselben einfache Faktoren hat. Da aber hierbey eben diese einfache Faktoren die Nenner jener Partial-Brüche werden, und also diese Brüche, wenn die Faktoren, aus welchen sie entspringen, imaginär sind, ebenfalls imaginär werden müssen: so kann es in diesem Falle von keinem Nutzen seyn, daß man einen reellen Bruch in imaginäre auflöset. Da also [im neunten Capitel] gezeigt worden ist, daß eine jede ganze Funktion, dergleichen der Nenner einer jeden gebrochenen Funktion ist, so viel einfache imaginäre Faktoren sie auch immer enthalten mag, dennoch in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann: so kann man dadurch die imaginären Größen bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen vermeiden, wenn man dabey nicht die einfachen, sondern die doppelten reellen Faktoren des Haupt-Nenners gebraucht.

§. 200.

Ist daher die gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ gegeben, so suche man daraus auf die oben [im zweyten Capitel] erklärte Art

so

so viel einfache Brüche, als der Nenner N einfache reelle Faktoren hat Anstatt der imaginären Faktoren aber nehme man den Ausdruck $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ zum Faktor von N an; und da man bey diesem Geschäfte den Zähler und Nenner in entwickelter Gestalt betrachten muß, so sey der gegebene Bruch

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{&c.}}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{&c.})}$$

Ferner sey der Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ entsteht, $= \frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$: denn da die veränderliche Größe z im Nenner zwey Dimensionen hat, so kann sie im Zähler wohl eine aber nicht mehr haben, weil sonst der Ausdruck eine ganze Funktion enthielte, welche man besonders suchen muß.

§. 201.

Setzt man der Kürze wegen den Zähler $A + Bz + Cz^2 + \text{&c.} = M$, und den zweyten Faktor des Nenners, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{&c.} = Z$; den andern Partial-Bruch aber, der aus dem Faktor des Nenners Z entspringt, $= \frac{Y}{Z}$: so ist $Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$, *) und dieser Ausdruck muß eine ganze Funktion von z, und also durch $pp - 2pqz\cos.\varphi + ppzz$ theilbar seyn. **) Es muß daher $M - \mathfrak{A}Z - aZz$ verschwinden, wenn man $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz = 0$, seyn läßt, d. h. wenn man sowohl $z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$ als $z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ setzt,

[§. 146.], und setzt man $\frac{p}{q} = f$, so wird $z^n = f^n(\cos. n\varphi \pm \sqrt{-1}. \sin. n\varphi)$ [§. 133. im Anfange]. Durch die Substitution dieses doppelten Werths von z erhält man daher eine zwiefache Gleichung, woraus man die unbekannten beständigen Größen A und a bestimmen kann.

*) Da $N = (pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z$ ist, so ist

$$\frac{M}{N} = \frac{A + az}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz} + \frac{Y}{Z}$$

$$= \frac{M}{(pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z},$$

und folglich

$$\frac{Y}{Z} = \frac{M - AZ - aZz}{(pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z} \text{ und}$$

$$Y = \frac{M - AZ - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}.$$

Man vergleiche hierbey den 41sten §.

**) Denn es ist Y nach §. 41. eine ganze Funktion, und folglich, weil

$$\frac{M - AZ - aZz}{pp - 2pqz. \cos \varphi + qqzz} = Y$$

ist, auch $\frac{M - AZ - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}$; und daher auch

$M - AZ - aZz$ durch $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ theilbar, weil sonst das Vorhergehende nicht statt finden könnte.

§. 202.

Substituirt man wirklich, so giebt die Gleichung $M = AZ + aZz$ *), wenn man sie entwickelt, folgende doppelte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} A + Bf.\cos.\varphi + Cff.\cos.2\varphi + Df^3\cos.3\varphi + \text{&c.} \\ \pm(Bf.\sin.\varphi + Cff.\sin.2\varphi + Df^3\sin.3\varphi + \text{&c.})\sqrt{-1} \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}(\alpha + \beta f.\cos.\varphi + \gamma ff.\cos.2\varphi + \delta f^3.\cos.3\varphi + \text{&c.}) \\ \pm \mathfrak{A}(\beta f.\sin.\varphi + \gamma ff.\sin.2\varphi + \delta f^3.\sin.3\varphi + \text{&c.})\sqrt{-1} \\ + a(\alpha f.\cos.\varphi + \beta ff.\cos.2\varphi + \gamma f^3.\cos.3\varphi + \text{&c.}) \\ \pm a(\alpha f.\sin.\varphi + \beta ff.\sin.2\varphi + \gamma f^3.\sin.3\varphi + \text{&c.})\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

Man setze, die Rechnung abzukürzen,

$$\begin{array}{rl} A + Bf.\cos.\varphi + Cff.\cos.2\varphi + Df^3\cos.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{P} \\ Bf.\sin.\varphi + Cff.\sin.2\varphi + Df^3\sin.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{p} \\ \alpha + \beta f.\cos.\varphi + \gamma ff.\cos.2\varphi + \delta f^3.\cos.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{Q} \\ \beta f.\sin.\varphi + \gamma ff.\sin.2\varphi + \delta f^3.\sin.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{q} \\ \alpha f.\cos.\varphi + \beta ff.\cos.2\varphi + \gamma f^3.\cos.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{R} \\ \alpha f.\sin.\varphi + \beta ff.\sin.2\varphi + \gamma f^3.\sin.3\varphi + \text{&c.} & = \mathfrak{r} \end{array}$$

so ist $\mathfrak{P} \pm \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} \pm a\mathfrak{r}\sqrt{-1}$

*) Man setzt nemlich zuvörderst wieder

$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{&c.}$, und

$Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{&c.}$,

und darauf substituirt man in diesen Werthen für z^0, z^1, z^2, z^3, &c. die dafür aus $z^n = f^n(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.n\varphi)$ sich ergebende Werthe.

§. 203.

Wegen der doppelten Zeichen erhält man hieraus die beyden Gleichungen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + a\mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{q} + a\mathfrak{r}$$ *)

und hieraus bekommen die unbekannten Größen $\mathfrak{A}$ und a diese Bestimmung

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}, \text{ und } a = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}}$$ **)

Wenn

Wenn also der Bruch $\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)\,Z}$ gegeben ist, so findet man den daher entstehenden Partial-Bruch $\frac{A + az}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$ auf folgende Art. Man setzt $f = \frac{p}{q}$, und nachdem man die einzeln Glieder entwickelt hat, so sucht man dadurch

daß man $z^n = f^n.\cos.n\varphi$ setzt, $M = \mathfrak{P}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\varphi$ " $M = \mathfrak{p}$
" " $z^n = f^n.\cos.n\varphi$ " $Z = \mathfrak{Q}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\varphi$ " $Z = \mathfrak{q}$
" " $z^n = f^n.\cos.n\varphi$ " $zZ = \mathfrak{R}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\varphi$ " $zZ = \mathfrak{r}$

Hat man auf diese Art die Werthe $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, gefunden, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \text{ und } \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

*) Es ist nemlich

$\mathfrak{P} + \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{R} + \mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}$
$\mathfrak{P} - \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{R} - \mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}$
folglich $2\mathfrak{P} = 2\mathfrak{A}\mathfrak{Q} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{R}$, und $2\mathfrak{p} = 2\mathfrak{A}\mathfrak{q} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{r}$.

**) Denn aus der zweyten Gleichung ist, $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$, und dieser Werth giebt, wenn man ihn in die erste Gleichung bringt, $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{R} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\mathfrak{R}}{\mathfrak{r}}$, oder $\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\mathfrak{R}$.

Ferner ist aus der ersten Gleichung, $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{a}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}}$, und bringt man diesen Werth in die zweyte Gleichung, so bekommt man $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}} + \mathfrak{a}\mathfrak{r}$, oder $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{a}\mathfrak{Q}\mathfrak{r}$.

Erstes

Erstes Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z4)}$ gegeben, um daraus den Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1-z+zz$, entsteht, zu finden, und dieser Partial-Bruch sey $= \frac{A+az}{1-z+zz}$. Vergleicht man diesen Faktor $1-z+zz$ mit der allgemeinen Form $pp-2pqz.\cos.\varphi+qqzz$, so findet man $p=1$; $q=1$; und $\cos.\varphi=\frac{1}{2}$, und daraus wird $\varphi=60°=\frac{\pi}{3}$. Da nun $M=zz$; $Z=1+z4$, und $f=1$ ist: so ist

$$\mathfrak{P}=\cos.\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2};\ p=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\cos.\frac{4}{3}\pi=\frac{1}{2};\ q=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{R}=\cos.\frac{\pi}{3}+\cos.\frac{5\pi}{3}=1;\ r=0.$$

Hieraus findet man $A=-1$; und $a=0$, und der gesuchte Bruch ist daher $\frac{-1}{1-z+zz}$. Das Complement hiervon ist $\frac{1+z+zz}{1+z4}$, *) und da dessen Nenner $1+z4$ die Faktoren $1+z\sqrt{2}+zz$, und $1-z\sqrt{2}+zz$ hat, so kann man dabey diese Entwickelung von neuem unternehmen. Es wird aber alsdann $\phi=\frac{\pi}{4}$, und f im ersten Falle $=-1$, und im letzten $=+1$.

*) Denn wenn man die beyden Brüche $\frac{-1}{1-z+zz}$ und $\frac{1+z+zz}{1+z4}$ addirt, so erhält man zur Summe $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z4)}$.

Zweytes Exempel.

Es sey also der Bruch

$$\frac{1 + z + zz}{(1 + z\sqrt{2} + zz)\,(1 - z\sqrt{2} + zz)}$$

gegeben, wo $M = 1 + z + zz$, und für den ersten Faktor $f = -1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, und $Z = 1 - z\sqrt{2} + zz$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{P} = 1 - \text{cos.}\,\frac{\pi}{4} + \text{cos.}\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{p} = -\text{sin.}\,\frac{\pi}{4} + \text{sin.}\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}.\,\text{cos.}\,\frac{\pi}{4} + \text{cos.}\,\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{q} = +\sqrt{2}.\,\text{sin.}\,\frac{\pi}{4} + \text{sin.}\,\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{R} = -\text{cos.}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}.\,\text{cos.}\,\frac{2\pi}{4} - \text{cos.}\,\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathfrak{r} = -\text{sin.}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}.\,\text{sin.}\,\frac{2\pi}{4} - \text{sin.}\,\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2};$$

woher denn ferner $\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -4\sqrt{2}$; $\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ und $a = 0$ wird. Es erwächst daher aus dem Faktor des Nenners, $1 + z\sqrt{2} + zz$, dieser Partial-Bruch $\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + zz}$ und aus dem andern Faktor erhält man auf eine ähnliche Art diesen, $\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + zz}$. Folglich sind die Partial-Brüche, worin die anfänglich gegebene Funktion $\frac{zz}{(1 - z + zz)\,(1 + z^4)}$ aufgelöset werden kann, $\frac{-1}{1 - z + zz}$

$$+ \frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + zz} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + zz}.$$

Drit-

Drittes Exempel.

Es sey der Bruch

$$\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$$

gegeben. Setzt man hier den Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1 - \frac{8}{5}z + zz$, entspringt, $= \frac{A + az}{1 - \frac{8}{5}z + zz}$,

so wird $p = 1$; $q = 1$; und $\cos. \varphi = \frac{4}{5}$: woraus $f = 1$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 + 2z + 3zz$ wird. Weil aber hier das Verhältniß des Winkels φ zum rechten Winkel nicht bekannt ist, so muß man die Sinus und Cosinus seiner Vielfachen besonders suchen. Da nun

$\cos. \varphi = \frac{4}{5}$; so wird $\sin. \varphi = \frac{3}{5}$

$\cos. 2\varphi = \frac{7}{25}$; $\sin. 2\varphi = \frac{24}{25}$

$\cos. 3\varphi = \frac{-44}{125}$; $\sin. 3\varphi = \frac{117}{125}$;

und also

$P = 1 + 2. \frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$

$p = 2. \frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$

$Q = 1 + 2. \frac{4}{5} + 3. \frac{7}{25} = \frac{86}{25}$

$q = 2. \frac{3}{5} + 3. \frac{24}{25} = \frac{102}{25}$

$R = \frac{4}{5} + 2. \frac{7}{25} - 3. \frac{44}{125} = \frac{38}{125}$

$[r] = \frac{3}{5} + 2. \frac{24}{25} + 3. \frac{117}{125} = \frac{666}{125}$, und folglich

$$\mathfrak{Q}\,r - q\,\mathfrak{R} = \frac{53400}{25.125} = \frac{2136}{125}.$$

Folglich ist.

$$\mathfrak{A} = \frac{1836}{2136} = \frac{153}{178};\ \text{und}\ a = -\frac{540}{2136} = -\frac{45}{178}.$$

Es ist also der Bruch, welcher aus dem Faktor $1 - \frac{8}{5}z + zz$ erwächst,

$$\frac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz}.$$

Sucht man auf eine ähnliche Art den Bruch, der zu dem andern Faktor gehört, so wird $p = 1$; $q = -\sqrt{3}$; $\cos.\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 - \frac{8}{5}z + zz$. Aus $\cos.\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ aber findet man

$$\cos.\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \sin.\ \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos.2\varphi = -\frac{1}{3};\quad \sin.2\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos.3\varphi = -\frac{5}{3\sqrt{3}};\quad \sin.3\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot - \frac{1}{3} = \frac{64}{45}$$

$$q = + \frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$\mathfrak{R} =$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5\cdot 3}\cdot -\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot -\frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5\cdot 3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

und also $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{R} = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$, folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{100}{712} = \frac{25}{178};\quad \mathfrak{a} = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}.$$

Die Partial-Brüche, worin der Bruch

$$\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$$ aufgelöset werden

kann, sind demnach $\frac{9(17-5z):178}{1 - \frac{8}{5}z + zz} + \frac{5(5+27z):178}{1 + 2z + 3zz}$.

§. 204.

Es können aber die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ bestimmt werden. Denn da

$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta f.\ \text{cos.}\,\varphi + \gamma f^2.\ \text{cos.}\,2\varphi + \delta f^3.\ \text{cos.}\,3\varphi + \text{&c.}$

$\mathfrak{q} = \quad \beta f.\ \text{sin.}\,\varphi + \gamma f^2.\ \text{sin.}\,2\varphi + \delta f^3.\ \text{sin.}\,3\varphi + \text{&c.}$

ist: so wird

$\mathfrak{Q}\,\text{cos.}\,\varphi - \mathfrak{q}.\,\text{sin.}\,\varphi = \alpha.\,\text{cos.}\,\varphi + \beta f.\,\text{cos.}\,2\varphi + \gamma f^2.\,\text{cos.}\,3\varphi + \text{&c.}$

und also

$\mathfrak{R} = f(\mathfrak{Q}.\ \text{cos.}\,\varphi - \mathfrak{q}.\ \text{sin.}\,\varphi)$

Ferner ist

$\mathfrak{Q}.\,\text{sin.}\,\varphi + \mathfrak{q}.\,\text{cos.}\,\varphi = \alpha.\,\text{sin.}\,\varphi + \beta f.\,\text{sin.}\,2\varphi + \gamma ff.\,\text{sin.}\,3\varphi + \text{&c.}$

folglich

$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{Q}.\ \text{sin.}\,\varphi + \mathfrak{q}.\ \text{cos.}\,\varphi).$

Hieraus fließt weiter

$\mathfrak{Q}\,\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + \mathfrak{q}\mathfrak{q})\,f.\,\text{sin.}\,\varphi$

$\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\,f.\,\text{sin.}\,\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\,f.\,\text{cos.}\,\varphi.$

Folglich ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} + \frac{\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} \cdot \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{P}q + p\mathfrak{Q}}{(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\,f.\sin.\varphi}$$

Es entsteht also aus dem Faktor des Renners $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ dieser Partial-Bruch,

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\,f.\sin.\varphi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})(f.\cos.\varphi - z)}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\,f.\sin.\varphi}$$

oder, da $f = \frac{p}{q}$ ist, dieser:

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\,p.\sin.\varphi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})(p.\cos.\varphi - qz)}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\,p.\sin.\varphi}.$$

§. 205.

Dieser Partial-Bruch entspringt also aus dem Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ des Renners der Funktion $\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)Z}$, und die Buchstaben $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ werden auf folgende Art aus den Funktionen M und Z gefunden. Dadurch daß man

$$z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \cos.n\varphi$$ setzt, wird $M = \mathfrak{P}$

und $Z = \mathfrak{Q}$; und dadurch

daß man

$$z^n = \frac{p^n}{q^n} \cdot \sin.n\varphi$$ setzt, wird $M = \mathfrak{p}$

und $Z = \mathfrak{q}$.

Es müssen aber die Funktionen M und Z vor dieser Substitution entwickelt werden, so daß sie diese Form erhalten,

$$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{&c.}$$

und $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{&c.}$

und dann wird

$$P = A + B.\frac{p}{q}.\cos.\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\cos.2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\cos.3\varphi + \text{&c.}$$

$$p = \quad B.\frac{p}{q}.\sin.\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\sin.2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\sin.3\varphi + \text{&c.}$$

$$Q = \alpha + \beta.\frac{p}{q}.\cos.\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}.\cos.2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}.\cos.3\varphi + \text{&c.}$$

$$q = \quad \beta.\frac{p}{q}.\sin.\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}.\sin.2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}.\sin.3\varphi + \text{&c.}$$

§. 206.

Es erhellet indeß aus dem Vorhergehenden, daß diese Auflösung nicht statt finden kann, wenn die Funktion Z eben denselben Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ in sich enthält. Denn in diesem Falle würde Z in der Gleichung $M = AZ + aZz$, wenn man darin $z^n = f^n(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.n\varphi)$ setzte, verschwinden, und folglich nichts weiter geschlossen werden können. Wenn daher der Nenner der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2$ oder eine noch höhere Potestät enthält, so ist ein anderer besonderer Weg nöthig, um die Auflösung zu Stande zu bringen. Es sey also $N = (pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2 Z$, und die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2$ entspringen, seyen $\frac{A + az}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2} + \frac{B + bz}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$, wo folglich die beständigen Größen A, a, B, b, zu bestimmen sind.

§. 207.

Dies vorausgesetzt, so muß der Ausdruck

$$\frac{M - (A + az)Z - (B + bz)Z(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2}$$

eine ganze Funktion, und also der Zähler durch den Nenner theilbar seyn. [§. 43.] Es ist also zuvörderst der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - azZ$ durch $pp - 2pqz.\ cos.\ \varphi + qqzz$ theilbar. Da dies der vorhergehende Fall ist, so werden auch hier die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und a eben so wie vorhin bestimmt. Wenn man daher

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ cos.\ n\varphi$ setzt, so wird $M = \mathfrak{P}$

und $Z = \mathfrak{R}$; und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ sin.\ n\varphi$ setzt, so wird $M = p$

und $Z = n$.

Ist nun dieses geschehen, so wird nach der §. 204 gegebnen Regel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R} + pn}{\mathfrak{R}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{P}n - p\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2 + n^2} \cdot \frac{cos.\ \varphi}{sin.\ \varphi}, \text{ und}$$

$$a = -\frac{\mathfrak{P}n + p\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2 + n^2} \cdot \frac{q}{p.\ sin.\ \varphi}.$$

§. 208.

Hat man auf diese Art $\mathfrak{A}$ und a gefunden, so wird $\frac{M - (\mathfrak{A} + az)Z}{pp + 2pqz.\ cos.\ \varphi + qqzz}$ eine ganze Funktion [§. 43] welche wir $= P$ setzen wollen. Nun muß ferner $P - \mathfrak{B}Z - bzZ$ durch $pp - 2pqz.\ cos.\ \varphi + qqzz$ theilbar seyn; und da dieser Ausdruck dem vorhergehenden ähnlich ist, so kann man, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ cos.\ n\varphi$ setzt, $P = \mathfrak{R}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ sin.\ n\varphi$ setzt, $P = r$ nehmen, und dann ist

$\mathfrak{B} =$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + rn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{R}n - r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi}, \text{ und}$$

$$b = -\frac{\mathfrak{R}n + r\mathfrak{R}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{q}{p.\sin.\phi}.$$

§. 209.

Hieraus läßt sich schon allgemein einsehen, wie man bey dieser Auflösung verfahren muß, wenn der Nenner der gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^k$ hat. Denn es sey $N = (pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^k Z$, so daß also dieser Bruch

$$\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^k Z}$$

aufzulösen ist. Es gebe ferner der Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^k$ die Partial-Brüche

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^k} + \frac{\mathfrak{B} + bz}{(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^{k-1}} +$$

$$\frac{\mathfrak{C} + cz}{(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^{k-2}} + \frac{\mathfrak{D} + dz}{(pp - 2pqz.\cos.\phi + qqzz)^{k-3}} + \text{&c.}$$

Setzt man nun, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\cos. n\phi$ nimmt, $M = \mathfrak{M}$

und $Z = \mathfrak{N}$, und, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\sin. n\phi$ nimmt, $M = m$

und $Z = n$;

so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N} + mn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{M}n - m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi}, \text{ und}$$

$$a = -\frac{\mathfrak{M}n + m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{q}{p.\sin.\phi}.$$

Nun sey $\frac{M - (\mathfrak{A} + az)Z}{pp - 2pqz.\ cos.\ \phi + qqzz} = P$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ cos.\ n\ \phi$ setzt, $P = \mathfrak{P}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ sin.\ n\ \phi$ setzt, $P = p$;

so ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + pn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{P}n - p\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{cos.\ \phi}{sin.\ \phi}, \text{ und}$$

$$b = -\frac{\mathfrak{P}n + p\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{q}{p.\ sin.\ \phi}.$$

Dann sey $\frac{P - (\mathfrak{B} + bz)Z}{pp - 2pqz.\ cos.\ \phi + qqzz} = Q$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ cos.\ n\ \phi$ setzt, $Q = \mathfrak{Q}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ sin.\ n\ \phi$ setzt, $Q = q$;

so ist

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N} + qn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{Q}n - q\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{cos.\ \phi}{sin.\ \phi}, \text{ und}$$

$$c = -\frac{\mathfrak{Q}n + q\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{q}{p.\ sin.\ \phi}$$

Ferner sey $\frac{Q - (\mathfrak{C} + cz)Z}{pp - 2pqz.\ cos.\ \phi + qqzz} = R$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ cos.\ n\ \phi$ setzt, $R = \mathfrak{R}$, wenn man aber

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\ sin.\ n\ \phi$ setzt, $R = r$;

so ist

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + rn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{R}n - r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{cos.\ \phi}{sin.\ \phi} \text{ und}$$

$$d = -\frac{\mathfrak{R}n + r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2}.\ \frac{q}{p.\ sin.\ \phi}.$$

Auf

Auf diese Art muß man nun fortgehen, bis man den Zähler des letzten Bruchs, dessen Nenner $pp - 2pqz.\ cos.\varphi + qqzz$ ist, gefunden hat.

Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{z - z^3}{(1+zz)^4 + (1+z4)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, welche aus dem Faktor des Nenners, $(1+zz)^4$, entstehen, seyen

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{(1+zz)^4} + \frac{\mathfrak{B} + bz}{(1+zz)^3} + \frac{\mathfrak{C} + cz}{(1+zz)^2} + \frac{\mathfrak{D} + dz}{1+zz}.$$

Vergleicht man nun, so wird $p = 1$; $q = 1$; $cos.\varphi = 0$, und also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Ferner ist $M = z - z^3$, und $Z = 1 + z4$. Hieraus ergiebt sich $\mathfrak{M} = 0$; $m = 2$; $\mathfrak{N} = 2$; $n = 0$; und $sin.\varphi = 1$; und es wird folglich

$$\mathfrak{A} = -\frac{4}{4}.0 = 0; \text{ und } a = 1.$$

Nunmehr ist also $\mathfrak{A} + az = z$; und daher wird denn $P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1+zz} = -z^3$, und $\mathfrak{P} = 0$, $p = 1$.

Hieraus erhält man

$$\mathfrak{B} = 0; \text{ und } b = \tfrac{1}{2}.$$

Folglich ist $\mathfrak{B} + bz = \frac{1}{2}z$; und $\mathfrak{Q} = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1+zz}$ $= -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$. Hieraus wird $\mathfrak{Q} = 0$, und $q = 0$; folglich

$$\mathfrak{C} = 0; \text{ und } c = 0$$

Endlich ist nun $R = -\frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1+zz} = -\frac{1}{2}z$, woraus $\mathfrak{R} = 0$; und $r = -\frac{1}{2}$ folgt, so daß also $\mathfrak{D} = 0$, und $d = -\frac{1}{4}$ wird. Es sind also die gesuchten Brüche $\frac{z}{(1+zz)^4} + \frac{z}{2(1+zz)^3} - \frac{z}{4(1+zz)}$. Der

Zähler

Zähler des übrigen Bruches aber ist $= S = \frac{R - (\mathfrak{D} + dz)Z}{1 + zz}$

$= -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3$, und er selbst wird also $= \frac{-z + z^3}{4(1 + z4)}$ seyn.

§. 210.

Auf diese Weise findet man daher zugleich den Bruch des Complements, welcher, mit den gefundenen Brüchen zusammengenommen, die gegebene gebrochene Funktion hervorbringt. Hat man nemlich von dem Bruche

$$\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^k Z}$$

alle Partial-Brüche gefunden, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^k$ entspringen, so ist, wenn man die Reihe der Werthe P, Q, R, S, T, welche man zur Findung jener Partial-Brüche suchen mußte, weiter fortsetzt, derjenige von den Werthen P, Q, R, S, T, welcher dem letzten, den man zur Findung der Zähler nöthig hatte, folgt, der Zähler des übrigen Bruchs mit dem Nenner Z. Ist nemlich $k = 1$, so ist der übrige Bruch $\frac{P}{Z}$; ist $k = 2$, so ist derselbe $\frac{Q}{Z}$; ist $k = 3$; so ist er $\frac{R}{Z}$ u. s. w. Hat man aber diesen übrigen Bruch, dessen Nenner Z ist, gefunden, so kann man ihn vermittelst der bisherigen Regeln weiter auflösen.

Drey-

Dreyzehntes Capitel.

Von den wiederkehrenden Reihen.

§. 211.

Zu diesen Reihen, welche Moivre wiederkehrende zu nennen pflegt, wollen wir hier alle die Reihen rechnen, die durch die Entwickelung einer jeden gebrochenen Funktion durch eine wirkliche Division entstehen. Es ist bereits [Cap. 4.] von denselben gezeigt worden, daß ein jedes ihrer Glieder aus einigen vorhergehenden nach einem beständigen Gesetze, welches von dem Nenner der gebrochenen Funktion abhängt, bestimmt wird. Da nun [in dem vorhergehenden und dem zweyten Capitel von §. 39. an] gezeigt worden ist, wie man jede gebrochene Funktion in andere einfachere auflöset: so können dadurch auch die wiederkehrenden Reihen in andere einfachere aufgelöset werden. Die Art und Weise, wie dieses geschehen kann, soll in dem gegenwärtigen Capitel erklärt werden.

§. 212.

Es sey die ächte gebrochene Funktion

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{&c.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{&c.}}$$

gegeben, und die wiederkehrende Reihe, worin dieselbe durch die Division verwandelt wird, sey

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{&c.}$$

so ist aus dem vierten Capitel bekannt, nach was für einem Gesetze

Gesetze die Coefficienten A, B, C, D, E, F ꝛc. fortschreiten. Wird nun die gegebene Funktion in die einfachen Brüche, woraus sie besteht, aufgelöset, und ein jeder dieser Brüche in eine wiederkehrende Reihe verwandelt: so ist offenbar, daß die Summe aller dieser Reihen, die aus den Partial-Brüchen entstanden sind, der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ ꝛc gleich seyn muß. Es geben aber die Partial-Brüche, welche zu finden das vorhergehende und das zweyte Capitel eine vollständige Anweisung enthält, Partial-Reihen, deren Natur man, weil sie so einfach sind, leicht erkennt; und da die Summe aller dieser Partial-Reihen der Total-Reihe gleich ist, so kann man sich dadurch auch den Weg zu einer vollständigen Kenntniß von dieser erleichtern.

§. 213.

Es seyen also die wiederkehrenden Reihen, die aus den Partial-Brüchen entstehen, folgende:

$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ ꝛc.
$a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + e'z^4 + f'z^5 +$ ꝛc.
$a'' + b''z + c''z^2 + d''z^3 + e''z^4 + f''z^5 +$ ꝛc.
$a''' + b'''z + c'''z^2 + d'''z^3 + e'''z^4 + f'''z^5 +$ ꝛc.
u. s. w.

Da nun diese Reihen zusammengenommen der Reihe

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ ꝛc.

gleich seyn müssen, so muß auch nothwendiger Weise

$A = a + a' + a'' + a''' +$ ꝛc.
$B = b + b' + b'' + b''' +$ ꝛc.
$C = c + c' + c'' + c''' +$ ꝛc.
$D = d + d' + d'' + d''' +$ ꝛc.
u. s. w.

seyn. Kann man daher in jeder der aus den Partial-Brüchen

chen entstandenen Reihen den Coefficienten der Potestät z^n bestimmen, so findet man in der Summe aller dieser Coefficienten den Coefficienten eben dieser Potestät z^n in der wiederkehrenden Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{&c.}$

§. 214.

Sollte hier etwa der Zweifel entstehen: Ob auch daraus, daß folgende zwey Reihen gleich sind,

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{&c.} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \text{&c.}$

folge, daß $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$, u. s. f., oder daß die Coefficienten von einerley Potestäten immer einander gleich seyen? so darf man nur überlegen, daß die Gleichheit jener Reihen statt finden muß, was auch die veränderliche Größe z für einen Werth erhält. Man setze also $z = 0$, und dann fällt in die Augen, daß $A = \mathfrak{A}$ ist. Zieht man nun diese gleichen Größen auf beyden Seiten ab, und dividirt überdies die übrig bleibende Gleichung durch z, so bekömmt man $B + Cz + Dz^2 + \text{&c.} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \text{&c.}$ und daraus folgt $B = \mathfrak{B}$. Auf eine ähnliche Art läßt sich aber auch zeigen, daß $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$, &c. ist.

§. 215.

Wir wollen also die Reihen betrachten, die aus den Partial-Brüchen einer gegebenen gebrochenen Funktion entstehen. Hier ist zuvörderst bekannt, daß der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$ diese Reihe giebt: $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \mathfrak{A}p^3z^3 + \text{&c.}$, deren allgemeines Glied $= \mathfrak{A}p^nz^n$ ist. Man nennt nemlich dergleichen Ausdruck ein allgemeines Glied, weil man daraus, wenn man für n nach und nach alle Zahlen setzt, alle Glieder der Reihe erhält. Ferner giebt der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2}$

diese

diese Reihe: $A + 2Apz + 3Ap^2z^2 + 4Ap^3z^3 + \text{ꝛc.}$, deren allgemeines Glied $= (n+1)Ap^nz^n$ ist. Eben so bekommt man aus dem Bruche $\frac{A}{(1-pz)^3}$ die Reihe: $A + 3Apz + 6Ap^2z^2 + 10Ap^3z^3 + \text{ꝛc.}$ deren allgemeines Glied $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} Ap^nz^n$ ist. Ueberhaupt aber giebt der Bruch $\frac{A}{(1-pz^k}$ diese Reihe: $A + kApz + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} Ap^2z^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Ap^3z^3 + \text{ꝛc.}$ deren allgemeines Glied $= \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1)} Ap^nz^n$ ist. Wenn man die Reihe fortsetzt, und das allgemeine Glied aus ihr selbst nimmt, so findet man solches $=$ $\frac{k(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} Ap^nz^n$; es ist aber dieser Ausdruck dem vorhergehenden gleich, so wie solches in die Augen fällt, wenn man überzwerg multiplicirt. Denn es wird alsdann $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1) \ldots (n+k-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)\, k \ldots (k+n-1)$ welches eine identische Gleichung ist.

§. 216.

So oft man daher bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen auf Partial-Brüche von der Form $\frac{A}{(1-pz)^k}$ kommt, so oft kann man auch das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, die aus der gegebenen gebrochenen Funktion entsteht, oder der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ꝛc.}$ angeben; denn es ist dasselbe die Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, die sich aus den Partial-Brüchen ergeben.

Erstes Exempel.

Das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe zu finden, die aus dem Bruche $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ entspringt.

Die Reihe, die aus diesem Bruche entsteht, ist $1+0z+2zz+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+$ &c. Um den Coefficienten der allgemeinen Potestät z^n zu finden löse man den Bruch $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ in $\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ auf. Daraus erhält man das gesuchte allgemeine Glied $= (\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}.2^n)z^n = \frac{2^n \pm 2}{3} z^n$, wo das Zeichen + gilt, wenn n eine gerade, und das Zeichen —, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Zweytes Exempel.

Das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe zu finden, die aus dem Bruche $\frac{1-z}{1-5z+6zz}$ entspringt, und welche $1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+$ &c. ist.

Da der Nenner des gegebenen Bruchs $= (1-2z)(1-3z)$ ist, so zerfällt der Bruch in die beyden Partial-Brüche $\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z}$; und daraus erhält man zum allgemeinen Nenner $2.3^n z^n - 2^n z^n = (2.3^n - 2^n)z^n$.

Drittes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+$ &c., welche aus dem Bruche $\frac{1+2z}{1-z-zz}$ entspringt, zu finden.

Da die Faktoren des Renners $1 - (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})z$ und $1 - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})z$ sind, so bekommt man, wenn man den gegebenen Bruch auflöset, $\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})z} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})z}$; und es ist daher das gesuchte allgemeine Glied

$$= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} z^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} z^n.$$

Viertes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe

$a + (\alpha a + b)z + (\alpha^2 a + \alpha b + \beta a)z^2 + (\alpha^3 a + \alpha^2 b + 2\alpha\beta a + \beta b)z^3 + \text{ꝛc.}$, welche sich aus dem entwickelten Bruche $\frac{a + bz}{1 - \alpha z - \beta zz}$ ergiebt, zu finden.

Durch die Auflösung des gegebenen Bruchs bekommt man diese beyden Partial-Brüche:

$$\frac{(a(\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}) + 2b) : 2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{1 - (\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})z} +$$

$$\frac{(a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} - \alpha) - 2b) : 2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{1 - (\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})z}.$$ Folglich ist das allgemeine Glied

$$\frac{a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} + \alpha) + 2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}} (\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})^n z^n +$$

$$\frac{a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} - \alpha) - 2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}} (\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})^n z^n;$$ und

Hieraus lassen sich die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden

renden Reihen, worin jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird, leicht finden.

Fünftes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe $1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 4z^7 + \text{ꝛc.}$, welche aus dem Bruche $\frac{1}{1-z-zz+z^3} = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$ entspringt, zu finden.

Hier ist zwar das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, so offenbar, daß es beym ersten Anblick in die Augen fällt. Da indeß $\frac{1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}}{1+z}$ ist: so erhält man daher das allgemeine Glied $\frac{1}{2}(n+1)z^n + \frac{1}{4}z^n + \frac{1}{4}(-1)^n z^n = \frac{2n+3 \pm 1}{4} z^n$, wo das obere Zeichen genommen werden muß, wenn n eine gerade, und das untere, wenn n eine ungerade Zahl ist.

§. 217.

Auf diese Art kann man die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden Reihen finden, weil man alle Brüche in dergleichen einfache Partial-Brüche auflösen kann. Will man indeß die imaginären Ausdrücke vermeiden, so wird man öfters auf Partial-Brüche von dieser Form kommen: $\frac{A+Bpz}{1-2pz.\cos.\varphi+ppzz}$; $\frac{A+Bpz}{(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^2}$; $\frac{A+Bpz}{(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k}$; und wir müssen daher untersuchen, was aus ihrer Entwickelung für Reihen entstehen. Zuvörderst giebt nun zwar der Bruch $\frac{A}{1-2pz.\cos.\varphi+ppzz}$,

wenn man denselben entwickelt, weil $\cos. n\varphi = 2\cos.\varphi.\cos.(n-1)\varphi - \cos.(n-2)\varphi$ (* ist,

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz.\cos.\varphi + 2\mathfrak{A}p^2z^2.\cos.2\varphi + 2\mathfrak{A}p^3z^3.\cos.3\varphi$$
$$+ \mathfrak{A}p^2z^2 \qquad + 2\mathfrak{A}p^3z^3.\cos.\varphi$$
$$+ 2\mathfrak{A}p^4z^4.\cos.4\varphi$$
$$+ 2\mathfrak{A}p^4z^4\cos.2\varphi \text{ &c. (**}$$
$$+ \mathfrak{A}p^4z^4$$

aber das allgemeine Glied dieser Reihe ist nicht so leicht zu entdecken.

*) Aus diesem in der Anmerkung zum 129sten §. bewiesenen Satze folgt, daß

$$2\cos.\varphi\cos.(n-1)\varphi = \cos.n\varphi + \cos.(n-2)\varphi,$$

so wie aus den speciellen Sätzen, aus welchen er abgeleitet worden, daß

$$2\cos.\varphi.\cos.\varphi = \cos.2\varphi + 1$$
$$2\cos.\varphi.\cos.2\varphi = \cos.3\varphi + \cos.\varphi$$
$$2\cos.\varphi.\cos.3\varphi = \cos.4\varphi + \cos.2\varphi$$
$$2\cos.\varphi.\cos.4\varphi + = \cos.5\varphi + \cos.3\varphi$$
$$\text{u. s. w.}$$

ist, und in dieser Gestalt werden diese Bestimmungen hier eigentlich gebraucht.

**) Aus der Vergleichung des Bruchs $\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}$ mit dem Bruche $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ §. 61. wird, $a = \mathfrak{A}$, $b = 0$, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -2\cos.\varphi$, und folglich $R = 2\cos.\varphi.Q - P$, wenn P, Q und R auch hier die ihnen §. 61. beygelegte Bedeutung behalten. Setzt man daher

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 \text{ &c.}$$

und gebraucht man zugleich die in der vorhergehenden Anmerkung enthaltenen Bestimmungen, so wird

$A = \mathfrak{A}$

$B = 2A.\cos.\phi = 2\mathfrak{A}.\cos.\phi$

$C = 2B.\cos\phi - A = 2\mathfrak{A}.2.\cos.\phi.\cos.\phi - \mathfrak{A} =$
$2\mathfrak{A}.\cos.2\phi + \mathfrak{A}$

$D = 2C.\cos.\phi - B = 2\mathfrak{A}.2\cos.\phi.\cos.2\phi =$
$2\mathfrak{A}.\cos.3\phi + 2\mathfrak{A}.\cos.\phi$

$E = 2D.\cos.\phi - C = 2\mathfrak{A}.2\cos.\phi.\cos.3\phi + \mathfrak{A} =$
$2\mathfrak{A}.\cos.4\phi + 2.\mathfrak{A}.\cos.2\phi + \mathfrak{A}$

u. s. w.

und also die angenommene Reihe der vom V. im §. mitgetheilten gleich.

§. 218.

Wir wollen also, um zu unserm Zwecke zu gelangen, diese beyden Reihen betrachten

$Ppz.\sin.\phi + Pp^2z^2.\sin.2\phi + Pp^3z^3.\sin.3\phi + Pp^4z^4.\sin.4\phi + \text{ꝛc.}$
$Q + Qpz\cos.\phi + Qp^2z^2.\cos.2\phi + Qp^3z^3\cos.3\phi + Qp^4z^4.\cos.4\phi + \text{ꝛc.}$

welches ebenfalls zwey Reihen sind, die man aus Brüchen, deren Nenner $1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz$ ist, durch die Entwickelung erhalten kann. Die erste Reihe nemlich entspringt aus dem Bruche $\frac{Ppz.\sin.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ *), und die andere aus diesem, $\frac{Q - Qpz.\cos.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ **). Addirt man daher diese beyden Brüche, so giebt ihre Summe $\frac{Q + Ppz.\sin.\phi - Qpz.\cos.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$, eine Reihe, deren allgemeines Glied $= (P\sin.n\phi + Q\cos.n\phi)p^nz^n$ ist; und setzt man den Bruch $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ der gedachten Summe gleich, so wird $Q = \mathfrak{A}$, und $P = \mathfrak{A}.\cot.\phi + \mathfrak{B}.\operatorname{cosec}.\phi$ ***). Folglich ist das allgemeine Glied der

Reihe, die aus dem Bruche $\frac{A + Bpz}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}$ entspringt =

$$\frac{A.\cos.\varphi.\sin.n\varphi + B.\sin.n\varphi. + A.\sin.\varphi\cos.n\varphi}{\sin.\varphi} p^n z^n = \text{****)}$$

$$\frac{A\ \sin.(n+1)\varphi + B\ \sin.n\varphi}{\sin.\varphi} p^n z^n. \text{*****)}$$

*) Es ist in der Anmerkung zum 129sten §. bewiesen worden, daß

$$\sin.n\varphi = 2\cos.\varphi.\sin.(n-1)\varphi - \sin.(n-2)\varphi$$

ist. Setzt man daher

$$\frac{Ppz.\sin.\varphi}{1 - 2pz.\cos\varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{&c.}$$

so wird, §. 61.

$A = o$

$B = P\sin.\varphi$

$C = 2B.\cos.\varphi = 2P.\cos.\varphi\sin.\varphi = P.\sin.2\varphi$

$D = 2C.\cos.\varphi - B = P(2\cos.\varphi.\sin.2\varphi - \sin.\varphi)$
$= P.\sin.3\varphi$

$E = 2D.\cos.\varphi - C = P(2\cos.\varphi\ \sin.3\varphi - \sin.2\varphi)$
$= P.\sin.4\varphi$
u. s. w.

und also $A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{&c.}$
$= Ppz.\sin.\varphi + Pp^2z^2.\sin.2\varphi + Pp^3z^3.\sin.3\varphi +$
$Pp^4z^4.\sin.4\varphi$ &c.

**) Da $\cos n\varphi = 2\cos.\varphi\cos.(n-1)\varphi - \cos.(n-2)\varphi$ ist, §. 129, so wird, wenn man

$$\frac{Q - Qpz.\cos.\varphi}{1 - pz.\cos.\varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{&c.}$$

setzt, und A, B, C, D, E, &c. wieder nach §. 61. bestimmt,

$A = Q$,

$B = -Q.\cos.\varphi + 2Q.\cos.\varphi = Q.\cos.\varphi$

$C = 2B.\cos.\varphi - A = Q(2\cos.\varphi.\cos.\varphi - 1) = Q.\cos.2\varphi$

$D = 2C.\cos.\varphi - B = Q(2\cos.\varphi.\cos.2\varphi - \cos.\varphi)$
$= Q.\cos.3\varphi$

$E = 2D.\cos.\varphi - C = Q(2\cos.\varphi.\cos.3\varphi - \cos.2\varphi)$
$= Q.\cos.4\varphi$

u. s. w.

und folglich $A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{&c.}$
$= Q + Qpz.\cos.\varphi + Qp^2z^2.\cos.2\varphi + Qp^3z^3 \times$
$\cos.3\varphi + Qp^4z^4.\cos.4\varphi + \text{&c.}$

***) Aus $B = P.\sin.\varphi - Q.\cos.\varphi$ folgt nemlich $P = \frac{B}{\sin.\varphi} + \frac{Q.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$, und hieraus $P = A.\cot.\varphi + B.\operatorname{cosec}.\varphi$, weil $Q = A$; $\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = \cot.\varphi$, und $\frac{1}{\sin.\varphi} = \operatorname{cosec}.\varphi$ ist.

****) Man findet diesen Ausdruck aus $(P.\sin.n\varphi + Q.\cos.n\varphi)p^nz^n$, wenn man für P und Q die gefundenen Werthe setzt, jedes Glied durch $\sin.\varphi$ multiplicirt und dividirt, und $\cos.\varphi$ für $\sin.\varphi.\cot.\varphi$, und 1 für $\sin.\varphi.\operatorname{cosec}.\varphi$ schreibt.

*****) Weil $\cos.\varphi.\sin.n\varphi + \sin.\varphi\cos.n\varphi = \sin.(n+1)\varphi$ ist, §. 128.

§. 219.

Wenn der Nenner des gegebenen Bruchs eine Potestät oder $(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^k$ ist, so erleichtert man sich die Findung des allgemeinen Gliedes, wenn man den Bruch in folgende zwey obgleich imaginäre Partial-Brüche

$$\frac{a}{(1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k} + \frac{b}{(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k}$$ *)

auflöset. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus diesen beyden Brüchen zusammengenommen entsteht, ist

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}(\cos.n\varphi+\sqrt{-1}.\sin.n\varphi)ap^nz^n+$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}(\cos.n\varphi-\sqrt{-1}.\sin.n\varphi)bp^nz^n,$$

[§. 215 und 133.]

Setzt man daher $a+b=f$, und $a-b=\frac{g}{\sqrt{-1}}$, so daß

$a=\frac{f\sqrt{-1}+g}{2\sqrt{-1}}$ und $b=\frac{f\sqrt{-1}-g}{2\sqrt{-1}}$ wird, so ist der Ausdruck

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}(f.\cos.n\varphi+g.\sin.n\varphi)p^nz^n$$

das allgemeine Glied der Reihe, welche aus diesen Brüchen

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)pz)^k}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k}$$

oder aus diesem einzigen Bruche

$$\left.\begin{array}{l} f-kfpz.\cos.\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}fp^2z^2.\cos.2\varphi \\ +kgpz.\sin.\varphi-\frac{k(k-1)}{1.2}gp^2z^2.\sin.2\varphi \\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}fp^3z^3.\cos.3\varphi\ \text{ꝛc.} \\ +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}gp^3z^3.\sin.3\varphi\ \text{ꝛc.} \end{array}\right\} : \left\{(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k\right.$$

entsteht.

*) Es ist nemlich $(1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k\times(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k=((1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz))^k=(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k$.

§. 220.

§. 220.

Setzt man also $k = 2$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{f - 2pz(f.\cos.\varphi - g.\sin.\varphi) + ppzz.(f.\cos.2\varphi - g.\sin.2\varphi)}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$$

entspringt, $= (n+1)(f.\cos.n\varphi + g.\sin.n\varphi)p^n z^n$. Nun ist das allgemeine Glied der Reihe, welche der Bruch $\frac{a}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}$, $=$ oder $\frac{a - 2apz.\cos.\varphi + appzz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$ giebt, $= \frac{a.\sin.(n+1)\varphi}{\sin.\varphi} p^n z^n$ [§. 218, indem $B = 0$ ist]. Addirt man also diese beyden Brüche, und setzt darauf $a + f = \mathfrak{A}$; $2a.\cos.\varphi + 2f.\cos.\varphi - 2g.\sin.\varphi = -\mathfrak{B}$; und $a + f.\cos.2\varphi - g.\sin.2\varphi = 0$: so wird $g = \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\cos.\varphi}{2\sin.\varphi}$*); $a = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\cos.\varphi}{1 - \cos.2\varphi} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}$**); $f = -\frac{\mathfrak{A}.\cos.2\varphi - \mathfrak{B}.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}$ ***); und $g = \frac{\mathfrak{B}\sin.\varphi + \mathfrak{A}\sin.2\varphi}{2\sin.\varphi)^2}$. Es ist daher das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$ entspringt, $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^3}.\sin.(n+1)\varphi.p^n z^n + (n+1)$ $\frac{\mathfrak{B}\sin.\varphi.\sin.n\varphi + \mathfrak{A}\sin.2\varphi.\sin.n\varphi}{2(\sin.\varphi)^2} p^n z^n + (n+1)$ $\frac{-\mathfrak{B}\cos.\varphi.\cos.n\varphi - \mathfrak{A}\cos.2\varphi.\cos.n\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}) p^n z^n =$ $-\frac{(n+1)(\mathfrak{A}\cos.(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\cos.(n+1)\varphi)}{2(\sin.\varphi)^2} p^n z^n +$ $\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi)\sin.(n+1)\varphi}{2(\sin.\varphi)^3} p^n z^n$ ****)

$$= \frac{(\frac{1}{2}(n+3)\sin.(n+1)\phi - \frac{1}{2}(n+1)\sin.(n+3)\phi}{2(\sin.\phi)^3} Ap^n z^n \text{*****}) +$$

$$\frac{(\frac{1}{2}(n+2)\sin.n\phi - \frac{1}{2}n\sin.(n+2)\phi}{2(\sin.\phi)^3} Bp^n z^n \text{******}); \text{ oder}$$

endlich

$$= \frac{(n+3)\sin.(n+1)\phi - (n+1)\sin.(n+3)\phi}{4(\sin.\phi)^3} Ap^n z^n +$$

$$\frac{(n+2)\sin.n\phi - n.\sin.(n+2)\phi}{4(\sin.\phi)^3} Bp^n z^n.$$

*) Setzt man $A = a + f$ in $2a.\cos.\phi + 2f.\cos.\phi - 2g.\sin.\phi = -B$, so wird $2A.\cos.\phi - 2g.\sin.\phi = -B$, und also $g = \frac{B + 2A.\cos.\phi}{2\sin.\phi}$.

**) Aus $f = A - a$, $g = \frac{B + 2A.\cos.\phi}{2\sin.\phi}$, und $a + f.\cos.2\phi - g.\sin.2\phi = 0$ fließt, wenn man die Werthe von f und g in die letzte Gleichung bringt, $a + A.\cos.2\phi - a.\cos.2\phi - \frac{(B + 2A.\cos.\phi)\sin.2\phi}{2\sin.\phi} = 0$, oder $a(1 - \cos.2\phi) = 2A.\frac{\sin.2\phi.\cos.\phi - 2A.\cos.2\phi.\sin.\phi + B.\sin.2\phi}{2\sin.\phi}$

$$= \frac{2A.\sin.\phi + B.\sin.2\phi}{2\sin.\phi} = A + B.\cos.\phi,$$ weil $\sin.2\phi \times \cos.\phi - \cos.2\phi.\sin.\phi = \sin.(2-1)\phi = \sin.\phi$, §. 128, und $\frac{\sin.2\phi}{2\sin.\phi} = \cos.\phi$ ist, welche letztere Bestimmung aus $\sin.2\phi = 2\cos.\phi.\sin.\phi$. §. 129. Anmerk. folgt. Folglich wird

$$a = \frac{A + B.\cos.\phi}{1 - \cos.2\phi} = \frac{A + B.\cos.\phi}{2(\sin.\phi)^2}, \text{ §. 130. Anmerk.}$$

***) Setzt man $a = A - f$, und $g = \frac{B + 2A.\cos.\phi}{2\sin.\phi}$

in

in die Gleichung $a + f.\cos.2\varphi - g.\sin.2\varphi = 0$ so wird

$$\mathfrak{A} - f + f.\cos.2\varphi - \frac{(\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\cos.\varphi)\sin.2\varphi}{2\sin.\varphi} = 0;$$

folglich $f(1 - \cos.2\varphi) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.\cos.\varphi - \mathfrak{A}.2(\cos.\varphi)^2$

$= \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.\cos.\varphi - \mathfrak{A} - \mathfrak{A}.\cos.2\varphi = -\mathfrak{A}.\cos.2\varphi$

$-\mathfrak{B}.\cos.\varphi$. oder $f = -\frac{\mathfrak{A}.\cos.2\varphi - \mathfrak{B}\cos.\varphi}{1 - \cos.2\varphi} = -$

$\frac{\mathfrak{A}\cos.2\varphi - \mathfrak{B}.\cos.\varphi.}{2(\sin.\varphi)^2}$

****) Weil $\cos.y.\cos.z - \sin.y.\sin.z = \cos.(y + z)$ ist, §. 128.

*****) Da nemlich $\cos.y.\sin.z = \frac{\sin.(y+z) - \sin.(y-z)}{2}$ ist, § 130, so ist

$$\frac{-(n+1)\cos.(n+2)\varphi.\sin.\varphi + \sin.(n+1)\varphi}{2(\sin.\varphi)^3} =$$

$$\frac{-(n+1)(\frac{1}{2}\sin.(n+3)\varphi + \frac{1}{2}\sin.(n+1)\varphi) + \sin.(n+1)\varphi}{2\sin.\varphi)^3} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+3)\sin.(n+1)\varphi - \frac{1}{2}(n+1)\sin.(n+3)\varphi}{2(\sin.\varphi)^3}.$$

******) Aus §. 130 folgt nemlich

$$-\frac{(n+1)\cos.(n+1)\varphi.\sin.\varphi + \sin.(n+1)\varphi\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^3} =$$

$$-\frac{(\frac{1}{2}(n+1)\sin.(n+2)\varphi - \frac{1}{2}(n+1)\sin.n\varphi)}{2(\sin.\varphi)^3} +$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin.(n+2)\varphi + \frac{1}{2}\sin.n\varphi}{2(\sin.\varphi)^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+2)\sin.n\varphi - \frac{1}{2}n.\sin.(n+2)\varphi}{2(\sin.\varphi)^3}.$$

§. 221.

§. 221.

Ist $k = 3$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\left.\begin{array}{l} f - 3pz\,(f.\,cos.\,\varphi - g.\,sin.\,\varphi) \\ \quad + 3ppzz\,(f.\,cos.\,2\varphi - g.\,sin.\,2\varphi) \\ \quad - p^3z^3\,(f.\,cos.\,3\varphi - g.\,sin.\,3\varphi) \end{array}\right\} : \left[1 - 2pz.cos.\varphi + ppzz\right]^3$$

entspringt $=$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}(f.\,cos.\,n\varphi + g.\,sin.\,n\varphi)\,p^n z^n.$$

Da nun der Bruch $\frac{a + bpz}{(1 - 2pz.\,cos.\,\varphi + ppzz)^2}$, oder dieser

$$\frac{\begin{array}{l} a - 2apz.\,cos.\,\varphi + appzz \\ \quad + bpz \qquad - 2bppzz.\,cos.\,\varphi + bp^3z^3 \end{array}}{(1 - 2pz.\,cos.\,\varphi + ppzz)^3}$$

das allgemeine Glied

$$\frac{(n+3)\,sin.\,(n+1)\varphi - (n+1)\,sin.\,(n+3)\varphi}{4\,(sin.\,\varphi)^3}\,a\,p^n z^n +$$

$$\frac{(n+2)\,sin.\,n\varphi - n.\,sin.\,(n+2)\varphi}{4\,(sin.\,\varphi)^3}\,b\,p^n z^n$$

giebt: so erhält man, wenn man diese beyden Brüche addirt, und den Zähler $= \mathfrak{A}$ setzt,

$$a + f = \mathfrak{A},$$

$$3f.\,cos.\,\varphi - 3g.\,sin.\,\varphi + 2a.\,cos.\,\varphi - b = 0,$$

$$3f.\,cos.\,2\varphi - 3g.\,sin.\,2\varphi + a - 2b.\,cos.\,\varphi = 0, \text{ und}$$

$$b = f.\,cos.\,3\varphi - g.\,sin.\,3\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich

$$a = \frac{f.\,cos.\,3\varphi - g.\,sin.\,3\varphi - 3f.\,cos.\,\varphi + 3g.\,sin.\,\varphi}{2\,cos.\,\varphi}$$

$$= 2g\,(sin.\,\varphi)^2\,tang.\,\varphi - f - 2f.\,(sin.\,\varphi)^2\,*); \text{ ferner}$$

f

$$\frac{f}{g} = \frac{\sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi}{\cos. 5\varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. \varphi}$$ **); und

$a + f = \mathfrak{A} = 2g.(\sin.\varphi)^2 \tan.\varphi - 2f.(\sin.\varphi)^2$; folglich

$$\frac{\mathfrak{A}}{2(\sin.\varphi)^2} = \frac{g.\sin.\varphi - f.\cos.\varphi}{\cos.\varphi}$$; und hieraus

$$f = \frac{\mathfrak{A}(\sin.\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.5\varphi)}{16(\sin.\varphi)^5}$$ ***)

$$g = \frac{\mathfrak{A}(\cos.\varphi - 2\cos.3\varphi + \cos.5\varphi)}{16(\sin.\varphi)^5};$$

und weil $16(\sin.\varphi)^5 = \sin.5\varphi - 5\sin.3\varphi + 10.\sin.\varphi$ ist, [§. 130. Anmerk.]

$$a = \frac{\mathfrak{A}(9\sin.\varphi - 3\sin.3\varphi)}{16(\sin.\varphi)^5}$$ ****), und

$$b = \frac{\mathfrak{A}(-\sin.2\varphi + \sin.2\varphi)}{16(\sin.\varphi)^5} = 0;$$

und da $3\sin.\varphi - \sin.3\varphi = 4(\sin.\varphi)^3$ ist, [§.130.Anmerk.] endlich

$$a = \frac{3\mathfrak{A}}{4(\sin.\varphi)^2}.$$

Es ist also das gesuchte allgemeine Glied

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n z^n \frac{(\sin.(n+1)\varphi - 2\sin.(n+3)\varphi + \sin.(n+5)\varphi)}{16(\sin.\varphi)^5}$$ ******) +

$$3\mathfrak{A}p^n z^n \frac{((n+3)\sin.(n+1)\varphi - (n+1)\sin.(n+3)\varphi}{16(\sin.\varphi)^5} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16(\sin.\varphi)^5}\left(\frac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin.(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin.(n+3)\varphi + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin.(n+5)\varphi\right)$$ ******).

*) Wenn man die Gleichung $3f.\cos.\varphi - 3g.\sin.\varphi + 2a.\cos.\varphi - b = 0$ auf die Art abändert, daß man darin $f.\cos.3\varphi - g.\sin.3\varphi$ anstatt b aus der vierten Gleichung setzt: so findet man daraus sehr leicht

$$a = \frac{f.\cos.3\varphi - g.\sin.3\varphi - 3f.\cos.\varphi + 3g.\sin.\varphi}{2\cos.\varphi}$$

Nun ist aber aus den von Eulern §. 262. angeführten und in dieser Uebersetzung in der Anmerkung zum 130sten §. bewiesenen Bestimmungen der Potestäten der Sinus und Cosinus, $4(\sin.\varphi)^3 = 3\sin.\varphi - \sin.3\varphi$; also

$$\frac{g.(3\sin.\varphi - \sin.3\varphi)}{2\cos.\varphi} = \frac{4g.(\sin.\varphi)^3}{2\cos.\varphi} = 2g.(\sin.\varphi)^2.$$

tang. φ. Ferner ist aus §. 129, $\cos.3\varphi = 2\cos.\varphi.\cos.2\varphi - \cos.\varphi$, und aus den vorhin angeführten §§, $\cos.2\varphi = 1 - 2(\sin.\varphi)^2$; folglich ist $\frac{f.(\cos.3\varphi - 3\cos.\varphi)}{2\cos.\varphi}$

$$= \frac{2\cos.\varphi.f.(1 - 2(\sin.\varphi)^2 - 2)}{2\cos.\varphi} = -f - 2f.(\sin.\varphi)^2.$$

Es wird demnach

$$a = \frac{f.\cos.3\varphi - g.\sin.3\varphi - 3f.\cos.\varphi + 3g.\sin.\varphi}{2\cos.\varphi} =$$

$2g.(\sin.\varphi)^2 \tang.\varphi - f - 2f.(\sin.\varphi)^2$.

**) Wenn man den ersten der hier gefundenen Werthe von a, und den in der vierten Gleichung stehenden Werth von b für a und b in die dritte Gleichung setzt, so wird

$$3f.\cos.2\varphi - 3g.\sin.2\varphi +$$
$$\frac{f.\cos.3\varphi - g.\sin.3\varphi - 3f.\cos.\varphi + 3g.\sin.\varphi}{2\cos.\varphi}$$
$$- 2f.\cos.3\varphi.\cos.\varphi + 2g.\sin.3\varphi.\cos.\varphi = 0;$$ oder

$3f.2\cos.\varphi.\cos.2\varphi - 3g.2\cos.\varphi.\sin.2\varphi + f.\cos.3\varphi$
$- g.\sin.3\varphi - 3f.\cos.\varphi + 3g.\sin.\varphi - 2f.\cos.3\varphi.$
$2(\cos.\varphi)^2 + 2g.\sin.3\varphi.2(\cos.\varphi)^2 = 0.$

Da nun $2(\cos.\varphi)^2 = 1 + \cos.2\varphi$ ist, §. 130, Anmerk. so erhält man hieraus ferner

$3f.(2\cos.\varphi.\cos.2\varphi - \cos.\varphi) + f.\cos.3\varphi - 2f.\cos.3\varphi.$
$\cos.2\varphi - 2f.\cos.3\varphi = 3g.(2\cos.\varphi.\sin.2\varphi - \sin.\varphi)$
$+ g.\sin.3\varphi - 2g.\sin.3\varphi.\cos.2\varphi - 2g.\sin.3\varphi.$

oder

oder

$3f.\cos.3\varphi + f.\cos.3\varphi - f.\cos.5\varphi - f.\cos.\varphi - 2f.\cos.3\varphi =$
$3g.\sin.3\varphi + g.\sin.3\varphi - f.\sin.5\varphi - g.\sin.\varphi - 2g.\sin.3\varphi$

oder

$f(\cos.5\varphi - 2\cos.3\varphi + \cos.\varphi) = g(\sin.5\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.\varphi)$

Hieraus aber wird $\frac{f}{g}$ sehr leicht auf die Art bestimmt, wie es im §. geschehen ist.

***) Man setze, die Rechnung abzukürzen, $\sin.5\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.\varphi = R$, und $\cos.5\varphi - 2\cos.3\varphi + \cos.\varphi = S$, so ist

$$\frac{f}{g} = \frac{R}{S};\ fS = gR;\ g = \frac{fS}{R},\ \text{und also}$$

$$\frac{\mathfrak{A}.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2} = \frac{fS.\sin.\varphi - fR.\cos.\varphi}{R},\ \text{und}$$

$$f = \frac{\mathfrak{A}R.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2(S.\sin.\varphi - R.\cos.\varphi)} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}R.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^3 S - 2(\sin.\varphi)^2 R.\cos.\varphi}.$$

Da aber $2(\sin.\varphi)^3 S = 2(\sin.\varphi)^3(\cos.5\varphi - 2\cos.3\varphi + \cos.\varphi) = 2(\sin.\varphi)^3(2\cos.\varphi.\cos.4\varphi - 6\cos.\varphi.\cos.2\varphi + 4\cos.\varphi)$, und also $\frac{2(\sin.\varphi)^3 S}{\cos.\varphi} = 4(\sin.\varphi)^3(\cos.4\varphi - 3\cos.2\varphi + 2) =$ (indem $2 - 2\cos.2\varphi = 4(\sin.\varphi)^2$ ist, §. 130, Anmerk.) $16(\sin.\varphi)^5 + 4(\sin.\varphi)^3(\cos.4\varphi - \cos.2\varphi)$ ist; ferner $2(\sin.\varphi)^2 R = 2(\sin.\varphi)^2(\sin.5\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.\varphi) = 4(\sin.\varphi)^3(\cos.4\varphi - \cos.2\varphi)$ ist, (weil $2\cos.4\varphi.\sin.\varphi - 2\cos.2\varphi\sin.\varphi = \sin.5\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.\varphi$, §. 130. 2): so wird

$$f = \frac{\mathfrak{A}R.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^3 S - 2(\sin.\varphi)^2 R.\cos.\varphi} = \frac{\mathfrak{A}R}{\frac{2(\sin.\varphi)^3 S}{\cos.\varphi} - 2(\sin.\varphi)^2 R}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}R}{16(\sin.\varphi)^5} = \frac{\mathfrak{A}(\sin.\varphi - 2\sin.3\varphi + \sin.5\varphi}{16(\sin.\varphi)^5}.$$

****)

****) Es ist nemlich $a = \mathfrak{A} - f$ aus $a + f = \mathfrak{A}$. Setzt man also für f den vorhin gefundenen Werth, und multiplicirt man außerdem $\mathfrak{A}$ mit $\sin. 5\phi - 5 \sin. 3\phi + 10 \sin. \phi$ und dividirt es mit $16 (\sin. \phi)^5$, so wird

$$a = \frac{\mathfrak{A} (\sin. 5\phi - 5 \sin. 3\phi + 10. \sin. \phi)}{16 (\sin. \phi)^5} -$$

$$\frac{\mathfrak{A} (\sin. \phi - 2 \sin. 3\phi + \sin. 5\phi)}{16 (\sin. \phi)^5} = \frac{\mathfrak{A} (9 \sin. \phi - 3 \sin. 3\phi)}{16 (\sin. \phi)^5},$$

*****) Dieser Theil des allgemeinen Gliedes entsteht aus dem im Anfange des § stehenden allgemeinen Gliede

$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} (f. \cos. n\phi + g. \sin. n\phi) p^n z^n$, wenn darin die vorhin für f und g gefundenen Werthe setzt, und das Kommende nach §. 130. 1. 2 abändert.

******) Hier ist $\frac{(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} + 3(n+3)$;

$\frac{2(n+1)(n+5)}{1 \cdot 2} = \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} + 3(n+1)$ genommen worden.

§. 222.

Das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} p z}{(1 - 2pz. \cos. \phi + pp zz)^3}$$

entspringt, ist folglich

$$\frac{\mathfrak{A} p^n z^n}{16 (\sin. \phi)^5} \left(\frac{(n+5)(n+4)}{1 \cdot 2} . \sin. (n+1)\phi - \frac{2 (n+1)(n+5)}{1 \cdot 2} . \right.$$

$$\left. \sin. (n+3)\phi + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \sin. (n+5)\phi \right) +$$

$$\frac{\mathfrak{B} p^n z^n}{16 (\sin. \phi)^5} \left(\frac{(n+4)(n+3)}{1 \cdot 2} . \sin. n\phi - \frac{2n (n+4)}{1 \cdot 2} . \sin. \right.$$

(n

$$(n+2)\varphi + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\sin.(n+4)\varphi)\ *).$$

Will man weiter gehen, so wird man auf diesem Wege für das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{A + Bpz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^4}$$

entspringt, finden,

$$\frac{Ap^nz^n}{64(\sin.\varphi)^7}\left(\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+1)\varphi - \frac{3(n+1)(n+7)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+3)\varphi + \frac{3(n+1)(n+2)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+5)\varphi - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+7)\varphi\right) +$$

$$\frac{Bp^nz^n}{16(\sin.\varphi)^7}\left(\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.n\varphi - \frac{3n(n+6)(n+5.)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+2)\varphi + \frac{3n(n+1)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+4)\varphi - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin.(n+6)\varphi\right).$$

Aus diesen Formeln läßt sich die Form der allgemeinen Glieder der höhern Potenzen leicht abnehmen. Will man aber den Grund davon aufsuchen, so thut man wohl, wenn man sich dazu merkt, daß

$$\sin.\varphi = \sin.\varphi$$
$$4(\sin.\varphi)^3 = 3\sin.\varphi - \sin.3\varphi$$
$$16(\sin.\varphi)^5 = 10\sin.\varphi - 5\sin.3\varphi + \sin.5\varphi$$
$$64(\sin.\varphi)^7 = 35\sin.\varphi - 21\sin.3\varphi + 7\sin.5\varphi - \sin.7\varphi$$
$$256(\sin.\varphi)^9 = 126\sin.\varphi - 84\sin.3\varphi + 36\sin.5\varphi - 9\sin.7\varphi + \sin.9\varphi\ **).$$

u. s. f.

*) Die Erläuterung, welche dieser § erfordert, findet man im Anhange unter den Zusätzen zum dreyzehnten Capitel.

**) Man sehe hierüber die Anmerkung zum 130sten § nach.

§. 223.

Da man auf diese Weise alle gebrochenen Funktionen in reelle Partial-Brüche auflösen kann, so lassen sich auch die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden Reihen reell darstellen. Um dies desto deutlicher zu machen, wollen wir einige Beyspiele hersetzen.

Erstes Exempel.

Aus dem Bruche $\frac{1}{(1-z)(1-zz)(1-z^3)} = \frac{1}{1-z-zz+z^4+z^5-z^6}$ entsteht diese wiederkehrende Reihe: $1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+$ &c.; man soll ihr allgemeines Glied finden. Druckt man den gegebenen Bruch nach seinen Faktoren aus, so wird er $= \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+zz)}$, und daraus ergeben sich die Partial-Brüche $\frac{1}{6(1-z)^3} + \frac{1}{4(1-z)^2} + \frac{17}{72(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} + \frac{2+z}{9(1+z+zz)}$

Von diesen giebt zum allgemeinen Gliede, der erste, $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{6}z^n = \frac{nn+3n+2}{12}z^n$; der zweyte, $\frac{n+1}{4}z^n$; der dritte, $\frac{17}{72}z^n$; der vierte $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$. Was den fünften, $\frac{2+z}{9(1+z+zz)}$, betrifft, so giebt er, wenn man ihn mit der Form $\frac{A+Bpz}{1-2pz.\cos.\varphi+ppzz}$ (218) vergleicht, $p=1$; $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$; $A = +\frac{2}{9}$; $B = -\frac{1}{9}$, und

das

das allgemeine Glied, welches man daher erhält, ist demnach $\dagger \frac{2 \sin.(n \dagger 1)\varphi - \sin. n\varphi}{9 \sin. \varphi} (-1)^n z^n =$

$\dagger \frac{4 \sin.(n \dagger 1)\varphi - 2 \sin. n\varphi}{9\sqrt{3}} (-1)^n z^n =$

$\dagger \frac{4 \sin.(n \dagger 1)\frac{\pi}{3} - 2 \sin. n \frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} (-1)^n z^n.$

Addirt man nun alle gefundenen Glieder, so findet man das allgemeine Glied der gegebenen Reihe $= (\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{47}{72}) z^n$

$\mp \frac{1}{8} z^n \mp \frac{4 \sin.(n \dagger 1)\frac{\pi}{3} - 2 \sin. n \frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} z^n$, wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, und die untern, wenn n eine ungerade Zahl ist. Hierbey ist zu bemerken, daß, wenn n eine Zahl von der Form 3 m ist, $\frac{4 \sin. \frac{1}{3}(n \dagger 1)\pi - 2 \sin. \frac{1}{3} n \pi}{9\sqrt{3}}$ $= \mp \frac{2}{9}$; so wie wenn $n = 3m \dagger 1$ ist, eben dieser Ausdruck $= \mp \frac{1}{9}$; und wenn $n = 3m \dagger 2$ wird, $= \mp \frac{1}{9}$ ist, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet. Hiernach kann die Natur der gegebenen Reihe auch auf die Art ausgedruckt werden, daß man sagt:

Ist	so ist ihr allgemeines Glied
$n = 6m \dagger 0$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger 1) z^n$
$n = 6m \dagger 1$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{5}{12}) z^n$
$n = 6m \dagger 2$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{2}{3} z^n$
$n = 6m \dagger 3$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{3}{4}) z^n$
$n = 6m \dagger 4$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{2}{3}) z^n$
$n = 6m \dagger 5$	$(\frac{nn}{12} \dagger \frac{n}{2} \dagger \frac{5}{12}) z^n$

So gilt z. B. wenn $n = 50$ ist, die Form $6m + 2$, und das Glied der Reihe ist alsdann $= 234z^{50}$

Zweytes Exempel.

Aus dem Bruche $\frac{1 + z + zz}{1 - z - z^4 + z^5}$ entspringt die wiederkehrende Reihe $1 + 2z + 3zz + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8 + \text{ꝛc.}$; man soll das allgemeine Glied derselben finden. Man kann den gegebenen Bruch auf diese Form $\frac{1 + z + zz}{(1-z)^2(1+z)(1+zz)}$ bringen, und ihn also in folgende Partial-Brüche, $\frac{3}{4(1-z)^2} + \frac{3}{8(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} - \frac{1+z}{4(1+zz)}$ auflösen. Nun giebt der erste von diesen Brüchen das allgemeine Glied $\frac{3(n+1)}{4}z^n$; der zweyte, $\frac{3}{8}z^n$; der dritte $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$; und aus dem vierten, nemlich $-\frac{1+z}{4(1+zz)}$, erhält man, wenn man ihn mit der Form $\frac{A + Bpz}{1 - 2pz.\text{cos.}\varphi + ppzz}$ vergleicht, $p = 1$; cos. $\varphi = 0$; und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; ferner $A = -\frac{1}{4}$; und $B = \frac{1}{4}$; also zum allgemeinen Gliede: $(-\frac{1}{4}\text{ sin. }\frac{1}{2}(n+1)\pi + \frac{1}{4}\text{ sin. }\frac{1}{2}n\pi)z^n$. Folglich ist das gesuchte allgemeine Glied $= (\frac{3}{4}n + \frac{2}{8})z^n \pm \frac{1}{8}z^n - \frac{1}{4}(\text{sin. }\frac{1}{2}(n+1)\pi - \text{sin. }\frac{1}{2}n\pi)z^n$.

Ist daher	so ist das allgemeine Glied
$n = 4m + 0$	$(\frac{3}{4}n + 1)z^n$
$n = 4m + 1$	$(\frac{3}{4}n + \frac{5}{4})z^n$
$n = 4m + 2$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2})z^n$
$n = 4m + 3$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{4})z^n$

Ist z. B. $n = 50$, so gilt die Form $n = 4m + 2$, und das Glied ist $39z^{50}$.

§. 224.

§. 224.

Wenn also eine wiederkehrende Reihe gegeben ist, so kann man, da man den Bruch, woraus sie entspringt, leicht entdeckt, das allgemeine Glied derselben nach den ertheilten Vorschriften finden. Es giebt aber das Gesetz, nach welchem ein jedes Glied der Reihe aus den vorhergehenden gefunden wird, den Nenner des Bruchs zu erkennen, und die Faktoren dieses Nenners geben die Form des allgemeinen Gliedes an die Hand, denn durch den Zähler werden bloß die Coefficienten bestimmt. Es sey z. B. die wiederkehrende Reihe

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{ꝛc.}$

gegeben, und aus dem Gesetze, nach welchem jedes Glied aus einigen vorhergehenden bestimmt wird, sey der Nenner des Bruchs $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ gefunden, so daß $D = \alpha C + \beta B + \gamma A$; $E = \alpha D + \beta C + \gamma B$; $F = \alpha E + \beta D + \gamma C$; u. s. f. Nennt man nun mit Moivre die Multiplicatoren $\alpha, + \beta, + \gamma$, die Beziehungs-Scale, so beruhet das Gesetz der Forschreitung auf dieser Beziehungs-Scale, und aus ihr erkennt man sogleich den Nenner des Bruchs, aus welchem die wiederkehrende Reihe entspringt.

§. 225.

Um also das allgemeine Glied, oder den Coefficienten der unbestimmten Potestät z^n zu finden, suche man die einfachen oder doppelten Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$, die letztern, um die imaginären Faktoren zu vermeiden. Es seyen zuvörderst alle einfache Faktoren unter einander ungleich und reell, und folgende: $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$. Alsdann läßt sich der Bruch, woraus die gegebene Reihe entspringt, in $\frac{A}{1 - pz} + \frac{B}{1 - qz} + \frac{C}{1 - rz}$ auflösen, und das

allgemeine Glied der Reihe ist daher $(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n)z^n$. Sind zwey Faktoren einander gleich, nemlich $q = p$, so erhält das allgemeine Glied diese Form: $((\mathfrak{A}n + \mathfrak{B})p^n + \mathfrak{C}r^n)z^n$; und sind alle drey einander gleich, $r = q = p$, so ist das allgemeine Glied $(\mathfrak{A}n^2 + \mathfrak{B}n + \mathfrak{C})p^n z^n$. Hat aber der Nenner $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ einen doppelten Faktor, so daß er $= (1 - pz)(1 - 2qz.\cos.\phi + qqzz)$ ist: so ist das allgemeine Glied $= (\mathfrak{A}p^n + \frac{\mathfrak{B}\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{C}\sin.n\phi}{\sin.\phi}q^n)z^n$.

Da sich nun daraus, wenn man für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2 setzt, die Glieder A, Bz, Cz^2 ergeben müssen, so findet man dadurch die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

§. 226.

Ist die Beziehungs-Scale zweytheilig, oder wird ein jedes Glied durch die zwey vorhergehenden bestimmt, so daß $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$; ꝛc. ist: so ist offenbar, daß die wiederkehrende Reihe, welche wir $=$

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} +$ ꝛc.

setzen wollen, aus einem Bruche entspringt, dessen Nenner $1 - \alpha z + \beta zz$ ist. Setzt man nun dessen Faktoren $= (1 - pz)(1 - qz)$ so ist $p + q = \alpha$, und $pq = \beta$, und das allgemeine Glied der Reihe $= (\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n)z^n$. Setzt man also $n = 0$, so wird $A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; und nimmt man $n = 1$, so wird $B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q$, und folglich $Aq - B = \mathfrak{A}(q - p)$; $\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p}$; und $\mathfrak{B} = \frac{Ap - B}{p - q}$. Hat man aber die Werthe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, so ist

$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n$; und

$Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1}$; desgleichen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{BB - \alpha AB + \beta AA}{4\beta - \alpha\alpha}.$$

§. 227.

Hieraus läßt sich eine Methode ableiten, jedes Glied aus einem einzigen vorhergehenden zu finden, da sonst zu dieser Absicht, nach dem Gesetze der Fortschreitung, zwey erfordert werden. Denn da

$P = \mathfrak{A} p^n + \mathfrak{B} q^n$; und $Q = \mathfrak{A} p.p^n + \mathfrak{B} q.q^n$ ist, so folgt, daß

$Pq - Q = \mathfrak{A}(q - p)p^n$; und $Pp - Q = \mathfrak{B}(p - q)q^n$

seyn wird. Multiplicirt man nun diese Ausdrücke mit einander, so erhält man

$P^2pq - (p + q)PQ + QQ - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(p - q)^2 p^n q^n = 0$

Da aber $p + q = \alpha$; $pq = \beta$; $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \alpha\alpha - 4\beta$; und $p^n q^n = \beta^n$ ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe substituirt,

$\beta P^2 - \alpha PQ + QQ = (\beta AA - \alpha AB + BB)\beta^n$, oder

$$\frac{QQ - \alpha PQ + \beta PP}{BB - \alpha AB + \beta AA} = \beta^n,$$

welches eine sehr merkwürdige Eigenschaft der wiederkehrenden Reihen ist, deren jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird. Kennt man also darin irgend ein Glied P, so ist das folgende $Q = \frac{1}{2}\alpha P + \sqrt{((\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta)P^2 + (B^2 - \alpha AB + \beta AA)\beta^n)}$; und dieser Ausdruck ist, des darin enthaltenen Wurzelzeichens ohngeachtet, stets rational, weil in der wiederkehrenden Reihe keine irrationalen Glieder vorkommen.

§. 228.

Aus jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern Pz^n und Qz^{n+1} läßt sich ferner das von ihnen durch mehrere andere getrennte Glied Xz^{2n} finden. Denn setzt man

$$X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n;$$

so ist, weil

$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n$, und $Q = \mathfrak{A}p.p^n + \mathfrak{B}q.q^n$, ferner $X = \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n}$ ist,

$$fP^2 = f\mathfrak{A}^2p^{2n} + f\mathfrak{B}^2q^{2n} + 2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n$$
$$gPQ = g\mathfrak{A}^2p.p^{2n} + g\mathfrak{B}^2q.q^{2n} + g.\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n$$
$$-h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n = \qquad\qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n$$

$$X = \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n}.$$

Es wird demnach $f + gp = \frac{1}{\mathfrak{A}}$, $f + gq = \frac{1}{\mathfrak{B}}$; und $h = 2f + g\alpha$; und daraus $g = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}$ und $f = \frac{\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}$.

Nun ist aber $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\alpha A - 2B}{p-q}$, und $\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q = \frac{\alpha B - 2A\beta}{p-q}$: folglich wird $f = \frac{\alpha B - 2A\beta}{AB(\alpha\alpha - 4\beta)}$ und $g = \frac{\alpha A - 2B}{AB(\alpha\alpha - 4\beta)}$; oder $f = \frac{2A\beta - \alpha B}{BB - \alpha AB + \beta AA}$, und $g = \frac{2B - \alpha A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$; also $h = \frac{(4\beta - \alpha\alpha)A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$.

Gebraucht man also diese Werthe in $X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n$, so wird

$$X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - A\beta^n$$

so wie hieraus, wenn man für β^n den dafür im vorhergehenden §. gefundenen Werth setzt,

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA}$$ *).

*) Euler setzt hier zuvörderst

$$X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - \mathfrak{A}\beta^n$$

und fügt darauf hinzu: Auf eine ähnliche Art findet man,

X

$$X = \frac{(\alpha\beta A - (\alpha\alpha - 2\beta)B)P^2 + (2B - \alpha A)Q^2}{\alpha(BB - \alpha AB + \beta AA)} - \frac{2B\beta^n}{\alpha};$$

und durch die Verbindung dieser Bestimmungen mit einander und durch die Wegschaffung des Gliedes β^n erhält man

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA}.$$

Es scheint aber das A in der ersten Bestimmung von X ein Rechnungsfehler zu seyn.

§. 229.

Druckt man die folgenden Glieder der gegebenen Reihe auf diese Art aus:

$$A + Bz + Cz^2 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \ldots\ldots + Xz^{2n} + Yz^{2n+1} + Zz^{2n+2},$$

so erhält man auf eine ähnliche Art

$$Z = \frac{(\beta A - \alpha B)Q^2 + 2BQR - ARR}{BB - \alpha AB + \beta AA}$$

und da $R = \alpha Q - \beta P$ ist, so wird

$$Z = \frac{-\beta\beta AP^2 + 2\beta(\alpha A - B)PQ + (\alpha B - (\alpha\alpha - \beta)A)Q^2}{BB - \alpha AB + \beta AA}$$

Nun ist $Z = \alpha Y - \beta X$, und also $Y = \frac{Z + \beta X}{\alpha}$; folglich

$$Y = \frac{-\beta BP^2 + 2\beta APQ + (B - \alpha A)QQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} \text{ *).}$$

Man kann daher nunmehr auch aus X und Y auf eine ähnliche Art die Coefficienten der Potestäten z^{4n} und z^{4n+1}, so wie hieraus die Coefficienten der Potestäten z^{8n}, z^{8n+1} u. s. f. finden.

*) Im Originale ist $(B - \alpha A)QQ$ in der Bestimmung von Y noch mit α multiplicirt, welches wahrscheinlicher Weise ein Druckfehler ist.

Exempel.

Exempel.

Es sey die wiederkehrende Reihe

$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$ &c.

gegeben. Da darin jeder Coefficient die Summe der beyden vorhergehenden ist, so ist der Nenner des Bruchs, aus welchem diese Reihe entspringt, $= 1 - z - zz$; und folglich $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $A = 1$; und $B = 3$; so daß also $BB - \alpha AB + \beta AA = 5$ wird. Hieraus ergiebt sich nun zuvörderst $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP + 20(-1)^n)}}{2} = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine gerade, das untere aber, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ist z. B. $n = 4$, folglich $P = 11$, so ist $Q = \frac{11 + \sqrt{(5.121 + 20)}}{2} = \frac{11 + 25}{2} = 18$. Setzt man ferner den Coefficienten der Potestät z^{2n}, $= X$ so ist $X = \frac{-4PP + 6PQ - QQ}{5}$, folglich der Coefficient der Potestät $z^8 = \frac{-4.121 + 6.198 - 324}{5} = 76$.

Da aber $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$ ist, so ist $QQ = \frac{3PP \pm 10 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$; und folglich $X = \frac{-PP \pm 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$. Man findet also aus einem jeden Gliede Pz^n einer wiederkehrenden Reihe diese beyden: $\frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{n+1}$, und

$$\frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{2n}.$$

§. 230.

Auf eine ähnliche Art läßt sich in den wiederkehrenden Reihen, worin jedes Glied aus den drey vorhergehenden be-

stimmt wird, jedes Glied auch aus den zwey vorhergehenden finden. Denn es sey $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \text{ꝛc.}$ eine solche Reihe, und ihre Beziehungs-Scale sey $\alpha, -\beta, +\gamma$, oder es entstehe die Reihe aus einem Bruche, dessen Nenner $= 1 - \alpha z + \beta zz - \gamma z^3$ ist. Druckt man nun die Glieder P, Q, R eben so wie vorhin durch die Faktoren dieses Nenners, welche $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$ seyn mögen, aus, so daß

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n$$
$$Q = \mathfrak{A}p.p^n + \mathfrak{B}q.q^n + \mathfrak{C}r.r^n, \text{ und}$$
$$R = \mathfrak{A}p^2.p^n + \mathfrak{B}q^2.q^n + \mathfrak{C}r^2.r^n$$

ist: so erhält man, weil $p + q + r = \alpha$; $pq + pr + qr = \beta$; und $pqr = \gamma$ ist, folgende Proportion:

$$R^3 \left\{\begin{matrix} -2\alpha Q \\ +\beta P \end{matrix}\right\} R^2 \left\{\begin{matrix} +(\alpha\alpha + \beta)Q^2 \\ -(\alpha\beta + 3\gamma)PQ \\ +\alpha\gamma\, P^2 \end{matrix}\right\} R \left\{\begin{matrix} -(\alpha\beta - \gamma)Q^3 \\ +(\alpha\gamma + \beta\beta)PQ^2 \\ -2\beta\gamma\, P^2Q \\ +\gamma\gamma\, P^3 \end{matrix}\right\} : C^n =$$

$$C^3 \left\{\begin{matrix} -2\alpha B \\ +\beta A \end{matrix}\right\} C^2 \left\{\begin{matrix} +(\alpha\alpha + \beta)B^2 \\ -(\alpha\beta + 3\gamma)AB \\ +\alpha\gamma\, A^2 \end{matrix}\right\} C \left\{\begin{matrix} -(\alpha\beta - \gamma)B^3 \\ +(\alpha\gamma + \beta\beta)AB^2 \\ -2\beta\gamma\, A^2B \\ +\gamma\gamma\, A^3 \end{matrix}\right\} : 1$$

Es hängt also die Erfindung des Gliedes R aus den beyden vorhergehenden P und Q von der Auflösung einer cubischen Gleichung ab.

§. 231.

Nach diesen Untersuchungen über die allgemeinen Glieder der wiederkehrenden Reihen müssen wir nun auch noch die Art und Weise, wie die Summen dieser Reihen gefunden werden, kennen zu lernen suchen. Hierbey ist zuvörderst offenbar, daß die Summe der ganzen ohne Ende fortlaufenden wiederkehrenden Reihe dem Bruche gleich ist,

aus

aus welchem sie entspringt; und da der Nenner dieses Bruchs aus dem Fortschreitungsgesetze der Reihe erkannt wird, so ist nur noch übrig, daß gezeigt werde, wie man den Zähler finden kann. Es sey also die Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{&c.}$$

gegeben, und das Gesetz, nach welchem dieselbe fortschreitet, führe auf den Nenner, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4$. Angenommen, daß der Bruch, welcher der Summe der ganzen unendlichen Reihe gleich ist, $= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$ sey, und also die angeführte Reihe aus ihm entspringe: so findet man durch die Vergleichung

$$a = A$$
$$b = B - \alpha A$$
$$c = C - \alpha B + \beta A$$
$$d = D - \alpha C + \beta B - \gamma A.$$

Demnach ist die gesuchte Summe

$$\frac{A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} + \frac{(D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} +$$

§. 232.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, wie man die Summe einer wiederkehrenden Reihe bis auf ein gegebenes Glied derselben zu suchen hat. Soll z. B. die Summe der vorhin angenommenen Reihe bis auf das Glied Pz^n gefunden werden, so setze man

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + Pz^n.$$

Da nun die Summe der ganzen unendlichen Reihe bekannt ist, so suche man die Summe aller der Glieder, die auf das vorhergehende letzte Pz^n ohne Ende folgen, und nehme dabei

$t =$

$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \text{&c.}$

Da diese Reihe, durch z^{n+1} dividirt, eine der gegebenen gleiche wiederkehrende Reihe giebt, so ist ihre Summe $t =$

$$\frac{Qz^{n+1} + (R - \alpha Q)z^{n+2} + (S - \alpha R + \beta Q)z^{n+3}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} +$$

$$\frac{(T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$$

Folglich ist die gesuchte Summe $s =$

$$\frac{+A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} +$$

$$\frac{(D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3 - Qz^{n+1}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} -$$

$$\frac{(R - \alpha Q)z^{n+2} - (S - \alpha R - \beta Q)z^{n+3}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} -$$

$$\frac{(T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

§. 233.

Ist daher die Beziehungs-Scale zweitheilig, und $\alpha, -\beta$: so ist die Summe der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots Pz^n$, welche aus dem Bruche $\frac{A + (B - \alpha A)z}{1 - \alpha z + \beta zz}$ entspringt, folgende:

$$\frac{A + (B - \alpha A)z - Qz^{n+1} - (R - \alpha Q)z^{n+2}}{1 - \alpha z + \beta zz}$$

Da aber, wegen der Natur der Reihe, $R = \alpha Q - \zeta P$ ist, so wird diese Summe dadurch in diese verwandelt:

$$\frac{A + (B - \alpha A)z - Qz^{n+1} + \zeta Pz^{n+2}}{1 - \alpha z + \zeta zz}$$

Exempel.

Ist die Reihe $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + \ldots\ldots + Pz^n$ gegeben, wo $\alpha = 1$; $\zeta = -1$; $A = 1$ und $B = 3$ ist: so

ist

ist die Summe derselben $= \frac{1 + 2z - Qz^{n+1} - Pz^{n+2}}{1 - z - zz}$.

Setzt man aber $z = 1$, so wird die Summe der Reihe $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + \ldots\ldots + P = P + Q - 3$. Die Summe des lezten und des folgenden Gliedes übertrifft also die Summe der ganzen Reihe um 3. Da nun $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$, ist, so ist die Summe der Reihe

$1 + 3 + 4 + 7 + 11 + \ldots + P = \frac{3P - 6 + \sqrt{(5PP \pm 20}}{2}$,

und man kann daher diese Summe auch aus dem lezten Gliede allein finden.



Vier-

Vierzehntes Capitel.

Von der Multiplication und Division der Winkel.

§. 234.

Es bezeichne z einen Winkel oder einen Kreisbogen, dessen Radius = 1 ist; ferner sey der Sinus dieses Winkels oder Bogens = x, der Cosinus = y, und die Tangente = t, folglich $xx + yy = 1$, und $t = \frac{x}{y}$. Da nun sowohl die Sinus als die Cosinus der Winkel z; 2z; 3z; 4z; 5z; ꝛc., wie wir oben *) gesehen haben, eine wiederkehrende Reihe geben, deren Beziehungs-Scale 2y, — 1 ist: so sind zuvörderst die Sinus der gedachten Bogen folgende:

$\sin. 0z = 0$
$\sin. 1z = x$
$\sin. 2z = 2xy$
$\sin. 3z = 4xy^2 - x$
$\sin. 4z = 8xy^3 - 4xy$
$\sin. 5z = 16xy^4 - 12xy^2 + x$
$\sin. 6z = 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy$
$\sin. 7z = 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x$
$\sin. 8z = 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy$

Und überhaupt folgt daraus

$\sin. nz = x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} +$

(n —

$$\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}y^{n-7}$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}y^{n-9} - \text{ꝛc.})$$

*) Man vergleiche hierbey §. 129.

§. 235.

Setzt man den Bogen $nz = s$, so wird $\sin. nz = \sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(2\pi + s) = \sin.(3\pi - s)$ ꝛc., denn alle diese Sinus sind einander gleich. Hieraus erhalten wir mehrere Werthe für x, nemlich

$$\sin.\frac{s}{n};\ \sin.\frac{\pi - s}{n};\ \sin.\frac{2\pi + s}{n};\ \sin.\frac{3\pi - s}{n};\ \sin.\frac{4\pi + s}{n};\ \text{ꝛc.}$$

welche daher insgesammt der gefundenen Gleichung ein Genüge thun. Ferner sind hierunter so viel von einander verschiedene Werthe, als n Einheiten enthält, und diese Werthe daher die Wurzeln der gefundenen Gleichung. *) Sind nun die Wurzeln der Gleichung a posteriori bekannt, so kommt man durch die Vergleichung dieser Wurzeln mit den Gliedern der Gleichung auf sehr merkwürdige Eigenschaften. Da man aber dazu eine Gleichung haben muß, worin bloß x als eine unbekannte Größe vorkommt, so muß man für y seinen Werth $\sqrt{(1 - xx)}$ setzen; und es ist daher ein doppeltes Verfahren nöthig, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

*) Ueber diesen Gegenstand habe ich mich im Anhange in dem Zusatze zu §. 234 — 241 des gegenwärtigen Capitels ausführlich erklärt, und noch ausführlicher findet man ihn in des Herrn Hofrath Kästners Abhandlung: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum defini-

finientibus, Göttingen 1756 untersucht. Die im Euler unmittelbar folgenden Worte: Cavendum ergo est, ne valores aequales pro iisdem habeantur, quod fiet, dum alternae tantum expressiones assumantur; habe ich in der Uebersetzung weggelassen, weil sie mir zur Erläuterung dieses Gegenstandes nicht zweckmäßig scheinen.

§. 236.

Es sey n eine ungerade Zahl. Da die Bogen $-z$, $+z$, $+3z$, $+5z$, &c. eine Reihe ausmachen, deren Differenz $2z$ ist, so ist die Beziehungs-Scale dieser Reihe, weil der Cosinus von $2z = 1 - 2xx$ ist, $2 - 4xx, -1$. Folglich ist

$\sin.-z = -x$

$\sin. z = x$

$\sin. 3z = 3x - 4x^3$

$\sin. 5z = 5x - 20x^3 + 16x^5$

$\sin. 7z = 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7$

$\sin. 9z = 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9$

und überhaupt

$$\sin. nz = nx - \frac{n(nn-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{&c.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist. Die Wurzeln dieser Gleichung aber sind: $\sin.z$; $\sin.(\frac{2\pi}{n}+z)$; $\sin.(\frac{4\pi}{n}+z)$; $\sin.(\frac{6\pi}{n}+z)$; $\sin.(\frac{8\pi}{n}+z)$; &c. und ihre Anzahl ist $= n$.

§. 237.

Es hat daher die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{nx}{\sin. nz} + \frac{n(nn-1)x^3}{1.2.3.\sin. nz} - \frac{n(nn-1)(nn-9)x^5}{1.2.3.4.5.\sin. nz} \text{ u.}$$

$$\text{u.} \pm \frac{2^{n-1}x^n}{\sin. nz}$$

(worin das obere Zeichen gilt, wenn n um 1 kleiner ist, als das Vielfache von 4, sonst aber das untere genommen werden muß) die Faktoren

$$\left(1 - \frac{x}{\sin. z}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)}\right) \text{ u.}$$

und daraus folgt, einmal, daß

$$\frac{n}{\sin. nz} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)} + \frac{1}{\sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)} + \frac{1}{\sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right)} + \text{ u.}$$

ist, bis man n Glieder hat. Ferner ist das Produkt von allen $\pm \frac{2^{n-1}}{\sin. nz} =$

$$\frac{1}{\sin. z \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) \text{ u.}}$$

oder

$$\sin. nz = \mp 2^{n-1} \sin. z. \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) \times \sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) \text{ u.}$$

Und da das vorletzte Glied fehlt, so ist auch

$$0 = \sin. z + \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) + \text{ u.}$$

Erstes Exempel.

Wenn $n = 3$ ist, so hat man daher:

$$0 = \sin. z + \sin. (120° + z) + \sin. (240° + z) = \sin. z + \sin. (60° - z) - \sin. (60° + z)$$

$$\frac{3}{\sin. 3z} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (120° + z)} + \frac{1}{\sin. (240° + z)} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (60° - z)} - \frac{1}{\sin. (60° + z)}$$

$$\sin. 3z = -4 \sin. z. \sin. (120° + z). \sin. (240° + z) = 4 \sin. z. \sin. (60° - z). \sin. (60° + z).$$

Es ist daher, wie bereits oben bemerkt worden ist,

$\sin. (60° + z) = \sin. z + \sin. (60° - z)$, und

$3 \operatorname{cosec}. 3z = \operatorname{cosec}. z + \operatorname{cosec}. (60° - z) - \operatorname{cosec}. (60° + z)$.

Zweytes Exempel.

Setzt man $n = 5$, so erhält man:

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{2}{5}\pi + z) + \sin. (\tfrac{4}{5}\pi + z) + \sin. (\tfrac{6}{5}\pi + z) + \sin. (\tfrac{8}{5}\pi + z), \text{ oder}$$

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{2}{5}\pi + z) + \sin. (\tfrac{1}{5}\pi - z) - \sin. (\tfrac{1}{5}\pi + z) - \sin. (\tfrac{2}{5}\pi - z), \text{ oder}$$

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{1}{5}\pi - z) - \sin. (\tfrac{1}{5}\pi + z) + \sin. (\tfrac{2}{5}\pi + z) - \sin. (\tfrac{2}{5}\pi - z).$$

Ferner ist

$$\frac{5}{\sin. 5z} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (\frac{1}{5}\pi - z)} - \frac{1}{\sin. (\frac{1}{5}\pi + z)} - \frac{1}{\sin. (\frac{2}{5}\pi - z)} + \frac{1}{\sin. (\frac{2}{5}\pi + z)};$$

und endlich

$$\sin. 5z = 16 \sin. z. \sin. (\tfrac{1}{5}\pi - z). \sin. (\tfrac{1}{5}\pi + z). \sin. (\tfrac{2}{5}\pi - z). \sin. (\tfrac{2}{5}\pi + z).$$

Drittes Exempel.

Auf diese Art wird, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$0 = \sin. z + \sin.(\tfrac{\pi}{n} - z) - \sin.(\tfrac{\pi}{n} + z) - \sin.(\tfrac{2\pi}{n} - z)$$
$$+ \sin.(\tfrac{2\pi}{n} + z) + \sin.(\tfrac{3\pi}{n} - z) - \sin.(\tfrac{3\pi}{n} + z) - \ldots$$
$$\ldots \pm \sin.(\tfrac{m}{n}\pi - z) \mp \sin.(\tfrac{m}{n}\pi + z)$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn m eine ungerade, und die untern, wenn m eine gerade Zahl ist. Die andere Gleichung ist alsdann:

$$\frac{n}{\sin. nz} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin.(\frac{\pi}{n} - z)} - \frac{1}{\sin.(\frac{\pi}{n} + z)}$$
$$- \frac{1}{\sin.(\frac{2\pi}{n} - z)} + \frac{1}{\sin.(\frac{2\pi}{n} + z)} + \frac{1}{\sin.(\frac{3\pi}{n} - z)}$$
$$- \frac{1}{\sin.(\frac{3\pi}{n} + z)} - \ldots \pm \frac{1}{\sin.(\frac{m\pi}{n} - z)} \mp \frac{1}{\sin.(\frac{m\pi}{n} + z)},$$

welche sich bequem auf die Cosecanten anwenden läßt. Drittens hat man dieses Produkt:

$$\sin. nz = 2^{2m} \sin. z. \sin.(\tfrac{\pi}{n} - z). \sin.(\tfrac{\pi}{n} + z) \times$$
$$\sin.(\tfrac{2\pi}{n} - z). \sin.(\tfrac{2\pi}{n} + z). \sin.(\tfrac{3\pi}{n} - z). \sin.(\tfrac{3\pi}{n} + z).$$
$$\ldots\ldots\ldots \times \sin.(\tfrac{m\pi}{n} - z). \sin.(\tfrac{m\pi}{n} + z).$$

§. 238.

Es sey nunmehr n eine gerade Zahl. Da $y = \sqrt{(1 - xx)}$ und $\cos. 2z = 1 - 2xx$, und also die Beziehungs-Scale

der

der Reihe der Sinus, so wie vorhin [§. 236.] $2 : -1 = 4xx, -1$ ist, so ist alsdann

$\sin. 0z = 0$

$\sin. 2z = 2x\sqrt{(1-xx)}$

$\sin. 4z = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-xx)}$

$\sin. 6z = (6x - 32x^3 + 32x^5)\sqrt{(1-xx)}$

$\sin. 8z = (8x - 80x^3 + 192x^5 - 128x^7)\sqrt{(1-xx)}$

und überhaupt

$$\sin. nz = (nx - \frac{n(nn-4)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(nn-4)(nn-16)}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{n(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{1.2.3.4.4.6.7}x^7 + \ldots \pm 2^{n-1}x^{n-1})\sqrt{(1-xx)}$$

wenn n eine jede gerade Zahl bedeutet.

§. 239.

Um diese Gleichung rational zu machen, nehme man auf beyden Seiten die Quadrate. Dann ist

$(\sin. nz)^2 = nnxx + Px4 + Qx6 + \ldots - 2^{2n-2}x^{2n}$

oder

$$x^{2n} \ldots - \frac{nn}{2^{2n-2}}xx + \frac{1}{2^{2n-2}}(\sin. nz)^2 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind sowohl positiv als negativ, und also folgende: $\pm \sin z$; $\pm \sin.(\frac{\pi}{n} - z)$; $\pm \sin.(\frac{2\pi}{n} + z)$; $\pm \sin.(\frac{3\pi}{n} - z)$; $\pm \sin.(\frac{4\pi}{n} + z)$ ꝛc. wenn man überhaupt n solcher Ausdrücke nimmt. Da nun das letzte Glied das Produkt aus allen diesen Wurzeln ist, so erhält man, wenn man auf beyden Seiten die Quadratwurzel auszieht,

$$\sin. nz = \pm 2^{n-1} \sin. z. \sin.(\frac{\pi}{n} - z). \sin.(\frac{2\pi}{n} + z) \times \sin.(\frac{3\pi}{n} - z) \ldots$$

Was für ein Zeichen jedesmal genommen werden müsse, muß übrigens die Betrachtung der einzelnen Fälle bestimmen.

Exempel.

Setzt man für n nach und nach die Zahlen 2, 4, 6, &c. und nimmt man dabey n verschiedene Sinus, so wird

$$\sin. 2z = 2 \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin. 4z = 8 \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{4} - z). \sin. (\frac{\pi}{4} + z). \sin. (\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin. 6z = 32 \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{6} - z). \sin. (\frac{\pi}{6} + z). \sin. (\frac{2\pi}{6} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{6} + z). \sin. (\frac{3\pi}{6} - z)$$

$$\sin. 8z = 128 \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{8} - z). \sin. (\frac{\pi}{8} + z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{8} - z). \sin. (\frac{2\pi}{8} + z). \sin. (\frac{3\pi}{8} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{3\pi}{8} + z). \sin. (\frac{4\pi}{8} - z).$$

§. 240.

Es ist also auch überhaupt

$$\sin. nz = 2^{n-1} \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{n} - z). \sin. (\frac{\pi}{n} + z). \sin. (\frac{2\pi}{n} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{n} + z). \sin. (\frac{3\pi}{n} - z). \sin. (\frac{3\pi}{n} + z) \ldots\ldots$$
$$\sin. (\tfrac{1}{2}\pi - z)$$

wenn n eine gerade Zahl ist. Vergleicht man aber diese Formel mit der obigen, [§. 237], wo n eine ungerade Zahl war: so findet man unter beyden eine so große Uebereinstimmung,

stimmung, daß man sie in eine zusammenziehen kann. Es ist daher, n mag eine gerade oder eine ungerade Zahl seyn

$$\text{sin. } nz = 2^{n-1} \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{n} - z). \text{ sin. } (\frac{\pi}{n} + z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\pi}{n} - z). \text{ sin. } (\frac{2\pi}{n} + z). \text{ sin. } (\frac{3\pi}{n} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{3\pi}{n} + z) \text{ &c.}$$

bis man so viel Faktoren hat, als n Einheiten enthält.

§. 241.

Es leisten aber diese Ausdrücke, worin die Sinus vielfacher Winkel durch Faktoren bestimmt werden, vielen Vortheil, sowohl bey der Erfindung der Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel, als auch beym Aufsuchen mehrerer solcher Ausdrücke der Sinus durch Faktoren, als wir oben (§. 184) gehabt haben. Es ist aber

$$\text{sin. } z = 1 \text{ sin. } z$$

$$\text{sin. } 2z = 2 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\text{sin. } 3z = 4 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{3} - z). \text{ sin. } (\frac{\pi}{3} + z)$$

$$\text{sin. } 4z = 8 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{4} - z). \text{sin. } (\frac{\pi}{4} + z). \text{ sin. } (\frac{2\pi}{4} - z)$$

$$\text{sin. } 5z = 16 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{5} - z). \text{ sin. } (\frac{\pi}{5} + z). \text{ sin. } (\frac{2\pi}{5} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\pi}{5} + z)$$

$$\text{sin. } 6z = 32 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{6} - z). \text{sin. } (\frac{\pi}{6} + z). \text{ sin. } (\frac{2\pi}{6} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\pi}{6} + z). \text{ sin. } (\frac{3\pi}{6} - z)$$

u. s. w.

§. 242.

Da ferner $\frac{\sin. 2nz}{\sin. nz} = 2 \cos. nz$ ist, so lassen sich auch die Cosinus vielfacher Winkel auf eine ähnliche Art durch Faktoren ausdrucken. Es ist nemlich

$$\cos. z = 1 \sin. (\frac{\varpi}{2} - z)$$

$$\cos. 2z = 2 \sin. (\frac{\varpi}{4} - z). \sin. (\frac{\varpi}{4} + z)$$

$$\cos. 3z = 4 \sin. (\frac{\varpi}{6} - z). \sin. (\frac{\varpi}{6} + z). \sin. (\frac{3\varpi}{6} - z)$$

$$\cos. 4z = 8 \sin. (\frac{\varpi}{8} - z). \sin. (\frac{\varpi}{8} + z). \sin. (\frac{3\varpi}{8} - z) \times \sin. (\frac{3\varpi}{8} + z)$$

$$\cos. 5z = 16 \sin. (\frac{\varpi}{10} - z). \sin. (\frac{\varpi}{10} + z). \sin. (\frac{3\varpi}{10} - z) \times \sin. (\frac{3\varpi}{10} + z). \sin. (\frac{5\varpi}{10} - z)$$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1} \sin. (\frac{\varpi}{2n} - z). \sin. (\frac{\varpi}{2n} + z). \sin. (\frac{3\varpi}{2n} - z) \times \sin. (\frac{3\varpi}{2n} + z). \sin. (\frac{5\varpi}{2n} - z) \text{ &c.}$$

bis man so viel Faktoren hat, als n Einheiten enthält.

§. 243.

Eben diese Ausdrücke giebt auch die Betrachtung der Cosinus vielfacher Winkel an die Hand. Denn wenn der $\cos. z = y$ gesetzt wird, so ist

$$\cos. 0z = 1$$

$$\cos. 1z = y$$

$\cos. 2z = 2yy - 1$

$\cos. 3z = 4y^3 - 3y$

$\cos. 4z = 8y^4 - 8yy + 1$

$\cos. 5z = 16y^5 - 20y^3 + 5y$

$\cos. 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18yy - 1$

$\cos. 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1}2^{n-3}y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}2^{n-9}y^{n-8} - \text{ꝛc.}$$

Da nun $\cos. nz = \cos. (2\varpi - nz) = \cos. (2\varpi + nz) = \cos. (4\varpi \pm nz) = \cos. (6\varpi \pm nz)$ ꝛc. ist, so sind die Wurzeln von y in dieser Gleichung: $\cos. z$; $\cos. (\frac{2\varpi}{n} \pm z)$; $\cos. (\frac{4\varpi}{n} \pm z)$; $\cos. (\frac{6\varpi}{n} \pm z)$ ꝛc. Wie viel man aber davon jedesmal für y nehmen müsse? solches richtet sich nach der Menge der Einheiten, die n enthält.

§. 244.

Hier fällt nun zuvörderst in die Augen, daß die Summe aller dieser Wurzeln, den Fall ausgenommen, wenn $n = 1$ ist, wegen der Abwesenheit des zweyten Gliedes $= o$ seyn muß: und es ist daher

$$o = \cos. z. + \cos. (\frac{2\pi}{n} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{4\pi}{n} - z) + \cos. (\frac{4\pi}{n} + z) \text{ ꝛc.}$$

wenn man jedesmal so viel Glieder nimmt, als n Einheiten hat. Wenn n eine gerade Zahl ist, so bietet sich diese Glei-

chung von selbst dar, indem jedes Glied von einem anderen ihm entgegenstehenden aufgehoben wird. Wir wollen daher bloß die ungeraden Zahlen betrachten, und da ist, die Einheit ausgeschlossen, wegen cos. v = − cos. (π − v)

$$0 = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{3} - z) - \cos. (\frac{\pi}{3} + z)$$

$$0 = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{5} - z) - \cos. (\frac{\pi}{5} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{5} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{5} + z)$$

$$0 = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{7} - z) - \cos. (\frac{\pi}{7} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{7} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{7} + z) - \cos. (\frac{3\pi}{7} - z) - \cos. (\frac{3\pi}{7} + z)$$

und überhaupt ist, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet,

$$0 = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} + z) - \cos. (\frac{3\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{3\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{4\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{4\pi}{n} + z) - \text{ꝛc.}$$

wenn man immer so viel Glieder nimmt, als n Einheiten hat, und n größer als die Einheit ist, wie schon vorhin bemerkt worden.

§. 245.

Was das Produkt aus allen angeführten Wurzeln betrifft, so findet man solches verschieden, je nachdem n eine ungerade oder eine ungerademal gerade oder eine gerademal gerade Zahl ist. Es sind aber diese verschiedenen Ausdrücke in dem allgemeinen Ausdrucke, den wir

wir §. 242. gefunden haben, enthalten, wenn man daselbst jeden Sinus in den Cosinus verwandelt. Es ist nemlich

$$\cos. z = 1 \cos. z$$

$$\cos. 2z = 2 \cos.(\frac{\pi}{4} + z).\ \cos.(\frac{\pi}{4} - z)$$

$$\cos. 3z = 4 \cos.(\frac{2\pi}{6} + z).\ \cos.(\frac{2\pi}{6} - z).\ \cos. z.$$

$$\cos. 4z = 8 \cos.(\frac{3\pi}{8} + z).\ \cos.(\frac{3\pi}{8} - z)\ \cos.(\frac{\pi}{8} + z) \times \cos.(\frac{\pi}{8} - z)$$

$$\cos. 5z = 16 \cos.(\frac{4\pi}{10} + z).\ \cos.(\frac{4\pi}{10} - z)\ \cos.(\frac{2\varpi}{10} + z) \times \cos.(\frac{2\varpi}{10} - z)\ \cos. z.$$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1} \cos.(\frac{n-1}{2n}\pi + z).\ \cos.(\frac{n-1}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-3}{2n}\varpi + z).\ \cos.(\frac{n-3}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-5}{2n}\varpi + z).\ \cos.(\frac{n-5}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-7}{2n}\varpi + z)\ \text{&c.}$$

wenn man jedesmal so viel Faktoren nimmt, als n Einheiten enthält.

§. 246.

Ist n eine ungerade Zahl, und läßt man die Gleichung von der Einheit anfangen, so ist

$$0 = 1 \mp \frac{ny}{\cos. nz} + \text{&c.}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine ungerade Zahl von Form $4m+1$, das untere aber, wenn es eine ungerade Zahl von der Form $4m-1$ ist. Daher ist

†

$$+\frac{1}{\cos. z} = \frac{1}{\cos. z}$$

$$-\frac{3}{\cos. 3z} = \frac{1}{\cos. z} - \frac{1}{\cos.(\frac{\varpi}{3} - z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{\varpi}{3} + z)}$$

$$+\frac{5}{\cos. 5z} = \frac{1}{\cos. z} - \frac{1}{\cos.(\frac{\varpi}{5} - z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{\varpi}{5} + z)} +$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{2\varpi}{5} - z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{2\varpi}{5} + z)}$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$\frac{n}{\cos. nz} = \frac{2m+1}{\cos.(2m+1)z} = \frac{1}{\cos.(\frac{m}{n}\varpi + z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{m}{n}\varpi - z)} -$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-1}{n}\varpi + z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{m-1}{n}\varpi - z)} +$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-2}{n}\varpi + z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{m-2}{n}\varpi - z)} -$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-3}{n}\varpi + z)} - \text{ꝛc.}$$

Man muß aber auch hier jedesmal so viel Glieder nehmen als n Einheiten hat.

§. 247.

Da $\frac{1}{\cos. v} = \sec. v$ ist, so lassen sich hieraus sehr merkwürdige Eigenschaften der Secanten ableiten. Es ist nemlich

$$\sec. z = \sec. z$$

$$3\sec. 3z = \sec.(\frac{\varpi}{3} + z) + \sec.(\frac{\varpi}{3} - z) - \sec.(\frac{o\varpi}{3} + z)$$

5 sec.

$$5\,\text{sec.}\,5z = \text{sec.}\left(\frac{2\varpi}{5}+z\right)+\text{sec.}\left(\frac{2\varpi}{5}-z\right)-\text{sec.}\left(\frac{\varpi}{5}+z\right)-$$
$$\text{sec.}\left(\frac{\varpi}{5}-z\right)+\text{sec.}\left(\frac{0\varpi}{5}+z\right)$$

$$7\,\text{sec.}\,7z = \text{sec.}\left(\frac{3\varpi}{7}+z\right)+\text{sec.}\left(\frac{3\varpi}{7}-z\right)-\text{sec.}\left(\frac{2\varpi}{7}+z\right)-$$
$$\text{sec.}\left(\frac{2\varpi}{7}-z\right)+\text{sec.}\left(\frac{\varpi}{7}+z\right)+\text{sec.}\left(\frac{\varpi}{7}-z\right)-$$
$$\text{sec.}\left(\frac{0\varpi}{17}+z\right)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m+1$ setzt,

$$n\,\text{sec.}\,nz = \text{sec.}\left(\frac{m}{n}\varpi+z\right)+\text{sec.}\left(\frac{m}{n}\varpi-z\right)-$$
$$\text{sec.}\left(\frac{m-1}{n}\varpi+z\right)-\text{sec.}\left(\frac{m-1}{n}\varpi-z\right)+$$
$$\text{sec.}\left(\frac{m-2}{n}\varpi+z\right)+\text{sec.}\left(\frac{m-2}{n}\varpi-z\right)-$$
$$\text{sec.}\left(\frac{m-3}{n}\varpi+z\right)-\text{sec.}\left(\frac{m-3}{n}\varpi-z\right)+$$
$$\text{sec.}\left(\frac{m-4}{n}\varpi+z\right)+\ldots\ldots\pm\text{sec.}\,z.$$

§. 248.

Für die Cosecanten aber erhält man aus §. 237.

$$\text{cosec.}\;z = \text{cosec.}\,z$$

$$3\,\text{cosec.}\,3z = \text{cosec.}\,z+\text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{3}-z\right)-\text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{3}+z\right)$$

$$5\,\text{cosec.}\,5z = \text{cosec.}\,z+\text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{5}-z\right)-\text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{5}+z\right)-$$
$$\text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{5}-z\right)+\text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{5}+z\right)$$

$$7\,\text{cosec.}\,7z = \text{cosec.}\,z + \text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{7} - z\right) - \text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{7} + z\right) -$$
$$\text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{7} - z\right) + \text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{7} + z\right) +$$
$$\text{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{7} - z\right) - \text{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{7} + z\right)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$n.\,\text{cosec.}\,nz = \text{cosec.}\,z + \text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{n} - z\right) - \text{cosec.}\left(\frac{\varpi}{n} + z\right) -$$
$$\text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right) + \text{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right) +$$
$$\text{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right) - \text{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{n} + z\right) -$$
$$\ldots\ldots\ldots \mp \text{cosec.}\left(\frac{m\varpi}{n} - z\right) \pm \text{cosec.}\left(\frac{m\varpi}{n} + z\right)$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern aber, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 249.

Da, wie wir oben [§. 133.] gesehen haben,

$$\text{cos.}\,nz \pm \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,nz = (\text{cos.}\,z \pm \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n$$

ist, so ist

$$\text{cos.}\,nz = \frac{(\text{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n + (\text{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n}{2},$$

und

$$\text{sin.}\,nz = \frac{(\text{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n - (\text{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

und also $\text{tang.}\,nz =$

$$\frac{(\text{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n - (\text{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n}{(\text{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n\sqrt{-1} + (\text{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\text{sin.}\,z)^n\sqrt{-1}}$$

Setzt man daher $\text{tang.}\,z = \frac{\text{sin.}\,z}{\text{cos.}\,z} = t$, so ist

tang.

$$\text{tang. } n\,z = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1-t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}}$$

und hieraus folgt für die Tangenten vielfacher Winkel -

$$\text{tang. } z = t$$

$$\text{tang. } 2z = \frac{2t}{1-tt}$$

$$\text{tang. } 3z = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}$$

$$\text{tang. } 4z = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6tt + t^4}$$

$$\text{tang. } 5z = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10tt + 5t^4}$$

und überhaupt tang. n z =

$$\frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{ꝛc.}}{1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}tt + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}t^4 - \text{ꝛc.}}$$

Da also tang. n z = tang. $(\pi + n\,z)$ = tang. $(2\pi + n\,z)$ = tang. $(3\pi + n\,z)$ ꝛc. ist, so sind die Werthe von t, oder die Wurzeln der Gleichung folgende: tang. z; tang. $(\frac{\pi}{n} + z)$; tang. $(\frac{2\pi}{n} + z)$ ꝛc. und ihre Anzahl jedesmal = n.

§. 250.

Läßt man die Gleichung von der Einheit anfangen, so ist

$$0 = 1 - \frac{nt}{\text{tang. } n\,z} - \frac{n(n-1)tt}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)t^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \text{tang. } n\,z} + \text{ꝛc.}$$

Vergleicht man nun die Coefficienten mit den Wurzeln, so wird n cot. n z =

$$\text{cot. } z + \text{cot. } (\tfrac{\pi}{n} + z) + \text{cot. } (\tfrac{2\pi}{n} + z) + \text{cot. } (\tfrac{3\pi}{n} + z) + \text{cot. } (\tfrac{4\pi}{n} + z) + \ldots\ldots + \text{cot. } (\tfrac{n-1}{n}\pi + z).$$

Ferner

Ferner ist die Summe der Quadrate dieser Cotangenten = $\frac{nn}{(\sin. nz)^2} - n$; und auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Potestäten bestimmen. Setzt man aber für n bestimmte Zahlen, so wird

$$\cot. z = \cot. z$$

$$2 \cot. 2z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{2} + z)$$

$$3 \cot. 3z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{3} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{3} + z)$$

$$4 \cot. 4z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{4} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{4} + z) + \cot. (\frac{3\varpi}{4} + z)$$

$$5 \cot. 5z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{3\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{4\varpi}{5} + z).$$

§. 251.

Weil aber $\cot. v = - \cot. (\varpi - v)$ ist, so wird

$$\cot. z = \cot. z$$

$$2 \cot. 2z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{2} + z)$$

$$3 \cot. 3z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{3^1} - z) + \cot. (\frac{\varpi}{3} + z)$$

$$4 \cot. 4z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{4} - z) + \cot. (\frac{\varpi}{4} + z) - \cot. (\frac{2\varpi}{14} - z)$$

$$5 \cot. 5z = \cot. z - \cot.(\frac{\varpi}{5} - z) + \cot.(\frac{\varpi}{5} + z) -$$
$$\cot.(\frac{2\varpi}{5} - z) + \cot.(\frac{2\varpi}{5} + z)$$

und überhaupt

$$n \cot. nz = \cot. z - \cot.(\frac{\pi}{n} - z) + \cot.(\frac{\pi}{n} + z) -$$
$$\cot.(\frac{2\pi}{n} - z) + \cot.(\frac{2\pi}{n} + z) -$$
$$\cot.(\frac{3\pi}{n} - z) + \cot.(\frac{3\pi}{n} + z) -$$
$$\text{&c.}$$

bis man so viel Glieder hat, als n Einheiten enthält.

§. 252.

Nun fange die gefundene Gleichung von der höchsten Potestät an, wo denn zuvörderst die Fälle von einander zu unterscheiden sind, wenn n eine gerade, und wenn es eine ungerade Zahl ist. Es sey also n eine ungerade Zahl, oder $n = 2m + 1$. Alsdann ist

$$t - \text{tang. } z = 0$$
$$t^3 - 3tt \text{ tang. } 3z - 3t + \text{tang. } 3z = 0$$
$$t^5 - 5t^4 \text{ tang. } 5z - 10t^3 + 10tt \text{ tang. } 5z + 5t -$$
$$\text{tang. } 5z = 0$$

und überhaupt

$$t^n - n t^{n-1} \text{ tang. } nz - \ldots\ldots \overline{+} \text{ tang. } nz = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, das untere aber, wenn m eine ungerade Zahl ist. Aus dem Coefficienten des zweyten Gliedes ergiebt sich also

$$\text{tang. } z = \text{tang. } z$$
$$3 \text{ tang. } 3z = \text{tang. } z + \text{tang.}(\frac{\pi}{3} + z) + \text{tang.}(\frac{2\pi}{3} + z)$$

$$5\,\text{tang.}\,5z = \text{tang.}\,z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{5}+z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{5}+z) +$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{5}+z) + \text{tang.}\,(\tfrac{4\pi}{5}+z)$$

&c.

§. 253.

Da $\text{tang.}\,v = -\text{tang.}\,(\pi - v)$ ist, so lassen sich die Winkel, die größer sind als ein rechter, auf solche zurückführen, die kleiner als ein rechter Winkel sind; und alsdann ist

$$\text{tang.}\,z = \text{tang.}\,z$$

$$3\,\text{tang.}\,3z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{3}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{3}+z)$$

$$5\,\text{tang.}\,5z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{5}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{5}+z) -$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{5}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{5}+z)$$

$$7\,\text{tang.}\,7z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{7}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{7}+z) -$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{7}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{7}+z) -$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{7}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{7}+z)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m+1$ setzt,

$$n\,\text{tang.}\,nz = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{n}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{n}+z) -$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{n}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{n}+z) -$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{n}-z) + \ldots\ldots - $$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{m\pi}{n}-z) + \text{tang.}\,(\tfrac{m\pi}{n}+z).$$

§. 254.

§. 254.

Ferner ist das Produkt aus allen diesen Tangenten = tang. n z, denn die Zweydeutigkeit in Ansehung der Zeichen fällt weg, weil die Zahl der negativen Zeichen abwechselnd eine gerade und eine ungerade Zahl ist. Folglich ist

tang. z = tang. z

$$\text{tang. } 3z = \text{tang. } z \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} - z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$\text{tang. } 5z = \text{tang. } z \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} - z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{5} + z\right) \times$$
$$\text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

und überhaupt, wenn man n = 2 m + 1 setzt,

$$\text{tang. } nz = \text{tang. } z \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} - z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{\pi}{n} + z\right) \text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \times$$
$$\text{tang. } \left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \times$$
$$\text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \cdot \text{tang. } \left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

§. 255.

Ferner sey n eine gerade Zahl, so ist, wenn man von der höchsten Potestät anfängt,

$$tt + 2t \cdot \cot. 2z - 1 = 0$$

$$t^4 + 4t^3 \cdot \cot. 4z - 6tt - 4t \cdot \cot. 4z + 1 = 0$$

und überhaupt, wenn n = 2 m gesetzt wird,

$$t^n + n t^{n-1} \cot. nz - \ldots\ldots\ldots \mp 1 = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine ungerade, das untere hingegen, wenn m eine gerade Zahl ist. Vergleicht man daher die Wurzeln mit dem Coefficienten des zweyten Gliedes, so wird,

$$-2\cot.2z = \text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{2} + z)$$

$$-4\cot.4z = \text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{4} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{4} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{4} + z)$$

$$-6\cot.6z = \text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{4\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{5\pi}{6} + z).$$

&c.

§. 256.

Da $\text{tang.}\, v = -\text{tang.}\,(\pi - v)$ ist, so folgt hieraus

$$2\cot.2z = -\text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{2} - z)$$

$$4\cot.4z = -\text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{4} - z) - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{4} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{4} - z)$$

$$6\cot.6z = -\text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{6} - z) - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{6} - z) - \text{tang.}\,(\tfrac{2\pi}{6} + z) + \text{tang.}\,(\tfrac{3\pi}{6} - z)$$

und überhaupt, wenn $n = 2m$ ist,

$$n.\cot.nz = -\text{tang.}\, z + \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{n} - z) - \text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{n} + z) + \text{tang.}$$

$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) - \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) +$$

$$\text{tang.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \text{tang.}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \text{tang.}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right)$$

§. 257.

Hierdurch wird nun aber auch hier die Zweydeutigkeit des Produkts aus allen Wurzeln aus dem Wege geräumt, und es ist daher

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{4} - z\right). \text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + z\right). \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{6} - z\right). \text{tang.}\left(\frac{\pi}{6} + z\right). \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \times$$

$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{6} + z\right). \text{tang.}\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

u. s. f.

Der Grund von diesen Gleichungen fällt beym ersten Anblick in die Augen, indem darin immer je zwey und zwey Winkel einander zum rechten Winkel ergänzen. Da das Produkt aus den Tangenten jeder zweyer von diesen Winkeln = 1 ist, so muß auch das Produkt aus allen der Einheit gleich seyn.

§. 258.

Da die Sinus und Cosinus der Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, eine wiederkehrende Reihe ausmachen, [§. 129.] so kann man nach den im vorhergehenden Capitel erklärten Regeln die Summe jeder

Menge dieser Sinus und Cosinus finden. Sind die in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Winkel

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,\ \text{etc.}$$

und soll zuvörderst die Summe aller ihrer der Zahl nach unendlichen Sinus gefunden werden: so setze man

$$s = \sin. a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \sin.(a+3b) + \text{etc.}$$

Da diese Reihe eine wiederkehrende Reihe, und ihre Beziehungs-Scale $2\cos. b, -1$ ist: so entspringt dieselbe aus einem Bruche, dessen Nenner $1 - 2z.\cos. b + zz$ ist, wenn man $z = 1$ setzt; der Bruch selbst aber ist $=$

$$\frac{\sin. a + z(\sin.(a+b) - 2\sin. a.\cos. b)}{1 - 2z.\cos. b + zz}$$ [§. 231.] Setzt man daher $z = 1$, so wird

$$s = \frac{\sin. a + \sin.(a+b) - 2\sin. a\cos. b}{2 - 2\cos. b} = \frac{\sin. a - \sin.(a-b)}{2(1-\cos. b)},$$

weil $2\sin. a.\cos. b = \sin.(a+b) + \sin.(a-b)$ ist. Da aber $\sin. f - \sin. g = 2\cos.\frac{f+g}{2}.\sin.\frac{f-g}{2}$ ist, so wird $\sin. a - \sin.(a-b) = 2\cos.(a-\frac{1}{2}b).\sin.\frac{1}{2}b$, und $1 - \cos. b = 2(\sin.\frac{1}{2}b)^2$; und folglich

$$s = \frac{\cos.(a-\frac{1}{2}b)}{2\sin.\frac{1}{2}b}.$$

§. 259.

Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, die Summe jeder Anzahl von Sinus, deren Winkel in einer arithmetischen Progression stehen, anzugeben. Soll nemlich die Summe der Reihe

$$\sin. a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \sin.(a+3b) + \ldots + \sin.(a+nb)$$

gefunden werden, so suche man, da die Summe dieser Reihe, wenn

wenn man sie ohne Ende fortgehen läßt $= \frac{\cos.(a - \frac{1}{2}b)}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$

ist, die Summe der Glieder, die auf $\sin.(a + n\,b)$ folgen, oder die Summe von

$\sin.(a+(n+1)b) + \sin.(a+(n+2)b) + \sin.(a+(n+3)b) + \text{&c.}$

welche $= \frac{\cos.(a+(n+\frac{1}{2})b)}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$ seyn wird. Zieht man, wenn dieses geschehen, die zuletzt gefundene Summe von der vorhergehenden ab, so bleibt die gesuchte Summe übrig. Ist nemlich

$s = \sin. a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \ldots + \sin.(a+nb)$

so wird

$$s = \frac{\cos.(a - \frac{1}{2}b) - \cos.(a+(n+\frac{1}{2})b)}{2 \sin. \frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\sin.(a + \frac{1}{2}n\,b) \sin. \frac{1}{2}(n+1)b}{\sin. \frac{1}{2}b}.$$

§. 260.

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn man die Cosinus nimmt, und

$s = \cos. a + \cos.(a+b) + \cos.(a+2b) + \cos.(a+3b) + \text{&c.}$

ohne Ende, setzt

$$s = \frac{\cos. a + z(\cos.(a+b) - 2\cos. a. \cos. b)}{1 - 2z. \cos. b + zz}, \text{ für } z = 1.$$

Da nun $2 \cos. a. \cos. b = \cos.(a-b) + \cos.(a+b)$ ist, so wird

$$s = \frac{\cos. a - \cos.(a-b)}{2(1 - \cos. b)}.$$

Nun ist aber $\cos. f - \cos. g = 2 \sin. \frac{f+g}{2}. \sin. \frac{g-f}{2}$;

folglich $= \cos. a - \cos.(a-b) = -2 \sin.(a - \frac{1}{2}b). \sin. \frac{1}{2}b$;

und da überdies $1 - \cos. b = 2 (\sin. \frac{1}{2} b)^2$ ist, so wird dadurch

$$s = - \frac{\sin. (a - \frac{1}{2} b)}{2 \sin. \frac{1}{2} b}.$$

Ferner ist auf eine ähnliche Art die Summe der Reihe

$\cos. (a + (n +)b) + \cos. (a + (n + 2)b) + \cos. (a + (n + 3)b) + \text{&c.}$

$= - \frac{\sin. (a + (n + \frac{1}{2})b)}{2 \sin. \frac{1}{2} b}$ und zieht man daher diese Summe von jener ab, so bleibt die Summe dieser Reihe

$$s = \cos. a + \cos. (a + b) + \cos. (a + 2b) + \ldots + \cos. (a + nb)$$

übrig, und es ist daher

$$s = - \frac{\sin. (a - \frac{1}{2} b) + \sin. (a + (n + \frac{1}{2}) b)}{2 \sin. \frac{1}{2} b}$$

$$= \frac{\cos. (a + \frac{1}{2} nb) . \sin. \frac{1}{2} (n + 1) b}{\sin. \frac{1}{2} b.}$$

§. 261.

Es lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen noch sehr viel andere Fragen, die Sinus und die Tangenten betreffend, beantworten; z. B. wie man die Quadrate, und die höhern Potestäten der Sinus und der Tangenten summiret. Da man aber diese Antworten aus den übrigen Coefficienten der obigen Gleichungen auf eine ähnliche Art ableitet, so wollen wir uns dabey nicht aufhalten. Man muß indeß in Rücksicht auf diese letztern Summationen bemerken, daß man eine jede Potestät der Sinus und Cosinus durch die einzeln Sinus und Cosinus ausdrucken kann; und davon soll nun noch kürzlich geredet werden.

§. 262.

Man nehme also aus den oben [§. 130.] angeführten folgende Sätze zu Hülfe:

2 sin.

$2 \sin. a. \sin. z = \cos. (a - z) - \cos. (a + z)$
$2 \cos. a. \sin. z = \sin. (a + z) - \sin. (a - z)$
$2 \sin. a. \cos. z = \sin. (a + z) + \sin. (a - z)$
$2 \cos. a. \cos. z = \cos. (a - z) + \cos. (a + z)$

Hieraus findet man zuvörderst [S. §. 130. Anmerk.] für die Potestäten der Sinus

$\sin. z = \sin. z$
$2 (\sin. z)^2 = 1 - \cos. 2z$
$4 (\sin. z)^3 = 3 \sin. z - \sin. 3z$
$8 (\sin. z)^4 = 3 - 4 \cos. 2z + \cos. 4z$
$16 (\sin. z)^5 = 10 \sin. z - 5 \sin. 3z + \sin. 5z$
$32 (\sin. z)^6 = 10 - 15 \cos. 2z + 6 \cos. 4z - \cos. 6z$
$64 (\sin. z)^7 = 35 \sin. z - 21 \sin. 3z + 7 \sin. 5z - \sin. 7z$
$128 (\sin. z)^8 = 35 - 56 \cos. 2z + 28 \cos. 4z - 8 \cos. 6z + \cos. 8z$
$256 (\sin. z)^9 = 126 \sin. z - 84 \sin. 3z + 36 \sin. 5z - 9 \sin. 7z + \sin. 9z$
&c.

Das Gesetz, nach welchem hier die Coefficienten auf einander folgen, läßt sich aus den Coefficienten eines zu einer Potestät erhobenen Binomiums erkennen, nur muß dabey bemerkt werden, daß die absolute Zahl bey den geraden Potestäten nur die Hälfte von der ist, welche die Coefficienten des zu eben der Potestät erhobenen Binomiums an die Hand geben.

§. 263.

Auf eine ähnliche Art [S. §. 130. Anmerk.] werden die Potestäten der Cosinus bestimmt. Es ist nemlich

$\cos. z = \cos. z$
$2 (\cos. z)^2 = 1 + \cos. 2z$

$4(\cos.z)^3 = 3\cos.z + \cos.3z$

$8(\cos.z)^4 = 3 + 4\cos.2z + \cos.4z$

$16(\cos.z)^5 = 10\cos.z + 5\cos.3z + \cos.5z$

$32(\cos.z)^6 = 10 + 15\cos.2z + 6\cos.4z + \cos.6z$

$64(\cos.z)^7 = 35\cos.z + 21\cos.3z + 6\cos.5z + \cos.7z$

ꝛc.

Was das Gesetz betrifft, nach welchem hier die Coefficienten auf einander folgen, so gilt davon eben das, was davon vorhin bey den Sinus angemerkt worden ist.

Funfzehntes Capitel.

Von den Reihen, welche aus der Entwickelung der Faktoren entspringen.

§. 264.

Wenn ein Produkt gegeben ist, welches auch Faktoren von folgender Form

$(1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)(1 + \varepsilon z)(1 + \zeta z)$ &c.

deren Anzahl übrigens endlich oder unendlich seyn mag, besteht, und man dafür durch die wirkliche Multiplication dieser Faktoren die Reihe

$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 +$ &c.

erhält: so ist bekannt, daß die Coefficienten auf die Art aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ &c. erwachsen, daß

$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta +$ &c. = der Summe aller dieser Zahlen einzeln genommen,

B = der Summe der Produkte aus je zwey und zweyen,

C = der Summe der Produkte aus je drey und dreyen,

D = der Summe der Produkte aus je vier und vieren,

E = der Summe der Produkte aus je fünf und fünfen von diesen Zahlen, &c. ist, bis daß man zu dem Produkte aus allen gekommen ist. Man darf aber hierbey keine von den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. mit sich selbst verbinden.

§. 265.

Wenn also $z = 1$ gesetzt wird, so ist das Produkt

$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta)(1 + \varepsilon)$ &c.

gleich

gleich der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen, die sich aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. ergeben, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere von einander verschiedene von denselben mit einander multiplicirt. Ergiebt sich dabey eine und dieselbe Zahl auf zwey oder mehrere Arten, so muß dieselbe auch zwey oder mehrmal in der gedachten Reihe enthalten seyn.

§. 266.

Setzt man $z = -1$ so ist das Produkt

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\,\&c.$$

wieder gleich der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen, die sich aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. ergeben, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere von einander verschiedene von ihnen mit einander multiplicirt, doch mit der Veränderung, daß alle Produkte aus drey, fünf oder jeder ungeraden Menge dieser Zahlen als negative, die Produkte aber aus zwey, oder vier oder jeder geraden Menge von ihnen also positive Zahlen betrachtet werden müssen.

§. 267.

Setzt man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. alle Prim-Zahlen, 2, 3, 5, 7, 11, 13, &c. so ist das Produkt

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\,\&c. = P$$

gleich der Einheit nebst der Reihe aller Zahlen, die entweder selbst Prim-Zahlen sind, oder aus verschiedenen Prim-Zahlen durch die Multiplication entstehen. Es ist also

$$P = 1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+\&c.$$

welches eine Reihe ist, worinn alle natürliche Zahlen, die Potestäten, und diejenigen Zahlen, welche durch Potestäten theilbar sind, ausgenommen, vorkommen. Es fehlen nem-

nemlich die Zahlen 4, 8, 9, 12, 16, 18 ꝛc. weil sie entweder Potestäten sind, wie 4, 8, 9, 16, ꝛc. oder durch Potestäten getheilt werden können, wie 12, 18 ꝛc.

§. 268.

Auf eben die Art wird es sich verhalten, wenn man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. die Potestäten der Prim-Zahlen von irgend einem Grade setzt. Macht man nemlich

$$P = (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})\ \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man wirklich multiplicirt,

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.}$$

und in diesen Brüchen kommen alle Zahlen vor, diejenigen ausgenommen, welche entweder selbst Potestäten, oder durch Potestäten theilbar sind. Denn da alle ganze Zahlen entweder Prim-Zahlen, oder aus dergleichen durch die Multiplication zusammengesetzte Zahlen sind, so fallen hier bloß diejenigen aus, bey deren Zusammensetzung eine und dieselbe Zahl zwey- oder mehrmal genommen wird.

§. 269.

Wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. so wie vorhin [§. 266.] negativ genommen, und also

$$P = (1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n})\ \text{ꝛc.}$$

gesetzt wird; so ist

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{15^n} - \text{ꝛc.}$$

wo wieder, wie vorhin alle Zahlen, außer den Potestäten,

und

und denen, die durch Potestäten theilbar sind, vorkommen. Aber alle die zusammengesetzten Zahlen, die aus drey, fünf, oder jeder ungeraden Menge von Prim Zahlen entstanden sind, haben das Zeichen — vor sich; so wie hingegen vor denen, welche aus zwey oder vier oder sechs oder ieder andern geraden Menge von Prim-Zahlen entsprungen sind, das Zeichen + steht. So kommt z. B. in dieser Reihe das Glied $\frac{1}{30^n}$ vor, weil $30 = 2.3.5$ ist, und also keine Potestät in sich enthält; dieses Glied hat das Zeichen — vor sich, weil 30 ein Produkt aus drey Prim-Zahlen ist.

§. 270.

Nimmt man nunmehr den Ausdruck

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\,\&c.}$$

und druckt man Reihe, welche man daraus, wenn man wirklich dividirt, erhält, auf folgende Art aus:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \&c.$$

so ist bekannt, daß die Coefficienten A, B, C, D, E &c. auf die Art aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. entstehen, daß

A = der Summe aller dieser Zahlen einzeln genommen

B = der Summe aller Produkte aus je zwey und zweyen

C = der Summe aller Produkte aus je drey und dreyen

D = der Summe aller Produkte aus je vier und vieren von ihnen &c. ist, doch so, daß dabey jede auch so oft als möglich mit sich selbst verbunden wird.

§. 271.

Setzt man $z = 1$, so wird der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\,\&c.}$$

der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen gleich, die aus diesen

diesen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. entstehen, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere mit einander multiplicirt, so daß man dabey auch jede mehr als einmal nimmt oder mit sich selbst verbindet. Es unterscheidet sich also die Reihe, die man hier erhält, von der §. 265. dadurch, daß bey jener nur verschiedene Faktoren mit einander multiplicirt werden durften, bey dieser aber ein und derselbe Faktor zwey und mehrmal vorkommen kann. Es enthält nemlich die gegenwärtige Reihe alle Zahlen, die auf irgend eine Art aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. durch die Multiplication hervorgebracht werden können.

§. 272.

Es ist daher die Anzahl der Glieder dieser Reihe allezeit eine unendliche Zahl, die Menge der Faktoren mag endlich oder unendlich seyn. So ist z. B.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{ꝛc.}$$

wo alle aus der 2 durch die Multiplication entstehende Zahlen, oder alle Potestäten der 2 vorkommen. Ferner ist

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \text{ꝛc.}$$

wo keine andere Zahlen vorkommen, als solche, welche aus 2 und 3 zusammengesetzt, oder nur durch 2 oder 3 theilbar sind.

§. 273.

Setzt man daher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. die Einheit, durch alle einzelne Prim-Zahlen dividirt, oder

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\&c.}$$

so wird

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \&c.$$

so daß hier sowohl alle Prim-Zahlen, als alle aus ihnen zusammengesetzte Zahlen vorkommen. Da aber jede ganze Zahl entweder eine Prim-Zahl ist, oder aus den Prim-Zahlen durch die Multiplication hervorgebracht wird, so ist offenbar, daß hier alle ganze Zahlen ohne Ausnahme vorkommen müssen.

§. 274.

Eben das findet statt, wenn man die Potestäten der Prim-Zahlen von irgend einem Grade nimmt. Denn setzt man

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\,\&c.}$$

so wird

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n}\,\&c.$$

wo alle natürliche Zahlen ohne Ausnahme vorkommen. Giebt man aber den Faktoren allenthalben das Zeichen +, so daß

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\,\&c.}$$

ist: so wird

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \&c.$$

Hier haben die Prim-Zahlen das Zeichen — vor sich; ferner sind die Produkte aus zwey einander gleichen oder verschiedenen Prim-Zahlen mit dem Zeichen + versehen, und

eben

eben das findet allemal statt, wenn die Menge der Prim-Zahlen, durch deren Multiplication irgend ein Glied entstanden, eine gerade Zahl ist; ist hingegen diese Menge eine ungerade Zahl, so muß das Zeichen — wieder gebraucht werden. So hat das Glied $\frac{1}{240^n}$, weil $240 = 2.2.2.2.3.5$ ist, das Zeichen +. Der Grund hiervon liegt im 270sten §, wenn man $z = -1$ setzt.

§. 275.

Wenn man dieses mit dem Vorhergehenden [im Anfange dieses Capitels] vergleicht, so erhält man dadurch zwey Reihen, deren Produkt $= 1$ ist. Es sey nemlich

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\,\&c.}$$

und

$$Q = (1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\,\&c.$$

so ist

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \&c.$$

und

$$Q = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \&c.$$

[§. 269.] und es fällt dabey in die Augen, daß $PQ = 1$ ist.

§. 276.

Setzt man hingegen

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\,\&c.}$$

und

$$Q = (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})\,\text{&c.}$$

so wird

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \text{&c.}$$

und

$$Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \text{&c.}$$

und es ist auch hier $PQ = 1$. Kennt man daher die Summe der einen Reihe, so kann man auch die Summe der andern finden.

§. 277.

Umgekehrt kann man aus den bekannten Summen dieser Reihen die Werthe der ohne Ende fortlaufenden Faktoren bestimmen. Denn setzt man

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \text{&c. und}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \text{&c.}$$

so ist

$$M = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n})\,\text{&c.}} \text{ und}$$

$$N = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^{2n}})(1 - \frac{1}{3^{2n}})(1 - \frac{1}{5^{2n}})(1 - \frac{1}{7^{2n}})(1 - \frac{1}{11^{2n}})\,\text{&c.}}$$

Hieraus ergiebt sich durch die Division

$$\frac{M}{N} = (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})\,\text{&c.}$$

und daraus findet man

$$\frac{MM}{N} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n + 1}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n + 1}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n + 1}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n + 1}{11^n - 1}\,\text{&c.}$$

Sind

Sind daher M und N bekannt, so kann man einmal die Werthe dieser Produkte finden, und dann erhält man daraus auch die Summen folgender Reihen

$$\frac{1}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} - \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} - \frac{1}{11^{2n}} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{N}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \text{ꝛc.}$$

und daraus lassen sich vermittelst der Combination sehr viele andere herleiten.

Erstes Exempel.

Es sey $n = 1$. Da nun, wie wir oben bewiesen haben, $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \text{ꝛc.}$ ist, so erhält man, wenn man $x = 1$ setzt, $l\frac{1}{1-1} = l\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ꝛc.}$ Aber der Logarithme einer unendlich großen Zahl ist selbst unenendlich groß, und folglich ist

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{ꝛc.} = \infty$$

Da nun hierdurch $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty} = 0$ wird, so ist

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \text{ ꝛc.}$$

Ferner hat man hieraus

$$M = \infty = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\,\&c.}$$

und dieses giebt

$$\infty = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\,\&c.$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\,\&c.$$

Hiernächst ist nach den oben [S. 167. f.] erklärten Regeln von der Summation der Reihen,

$$N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. = \frac{\pi\pi}{6}$$

und daraus fließen folgende Summen

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \&c.$$

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \&c.$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\,\&c.$$

Endlich erhält man für die Faktoren

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\,\&c.\text{ oder}$$

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\,\&c.$$

und da $\frac{M}{N} = \infty$ oder $\frac{N}{M} = 0$ ist, so ist ferner

$$\infty = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\,\&c.$$

$$0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\,\&c.,\text{ desgleichen}$$

$$\infty = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{20}{18} \text{ &c.}$$

$$0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \text{ &c.}$$

In diesen Brüchen sind, wenn man den ersten ausnimmt, die Zähler allenthalben um 1 kleiner als die Nenner: addirt man aber den Zähler und Nenner eines jeden Bruchs, so geben diese Summen die Prim-Zahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c.

Zweytes Exempel.

Setzt man $n = 2$, so ist aus §. 167.

$$M = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \text{&c.} = \frac{\pi\pi}{6}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \text{&c.} = \frac{\pi^4}{90}$$

Hieraus lassen sich zuvörderst folgende Reihen summiren

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{12^2} - \text{&c.}$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} - \text{&c.}$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \text{&c.}$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} \text{ &c.}$$

Dann sind daraus auch die Werthe folgender Produkte bekannt

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \text{&c.}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdot \text{&c.}$$

$$\frac{15}{\pi\pi} = \frac{2^2+1}{2^2}\cdot\frac{3^2+1}{3^2}\cdot\frac{5^2+1}{5^2}\cdot\frac{7^2+1}{7^2}\cdot\frac{11^2+1}{11^2}\cdot \text{ &c. oder}$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{121}{122}\cdot\frac{169}{170}\cdot$$

desgleichen

$$\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdot\frac{11^2+1}{11^2-1}\cdot \text{ &c. oder}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdot \text{ &c. oder}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdot \text{ &c.}$$

In diesen Brüchen sind die Zähler allenthalben um 1 größer als die Nenner, beyde aber zu einander addirt geben die Quadrate der Prim-Zahlen $3^2, 5^2, 7^2, 11^2$, &c.

Drittes Exempel.

Da wir nach dem Obigen den Werth von M bloß dann angeben können, wenn n eine gerade Zahl ist, so sey nunmehr $n = 4$. Alsdann ist

$$M = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ &c.} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{ &c.} = \frac{\pi^8}{9450}$$

Darnach lassen sich zuvörderst folgende Reihen summiren

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} \text{ &c.}$$

$$\frac{9450}{\pi^8} = 1 - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8} - \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{10^8} - \frac{1}{11^8} \text{ &c.}$$

$$\frac{105}{\pi^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{11^4} \text{ &c.}$$

$$\frac{\pi^4}{105} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} \text{ &c.}$$

Hier-

Hiernächst findet man auch die Werthe folgender Produkte

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdot \text{ &c.}$$

$$\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1} \cdot \frac{3^8}{3^8-1} \cdot \frac{5^8}{5^8-1} \cdot \frac{7^8}{7^8-1} \cdot \frac{11^8}{11^8-1} \cdot \text{ &c.}$$

$$\frac{105}{\pi^4} = \frac{2^4+1}{2^4} \cdot \frac{3^4+1}{3^4} \cdot \frac{5^4+1}{5^4} \cdot \frac{7^4+1}{7^4} \cdot \frac{11^4+1}{11^4} \cdot \text{ &c. und}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{2^4+1}{2^4-1} \cdot \frac{3^4+1}{3^4-1} \cdot \frac{5^4+1}{5^4-1} \cdot \frac{7^4+1}{7^4-1} \cdot \frac{11^4+1}{11^4-1} \cdot \text{ &c. oder}$$

$$\frac{35}{34} = \frac{41}{40} \cdot \frac{313}{312} \cdot \frac{1201}{1200} \cdot \frac{7321}{7320} \cdot \text{ &c.}$$

In diesen Brüchen sind die Zähler allenthalben um 1 größer als die Nenner, beyde aber zu einander addirt geben die Biquadrate der ungeraden Prim-Zahlen, 3, 5, 7, 11, &c.

§. 278.

Da wir hier die Summe der Reihe

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ &c.}$$

auf Faktoren gebracht haben, so setzt uns dieses in den Stand, unsere Betrachtung auf die Logarithmen auszudehnen. Denn da

$$M = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n}) \text{ &c.}}$$

ist, so hat man daher

$$lM = -l(1-\frac{1}{2^n}) - l(1-\frac{1}{3^n}) - l(1-\frac{1}{5^n}) - l(1-\frac{1}{7^n}) \text{ &c.}$$

und es ist folglich, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt,

$$lM = +1(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ &c.})$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Setzt man nun außerdem

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\text{ꝛc. so daß}$$

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\text{ꝛc.}}$$

wird: so ist, wenn man wieder die hyperbolischen Logarithmen braucht,

$$1N=+1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Aus diesen beyden Bestimmungen aber folgt

$$1M-\tfrac{1}{2}1N=+1\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{7^{n}}+\frac{1}{11^{n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$+\tfrac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{7}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

§. 279.

§. 279.

Setzt man $n = 1$, so wird $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc.}$ $= 1\infty$, [§. 277. erst. Ex] und $N = \frac{\pi\pi}{6}$. Folglich ist

$$l.1\infty - \tfrac{1}{2} l\tfrac{\pi\pi}{6} = + 1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Da aber diese Reihen, außer der ersten, nicht nur jede für sich, sondern auch zusammengenommen, eine endliche und noch dazu sehr kleine Summe geben: so muß die Summe der ersten Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{ꝛc.}$ unendlich groß seyn; sie ist nemlich um eine hinlänglich kleine Größe geringer als der hyperbolische Logarithme der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ꝛc.}$

§. 280.

Setzt man $n = 2$, so ist $M = \frac{\pi\pi}{6}$ und $N = \frac{\pi^4}{90}$. Folglich wird

$$21\pi - 16 = + 1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

$$4l\pi - l90 = +1\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \text{&c.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{11^8} + \text{&c.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \frac{1}{11^{12}} + \text{&c.}\right)$$
$$\text{&c.}$$

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{5}{2} = +1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{&c.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \text{&c.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \text{&c.}\right)$$
$$\text{&c.}$$

§. 281.

Obgleich das Gesetz, nach welchem die Prim-Zahlen fortschreiten, nicht bekannt ist, so lassen sich doch die Summen der höhern Potestäten dieser Reihen ohne Schwierigkeit näherungsweise bestimmen. Denn ist

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \text{&c. und}$$

$$S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \text{&c.}$$

so ist

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \text{&c.}$$

und da

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \text{&c.}$$

so wird

S=

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$S = (M-1)(1-\frac{1}{2^n}) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \text{ꝛc.}$$

und da

$$M(1-\frac{1}{2^n})\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$S = (M-1)(1-\frac{1}{2^n})(-\frac{1}{3^n}) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{45^n} - \text{ꝛc.}$$

Da also M bekannt ist, so findet man hiernach den Werth von S sehr leicht, wenn n eine nur einigermaßen große Zahl ist.

§. 282.

Sind aber die Summen der höhern Potestäten bekannt, so kann man aus den gefundenen Formeln auch die Summen der niedern Potestäten bestimmen. Auf diese Art sind folgende Summen der Reihe

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \text{ꝛc.}$$

gefunden worden.

Wenn gesetzt wird, so ist die Summe der Reihe

n = 2;	0,452247420041222
n = 4;	0,076993139764252
n = 6;	0,017070086850639
n = 8;	0,004061405366515
n = 10;	0,000993603573633
n = 12;	0,000246026470033
n = 14;	0,000061244396725
n = 16;	0,000015282026219
n = 18;	0,000003817278702

n =

$n = 20;$ 0,0000009539611123
$n = 22;$ 0,0000002384504446
$n = 24;$ 0,0000000596081184
$n = 26;$ 0,0000000149015555
$n = 28;$ 0,0000000037253333
$n = 30;$ 0,0000000009313323
$n = 32;$ 0,0000000002328330
$n = 34;$ 0,0000000000582077
$n = 36;$ 0,0000000000145511

Die folgenden Summen der geraden Potestäten findet man durch eine fortgesetzte Division durch 4.

§. 283.

Die Verwandlung der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{&c.}$ in ein unendliches Produkt kann aber auch auf folgende Weise directe vorgenommen werden. Es sey

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \text{&c.}$$

Subtrahirt man hiervon

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{&c.}$$

so erhält man

$$(1 - \frac{1}{2^n})A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \text{&c.} = B,$$

eine Reihe, in welcher alle durch 2 theilbaren Glieder fehlen. Subtrahirt man ferner hiervon

$$\frac{1}{3^n}B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} + \text{&c.}$$

so bekommt man

$$(1 - \frac{1}{3^n})B = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \text{&c.} = C$$

worin

worin außerdem auch alle durch 3 theilbaren Glieder fehlen. Subtrahirt man also wieder hiervon

$$\frac{1}{5^n}C = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} + \frac{1}{55^n} + \text{&c.}$$

so wird

$$(1-\frac{1}{5^n})C = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \text{&c.}$$

so daß nunmehr auch alle durch 5 theilbaren Glieder weggeschafft sind. Da man nun auf diese Art auch alle durch 7, 11, und die übrigen Prim-Zahlen theilbaren Glieder wegbringen kann, so fällt in die Augen, daß nach der Wegschaffung aller durch die Prim-Zahlen theilbaren Glieder allein die Einheit übrig bleibe. Setzt man daher für B, C, D, E &c. die ihnen zukommenden Werthe, so findet man

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\,\text{&c.} = 1$$

und es ist daher die Summe der gegebenen Reihe =

$$A = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\,\text{&c.}}, \text{ oder}$$

$$A = \frac{2^n}{2^n-1} \cdot \frac{3^n}{3^n-1} \cdot \frac{5^n}{5^n-1} \cdot \frac{7^n}{7^n-1} \cdot \frac{11^n}{11^n-1}\,\text{&c.}$$

§. 284.

Diese Methode läßt sich sehr gut gebrauchen, um nunmehr auch andere Reihen, deren Summen oben von uns gefunden worden sind, in unendliche Produkte zu verwandeln. Wir kennen aber aus §. 175. die Summen dieser Reihen

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \text{&c.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist; denn der allgemeine Ausdruck

druck für diese Summe ist $N\pi^n$, und die Werthe von N finden sich am angeführten Orte. Da hier bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, so muß bemerkt werden, daß dieselben das Zeichen + vor sich haben, wenn sie unter die Form $4m+1$ gehören, und das Zeichen —, wenn sie unter dem allgemeinen Ausdrucke $4m-1$ begriffen sind. Es sey also

$$A = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{15^n} + \text{ꝛc.}$$

so ist, wenn man dazu

$$\frac{1}{3^n}A = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} - \text{ꝛc.}$$

addirt,

$$(1+\frac{1}{3^n})A = 1 + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{ꝛc.} = B$$

Ferner erhält man, wenn man hiervon

$$\frac{1}{5^n}B = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \text{ ꝛc.}$$

subtrahirt,

$$(1-\frac{1}{5^n})B = 1 - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{ꝛc.} = C$$

worin bereits alle Zahlen fehlen, die durch 3 und 5 theilbar sind. Addirt man nun wieder

$$\frac{1}{7^n}C = \frac{1}{7^n} - \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \text{ꝛc.}$$

so fallen auch die durch 7 theilbaren Zahlen weg, und es wird

$$(1+\frac{1}{7^n})C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{ꝛc.} = D$$

Hiezu

$$\frac{1}{11^n}D = \frac{1}{11^n} - \frac{1}{121^n} + \text{ꝛc.}$$

gesetzt, so wird

(1+

$$(1 + \frac{1}{11^n})D = 1 + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{ꝛc. E}$$

und es sind also auch die durch 11 theilbaren Zahlen weggebracht worden. Fährt man auf diese Art fort, so findet man nach der Wegschaffung aller durch die übrigen Prim-Zahlen theilbaren Zahlen endlich

$$A(1 + \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})(1 - \frac{1}{13^n}) \text{ ꝛc.} = 1$$

oder

$$A = \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n + 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \frac{17^n}{17^n - 1} \text{ ꝛc.}$$

Hier kommen in den Zählern die Potestäten aller Prim-Zahlen vor, und eben diese Potestäten sind in den Nennern entweder um 1 vermehrt, oder um 1 vermindert, je nachdem die Prim-Zahlen entweder unter die Form $4m - 1$, oder unter diese, $4m + 1$ gehören.

§. 285.

Setzt man also $n = 1$, so erhält man, weil alsdann $A = \frac{\pi}{4}$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \text{ ꝛc.}$$

Nun haben wir oben [§. 277. S.] gefunden

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{5^2}{4.6} \cdot \frac{7^2}{6.8} \cdot \frac{11^2}{10.12} \cdot \frac{13^2}{12.14} \cdot \frac{17^2}{16.18} \cdot \frac{19^2}{18.20} \text{ ꝛc.}$$

Dividirt man daher diese zweyte Summe durch die erste, so wird

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \text{ ꝛc.}$$

Hier

Hier machen die Prim-Zahlen die Zähler, und die ungerademal geraden Zahlen, die sich von diesen Zählern um 1 unterscheiden, die Nenner aus. Dividirt man aber dieses Letzte nochmals durch $\frac{\pi}{4}$, so wird

$$2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \text{ &c. oder}$$

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \text{ &c.}$$

und hierin entstehen die Brüche aus den ungeraden Prim-Zahlen, wenn man dieselben in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden hingegen zu den Nennern nimmt.

§. 286.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Wallisischen Bestimmung [§. 185.]

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11} \text{ &c.}$$

oder

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \text{ &c.}$$

so findet man, wenn diesen letztern Ausdruck durch

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \text{ &c.}$$

aus dem vorhergehenden §. dividirt,

$$\frac{32}{\pi^3} = \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 16} \cdot \frac{21 \cdot 21}{20 \cdot 22} \cdot \frac{25 \cdot 25}{24 \cdot 26} \text{ &c.}$$

wo in den Zählern alle ungerade Zahlen vorkommen, die keine Prim-Zahlen sind.

§. 287.

Setzt man $n = 3$, so wird $A = \frac{\pi^3}{32}$ [§. 175.] und daher

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{3^3}{3^3+1} \cdot \frac{5^3}{5^3-1} \cdot \frac{7^3}{7^3+1} \cdot \frac{11^3}{11^3+1} \cdot \frac{13^3}{13^3-1} \cdot \frac{17^3}{17^3-1} \cdot \text{&c.}$$

Nun giebt aber die Reihe [§. 167.]

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{&c.}$$

nach §. 277.

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6-1} \cdot \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1} \text{&c.}$$

oder

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1} \text{&c.}$$

Dividirt man also diesen letzten Ausdruck durch den ersten, so wird

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1} \cdot \frac{5^3}{5^3+1} \cdot \frac{7^3}{7^3-1} \cdot \frac{11^3}{11^3-1} \cdot \frac{13^3}{13^3+1} \cdot \frac{17^3}{17^3+1} \text{&c.}$$

und dividirt man diesen nochmals durch den ersten, so erhält man

$$\frac{16}{15} = \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{7^3+1}{7^3-1} \cdot \frac{11^3+1}{11^3-1} \cdot \frac{13^3-1}{13^3+1} \cdot \frac{17^3-1}{17^3+1} \text{&c.}$$

oder

$$\frac{16}{15} = \frac{14}{13} \cdot \frac{62}{63} \cdot \frac{172}{171} \cdot \frac{666}{665} \cdot \frac{1098}{1099} \text{&c.}$$

Diese Brüche entstehen aus den Cubis der ungeraden Prim-Zahlen, wenn man jeden in zwey um 1 unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden aber zu den Nennern nimmt.

§. 288.

Aus diesen Ausdrücken können wieder neue Reihen gemacht werden, in welchen alle natürliche Zahlen in den Nennern vorkommen. Denn da

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \text{&c.}$$

ist, so ist

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\&c.}$$

und daraus erhält man, wenn man entwickelt, diese Reihe

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\,\&c.$$

Mit den Zeichen verhält es sich darin so, daß die 2 das Zeichen —, die Prim-Zahlen von der Form $4m-1$ ebenfalls —, die aber von der Form $4m+1$ das Zeichen +, und die zusammengesetzten Zahlen endlich das Zeichen haben, welches ihnen nach ihrer Entstehung aus den Prim-Zahlen zukommt. So bekommt der Bruch $\frac{1}{60}$ das Zeichen —, weil $60 = 2.2.3.5$ ist, und die drey ersten Zahlen hier das Zeichen —, und die letzte allein das Zeichen + hat. Auf eine ähnliche Art ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\&c.}$$

und daraus entsteht die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\,\&c.$$

Hier hat die 2 das Zeichen +, die Prim-Zahlen von der Form $4m-1$ das Zeichen —, die von der Form $4m+1$ das Zeichen +, und die zusammengesetzten Zahlen bekommen das Zeichen, welches ihnen nach ihrer Entstehung aus den Prim-Zahlen zukommt.

§. 289.

Da ferner

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\,\&c.}$$

ist, so erhält man durch die Entwickelung

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{13} \text{ ꝛc.}$$

wo bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, die Zeichen aber so beschaffen sind, daß die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ das Zeichen $+$, die von der Form $4m + 1$ aber das Zeichen $-$ haben, wodurch denn zugleich die Zeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmt werden. Hieraus aber lassen sich ferner zwey andere Reihen finden, worin alle Zahlen vorkommen. Es ist nemlich

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc}}$$

und daraus ergiebt sich durch die Entwickelung

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo die 2 das Zeichen $+$, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ ebenfalls $+$, die von der Form $4m + 1$ aber das Zeichen $-$ haben. Dann ist aber auch

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc.}}$$

und hier giebt die Entwickelung

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo die 2 das Zeichen $-$, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ das Zeichen $+$, und die von der Form $4m + 1$ das Zeichen $-$ haben.

§. 290.

Man kann hieraus noch unzählige andere Folgen der Zeichen finden, so daß die Summe der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \text{ ꝛc.}$$

bestimmbar bleibt. Da nemlich

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\,\&c.}$$

ist, so bekommt man, wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$ multiplicirt,

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\,\&c.}$$ und

$$\pi = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\,\&c.$$

Hier sind die 2 und die 3 positiv, die übrigen Prim-Zahlen aber, wenn sie unter die Form $4m-1$ gehören, negativ, und wenn sie unter dieser, $4m+1$, begriffen sind, positiv, woraus sich denn ferner die Zeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmen lassen. Auf eine ähnliche Art findet man aus

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\,\&c.}$$

wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$ multiplicirt,

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1+\frac{1}{17})\,\&c.}$$

und hieraus ferner durch die Entwickelung

$$\frac{3\pi}{2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\&c.$$

wo die 2 und die Prim-Zahlen von der Form $4m-1$ positiv, die Prim-Zahlen von der Form $4m+1$ aber negativ sind, bloß die 5 ausgenommen, welche ebenfalls positiv ist.

§. 291.

Auch lassen sich unzählige Reihen finden, deren Summe $= 0$ ist. Denn da [§. 277. S. 308.)

$$0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\&c.$$

ist,

ist, so ist auch

$$0 = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ &c.}}$$

und hieraus wird, [nach §. 276.]

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\text{ &c.}$$

wo alle Prim-Zahlen das Zeichen — haben, und die zusammengesetzten Zahlen sich nach der Regel der Multiplication richten. Multiplicirt man aber diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$, so ist auch

$$0 = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ &c.}}$$

und daraus findet man durch die Entwickelung

$$0 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\text{ &c.}$$

wo die 2 das Zeichen +, die übrigen Prim-Zahlen aber insgesammt das Zeichen — haben. Auf eine ähnliche Art ist

$$0 = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ &c.}}$$

und daraus entspringt die Reihe

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\text{ &c.}$$

wo alle Prim-Zahlen, die 3 und die 5 ausgenommen, das Zeichen — haben. Ueberhaupt ist die Summe dieser Reihe $= 0$, wenn alle Prim-Zahlen, außer einigen wenigen, das Zeichen —, und hingegen $= \infty$, wenn alle Prim-Zahlen, außer einigen wenigen, das Zeichen + haben.

§. 292.

Auch haben wir oben [§. 176.] die Summe der Reihe

$$A = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n}\text{ &c.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, gefunden. Da nun hieraus

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{8^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} - \text{ꝛc.}$$

ist, so bekommt man, wenn man dieses zu dem Vorhergehenden addirt,

$$B = (1 + \frac{1}{2^n})A = 1 - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} + \frac{1}{25^n} - \text{ꝛc.}$$

Addirt man ferner hierzu

$$\frac{1}{5^n}B = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \text{ꝛc.}$$

so bekommt man

$$C = (1 + \frac{1}{5^n})B = 1 + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus, wenn man davon

$$\frac{1}{7^n}C = \frac{1}{7^n} + \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \text{ꝛc.}$$

subtrahirt,

$$D = (1 - \frac{1}{7^n})C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \text{ꝛc.}$$

entspringt. Fährt man auf diesem Wege fort, so findet man endlich

$$A(1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})(1 - \frac{1}{13^n} \text{ꝛc.} = 1$$

wo alle Prim-Zahlen, welche die Vielfachen von 6 um 1 übersteigen, das Zeichen —, diejenigen aber, welche um 1 kleiner sind, das Zeichen + haben. Es ist also

$$A = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \text{ꝛc.}$$

§. 293

§. 293.

Nun sey $n = 1$, in welchem Falle $A = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ wird, [§. 176.] so ist

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \text{&c.}$$

wo in den Zählern alle auf die 3 folgenden Prim-Zahlen vorkommen, die Nenner aber von den Zählern um 1 unterschieden, und alle durch 6 theilbar sind. Da nun [§. 277. S. 309.]

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \text{ &c.}$$

ist, so findet man, wenn man diesen Ausdruck durch jenen dividirt,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \text{ &c.}$$

wo die Nenner nicht durch 6 theilbar sind. Oder es ist

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \text{ &c. und}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \text{ &c.}$$

Folglich ist, wenn man diesen letztern Ausdruck durch den erstern dividirt,

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{24}{22} \text{ &c.}$$

oder

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{11} \text{ &c.}$$

und diese Brüche erhält man, wenn man die Prim-Zahlen 5, 7, 11, &c. in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und immer den Theil, der durch 3 theilbar ist, zum Zähler nimmt.

§. 294.

Da wir oben [§. 285.] gesehen haben, daß

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \text{ꝛc.}$$

ist, so findet man, wenn man die vorhergehenden Ausdrücke $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ und $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ durch diesen theilt,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdot \text{ꝛc. und}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{30}{29} \cdot \text{ꝛc.}$$

Die Brüche des ersten Ausdrucks erhält man aus den Prim-Zahlen von der Form $12\,m + 6 \pm 1$, und die Brüche des andern Ausdrucks aus den Prim-Zahlen von der Form $12\,m \pm 1$, wenn man jede derselben in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden hingegen zu den Nennern nimmt.

§. 295.

Nun wollen wir noch die §. 179 gefundene Reihe betrachten, welche folgende ist:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.} = A$$

Subtrahirt man davon

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \text{ꝛc.}$$

so erhält man

$$(1 - \frac{1}{3})A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{ꝛc.} = B$$

Addirt

Addirt man ferner hierzu

$$\frac{1}{5}B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \text{ꝛc.}$$

so wird

$$(1 + \frac{1}{5})B = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17}\text{ꝛc.} = C$$

Und fährt man auf diese Art fort, so erhält man endlich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1-\frac{1}{17})\text{ꝛc.}$$

$$(1 - \frac{1}{19})\text{ꝛc.} = 1$$

wo es sich mit den Zeichen auf die Art verhält, daß die Prim-Zahlen von der Form $8m + 1$ oder $8m + 3$ negativ, die Prim-Zahlen hingegen von der Form $8m + 5$ oder $8m + 7$ positiv sind. Es ist folglich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdot\text{ꝛc.}$$

wo alle Nenner entweder durch 8 theilbar sind, oder zu den ungerademal geraden Zahlen gehören. Da nun

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdot\text{ꝛc. und}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot\text{ꝛc. und}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdot\text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdot\text{ꝛc.}$$

wo kein Nenner vorkommt, der durch 8 theilbar wäre, die gerademal geraden Zahlen aber sind da, so oft sie von den Zählern nur um 1 verschieden sind. Dividirt man nun den ersten Ausdruck durch den letzten, so wird

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdot \text{2c.}$$

und diese Brüche erhält man aus den Prim-Zahlen, wenn man jede derselben in zwey um 1 unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile, (ausgenommen, wenn sie gerademal gerade Zahlen sind,) zu den Zählern nimmt.

§. 296.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die übrigen Reihen, die wir oben [§. 179. f.] für die Ausdrücke der Kreisbogen gefunden haben, in Faktoren verwandeln, die aus den Prim-Zahlen formirt werden, und es können auf diese Art noch sehr viel andere merkwürdige Eigenschaften sowohl dieser Faktoren, als der unendlichen Reihen gefunden werden. Da indeß die vornehmsten davon bereits angeführt worden sind, so wollen wir uns nicht dabey aufhalten, um noch mehrere zu finden, sondern zu einem hiermit verwandten Gegenstande fortgehen. So wie wir nemlich in dem gegenwärtigen Capitel die Zahlen nach ihrer Entstehungsart durch die Multiplication betrachtet haben: so wollen wir in dem folgenden die Entstehung derselben durch die Addition erwägen.

Sechszehntes Capitel.

Von der Theilung der Zahlen.

§. 297.

Es sey der Ausdruck

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\,\text{&c.}$$

gegeben, und es werde gefragt: Was derselbe für eine Form bekomme, wenn er durch die Multiplication entwickelt wird? Angenommen, daß das gesuchte Produkt =

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{&c.}$$

sey: so ist offenbar, daß P die Summe der Potestäten $x^{\alpha} + x^{\beta} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\varepsilon} + \text{&c.}$ seyn wird. Ferner ist alsdann Q die Summe der Produkte aus allen Paaren dieser Potestäten, oder das Aggregat aller Potestäten von x, deren Exponenten Summen zweyer verschiedener Glieder dieser Reihe

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \text{&c.}$$

sind. Eben so ist R das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von drey, S das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von vier verschiedenen Gliedern eben dieser Reihe sind, &c.

§. 298.

Die Potestäten von x, die in den Werthen der Buchstaben P, Q, R, S, &c. vorkommen, haben die Einheit zum

zum Coefficienten, wenn ihre Exponenten nur auf eine einzige Art aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. formirt werden können; kann aber der Exponent einer solchen Potestät auf mehr denn eine Art die Summe zweyer, dreyer oder mehrerer Glieder der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ꝛc. seyn, so hat diese Potestät einen Coefficienten, der eben so vielmal, als dies statt findet, die Einheit in sich enthält. Findet man z. B. in dem Werthe von Q den Ausdruck Nx^n, so zeigt derselbe an, daß die Zahl n auf N verschiedene Arten die Summe zweyer verschiedener Glieder der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. ist. Und kommt man bey der Entwickelung der Faktoren auf ein Glied von der Form Nx^nz^m, so zeigt der Coefficient N an, auf wie vielerley Art die Zahl n die Summe von m Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. seyn kann.

§. 299.

Wenn man also das gegebene Produkt

$$(1 + x^{\alpha}z)(1 + x^{\beta}z)(1 + x^{\gamma}z)(1 + x^{\delta}z)\text{ ꝛc.}$$

durch die Multiplication wirklich entwickelt, so erhellet aus dem dadurch gefundenen Ausdrucke sogleich, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl die Summe von so viel verschiedenen Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. als man will, seyn kann. Will man nemlich wissen, auf wie vielerley Arten die Zahl n die Summe von m verschiedenen Gliedern jener Reihe seyn kann, so sucht man in dem entwickelten Produkte das Glied x^nz^m, und der Coefficient desselben zeigt die verlangte Zahl an.

§. 300.

Damit dieses desto deutlicher werde, so sey folgendes Produkt, dessen Faktoren der Zahl nach unendlich sind, gegeben:

(1 +

$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$ ꝛc.

Entwickelt man dasselbe durch eine wirkliche Multiplication, so bekommt man:

$1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+$ ꝛc.)

$+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+$ ꝛc.)

$+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+$ ꝛc.)

$+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+$ ꝛc.)

$+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+$ ꝛc.)

$+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+$ ꝛc.)

$+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+$ ꝛc.)

$+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+$ ꝛc.)

ꝛc.

Aus diesen Reihen nun läßt sich sogleich bestimmen, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge von einander verschiedener Glieder dieser Reihe, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerley Art die Zahl 35 die Summe aus sieben verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc. seyn kann: so dürfte man nur in der Reihe, vor der z^7 als ein Multiplicator steht, die Potestät x^{35} aufsuchen, und der Coefficient dieser Dignität, 15, würde anzeigen, daß man die Zahl 35 auf 15 verschiedene Arten aus sieben verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. durch die Addition erhalten könne.

§. 301.

§. 301.

Setzt man aber $z = 1$, und zieht man die ähnlichen Potestäten von x in eine Summe zusammen, oder welches eben dasselbe ist, entwickelt man diesen unendlichen Ausdruck

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6)\text{ &c.}$$

wodurch man die Reihe:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \text{&c.}$$

erhält: so zeigt ein jeder Coefficient an, auf wie vielerley Arten der Exponent der Dignität von x, zu welcher er gehört, aus den Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. vorausgesetzt, daß jedes nicht mehr als einmal genommen werde, durch die Addition entstehen kann. Auf diese Art erhellt, daß die Zahl 8 auf sechs verschiedene Arten durch die Addition verschiedener Zahlen erhalten wird, und diese sind

$8 = 8$	$8 = 5 + 3$
$8 = 7 + 1$	$8 = 5 + 2 + 1$
$8 = 6 + 2$	$8 = 4 + 3 + 1$

Hier ist indeß zu bemerken, daß die gegebene Zahl ebenfalls mitgerechnet werden muß, weil die Zahl der zu nehmenden Glieder nicht bestimmt wird, und also auch ein einziges genommen werden kann.

§. 302.

Man erkennt also hieraus, wie eine jede Zahl durch die Addition verschiedener Zahlen entsteht. Soll nun aber die Bedingung der Verschiedenheit wegfallen, so muß man die vorhin angenommenen Faktoren in den Renner setzen. Es sey also der Ausdruck

$$\frac{1}{(1 - x^{\alpha}z)(1 - x^{\beta}z)(1 - x^{\gamma}z)(1 - x^{\delta}z)(1 - x^{\varepsilon}z)\text{ &c.}}$$

gege-

gegeben, und die Reihe, welche man daraus, wenn man wirklich dividirt, erhält, sey

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{ꝛc.}$$

Hier ist offenbar, daß P das Aggregat der Potestäten von x ist, deren Exponenten in dieser Reihe

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \text{ ꝛc.}$$

enthalten sind. Ferner ist Q das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen zweyer Glieder dieser Reihe sind, so aber, daß die gedachten zwey Glieder auch einander gleich seyn können. Weiter ist R das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen dreyer Glieder, und S das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von vier Gliedern jener Reihe sind, und zwar ebenfalls so, daß diese Glieder entweder alle von einander verschieden, oder auch alle oder zum Theil einander gleich seyn können. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den übrigen Coefficienten.

§. 303.

Wenn man also den ganzen Ausdruck nach allen seinen Gliedern entwickelt, und die ähnlichen Glieder zusammenzieht, so ist man im Stande daraus zu erkennen, auf wie viel verschiedene Arten eine Zahl n durch die Addition von m, einander entweder gleichen oder von einander verschiedenen, Gliedern aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. hervorgebracht werden kann. Man darf nemlich nur in dem entwickelten Ausdrucke das Glied $x^n z^m$ suchen, und den Coefficienten desselben betrachten, der N heißen mag, so daß also das ganze Glied $= N x^n z^m$ ist; denn dieser Coefficient N zeigt an, auf wie viel verschiedene Arten die Zahl n aus m Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. durch die Addition erhalten werden kann.

§. 304.

Wir wollen jetzt das Gesagte auf einen vor andern merkwürdigen Fall anwenden. Es sey also der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\,\&c.}$$

gegeben, wofür man, wenn man ihn durch die Division entwickelt, folgendes erhält:

$$1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\&c.)$$
$$+z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+\&c.)$$
$$+z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10x^{11}+\&c.)$$
$$+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\&c.)$$
$$+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\&c.)$$
$$+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\&c.)$$
$$+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\&c.)$$
$$+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\&c.)$$
$$\&c.$$

Aus diesen Reihen läßt sich nun sogleich bestimmen, auf wie viel verschiedene Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge von Gliedern dieser Reihe, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. durch die Addition hervorgebracht werden kann. Wird z. B. gefragt, auf wie vielerley Art die Zahl 13 aus fünf ganzen Zahlen durch die Addition entstehen kann: so darf man nur das Glied $x^{13}z^5$ aufsuchen, denn dessen Coefficient 18 zeigt an, daß die gegebene Zahl 13 auf achtzehn ver-

verschiedene Arten aus fünf ganzen Zahlen durch die Addition erhalten werden kann.

§. 305.

Wenn man $z = 1$ setzt, und die ähnlichen Potestäten von x zusammenzieht, so giebt der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ &c.}}$$

wenn man ihn entwickelt, die Reihe

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \text{&c.}$$

worin jeder Coefficient anzeigt, auf wie vielerley Arten der Exponent der Potestät, zu welcher er gehört, aus gleichen entweder oder ungleichen ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. So sieht man aus dem Gliede $11x^6$, daß dieses bey 6 auf eilf Arten möglich ist, und diese sind

$6 = 6$	$6 = 3 + 1 + 1 + 1$
$6 = 5 + 1$	$6 = 2 + 2 + 2$
$6 = 4 + 2$	$6 = 2 + 2 + 1 + 1$
$6 = 4 + 1 + 1$	$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 3$	$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 2 + 1$	

Hierbey ist zu bemerken, daß die gegebene Zahl selbst, weil sie in der gegebenen Zahl-Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ebenfalls enthalten ist, auch eine Art giebt.

§. 306.

Nachdem wir dieses überhaupt angemerkt haben, so wollen wir die Art und Weise, die Menge der gedachten Zusammensetzungen gegebener Zahlen zu bestimmen, genauer zu erforschen suchen. Wir wollen hierbey von dem Falle anfangen, den wir auch vorhin zuerst berührt haben,

und wobey die ganzen Zahlen, woraus die gegebenen durch die Addition hervorgebracht werden sollen, insgesammt von einander verschieden sind. Es sey also der Ausdruck

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\,\&c.$$

gegeben, und die Reihe, welche man dafür erhält, wenn man ihn entwickelt und nach den Potestäten von x ordnet, sey

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$$

Hier muß nun gezeigt werden, wie man die Funktionen von x, welche durch die Buchstaben P, Q, R, S, T, &c. angedeutet werden, auf eine leichte Art finden kann, denn dies ist es, worauf es bey der gedachten Untersuchung eigentlich ankommt.

§. 307.

Setzt man also xz anstatt z, so wird

$$(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\,\&c. = \frac{Z}{1 + xz}$$

und es geht also der Werth des Produkts, welches wir Z genannt haben, wenn man xz für z setzt, in $\frac{Z}{1 + xz}$ über; so daß daher, da

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$$

ist,

$$\frac{Z}{1 + xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$

wird. Multiplicirt man also diese Gleichung durch $1 + xz$ so bekömmt man

$$Z = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$
$$+ xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \&c.$$

und vergleicht man nunmehr diesen Werth von Z mit dem vorhergehenden, so wird $P = \frac{x}{1 - x}$; $Q = \frac{Px^2}{1 - x^2}$;

R =

$$R = \frac{Qx^3}{1-x^3}; \quad S = \frac{Rx4}{1-x4}; \text{ ꝛc.}$$

Es sind folglich die Werthe, welche man für P, Q, R, S, ꝛc. erhält, folgende:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

ꝛc.

§. 308.

Auf diese Art können wir also jede Potestäten-Reihe von x besonders darstellen, und daraus bestimmen, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge anderer ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. Zugleich fällt hierbey in die Augen, daß jede dieser Reihen eine wiederkehrende Reihe seyn wird, weil sie insgesammt aus der Entwickelung einer gebrochenen Funktion von x entspringen. So giebt der erste Ausdruck $P = \frac{x}{1-x}$ die geometrische Reihe

$$x + x^2 + x^3 + x4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{ꝛc.}$$

aus welcher erhellet, daß eine jede Zahl einmal in der Reihe der ganzen Zahlen enthalten ist.

§. 309.

Was den zweyten Ausdruck, $Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$ betrifft, so giebt derselbe die Reihe

$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{&c.}$

und darin zeigt der Coefficient eines jeden Gliedes an, auf wie viel Arten der Exponent von x in zwey ungleiche Theile getheilt werden kann. So giebt das Glied $4x^9$ zu erkennen, daß sich die Zahl 9 auf vier verschiedene Arten in zwey ungleiche Theile theilen läßt. Dividirt man die angeführte Reihe durch x^3, so erhält man zum Quotienten die Reihe, welche aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ entspringt, und folgende ist:

$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \text{&c.}$

Setzt man nun das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$, so ist aus der Entstehungsart derselben klar, daß der Coefficient N anzeigt, auf wie vielerley Arten der Exponent n aus den Zahlen 1 und 2 durch die Addition hervorgebracht werden kann. Da also das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe $= Nx^{n+3}$ ist, so erhalten wir dadurch den Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch die Addition hervorgebracht werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n + 3$ in zwey ungleiche Theile theilen.

§. 310.

Entwickelt man ferner den dritten Ausdruck $\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ so erhält man dafür die Reihe

$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \text{&c.}$

in

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, auf wie viel verschiedene Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, in drey ungleiche Theile getheilt werden kann. Entwickelt man aber den Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ so bekommt man die Reihe

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \text{&c.}$

und wenn man das allgemeine Glied derselben $= Nx^n$ setzt, so zeigt der Coefficient N an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2 und 3 durch die Addition erhalten werden kann. Da nun das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe $= Nx^{n+6}$ ist, so folgt daraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2 und 3 durch die Addition erhalten werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n + 6$ in drey ungleiche Theile theilen läßt.

§. 311.

Der vierte Ausdruck $\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ giebt, wenn man ihn in eine wiederkehrende Reihe auflöset,

$x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + \text{&c.}$

und in dieser Reihe zeigt der Coefficient eines jeden Gliedes an, auf wie vielerley Arten der Exponent der neben ihm stehenden Potestät von x in vier ungleiche Theile zerfällt werden kann. Entwickelt man aber den Ausdruck $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ so erhält man die vorhergehende Reihe durch x^{10} dividirt, oder

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + \text{&c.}$

und setzt man das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$

so ist bekannt, daß der Coefficient N anzeigt, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition erhalten werden kann. Da also das allgemeine Glied der ersten Reihe $= Nx^{n+10}$ ist, so folgt hieraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition hervorgebracht werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n+10$ in vier ungleiche Theile theilen.

§. 312.

Ueberhaupt also zeigt der Coefficient N, wenn man diesen Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe auflöset, und das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$ setzt, an, auf wie vielerley Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 ..... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Löset man aber den Ausdruck

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe auf, so wird das allgemeine Glied derselben $= Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, und darin zeigt der Coefficient N an, auf wie viel verschiedene Arten die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{1.2}$ in m ungleiche Theile getheilt werden kann. Hieraus fließt folgender Lehrsatz:

Auf eben so viele Arten, als man eine Zahl n durch die Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m hervorbringen kann, auf eben so viele Arten läßt sich auch

auch die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ in m ungleiche Theile theilen.

§. 313.

Nachdem wir die Theilung der Zahlen in ungleiche Theile betrachtet haben, so wollen wir nun die Theilung derselben betrachten, bey welcher die Theile auch [entweder alle oder einige] einander gleich seyn können, und bey welcher der Ausdruck

$$Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\,\&c.}$$

zum Grunde liegt. Wir wollen annehmen, daß wir aus diesem Ausdrucke, wenn wir wirklich dividiren,

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$$

erhalten. Da nun, wenn man xz anstatt z setzt,

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\,\&c.} = (1-xz)Z$$

wird, so wird auch, wenn man eben diese Veränderung mit der entwickelten Reihe vornimmt,

$$(1-xz)Z = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \&c.$$

seyn. Multiplicirt man ferner die Reihe

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \&c.$$

durch $1-xz$, so erhält man

$$(1-xz)Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$$
$$- xz - Pxz^2 - Qxz^3 - Rxz^4 - \&c.$$

und vergleicht man endlich dieses mit dem Vorhergehenden, so findet man

$$P = \frac{x}{1-x}; \quad Q = \frac{Px}{1-x^2}; \quad R = \frac{Qx}{1-x^3}; \quad S = \frac{Rx}{1-x^4}; \quad \&c.$$

Man erhält also für P, Q, R, S &c. folgende Werthe:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

&c.

§. 314.

Diese Bestimmungen der Buchstaben P, Q, R, S &c. unterscheiden sich von den vorher [§. 307.] gefundenen bloß darin, daß die Exponenten ihrer Zähler kleiner sind; und es stimmen daher die Reihen, die sich durch die Entwickelung der gegenwärtigen und der vorhergehenden Werthe von P, Q, R, S &c. ergeben, in Ansehung der Coefficienten auf das genaueste mit einander überein. Man kann diese Uebereinstimmung schon bey einer Vergleichung der Reihen im 300ten und 304ten §. wahrnehmen, allein hier fällt zuerst der Grund davon in die Augen. Wegen dieser Uebereinstimmung müssen nun aber auch die Lehrsätze, auf welche die gegenwärtige Untersuchung führt, durchaus den obigen [§. 309. bis 312.] ähnlich seyn, und es sind dieselben also folgende:

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + 2 in zwey Theile theilen.

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + 3 in drey Theile theilen.

Auf

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + 4 in vier Theile theilen

Und überhaupt:

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + m in m Theile theilen.

§. 315.

Es mag also gefragt werden, entweder, auf wie viel Arten sich eine gegebene Zahl in m ungleiche Theile, oder auf wie viel Arten sie sich auf die Art in m Theile theilen lasse, daß diese Theile auch [entweder alle oder einige] einander gleich seyn können: so läßt sich jedesmal die Antwort leicht finden, wenn man weiß, auf wie viel Arten eine jede Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Es erhellet dies aus folgenden Lehrsätzen, die aus den obigen abgeleitet sind.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m ungleiche Theile theilen, als die Zahl $n - \frac{m(m+1)}{2}$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m gleiche oder ungleiche Theile theilen, als die Zahl n — m aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann.

Hieraus fließen ferner folgende Lehrsätze.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m ungleiche Theile theilen, als man die Zahl $n - \frac{m(m-1)}{2}$ in m gleiche oder ungleiche Theile zerfällen kann.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m gleiche oder ungleiche Theile theilen, als man die Zahl $n + \frac{m(m-1)}{2}$ in m ungleiche Theile zerfällen kann.

§. 316.

Auf wie viel Arten aber eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann? solches läßt sich durch Formirung wiederkehrender Reihen finden. Man hat nemlich zu diesem Endzwecke den Bruch

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

zu entwickeln, und die daraus entspringende wiederkehrende Reihe bis zu dem Gliede Nx^n fortzusetzen, denn der Coefficient dieses Gliedes N zeigt an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Indeß ist dieser Weg mit viel Beschwerlichkeiten verknüpft, sobald m und n nur einigermaßen große Zahlen sind; denn die Beziehungs-Scale, welche man aus dem durch die Multiplication entwickelten Nenner erhält, besteht alsdann aus sehr vielen Gliedern, und es ist daher sehr mühsam, die Reihe bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern fortzusetzen.

§. 317.

Man erleichtert sichs aber sehr, wenn man zuvörderst die einfachern Fälle entwickelt, indem der Fortgang von diesen zu den zusammengesetztern leicht ist. Es sey das allgemeine

meine Glied der Reihe, welche aus diesem Bruche

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

entspringt, $= N x^n$, und das allgemeine Glied der Reihe, welche dieser Bruch

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

giebt, $= M x^n$, wo der Coefficient M anzeigt, auf wie viel Arten die Zahl $n - m$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ...m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Subtrahirt man also diesen letzten Ausdruck von dem vorhergehenden, so bleibt

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^{m-1})}$$

und das allgemeine Glied der hieraus entspringenden Reihe ist $(N - M) x^n$, und der Coefficient $N - M$ zeigt an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(m - 1)$ durch die Addition hervorgebracht werden kann.

§. 318.

Hieraus fließt also folgende Regel:

Wenn

L die Menge der Arten, auf welche die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(m - 1)$,

M die Menge der Arten, auf welche die Zahl $n - m$ aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m, und

N die Menge der Arten, auf welche die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann, bedeutet: so ist, wie wir gesehen haben,

$L = N - M$, und folglich $N = L + M$.

Wenn man also bereits die Menge der Arten, auf welche die

die Zahlen n und n — m, und zwar jene aus den Zahlen 1, 2, 3, ... (m — 1), und diese aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden, kennet: so findet man daraus durchs Addiren, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Vermittelst dieses Lehrsatzes kann man von den einfachern Fällen, die keine Schwierigkeit haben, stufenweise zu den zusammengesetztern fortgehen; und auf diese Art ist die am Ende dieses Capitels befindliche Tabelle berechnet worden, deren Gebrauch folgender ist.

Will man wissen, auf wie viel Arten die Zahl 50 in 7 ungleiche Theile getheilt werden kann: so nehme man in der ersten Vertical-Reihe die Zahl $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$, und in der obersten Horizontal-Reihe die römische Zahl VII. Die Zahl 522, die in der Tabelle neben jener und unter dieser steht, zeigt die verlangte Menge an.

Will man hingegen wissen, auf wie viel Arten die Zahl 50 in 7 gleiche oder ungleiche Theile getheilt werden kann: so nehme man in der erstern Vertical-Reihe die Zahl $50 - 7 = 43$. Die in eben der Horizontal-Reihe in der 7ten Vertical-Reihe stehende Zahl 8946 ist diejenige, welche man suchet.

§. 319.

Die Vertical-Reihen dieser Tabelle sind zwar wiederkehrende Reihen, allein sie stehen gleichwohl mit den natürlichen Zahlen, den Trigonal- den Pyramidal-Zahlen ꝛc. in einer sehr genauen Verbindung, und es wird nicht undienlich seyn, selbige hier etwas ausführlicher zu untersuchen. Da

nemlich

45	55010	61550
46	64370	71509558
47	74331	82884754
48	85711	95947273
49	98609	110793525
50	113287	127784226
51	129883	147059943
52	148702	169027589
53	169919	193880931
54	193906	222116155
55	220877	253981276
56	251274	290076823
57	285373	330694154
58	323689	376577220
59	366566	428104820

Werthe der Zahl n	XIII	XIV 8	
0	1	1	1
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	5	5	5
5	7	7	7
6	11	11	11

Tabelle

zu Seite 348 und 611, welche die Werthe von n^{*m*} S. 608 Absatz 1 enthält.

Werthe der Zahl m.

Werthe der Zahl n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76	77
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99	100
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131	133
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169	172
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219	224
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278	285
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355	366
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445	460
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560	582
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695	725
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863	905
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060	1116
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303	1380
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586	1686
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930	2063
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331	2503
28	1	15	80	249	540	931	1367	1807	2194	2534	2812	3036
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370	3655
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035	4401
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802	5262
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5788	6290
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751	7476
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972	8877
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373	10489
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004	12384
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866	14552
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021	17084
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475	19978
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298	23334
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501	27156
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169	31570
43	1	22	176	764	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316	36578
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043	42333
45	1	23	192	864	2611	5943	11044	17674	25331	33401	41373	48849
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420	56297
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218	64707
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903	74287
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515	85067
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215	97299
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058	111036
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226	126560
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792	143948
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970	163540
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847	185425
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672	210005
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	188556	237405
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782	268099
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489	302196
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006	
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495	
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337	
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733	
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112	
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718	
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045	
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377	
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281	
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Werthe der Zahl m.

Werthe der Zahl n	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	∞
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	11	11	11	11	11	11	11	11	11
7	15	15	15	15	15	15	15	15	15
8	22	22	22	22	22	22	22	22	22
9	30	30	30	30	30	30	30	30	30
10	42	42	42	42	42	42	42	42	42
11	56	56	56	56	56	56	56	56	56
12	77	77	77	77	77	77	77	77	77
13	101	101	101	101	101	110	101	101	101
14	134	135	135	135	135	135	135	135	135
15	174	175	176	176	176	176	176	176	176
16	227	229	230	231	231	231	231	231	231
17	290	293	295	296	297	297	297	297	297
18	373	378	381	383	384	385	385	385	385
19	471	478	483	486	488	489	490	490	490
20	597	608	615	620	623	625	626	627	627
21	747	762	773	780	785	788	790	791	792
22	935	957	972	983	990	995	998	1000	1002
23	1158	1188	1210	1225	1236	1243	1248	1251	1255
24	1436	1478	1508	1530	1545	1556	1563	1568	1575
25	1763	1819	1861	1891	1913	1928	1939	1946	1958
26	2164	2241	2297	2339	2369	2391	2406	2417	2436
27	2637	2738	2815	2871	2913	2943	2965	2980	3010
28	3210	3345	3446	3523	3579	3621	3651	3673	3718
29	3882	4057	4192	4293	4370	4426	4468	4498	4565
30	4691	4920	5096	5231	5332	5409	5465	5507	5604
31	5635	5928	6158	6334	6469	6570	6647	6773	6842
32	6761	7139	7434	7665	7841	7976	8077	8154	8349
33	8078	8551	8932	9228	9459	9635	9770	9871	10143
34	9624	10232	10715	11098	11395	11626	11802	11937	12310
35	11424	12186	12801	13287	13671	13968	14199	14375	14883
36	13542	14499	15272	15892	16380	16765	17062	17293	17977
37	15988	17176	18148	18928	19551	20040	20425	20722	21637
38	18847	20325	21535	22518	23303	23928	24412	24803	26015
39	22142	23961	25469	26694	27684	28472	29092	29588	31185
40	25971	28212	30073	31603	32839	33834	34624	35251	37338
41	30366	33104	35401	37292	38837	40080	41078	41869	44583
42	35452	38797	41612	43951	45464	47420	48668	49668	53174
43	41269	45326	48772	51643	54012	55940	57503	58754	63261
44	47968	52888	57080	60603	63516	65907	67846	69414	75175
45	55610	61538	66634	70927	74506	77449	79854	81801	89134
46	64370	71509	77667	82898	87268	90889	93854	96271	105558
47	74331	82882	90316	96650	101982	106408	110059	113039	124754
48	85711	95943	104875	112540	119009	124418	128886	132559	147273
49	98609	110795	121510	130738	138579	145149	150614	155112	173525
50	113287	127786	140587	151685	161144	169120	175767	181274	204226
51	129883	147059	162331	175618	187013	196648	204725	211528	239943
52	148702	169027	187175	203067	216738	228364	238134	246288	281589
53	169919	193880	215415	243343	250723	264691	276493	286364	320931
54	193906	222118	247587	270105	289656	306421	320620	332557	386155
55	220877	253981	284054	310748	334051	354091	371153	385528	451276
56	251274	290071	325472	357075	384759	408687	429112	446405	526823
57	285373	330699	372311	409603	442442	470914	495332	516054	614154
58	323689	376577	425349	469300	508137	541971	571069	595872	715220
59	366566	428104	485184	536827	582691	622771	657395	686983	831820

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

15	15	15	15
22	22	22	22
30	30	30	30
42	42	42	42
56	56	56	56
77	77	77	77
110	101	101	101
135	135	135	135
176	176	176	176
231	231	231	231
297	297	297	297
385	385	385	385
489	490	490	490
625	626	627	627
788	790	791	792
995	998	1000	1002
1243	1248	1251	1255
1556	1563	1568	1575
1928	1939	1946	1958
2391	2406	2417	2436
2943	2965	2980	3010
3621	3651	3673	3718
4426	4468	4498	4565
5409	5465	5507	5604
6570	6647	6773	6842
7976	8077	8154	8349
9635	9770	9871	10143
11626	11802	11937	12310
13968	14199	14375	14883
16765	17062	17293	17977
20040	20425	20722	21637
23928	24412	24803	26015
28472	29092	29588	31185
33834	34624	35251	37338
40080	41078	41869	44583
47420	48668	49668	53174
55940	57503	58754	63261
65907	67846	69414	75175
77449	79854	81801	89134

nemlich der Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-xx)}$ diese Reihe

$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \text{ꝛc.}$

und der Bruch $\frac{x}{(1-x)(1-xx)}$ also folgende Reihe

$x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \text{ꝛc.}$

giebt: so erhält man, wenn man diese beyden Reihen addirt,

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \text{ꝛc.}$

oder die Reihe, welche durch die Division aus dem Bruche $\frac{1+x}{(1-x)(1-xx)} = \frac{1}{(1-x)^2}$ entsteht; und hieraus erhellet, daß die Zahlen in den Gliedern dieser letzten Reihe die Reihe der natürlichen Zahlen geben. Wenn man daher aus der zweyten Reihe der Tabelle immer zwey und zwey Zahlen nimmt, und dieselben addirt, so erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen, wobey $x = 1$ ist.

$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \text{ꝛc.}$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \text{ꝛc.}$

Umgekehrt findet man aus der Reihe der natürlichen Zahlen die erste Reihe, wenn man jedes Glied derselben von jedem folgenden Gliede der unter ihr stehenden Reihe abzieht.

§. 320.

Die dritte Vertical-Reihe entspringt aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$. Da nun $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)(1+x+xx)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$ ist, so ist offenbar, daß man durch die Addition je drey und dreyer Glieder dieser Reihe, und durch die abermalige Addition je zwey und zweyer Glieder

der der durch die erste Addition erhaltenen Reihe die Trigonal-Zahlen bekommen werde. Dies bestätiget sich durch folgendes Exempel

1 † 1 † 2 † 3 † 4 † 5 † 7 † 8 † 10 † 12 † 14 † 16 † 19 † &c.
1 † 2 † 4 † 6 † 9 † 12 † 16 † 20 † 25 † 30 † 36 † 42 † 49 † &c.
1 † 3 † 6 † 10 † 15 † 21 † 28 † 36 † 45 † 55 † 66 † 78 † 91 † &c.

Umgekehrt sieht man hier auch, wie die oben stehende Reihe aus der Reihe der Trigonal-Zahlen erhalten werden kann.

§. 321.

Auf eine ähnliche Art ist auch, da die vierte Vertical-Reihe aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x4)}$ entspringt, $\frac{(1+x)(1+x+xx)(1+x+xx+x^3)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3(1-x^4)} = \frac{1}{(1-x)^4}$.

Wenn also in der vierten Vertical-Reihe je vier und vier Glieder addirt, ferner in der auf diese Art gefundenen Reihe die Summen je drey und dreyer Glieder gesucht, endlich in der hierdurch entstandenen Reihe immer je zwey und zwey Glieder zusammengenommen werden: so entspringt daraus die Reihe der Pyramidal-Zahlen, wie folgendes Exempel zeigt.

1 † 1 † 2 † 3 † 5 † 6 † 9 † 11 † 15 † 18 † 23 † 27 † &c.
1 † 2 † 4 † 7 † 11 † 16 † 23 † 31 † 41 † 53 † 67 † 83 † &c.
1 † 3 † 7 † 13 † 22 † 34 † 50 † 70 † 95 † 125 † 161 † 203 † &c.
1 † 4 † 10 † 20 † 35 † 56 † 84 † 120 † 165 † 220 † 286 † 364 † &c.

Auf eine ähnliche Art führt die fünfte Vertical-Reihe zu den Pyramidal-Zahlen von der zweyten Ordnung, die sechste zu denen von der dritten Ordnung, &c.

§. 322.

Umgekehrt kann man aus den figurirten Zahlen die Reihen finden, welche in der Tabelle vorkommen, und zwar

zwar durch die Operationen welche die folgenden Exempel zu erkennen geben.

1 † 2 † 3 † 4 † 5 † 6 † 7 † 8 † 9 † 10 † ꝛc.
1 † 1 † 2 † 2 † 3 † 3 † 4 † 4 † 5 † 5 † ꝛc. II.

---

1 † 3 † 6 † 10 † 15 † 21 † 28 † 36 † 45 † 55 † ꝛc.
1 † 2 † 4 † 6 † 9 † 12 † 16 † 20 † 25 † 30 † ꝛc.
1 † 1 † 2 † 3 † 4 † 5 † 7 † 8 † 10 † 12 † ꝛc. III

---

1 † 4 † 10 † 20 † 35 † 56 † 84 † 120 † 165 † 220 † ꝛc.
1 † 3 † 7 † 13 † 22 † 34 † 50 † 70 † 95 † 125 † ꝛc.
1 † 2 † 4 † 7 † 11 † 16 † 23 † 31 † 41 † 53 † ꝛc.
1 † 1 † 2 † 3 † 5 † 6 † 9 † 11 † 15 † 18 † ꝛc. IV.

---

1 † 5 † 15 † 35 † 70 † 126 † 210 † 330 † 495 † 715 † ꝛc.
1 † 4 † 11 † 24 † 46 † 80 † 130 † 200 † 295 † 420 † ꝛc.
1 † 3 † 7 † 14 † 25 † 41 † 64 † 95 † 136 † 189 † ꝛc.
1 † 2 † 4 † 7 † 12 † 18 † 27 † 38 † 53 † 71 † ꝛc.
1 † 1 † 2 † 3 † 5 † 7 † 10 † 13 † 18 † 23 † ꝛc. V.
ꝛc.

Hier enthalten die ersten Reihen allenthalben die figurirten Zahlen, und wenn man von einem jeden Gliede derselben das vorhergehende Glied der zweyten Reihe abzieht, so bekommt man die zweyte Reihe. Zieht man ferner von einem jeden Gliede dieser zweyten Reihe die Summe der beyden vorhergehenden Glieder der dritten Reihe ab, so erhält man dadurch die dritte Reihe. Auf eben diese Art findet man, wenn man fortfährt, von jedem Gliede der vorhergehenden Reihe die Summe von drey, vier fünf vorhergehenden Gliedern ꝛc. der folgenden Reihe abzuziehen, die übrigen Reihen, bis man auf eine Reihe kommt, die von

1 + 1 + 2 anfängt, welches denn jedesmal die in der Tabelle enthaltene Reihe ist.

§. 323.

Die Vertical-Reihen der Tabelle fangen alle auf einerley Art an, und haben immer mehrere Glieder mit einander gemein; woraus erhellet, daß sie im Unendlichen durchaus mit einander übereinstimmen werden. Man erhält aber für die ∞ste Vertical-Reihe diejenige Reihe, die aus dem Bruche

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\,\&c.}$$

entspringt; und da diese eine wiederkehrende Reihe ist, so kommt es vorzüglich auf die Betrachtung des Renners an, um daraus die Beziehungs-Scale zu finden. Multiplicirt man aber die Faktoren des Renners nach und nach mit einander, so kommt

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \&c.$$

und untersucht man diese Reihe genau, so findet sich, daß darin keine andere Potestäten von x vorkommen als solche, die unter der allgemeinen Form $\frac{3nn \pm n}{2}$ begriffen sind, und daß die gedachten Potestäten, wenn n eine ungerade Zahl ist, negativ, wenn aber n eine gerade Zahl ist, positiv sind.

§. 324.

Da also die Beziehungs-Scale

+ 1, + 1, 0, 0, − 1, 0, − 1, 0, 0, 0, 0, + 1, 0, 0, +, 1, 0, 0, &c.

ist, so ist die wiederkehrende Reihe, die aus dem Bruche

1

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\,\&c.}$$

entspringt, folgende:

$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1250x^{23}+1570x^{24}+\&c.$

In dieser Reihe zeigt jeder Coefficient an, auf wie viel Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, aus den ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. So läßt sich die Zahl 7 auf funfzehn Arten durch die Addition hervorbringen.

$7=7$	$7=4+2+1$	$7=3+1+1+1+1$
$7=6+1$	$7=4+1+1+1$	$7=2+2+2+1$
$7=5+2$	$7=3+3+1$	$7=2+2+1+1+1$
$7=5+1+1$	$7=3+2+2$	$7=2+1+1+1+1+1$
$7=4+3$	$7=3+2+1+1$	$7=1+1+1+1+1+1+1$

§. 325.

Wenn man aber dies Produkt

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\,\&c.$

entwickelt, so erhält man die Reihe:

$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\&c.$

und darin zeigt jeder Coefficient an, auf wie viel Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, durch die Addition ungleicher Zahlen entstehen kann. So läßt sich die Zahl 9 auf acht Arten durch die Addition ungleicher Zahlen hervorbringen.

$9=9$	$9=6+2+1$
$9=8+1$	$9=5+4$
$9=7+2$	$9=5+3+1$
$9=6+3$	$9=4+3+2$

§. 326.

Um diese Formen mit einander zu vergleichen, so sey

$P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\,\&c.$

und

$Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\,\&c.$

Alsdann ist

$PQ = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})\,\&c.$

Da nun alle diese Faktoren in P enthalten sind, so dividire man P durch PQ, wodurch man

$$\frac{1}{Q} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\,\&c.$$

und also

$$Q = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\,\&c.}$$

erhält. Entwickelt man aber diesen Bruch, so ergiebt sich daraus eine Reihe, in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, auf wie viel Arten der Exponent der in diesem Gliede befindlichen Potestät von x aus den ungeraden Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. Da nun dieser Ausdruck demjenigen gleich ist, den wir in dem vorhergehenden §. betrachtet haben, so folgt hieraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als sich eine gegebene Zahl aus allen ganzen aber unter einander ungleichen Zahlen durch die Addition hervorbringen läßt, auf eben so viel Arten läßt sich diese Zahl auch durch die Addition der einander entweder gleichen oder ungleichen ungeraden Zahlen erhalten.

§. 327.

Da also, wie wir vorhin gesehen haben,

$$P = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

ist,

ist, so wird, wenn man xx anstatt x setzt,

$$PQ = 1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + x^{44} + x^{52} - \text{&c.}$$

und also, wenn man diese Formel durch jene dividirt, $Q =$

$$\frac{1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + \text{&c.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{&c.}}$$

Es ist daher auch Q eine wiederkehrende Reihe, die aus der Reihe $\frac{1}{P}$ entsteht, wenn man dieselbe mit $1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} -$ &c. multiplicirt. Da nemlich aus §. 324.

$$\frac{1}{P} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \text{&c.}$$

ist, so wird diese Reihe, wenn man sie mit

$$1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - \text{&c.}$$

multiplicirt, in folgende,

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \text{&c.}$$

$$- x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 - 7x^7 - 11x^8 - 15x^9 - \text{&c.}$$

$$- x^4 - x^5 - 2x^6 - 3x^7 - 5x^8 - 7x^9 - \text{&c.}$$

oder in diese,

$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 +$ &c. $= Q$ verwandelt. Wenn daher die Formation der Zahlen durch die Addition gleicher sowohl als ungleicher Zahlen bekannt ist: so kann man daraus die Formation der Zahlen durch die Addition der ungeraden Zahlen herleiten.

§. 328.

Nun sind noch einige merkwürdige Fälle von dieser Art zu betrachten übrig, deren Entwickelung bey der Untersuchung

der Natur der Zahlen nicht ohne allen Nutzen ist. Man erwäge also folgenden Ausdruck:

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$ &c.

in welchem jeder folgende Exponent von x das Doppelte des vorhergehenden ist. Entwickelt man denselben, so findet man die Reihe

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+$ &c;

da es aber zweifelhaft seyn kann, ob diese Reihe bis ins Unendliche nach dem Gesetze der geometrischen Progressionen fortgehe, so wollen wir dieselbe weiter untersuchen. Es sey also

$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$ &c.

und die Reihe, die sich hieraus durch die Entwickelung der Faktoren ergiebt, sey

$P = 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\vartheta x^8+$ &c.

Hier fällt in die Augen, daß, wenn man xx anstatt x setzt, das Produkt

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\text{ &c.} = \frac{P}{1+x}$$

und, wenn man in der angenommenen Reihe eben die Veränderung vornimmt,

$$\frac{P}{1+x} = 1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+\zeta x^{12}+\text{ &c.}$$

seyn wird. Multiplicirt man nun aber durch $1+x$, so wird

$P = 1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+$ &c.

und vergleicht man diesen Werth von P mit dem obigen, so wird

$\alpha = 1$; $\beta = \alpha$; $\gamma = \alpha$; $\delta = \beta$; $\varepsilon = \beta$; $\zeta = \gamma$; $\eta = \gamma$; &c.

Es sind daher alle Coefficienten der angenommenen Reihe $= 1$, und es giebt folglich auch das Produkt P, wenn man selbiges entwickelt, die geometrische Reihe

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+$ &c.

§. 329.

§. 329.

Da also hier alle Potestäten von x, aber jede nicht mehr als einmal vorkommt, so folgt aus der Form des Produkts $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ &c. daß sich eine jede ganze Zahl aus den Gliedern der durch 2 aufsteigenden geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. und zwar so, daß man jedes davon nur einmal nimmt, durch die Addition hervorbringen läßt, und daß solches nur auf eine einzige Art geschehen kann. Man kennt diese Eigenschaft beym Wägen. Hat man nemlich Gewichte von 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. ℔, so kann man damit, vorausgesetzt, daß keine Theile vom ℔ vorkommen, jede Last wägen. So kann man mit diesen zehn Gewichten 1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, 8 ℔, 16 ℔, 32 ℔, 64 ℔, 128 ℔, 256 ℔, 512 ℔ jede Last bis zu 1024 ℔, und wenn noch ein Gewicht von 1024 ℔ hinzukommt, jede Last bis zu 2048 ℔ wägen.

§. 330.

Man pflegt aber in den Anleitungen zum Wägen außerdem auch zu zeigen, wie man mit noch weniger Gewichten, davon nemlich jedes größere dreymal größer ist, als das zunächst kleinere, oder mit 1, 3, 9, 27, 81, &c. ℔, jede Last wägen könne, wenn dabey keine Brüche vom ℔ vorkommen Hierbey werden aber die Gewichte nicht in die eine Wagschale allein, sondern, so wie es die Umstände erfordern, bald in die eine bald in die andere gelegt. Es gründet sich also dieses Verfahren auf den Satz, daß man aus den Gliedern einer durch 3 aufsteigenden geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, 81, &c. wenn man dieselben bald zu einander addirt bald von einander subtrahirt, alle Zahlen hervorbringen kann. Es ist nemlich

$1 = 1$	$5 = 9 - 3 - 1$	$9 = 9$
$2 = 3 - 1$	$6 = 9 - 3$	$10 = 9 + 1$
$3 = 3$	$7 = 9 - 3 + 1$	$11 = 9 + 3 - 1$
$4 = 3 + 1$	$8 = 9 - 1$	$12 = 9 + 3$

&c.

§. 331.

Um den Grund hiervon zu zeigen betrachte ich das unendliche Produkt

$$(x^{-1} + 1 + x^{1})(x^{-3} + 1 + x^{3})(x^{-9} + 1 + x^{9})(x^{-27} + 1 + x^{27})\&c.$$

welches entwickelt keine andere Potestäten von x enthält, als solche, deren Exponenten aus den Zahlen 1, 3, 9, 27, 81, &c durch die Addition und Subtraction hervorgebracht werden können. Ob aber darin alle Potestäten von x und zugleich jede nicht mehr als einmal vorkomme? erforsche ich so. Es sey

$$P = \&c. + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x^{1} + \beta x^{2} + \gamma x^{3} + \delta x^{4} + \varepsilon x^{5} + \&c.$$

so ist klar, daß, wenn man x^3 anstatt x setzt,

$$\frac{P}{x^{-1} + 1 + x^{1}} = bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^{3} + \beta x^{6} + \gamma x^{9} + \&c.$$

und folglich

$$P = \&c. + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^{2} + \alpha x^{3} + \alpha x^{4} + \beta x^{5} + \beta x^{6} + \beta x^{7} + \&c.$$

seyn wird. Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem angenommenen, so findet man

$\alpha = 1$; $\beta = \alpha$; $\gamma = \alpha$; $\delta = \alpha$; $\varepsilon = \beta$; $\zeta = \beta$; &c. und
$a = 1$; $b = a$; $c = a$; $d = a$; $e = b$; &c.

Es ist folglich

P =

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{&c.}$$
$$+ x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \text{&c.}$$

und man erkennet hieraus, daß alle Potestäten von x sowohl die mit positiven als die mit negativen Exponenten vorkommen, so wie auch, daß man alle Zahlen aus den Zahlen einer durch 3 aufsteigenden geometrischen Progression durch die Addition und Subtraction hervorbringen kann, und endlich, daß man solches auf nicht mehr als auf eine Art zu thun im Stande ist.



Siebenzehntes Capitel.

Von dem Nutzen der wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen.

§. 332.

Es hat der berühmte Daniel Bernoulli in den Commentarien der Petersburgischen Academie der Wissenschaften im dritten Bande gezeigt, was für einen großen Nutzen die wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen von jeglichem Grade gewähren, indem er daselbst lehret, wie man sich den Wurzeln jeder algebraischen Gleichung, die Anzahl ihrer Dimensionen mag seyn, welche sie will, vermittelst der wiederkehrenden Reihen zu nähern im Stande ist. Da diese Erfindung häufig mit großem Vortheile angewendet werden kann, so wollen wir dieselbe jetzt genauer betrachten, und die Fälle zu bestimmen suchen, in welchen solches möglich ist. Denn oft ereignet es sich wider alle Erwartung, daß man auf diesem Wege keine von den Wurzeln der Gleichung entdeckt. Um also diese Methode nach ihrem ganzen Umfange und nach allen ihren Vortheilen kennen zu lernen, wollen wir den Grund derselben in den Eigenschaften der wiederkehrenden Reihen selbst aufsuchen.

§. 333.

Da jede wiederkehrende Reihe aus der Entwickelung eines rationalen Bruchs entspringt, so sey dieser Bruch

=

$$= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

und die daraus entspringende wiederkehrende Reihe sey

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{ꝛc.}$$

wo also die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. so bestimmt werden, daß

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e$$
ꝛc.

Das allgemeine Glied aber, oder den Coefficienten der Potestät z^n findet man, wenn man den gegebenen Bruch in die einfachen Brüche auflöset, deren Nenner die Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \text{ꝛc.}$ sind, so wie solches im dreyzehnten Capitel gezeigt worden ist.

§. 334.

Es hängt aber die Form des allgemeinen Gliedes vorzüglich von der Natur der einfachen Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^3 - \text{ꝛc.}$ und davon ab, ob diese einfachen Faktoren reell oder imaginär, und ob sie insgesammt von einander verschieden, oder ob zwey oder mehrere davon einander gleich sind. Damit wir also diese verschiedenen Fälle nach der Ordnung betrachten, so wollen wir zuvörderst den Fall untersuchen, wo alle einfache Faktoren des Nenners reell und unter einander ungleich sind. Es seyen also die gesammten einfachen Faktoren des Nenners

$$(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)(1 - sz) \text{ ꝛc.}$$

und die einfachen Brüche, worin hiernach der gegebene Bruch aufgelöset wird, seyen

$$\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz} + \frac{D}{1-sz} + \text{&c.}$$

Hat man diese gefunden, so ist das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, die aus dem gegebenen Bruche entspringt, =

$$z^n (A p^n + B q^n + C r^n + D s^n + \text{&c.})$$

und dieses wollen wir $= P z^n$ setzen. Es soll nemlich P der Coefficient der Potestät z^n, und die Coefficienten der folgenden Potestäten daher diese, Q, R, S, &c. seyn, so daß also die wiederkehrende Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \text{&c.}$$

werden wird.

§. 335.

Nun wollen wir n als eine sehr große Zahl betrachten, oder annehmen, daß die wiederkehrende Reihe bis auf eine große Anzahl von Gliedern fortgesetzt sey. Da nun die Potestäten ungleicher Zahlen einander desto ungleicher werden, je höher man diese Potestäten nimmt, so wird alsdann auch der Unterschied unter den Potestäten Ap^n, Bq^n, Cr^n, &c. so groß seyn, daß diejenige, die aus der größten von den Zahlen p, q, r, &c. entspringt, alle übrigen an Größe weit übertreffen wird, und diese übrigen gegen jene ganz verschwinden werden, wenn n eine unendlich große Zahl ist. Da also die Zahlen p, q, r, &c. einander ungleich sind, so wird, wenn wir p als die größte unter ihnen betrachten, und n unendlich groß annehmen, $P = Ap^n$, für einen sehr großen Werth für n aber nur beynahe $P = Ap^n$ seyn. Auf eine ähnliche Art wird aber auch $Q = Ap^{n+1}$, und also $\frac{Q}{P} = p$ seyn. Wenn man daher die wiederkehrende Reihe bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern fortgesetzt

hat,

hat, so findet man durch die Division des Coefficienten eines jeden Gliedes durch den Coefficienten des vorhergehenden Gliedes einen Werth, welcher dem Werthe der größten Zahl p nahe kommt.

§. 336.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

lauter einfache reelle und einander ungleiche Faktoren hat, so kann man aus der wiederkehrenden Reihe, die aus ihm entspringt, einen von diesen einfachen Faktoren, nemlich $1 - pz$, oder den Faktor finden, in welchem der Buchstabe p den größten Werth hat. Hierbey kommen die Coefficienten des Zählers a, b, c, d, ꝛc. nicht in Anschlag, sondern man findet, man mag diese Coefficienten annehmen wie man will, endlich eben denselben Werth des größten Buchstabens p. Ganz genau und der Wahrheit völlig gemäß erhält man zwar den Werth von p erst dann, wenn man die wiederkehrende Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt hat; indeß wenn solches nur bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern geschehen ist, so ergiebt sich doch der Werth von p immer genauer, je größer die Zahl der Glieder gemacht worden ist, und je mehr der Buchstabe p die übrigen q, r, s, ꝛc. an Größe übertrifft. Uebrigens ist es gleich, ob der Buchstabe p das Zeichen + oder das Zeichen — vor sich hat, weil seine Potestäten in beyden Fällen in einerley Maaße wachsen.

§. 337.

Wie man dieses zur Erfindung der Wurzeln jeder algebraischen Gleichung anwenden könne? ist leicht einzusehen, weil

weil sich, wenn man die Faktoren des Renners $1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 - \delta z4 - \text{ꝛc.}$ kennt, auch die Wurzeln der Gleichung

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z4 - \text{ꝛc.} = 0$$

angeben lassen. Ist z. B. $1 - pz$ ein Faktor jenes Renners, so ist auch $z = \frac{1}{p}$ eine Wurzel dieser Gleichung. Da man also aus der wiederkehrenden Reihe die größte Zahl p findet, so erhält man auch eben dadurch die kleinste Wurzel der Gleichung $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z4 - \text{ꝛc.} = 0$. Oder setzt man $z = \frac{1}{x}$, so daß diese Gleichung entsteht

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

so findet man auf eben diesem Wege die größte Wurzel dieser Gleichung $x = p$.

§. 338.

Ist also die Gleichung

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

gegeben, und sind deren Wurzeln insgesammt reell und unter einander ungleich: so findet man die größte dieser Wurzeln auf folgende Art. Man formirt aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung einen Bruch

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z4 - \text{ꝛc.}}$$

und entwickelt aus demselben, indem man den Zähler willkürlich annimmt, eine wiederkehrende Reihe, oder, welches eben das ist, man nimmt die ersten Glieder der wiederkehrenden Reihe nach Belieben an. Ist nun dieselbe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$$

so giebt der Bruch $\frac{Q}{P}$ den Werth der größten Wurzel x in

der

der gegebenen Gleichung, und zwar desto genauer, je größer die Zahl n ist.

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $xx - 3x - 1 = 0$ gegeben; man soll ihre größte Wurzel finden.

Man formire den Bruch $\frac{a + bz}{1 - 3z - zz}$, woraus, wenn man die beyden ersten Glieder 1, 2 seyn läßt, folgende wiederkehrende Reihe entspringt:

1, 2, 7, 23, 76, 251, 829, 2738, ꝛc.

und es ist also $\frac{2738}{829}$ der Werth der größten Wurzel, näherungsweise bestimmt. In Decimal-Brüchen ist

$$\frac{2738}{829} = 3{,}3027744;$$

und genau ist die größte Wurzel =

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3{,}3027756$$

so daß sich hier also nur ein Unterschied von 0,0000001 findet. Uebrigens ist zu bemerken, daß die Brüche $\frac{Q}{P}$ wechselsweise kleiner und größer sind als die wahre Wurzel.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$ gegeben, deren Wurzeln die Sinus dreyer Bogen sind, die dreyfach genommen den Sinus $= \frac{1}{2}$ haben. [§. 236.]

Nachdem man die Gleichung auf diese Form, $0 = 1 - 6x * + 8x^3$, gebracht hat, so suche man, um in den ganzen Zahlen zu bleiben, die kleinste Wurzel, so daß es nicht nöthig ist, $\frac{1}{z}$ für x zu setzen. Man formire also den Bruch

$$\frac{a + bx + cxx}{1 - 6x \text{ etc. } + 8x^3}$$

welcher, wenn man zu den drey ersten Gliedern 0, 0, 1 annimmt, weil dabey die Rechnung am leichtesten ist, und die Potestäten von x wegläßt, weil man bloß die Coefficienten braucht, folgende Reihe giebt:

0, 0, 1, 6, 36, 208, 1200, 6912, 39808, 229248.

Hieraus ergiebt sich für den näherungsweise bestimmten Werth der kleinsten Wurzel $\frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0,1736515$. Dies sollte nun der Sinus eines Winkel von 10° seyn, er ist aber um $\frac{33}{10000000}$ zu groß, weil dieser Sinus in den Tafeln $= 0,1736482$ ist. Man findet aber diese Wurzel viel leichter, wenn man $x = \frac{1}{2}y$ setzt, wodurch man die Gleichung $1 - 3y \text{ etc. } + y^3 = 0$ erhält. Denn behandelt man diese Gleichung auf eine ähnliche Art, so bekommt man die Reihe

0, 0, 1, 3, 9, 26, 75, 216, 622, 1791, 5157 ꝛc.

und es ist also die kleinste Wurzel derselben y ohngefähr $= \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0,3472949$. Hieraus aber wird $x = \frac{1}{2}y = 0,1736474$, welcher Werth viel genauer ist als der vorhergehende

Drittes Exempel.

Würde von eben der Gleichung, $0 = 1 - 6x \text{ etc. } + 8x^3$, die größte Wurzel verlangt:

so setze man $x = \frac{y}{2}$, wodurch man $y^3 \text{ etc. } - 3y + 1 = 0$ erhält. Da nun die größte Wurzel dieser Gleichung aus einer wiederkehrenden Reihe gefunden wird, deren Bezie-

hungs-

hungs-Scale 0, 3, — 1, ist: so ist diese wiederkehrende Reihe, wenn man die Anfangs-Glieder derselben nach Belieben annimmt,

1, 1, 1, 2, 2, 5, 4, 13, 7, 35, 8, 98, — 11, ꝛc.

Weil man aber in dieser Reihe endlich auf negative Glieder kommt, so ist dies ein Kennzeichen, daß die gesuchte größte Wurzel negativ ist, und in der That ist $x = -$ sin. $70° = -0,9396926$. Man muß daher hierauf bey den Anfangs-Gliedern Rücksicht nehmen, wie z. B. hier geschehen ist,

$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 -$ ꝛc.

Hieraus würde nun $y = \frac{-605}{316}$, und $x = \frac{-605}{632} = -0,957$, seyn, allein dieser Werth entfernt sich von dem wahren sehr.

§. 339.

Der Grund von dieser Abweichung liegt darin, weil die Wurzeln der gegebenen Gleichung sin. 10°, sin 50°, und — sin. 70° sind, und die beyden größten Wurzeln derselben sich so wenig von einander unterscheiden, daß die zweyte Wurzel sin. 50° in den Potestäten, bis zu welchen die Reihe fortgesetzt worden ist, zu der größten Wurzel noch ein beträchtliches Verhältniß hat, und also nicht, gegen dieselbe gehalten, $= 0$ gesetzt werden kann. Eben daher rührt es, daß die gefundenen Werthe wechselsweise sehr viel zu groß und zu klein sind; indem z. B. wenn man

$y = \frac{-316}{172}$ setzt, $x = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = 0,918$

wird. Denn da die Potestäten der größten Wurzel wechselsweise positiv und negativ werden, so werden auch die Potestäten der zweyten Wurzel wechselsweise addirt und subtrahirt.

trahirt. Soll also diese Abweichung unmerklich werden, so muß man die Reihe bis zu einer sehr großen Anzahl von Gliedern fortsetzen.

§. 340.

Man kann sich aber auch auf die Art helfen, daß man die gegebene Gleichung durch eine geschickte Substitution auf eine solche Form bringt, daß ihre Wurzeln einander nicht mehr so nahe liegen. Setzt man z. B. in der Gleichung $0 = 1 - 6x + 8x^3$, deren Wurzeln $-$ sin. 70°, $+$ sin. 50°, $+$ sin. 10° sind, $x = y - 1$; so werden die Wurzeln der Gleichung $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$ folgende: $1 -$ sin. 70°, $1 +$ sin. 50°, $1 +$ sin. 10°. Auf diese Art wird also $1 -$ sin. 70° die kleinste Wurzel, da vorhin $-$ sin. 70° die größte Wurzel war, und $1 +$ sin. 50° wird die größte, da vorher sin. 50° die mittelste war; und man kann daher vermittelst dieses Kunstgriffs jede Wurzel in die größte oder kleinste Wurzel der neuen Gleichung verwandeln, und sie also auch auf dem beschriebenen Wege finden. Da überdies die Wurzel $1 -$ sin. 70° in dem gegenwärtigen Beyspiele viel kleiner ist, als die beyden übrigen, so läßt sie sich auch leicht durch eine wiederkehrende Reihe finden.

Viertes Exempel.

Die kleinste Wurzel der Gleichung $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$ zu finden, welche von 1 abgezogen den Sinus des Winkels von 70° geben wird.

Man setze $y = \frac{1}{2}z$, so daß $0 = z^3 - 6zz + 9z - 1$ werde. Da man nun die kleinste Wurzel dieser Gleichung aus einer wiederkehrenden Reihe erhält, deren Beziehungs-Scale 9, -6, $+1$, ist, so wie man, um die größte Wur-

zel

zel zu finden, die Beziehungs-Scale 6, — 9, + 1, annehmen müßte: so erhält man für die kleinste Wurzel die Reihe

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, ꝛc.

und es ist daher näherungsweise $z = \frac{17593}{145861} = 0{,}12061483$,

und $y = 0{,}06030741$, und sin. $70° = 1 - y = 0{,}93969258$, welche Zahl auch noch in der letzten Zifer richtig ist. Man sieht folglich an diesem Beyspiele, was für einen großen Nutzen die Verwandlung der Gleichungen vermittelst der Substitution bey der Erfindung der Wurzeln gewähren kann, und, daß die bisher beschriebene Methode sich nicht bloß auf die Erfindung der größten oder der kleinsten Wurzel erstrecket, sondern uns auch in den Stand setzt, jede Wurzel zu finden.

§. 341.

Hat man nun irgend eine Wurzel einer gegebenen Gleichung näherungsweise gefunden, so daß z. B. die Zahl k von dem wahren Werthe derselben nur um einen sehr kleinen Theil unterschieden ist: so setze man $x - k = y$, oder $x = y + k$. Hierdurch erhält man eine Gleichung, deren kleinste Wurzel $= x - k$ ist. Sucht man nun diese Wurzel vermittelst einer wiederkehrenden Reihe, und dies ist leicht, weil die gedachte Wurzel viel kleiner als alle übrigen seyn wird: so erhält man in der Summe aus ihr und k die wahre Wurzel x für die gegebene Gleichung. Der Gebrauch dieses Kunstgriffes erstreckt sich so weit, daß man ihn selbst dann, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat, anwenden kann.

§. 342.

Vorzüglich wichtig und selbst unentbehrlich nothwendig aber wird er, wenn die gegebene Gleichung zwey einander

gleiche und entgegengesetzte Wurzeln hat. Wenn nemlich eine Gleichung, deren größte Wurzel $= p$ ist, auch eine Wurzel $-p$ hat, so findet man die Wurzel p nicht, wenn man auch die wiederkehrende Reihe bis ins Unendliche fortsetzte. Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Gleichung $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= \sqrt{5}$ ist, die aber auch die Wurzel $-\sqrt{5}$ hat. Wollte man hier die größte Wurzel auf dem beschriebenen Wege suchen, so müßte man nach der Beziehungs-Scale $1, +5, -5$ die wiederkehrende Reihe

1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, ꝛc.

formiren, aber daraus würde man nirgends andere als ungleiche Quotienten erhalten. Dagegen werden hier die Quotienten aus den wechselsweise genommenen Gliedern einander gleich, wenn man jedes derselben durch das vorhergehende dividirt, und jeder giebt das Quadrat der gesuchten größten Wurzel beynahe. So ist z. B. beynahe $5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}$. So oft sich daher die wechselsweise genommenen Glieder einem beständigen Verhältnisse nähern, so erhält man jedesmal das Quadrat der gesuchten größten Wurzel beynahe. Die Wurzel $x = \sqrt{5}$ selbst aber findet man, wenn man $x = y + 2$ setzt, wodurch $1 - 3y - 5yy - y^3 = 0$ wird. Denn da sich die kleinste Wurzel dieser Gleichung aus der Reihe

1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, ꝛc.

ergiebt, so ist dieselbe beynahe $= \frac{2585}{10945} = 0,2361$ und dadurch erhält man $x = \sqrt{5} = 2,2361$, die größte Wurzel der gegebenen Gleichung.

§. 343.

§. 343.

Obgleich der Zähler des Bruchs, aus welchem man die wiederkehrende Reihe entwickelt, nach Willkühr angenommen werden kann, so trägt doch eine geschickte Wahl desselben sehr viel dazu bey, daß die gefundenen Werthe der wahren Wurzel bald sehr nahe kommen. Denn da das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, wenn man die Faktoren des Nenners so wie §. 334 annimmt, $= z^n(Ap^n + Bq^n + Cr^n + \text{ꝛc.})$ wird, und die Buchstaben A, B, C, ꝛc. durch den Zähler des Bruchs bestimmt werden: so kommt es auf die Wahl dieses Zählers an, ob A einen großen oder einen kleinen Werth bekommen soll; und in jenem Falle wird die größte Wurzel p schnell, in diesem aber langsam gefunden. Ja es kann dieser Zähler so genommen werden, daß A gänzlich verschwindet, und dann findet man die größte Wurzel p nie, wenn man auch die wiederkehrende Reihe ohne Ende fortsetzte. Dies geschieht, wenn der Zähler so angenommen wird, daß er selbst den Faktor $1 - pz$ enthält, denn alsdann fällt derselbe ganz aus der Rechnung weg. Wäre z. B. die Gleichung $x^3 - 6xx + 10x - 3 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= 3$ ist, und formirte man daraus den Bruch

$$\frac{1 - 3z}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$$

so daß die Beziehungs-Scale der wiederkehrenden Reihe $6, -10, +3$, würde: so erhielte man die Reihe

1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, ꝛc.

deren Glieder sich dem Verhältnisse 1.: 3 auf keine Weise nähern, sondern immer weiter davon entfernen. Es entspringt nemlich diese Reihe auch aus dem Buche $\frac{1}{1 - 3z + zz}$,

und giebt daher die größte Wurzel der Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$.

§. 344.

Endlich kann der Zähler auch auf die Art angenommen werden, daß man durch die wiederkehrende Reihe eine jede Wurzel der Gleichung findet, und dies geschichet, wenn zu demselben das Produkt aus allen Faktoren des Nenners, den, welcher aus der gesuchten Wurzel gemacht wird, ausgenommen, gewählt wird. Setzt man z. B. in dem vorhergehenden Exempel den Zähler $= 1 - 3z + zz$, so giebt der Bruch $\frac{1 - 3z + zz}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$ die wiederkehrende Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, ꝛc.; und da dies eine geometrische Reihe ist, so giebt sie sogleich zu erkennen, daß die Wurzel $= 3$ ist. Es ist nemlich jener Bruch diesem einfachen Bruche $\frac{1}{1 - 3z}$ gleich. Wenn man also die Anfangs-Glieder der wiederkehrenden Reihe, welche man nach Willkühr annehmen kann, auf eine solche Art wählt, daß sie eine geometrische Reihe ausmachen, deren Exponent einer von den Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich ist, so erhellet hieraus, daß alsdann die ganze wiederkehrende Reihe eine geometrische Progression wird, und die gedachte Wurzel giebt, wenn sie gleich weder die größte noch die kleinste ist.

§. 345.

Damit man also nicht, indem man die größte oder die kleinste Wurzel sucht, durch die wiederkehrende Reihe wider Erwarten auf eine andere Wurzel geführt werde: so muß man den Zähler auf eine solche Art annehmen, daß er mit dem Nenner keinen Faktor gemein hat. Da nun dieses

ses statt findet, wenn man die Einheit zum Zähler macht, so hat man alsdann jedesmal für das erste Glied der Reihe, 1, und daraus allein muß man denn auch nach der Beziehungs-Scale alle übrigen Glieder suchen. Auf diese Art findet man also jedesmal, so wie man sichs vorgesetzt hat, entweder die größte oder die kleinste Wurzel. Soll z. B. die größte Wurzel der Gleichung $y^3 * - 3y + 1 = 0$ gefunden werden, so entspringt aus der Beziehungs-Scale 0, + 3, — 1, wenn man von 1 anfängt, die Reihe

$$1 - 0 + 3 - 1 + 9 - 6 + 28 - 27 + 90 - 109 + 297 - 517$$
$$+ 1000 - 1848 + 3517 - 6544 + \text{ꝛc.}$$

welche sich offenbar einem beständigen Quotienten nähert, und zu erkennen giebt, daß die größte Wurzel negativ und beynahe $= \frac{-6544}{3517} = -1{,}860676$ ist. Eigentlich ist sie $= -1{,}86793852$; allein der Grund, warum man sich hier dem wahren Werthe so langsam nähert, ist bereits oben angeführt worden, und liegt darin, weil die zweyte Wurzel nicht viel kleiner als die größte und zugleich positiv ist.

§. 346.

Aus dem, was bisher entweder allgemein oder bey den Exempeln bemerkt worden ist, erhellet der große Nutzen, welchen die wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen haben, sehr deutlich. Und da dabey die Kunstgriffe, wodurch man die Rechnung zusammenziehen, und sich seinem Ziele schneller nähern kann, zugleich mit angezeigt worden sind, so würde nichts weiter hinzuzusetzen übrig seyn, wofern nicht die Fälle, wenn die gegebene Gleichung entweder gleiche oder imaginäre Wurzeln hat,

besonders betrachtet werden müßten. Wir wollen also annehmen, daß der Nenner des Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{&c.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{&c.}}$$

den Faktor $(1 - pz)^2$ habe, und die übrigen Faktoren $1 - qz$, $1 - rz$, &c. seyn lassen. Entwickelt man den Bruch in eine wiederkehrende Reihe, so ist das allgemeine Glied dieser Reihe $= z^n (n + 1) Ap^n + Bp^n + Cq^n + \text{&c.}$) Soll nun der Werth bestimmt werden, welchen dieses allgemeine Glied für einen sehr großen Werth für n erhalten wird, so müssen zwey Fälle von einander unterschieden werden, davon der eine statt findet, wenn p größer als die übrigen Buchstaben q, r, &c. ist, und der andere, wenn p nicht die größte Wurzel giebt. Im ersten Falle, wo p zugleich die größte Wurzel ist, können die Glieder $Bp^n + Cq^n + \text{&c.}$ wegen der Größe des Coefficienten $n + 1$ nicht so schnell gegen Ap^n verschwinden, als vorhin; und im zweyten, wenn q größer als p ist, kann auch $(n + 1) Ap^n$ gegen Bq^n nur langsam verschwinden, und es wird daher die Erforschung der größten Wurzel hier sehr beschwerlich.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x - 3xx + 4 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel 2 zweymal vorkommt.

Man suche diese größte Wurzel auf die vorhin beschriebene Art durch die Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{1 - 3z * + 4z^3}$$

welcher die wiederkehrende Reihe

1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, &c.

giebt, worin jedes Glied, durch das vorhergehende dividirt, eine Zahl giebt, die größer als die 2 ist. Der Grund

hiervon

hiervon ist aus dem allgemeinen Gliede leicht einzusehen. Denn läßt man in demselben die Glieder Bp^n, Cq^n, ꝛc. weg, so ist das Glied, welches zu der Potestät z^n gehört, $= (n+1)\,Ap^n + Bp^n$, und das folgende $= (n+2)\,Ap^{n+1} + Bp^{n+1}$. Dividirt man aber das letzte von diesen Gliedern durch das erste, so wird $\frac{(n+2)\,A+B}{(n+1)\,A+B}\,p$ größer als p, wofern nicht n eine unendliche Größe erreicht hat.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - xx - 5x - 3 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= 3$, und die beyden übrigen $= -1$ sind.

Man suche die größte Wurzel vermittelst einer wiederkehrenden Reihe, deren Beziehungs-Scale 1, + 5, + 3, ist. Diese Reihe ist

1, 1, 6, 14, 47, 135, 412, 1228, ꝛc.

und man findet daraus den Werth 3 deswegen sehr bald, weil die Potestäten der kleinern Wurzel — 1, wenn man sie auch mit n + 1 multiplicirt, dennoch sehr bald gegen die Potestäten von 3 verschwinden.

Drittes Exempel.

Wenn aber die Gleichung $x^3 + xx - 8x - 12 = 0$ gegeben würde, deren Wurzeln 3, — 2, — 2, sind, so würde man die größte Wurzel viel langsamer finden. Denn man erhielte daraus die Reihe

1, — 1, 9, — 5, 65, 3, 457, 347, 3345, 4915, ꝛc.

welche man noch sehr weit fortsetzen müßte, wenn man daraus erkennen wollte, daß die aus ihr sich ergebende Wurzel $= 3$ sey.

§. 347.

Auf eine ähnliche Art würde, wenn drey Faktoren einander gleich, und der eine also $(1 - pz)^3$, und die übrigen $1 - qz$, $1 - rz$, ꝛc. wären, das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe $= z^n \left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} A p^n + (n+1) B p^n + C p^n + D q^n + E r^n + \text{ꝛc.}\right)$ seyn. Wenn nun p die größte Wurzel und n eine so große Zahl wäre, daß die Potestäten q^n, r^n, ꝛc. gegen p^n verschwänden, so würde man aus der wiederkehrenden Reihe die Wurzel $=$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)A + (n+2)B + C}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A + (n+1)B + C} p$$

erhalten, welche aber nur alsdann, wenn n die möglich größte und gleichsam eine unendlich große Zahl wäre, der Wahrheit gemäß seyn kann. Es ist aber jener Werth $=$

$$p + \frac{(n+2)A + B}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A + (n+1)B + C} \times p$$

Wenn aber p nicht die größte Wurzel ist, so ist die Findung derselben noch mit weit mehr Schwierigkeiten verknüpft; und es ist daher leicht einzusehen, daß die Auflösung der Gleichungen vermittelst der wiederkehrenden Reihen, wenn diese Gleichungen gleiche Wurzeln enthalten, bey weitem so vortheilhaft nicht ist, als wenn die Wurzeln derselben alle einander ungleich sind.

§. 348.

Nun wollen wir untersuchen, wie die ohne Ende fortgesetzte wiederkehrende Reihe beschaffen seyn wird, wenn der Renner des Bruchs imaginäre Faktoren hat. Angenommen also, daß der Renner des Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

die

die reellen Faktoren $1 - qz$, $1 - rz$, ꝛc. und außerdem folgenden zwey imaginaire Faktoren in sich enthaltenden trinomischen Faktor, $1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz$, habe: so ist, wenn man die aus dem Bruche entspringende wiederkehrende Reihe folgende,

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$$

seyn läßt, nach dem oben Angemerkten, der Coefficient

$$P = \frac{\mathfrak{A}.\sin.(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin.n\varphi}{\sin.\varphi}p^n + \mathfrak{C}q^n + \mathfrak{D}r^n + \text{ꝛc.}$$

Ist daher p kleiner als eine der folgenden Zahlen q, r, ꝛc, so daß die größte Wurzel der Gleichung

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

eine reelle Größe ist: so findet man dieselbe vermittelst der wiederkehrenden Reihe eben so, als wenn gar keine imaginäre Wurzeln da wären.

§. 349.

Wenn also die imaginären Wurzeln so beschaffen sind, daß das Produkt aus je zweyen, die einen reellen Faktor geben, nicht größer ist, als das Quadrat der größten Wurzel: so legen dieselben der Erfindung dieser größten Wurzel kein Hinderniß in den Weg. Ist aber das gedachte Produkt dem Quadrate der größten Wurzel gleich, oder gar größer als dasselbe: so findet man auf dem erklärten Wege nichts, weil die Potestät p^n gegen die gleichmannige Potestät der größten Wurzel nie verschwindet, wenn man auch die Reihe ohne Ende fortsetzte. Es wird nicht überflüssig seyn, dieses mit einigen Exempeln zu erläutern.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 2x - 4 = 0$ gegeben, um die größte Wurzel derselben zu finden.

Da sich diese Gleichung in die beyden Faktoren $(x - 2)(xx + 2x + 2)$ auflösen läßt, so hat sie außer der reellen Wurzel 2 noch zwey imaginäre Wurzeln, deren Produkt $= 2$, also kleiner ist, als das Quadrat der reellen Wurzel; und man ist daher im Stande, diese reelle Wurzel auf dem bisher erklärten Wege zu finden. Man formire also nach der Beziehungs-Scale $0, + 2, + 4$, die wiederkehrende Reihe

1, 0, 2, 4, 4, 16, 24, 48, 112, 192, 416, 832, ꝛc.

aus welcher sich die reelle Wurzel 2 hinlänglich zu erkennen giebt.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 4xx + 8x - 8 = 0$ gegeben, welche die reelle Wurzel 2 hat, und worin das Produkt der beyden übrigen imaginären Wurzeln $= 4$, und also dem Quadrate der reellen Wurzel gleich ist.

Man suche also die Wurzel durch eine wiederkehrende Reihe, und um solches auf eine bequeme Art thun zu können, so setze man $x = 2y$, indem man dadurch die Gleichung $y^3 - 2yy + 2y - 1 = 0$ erhält. Hieraus ergiebt sich nun die Reihe,

1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, ꝛc.

allein da darin immer eben dieselben Glieder wiederkehren, so läßt sich daraus weiter nichts schließen, als entweder, daß die größte Wurzel nicht reell sey, oder, daß die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln habe, deren Produkt dem Quadrate der reellen Wurzel gleich oder noch größer als dasselbe ist.

Drittes Exempel.

Endlich sey die Gleichung $x^3 - 3xx + 4x - 2 = 0$ gegeben, deren reelle Wurzel $= 1$ ist, und deren imaginäre

näre Wurzeln, mit einander multiplicirt, das Produkt 2 hervorbringen.

Wenn man hier nach der Beziehungs-Scale 3, — 4, †2, eine wiederkehrende Reihe formirt, so erhält man

1, 3, 5, 5, 1, — 7, — 15, — 15 † 1, 33, 65, 65, 1 ꝛc.

Allein, da die Glieder dieser Reihe bald positiv bald negativ sind, so läßt sich daraus die reelle Wurzel 1 keinesweges finden. Dergleichen Abwechselungen sind allezeit ein Kennzeichen, daß die Wurzeln, welche sich aus der Reihe ergeben sollen, imaginär sind; so wie in dem gegenwärtigen Exempel die imaginären Wurzeln in der That größer als die reelle 1 sind.

§. 350.

Es sey also in dem allgemeinen Bruche das Produkt zweyer imaginären Wurzeln pp größer als das Quadrat irgend einer reellen Wurzel, so daß die übrigen Potestäten q^n, r^n, ꝛc. gegen p^n verschwinden, wenn n eine unendlich große Zahl wird. In diesem Falle ist

$$P = \frac{A.\sin.(n\dagger 1)\phi \dagger B.\sin.n\phi}{\sin.\phi}\,p^n, \text{ und}$$

$$Q = \frac{A.\sin.(n\dagger 2)\phi \dagger B.\sin.(n\dagger 1)\phi}{\sin.\phi}\,p^{n\dagger 1}, \text{ und also}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{A.\sin.(n\dagger 2)\phi \dagger B.\sin.(n\dagger 1)\phi}{A.\sin.(n\dagger 1)\phi \dagger B.\sin.n\phi.}\,p$$

Allein dieser Ausdruck bekommt nie einen beständigen Werth, wenn gleich n unendlich groß wird, denn die Sinus der Winkel bleiben immer in einem hohen Grade veränderlich, so daß sie bald positiv bald negativ werden.

§. 351.

Wenn man indeß die Brüche $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$, auf eine ähnliche Art bestimmt, und daraus die Buchstaben A und B eliminirt,

minirt, so fällt auch n aus der Rechnung weg; denn man findet alsdann $Ppp + R = 2Qp.\ \text{cos.}\,\varphi$, woraus sich $\text{cos.}\,\varphi = \frac{Ppp + R}{2Qp}$ ergiebt, und auf eine ähnliche Art wird $\text{cos.}\,\varphi = \frac{Qpp + S}{2Rp}$. Vergleicht man aber diese beyden Werthe mit einander, so erhält man

$$p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}, \text{ und}$$

$$\text{cos.}\,\varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(QQ - PR)(RR - QS)}}.$$

Hat man daher die wiederkehrende Reihe so weit fortgesetzt, daß die Potestäten der übrigen Wurzeln gegen p^n verschwinden, so kann man auf diese Art den trinomischen Faktor $1 - 2pz.\ \text{cos.}\,\varphi + ppzz$ finden.

§. 352.

Da diese Rechnung Ungeübten Schwierigkeit machen könnte, so will ich dieselbe hier ganz hersetzen. Aus dem gefundenen Werthe von $\frac{Q}{P}$ erhält man

$$\mathfrak{A}\,Pp.\ \text{sin.}\,(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\,Pp.\ \text{sin.}\,(n+1)\varphi = \mathfrak{A}\,Q.\ \text{sin.}\,(n+1)\varphi + \mathfrak{B}.\,Q.\ \text{sin.}\,n\varphi.$$

und daraus wird

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{Q.\ \text{sin.}\,n\varphi - Pp.\ \text{sin.}\,(n+1)\varphi}{Pp.\ \text{sin.}\,(n+2)\varphi - Q.\ \text{sin.}\,(n+1)\varphi}.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{R.\ \text{sin.}\,(n+1)\varphi - Qp.\ \text{sin.}\,(n+2)\varphi}{Qp.\ \text{sin.}\,(n+3)\varphi - R.\ \text{sin.}\,(n+2)\varphi}.$$

Vergleicht man nun diese beyden Werthe mit einander, so wird

$$0 = QQp.\ \text{sin.}\,n\varphi.\ \text{sin.}\,(n+3)\varphi - QR.\ \text{sin.}\,n\varphi.\ \text{sin.}\,(n+2)\varphi -$$

$$PQpp.\ \text{sin.}\ (n+1)\varphi.\ \text{sin.}\ (n+3)\varphi - QQp.\ \text{sin.}\ (n+1)\varphi.\ \text{sin.}\ (n+2)\varphi +$$
$$QR.\ \text{sin.}\ (n+1)\varphi.\ \text{sin.}\ (n+1)\varphi + PQpp.\ \text{sin.}\ (n+1)\varphi.\ \text{sin.}\ (n+2)\varphi.$$

Da aber

$$\text{sin. a. sin. b.} = \tfrac{1}{2}.\ \text{cos.}\ (a-b) - \tfrac{1}{2}\ \text{cos.}\ (a+b)$$

ist, so wird

$$0 = \tfrac{1}{2}\,QQp.(\text{cos.}\,3\varphi - \text{cos.}\,\varphi) + \tfrac{1}{2}\,QR.(1 - \text{cos.}\,2\varphi) + \tfrac{1}{2}\,PQpp.(1 - \text{cos.}\,2\varphi.)$$

und daraus ergiebt sich, wenn man durch $\frac{1}{2}$ Q dividirt,

$$(Ppp + R)(1 - \text{cos.}\,2\varphi) = Qp.(\text{cos.}\,\varphi - \text{cos.}\,3\varphi)$$

Nun ist

$\text{cos.}\,\varphi = \text{cos.}\,2\varphi.\ \text{cos.}\,\varphi + \text{sin.}\,2\varphi.\ \text{sin.}\,\varphi$, und

$\text{cos.}\,3\varphi = \text{cos.}\,2\varphi.\ \text{cos.}\,\varphi - \text{sin.}\,2\varphi.\ \text{sin.}\,\varphi$; folglich

$\text{cos.}\,\varphi - \text{cos.}\,3\varphi = 2\,\text{sin.}\,2\varphi.\ \text{sin.}\,\varphi = 4\,(\text{sin.}\,\varphi)^2.\text{cos.}\,\varphi$, und

$1 - \text{cos.}\,\varphi = 2\,(\text{sin.}\,\varphi)^2$.

Also wird

$Ppp + R = -2Qp.\ \text{cos.}\,\varphi$, und

$$\text{cos.}\,\varphi = \frac{Ppp + R}{2Qp}, \text{ desgleichen}$$

$$\text{cos.}\,\varphi = \frac{Qpp + S}{2Rp}.$$

Hieraus aber fließen die obigen Werthe, nemlich

$$p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}, \text{ und}$$

$$\text{cos.}\,\varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(QQ - PR)(RR - QS)}}.$$

§. 353.

Wenn der Nenner des Bruchs, nach welchem man die wiederkehrende Reihe formiret, mehrere, einander gleiche, trinomische Faktoren hat, so wird die Erfindung der Wurzeln

zeln noch viel ungewisser, wovon man sich durch die Betrachtung der Form des oben gegebenen allgemeinen Gliedes überzeugen kann. Ist indeß irgend eine reelle Wurzel schon beynahe bekannt, so kann man durch die Verwandlung der Gleichung den Werth eben derselben Wurzel immer genauer finden. Setzt man nemlich x der Summe aus dem schon gefundenen Werthe und y gleich, und sucht man die kleinste Wurzel dieser neuen Gleichung: so erhält man, wenn man dieselbe zu der vorhin gefundenen addirt, den wahren Werth von x.

Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 3xx + 5x - 4 = 0$ gegeben, von welcher man daraus, daß, für $x = 1$, $x^3 - 3xx + 5x - 4 = -1$ wird, weiß, daß die eine Wurzel derselben beynahe $= 1$ ist.

Man setze also $x = 1 + y$, so wird $1 - 2y - y^3 = 0$. Um nun die kleinste Wurzel dieser Gleichung zu finden, formire man nach der Beziehungs-Scale 2, 0, + 1, die wiederkehrende Reihe

1, 2, 4, 9, 20, 44, 97, 214, 472, 1041, 2296, &c.

Hieraus erhält man die kleinste Wurzel y beynahe $= \frac{1041}{2296} =$ 0,453397, und also $x = 1,453397$. Diesen Werth würde man schwerlich auf einem andern Wege so bald und so genau gefunden haben.

§. 354.

Wenn sich aber irgend eine wiederkehrende Reihe immer mehr einer geometrischen Progression nähert, so läßt sich auch aus dem Gesetze der Progression sogleich und auf eine leichte Art erkennen, von was für einer Gleichung der Quo-

Quotient, den man durch die Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende erhält, eine Wurzel seyn werde. Es seyen P, Q, R, S, T, ꝛc. sehr weit vom Anfange entfernte Glieder einer wiederkehrenden Reihe, und von der Art, daß man sie als Glieder einer geometrischen Progression betrachten kann. Ferner sey $T = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P$, oder es sey die Beziehungs-Scale, $\alpha, +\beta, +\gamma, +\delta$. Setzt man nun den Werth des Bruchs $\frac{Q}{P} = x$, so wird $\frac{R}{P} = xx$, und $\frac{S}{P} = x^3$, und $\frac{T}{P} = x4$. Durch die Substitution dieser Werthe in der vorhergehenden Gleichung aber erhält man

$$x4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

und es ist daher einleuchtend, daß $\frac{Q}{P}$ endlich eine Wurzel der gefundenen Gleichung geben wird. Eben dieses lehrt aber auch die vorhergehende Methode, und zugleich, daß der Bruch $\frac{Q}{P}$ die größte Wurzel giebt.

§. 355.

Auch kann man von dieser Methode die Wurzeln zu finden selbst bey unbegrenzten Gleichungen öfters mit Nutzen Gebrauch machen. Um dies zu zeigen, so sey die Gleichung

$$\frac{1}{2} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \text{ꝛc.}$$

gegeben, deren kleinste Wurzel z den Bogen 30° oder den sechsten Theil des halben Umfanges eines Kreises giebt. Man bringe also die gegebene Gleichung auf die Form

$$1 - 2z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{2520} - \text{ꝛc.} = 0$$

und

und formire daraus ein wiederkehrende Reihe. Die Beziehungs-Scale geht hier ohne Ende fort, und ist

$$2, 0, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{60}, 0, -\frac{1}{2520}, 0, \text{ꝛc.}$$

die wiederkehrende Reihe selbst aber

$$1, 2, 4, \frac{23}{3}, \frac{44}{3}, \frac{1681}{60}, \frac{2408}{45}, \text{ꝛc.}$$

und folglich beynahe

$$z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0,52356.$$

Da sich nun aus dem bekannten Verhältnisse der Peripherie zu Durchmesser

$$z = 0,523598$$

ergiebt, so weicht der gefundene Werth von dem wahren nur um 0,00003 ab. Es ist aber das ein sehr vortheilhafter Umstand bey der gegebenen Gleichung, daß alle ihre Wurzeln reell sind, und daß sich außerdem zwischen der kleinsten und den übrigen Wurzeln ein beträchtlicher Unterschied findet. Da sich dieser Umstand sehr selten bey den unendlichen Gleichungen ereignet, so ist die beschriebene Methode auch nur selten zur Erfindung ihrer Wurzeln zu brauchen.

Achtzehntes Capitel.

Von den continuirlichen Brüchen.

§. 356.

Da ich in den vorhergehenden Capiteln, sowohl von den unendlichen Reihen als von den Produkten, die aus einer unendlichen Anzahl von Faktoren bestehen, gehandelt habe, so glaube ich hier, auch noch von einer dritten Art unendlicher Ausdrücke, oder von den continuirlichen Brüchen etwas sagen zu müssen. Denn obgleich die Theorie dieser Brüche noch sehr unvollkommen ist; so ist doch das keinem Zweifel unterworfen, daß die Analysis des Unendlichen daraus einst sehr wichtige Vortheile wird ziehen können. Verschiedene Proben, die ich davon gegeben habe, machen solches in einem hohen Grade wahrscheinlich. Vorzüglich aber gewähret diese Lehre der Arithmetik und der gemeinen Algebra manche auf keine Weise zu verachtende Hülfsmittel; und diese sind es, die ich mir in dem gegenwärtigen Capitel kürzlich anzuzeigen und auseinander zu setzen vorgenommen habe.

§. 357.

Ich verstehe aber unter einem continuirlichen Bruche einen Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Nenner abermals ein Aggregat aus einer ganzen Zahl und einem Bruche von ähnlicher Art ist, es mag nun diese Beschaffenheit immerfort ohne Ende

statt finden, oder irgendwo aufhören. Dergleichen continuirliche Brüche sind z. B.

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \&c.}}}}} \qquad \text{oder} \qquad a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \&c.}}}}}$$

In dem ersten sind alle Zähler der darin enthaltenen Brüche Einheiten, und diese Art werde ich vorzüglich betrachten, in dem andern aber sind diese Zähler die Zahlen überhaupt.

§. 358.

Nachdem also die Form der continuirlichen Brüche beschrieben worden ist, so ist das Nächste, worauf wir zu sehen haben, die Art und Weise, den Werth der continuirlichen Brüche auf die gewöhnliche Art auszudrucken. Um dieselbe desto leichter kennen zu lernen, wollen wir stufenweise gehen, und jene Brüche anfänglich bey dem ersten, dann bey dem zweyten, dann bey dem dritten der in ihnen enthaltenen Brüche &c. abbrechen. Auf diese Art ist klar, daß seyn wird

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde + abe + ade + cde + abc + a + c + e}{bcde + be + de + bc + 1}$$

x.

§. 359.

Obgleich das Gesetz, nach welchem der Zähler und Nenner in diesen auf die gewöhnliche Art ausgedruckten Brüchen aus den Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. formirt werden, nicht leicht zu erkennen ist: so sieht man doch bey einiger Aufmerksamkeit bald, wie ein jeder dieser Brüche aus den vorhergehenden gemacht werden kann. Es ist nemlich jeder Zähler ein Aggregat aus dem letzten Zähler, nachdem man denselben mit einem neuen Buchstaben multiplicirt hat, und aus dem vorletzten Zähler, so wie er ist genommen; und eben so verhält es sich mit den Nennern. Schreibt man also die Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. nach der Ordnung hin, so kann man daraus die gefundenen Brüche auf folgende Art formiren:

$$\frac{1}{0};\ \frac{a}{1};\ \frac{ab+1}{b};\ \frac{abc+a+c}{bc+1};\ \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

Jeder Zähler wird hier gefunden, wenn man den unmittelbar vorhergehenden Zähler durch den darüber stehenden Anzeiger multiplicirt, und zu dem Produkte den darauf folgenden Zähler addirt. Eben dieses Gesetz gilt auch für die Nenner. Damit man aber diese Regel vom Anfang an zum Grunde legen könne, so habe ich den Bruch $\frac{1}{0}$ vorgesetzt; denn ob derselbe gleich nicht aus dem continuirlichen Bruche entspringt, so macht er doch das Progressions Ge-

setz deutlicher. Es stellt übrigens ein jeder Bruch den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Buchstaben, der über dem vor ihm hergehenden steht, diesen aber mit eingeschlossen, dar.

§. 360.

Auf eine ähnliche Art giebt die andere Gattung der continuirlichen Brüche,

$$a \dagger \cfrac{\alpha}{b \dagger \cfrac{\beta}{c \dagger \cfrac{\gamma}{d \dagger \cfrac{\delta}{e \dagger \cfrac{\varepsilon}{f \dagger \text{ &c.}}}}}},$$

je nachdem man sie hier oder dort abbricht, folgende Werthe:

$$a = a$$

$$a \dagger \frac{\alpha}{b} = \frac{ab \dagger \alpha}{b}$$

$$a \dagger \cfrac{\alpha}{b \dagger \cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc \dagger \beta a \dagger \alpha c}{bc \dagger \beta}$$

$$a \dagger \cfrac{\alpha}{b \dagger \cfrac{\beta}{c \dagger \cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd \dagger \beta ad \dagger \alpha cd \dagger \gamma ab \dagger \alpha\gamma}{bcd \dagger \beta d \dagger \gamma b}$$

&c.

und jeder dieser Brüche läßt sich aus den beyden vorhergehenden auf folgende Art finden:

a	b	c	d	e
$\frac{1}{0}$;	$\frac{a}{1}$;	$\frac{ab \dagger \alpha}{b}$;	$\frac{abc \dagger \beta a \dagger \alpha c}{bc \dagger \beta}$;	$\frac{abcd \dagger \beta ad \dagger \alpha cd \dagger \gamma ab \dagger \alpha\gamma}{bcd \dagger \beta d \dagger \gamma b}$
α	β	γ	δ	ε

§. 361.

§. 361.

Man setzt nemlich über die zu formirenden Brüche die Anzeiger a, b, c, d, ꝛc., und unter sie, diese, α, β, γ, δ, ꝛc. Ferner setzt man in die Stelle des ersten Bruchs $\frac{1}{0}$, und in die Stelle des zweyten $\frac{a}{1}$. Ist dies geschehen, so findet man jeden der folgenden Brüche, wenn man den Zähler des letzten von den vorhergehenden Brüchen mit dem darüber stehenden, und den Zähler des vorletzten Bruchs mit dem hierunter stehenden Anzeiger multiplicirt, und beyde Produkte zusammen addirt; wo denn das Aggregat der Zähler des folgenden Bruchs ist. Auf eine ähnliche Art ist der Nenner ein Aggregat aus dem letzten Nenner durch den darüber stehenden, und aus dem vorletzten Nenner durch den hierunter stehenden Anzeiger multiplicirt. Ein jeder von den auf diese Art gefundenen Brüchen aber stellt den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Nenner, der über dem vorhergehenden Bruche steht, doch diesen mit eingeschlossen, dar.

§. 362.

Wenn man daher diese Brüche so weit fortsetzt, als der continuirliche Bruch Anzeiger giebt, so findet man in dem letzten Bruche den wahren Werth des continuirlichen Bruchs. Die vorhergehenden Brüche aber nähern sich diesem wahren Werthe immer mehr und mehr, und geben daher eine sehr gute Näherung. Angenommen nemlich, daß der wahre Werth des contuirlichen Bruchs

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \text{ꝛc.}}}}} = x$$

sey; so ist offenbar, daß der erste Bruch $\frac{1}{0}$ größer ist als x; der zweyte hingegen $\frac{a}{1}$ ist kleiner als x, der dritte $a + \frac{\alpha}{b}$ ist wieder größer, der vierte wieder kleiner, und so sind diese Brüche auch ferner wechselsweise größer und kleiner als x. Außerdem fällt auch bald in die Augen, daß jeder folgende Bruch dem wahren Werthe von x näher kommt, als jeder der vorhergehenden, und man erhält daher auf diese Art den Werth von x näherungsweise sehr schnell und mit vieler Bequemlichkeit. Dies findet selbst dann statt, wenn der continuirliche Bruch ohne Ende fortgeht, wofern nur die Zähler α, β, γ, δ, &c. nicht zu sehr wachsen. Wenn alle diese Zähler lauter Einheiten sind, dann ist diese Näherung gar keiner Unbequemlichkeit unterworfen.

§. 363.

Damit der Grund von dieser Näherung zu dem wahren Werthe des continuirlichen Bruchs mit mehrerer Deutlichkeit erkannt werden möge, so wollen wir die Unterschiede der gefundenen Brüche betrachten. Den ersten, $\frac{1}{0}$, bey Seite gesetzt, so ist der Unterschied zwischen dem zweyten und dritten $= \frac{\alpha}{b}$; der Unterschied zwischen dem dritten und vierten $= \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$; der Unterschied zwischen dem vierten und fünften $= \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, &c. Es wird daher der Werth des continuirlichen Bruchs durch eine gewöhnliche Reihe von Gliedern auf die Art ausgedruckt, daß

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \text{&c.}$$

ist,

ist, und diese Reihe bricht allezeit ab, wenn der continuirliche Bruch nicht ins Unendliche fortläuft.

§. 364.

Wir finden hier also eine Art, einen jeden continuirlichen Bruch in eine Reihe von Gliedern mit abwechselnden Zeichen zu verwandeln, wenn das erste Glied des Bruchs, a, verschwindet. Denn wenn

$$x = \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \&c.}}}}}$$

ist: so ist nach dem, was wir vorhin gefunden haben,

$$x = \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \&c.$$

Wenn daher α, β, γ, δ, &c. keine immer größer werdende Zahlen, sondern z. B. lauter Einheiten sind, die Buchstaben im Nenner aber, a, b, c, d, &c. ganze positive Zahlen bedeuten, so wird der Werth des continuirlichen Bruchs durch eine in einem hohen Grade convergirende Reihe ausgedruckt.

§. 365.

Dies wohl erwogen, so läßt sich auch jede Reihe mit abwechselnden Gliedern in einen continuirlichen Bruch verwandeln, oder es läßt sich ein continuirlicher Bruch finden, dessen Werth der Summe jener Reihe gleich ist. Es sey z. B. diese Reihe

$$x = A - B + C - D + E - F + \&c.$$

gegeben; so ist, wenn man die Glieder dieser Reihe mit der Reihe, die aus dem continuirlichen Bruche entstand, vergleicht,

$$A = \frac{\alpha}{b}; \qquad \text{und also} \qquad \alpha = Ab$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc+\beta}; \qquad \beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd+\beta d+\gamma b}; \qquad \gamma = \frac{Cd(bc+\beta)}{b(B-C)}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta}; \quad \delta = \frac{De(bcd+\beta d+\gamma b)}{(bc+\beta)(C-D)}$$

&c.

Da aber $\beta = \frac{Bbc}{A-B}$ ist, so wird $bc+\beta = \frac{Abc}{A-B}$, und also $\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$. Ferner wird $bcd+\beta d+\gamma b =$

$$(bc+\beta)d+\gamma b = \frac{Abcd}{A-B} + \frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)} = \frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)}$$

folglich $\frac{bcd+\beta d+\gamma b}{bc+\beta} = \frac{Bd}{B-C}$, und $\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$.

Auf eine ähnliche Art findet man $\varepsilon = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$, &c.

§. 366.

Damit dies Gesetz desto deutlicher werde, so sey

$P = b$

$Q = bc+\beta$

$R = bcd+\beta d+\gamma b$

$S = bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta$

$T = bcdef+$ &c.

$V = bcdefg+$ &c.

Also

Alsdann ist nach dem Gesetze, nach welchem diese Ausdrücke formirt werden,

$$Q = Pc + \beta$$
$$R = Qd + \gamma P$$
$$S = Re + \delta Q$$
$$T = Sf + \varepsilon R,$$
$$V = Tg + \zeta S$$
&c.

§. 367.

Da nun, wenn man diese Buchstaben gebraucht,

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \text{&c.}$$

ist: so wird, weil wir $x = A - B + C - D + E - \text{&c.}$ gesetzt haben,

$$A = \frac{\alpha}{P}; \text{ und also } \alpha = AP$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{Q}; \qquad \beta = \frac{BQ}{A}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}; \qquad \gamma = \frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}; \qquad \delta = \frac{DS}{CQ}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\varepsilon R}{T}; \qquad \varepsilon = \frac{ET}{DR}$$

&c. &c.

Nimmt man aber die Differenzen, so hat man

$$A - B = \frac{\alpha(Q - \beta)}{PQ} = \frac{\alpha c}{Q} = \frac{APc}{Q}$$

$$B - C = \frac{\alpha\beta(R - \gamma P)}{PQR} = \frac{\alpha\beta d}{PR} = \frac{BQd}{R}$$

$$C - D = \frac{\alpha\beta\gamma(S - \delta Q)}{QRS} = \frac{\alpha\beta\gamma e}{QS} = \frac{CRe}{S}$$

$$D-E = \frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\varepsilon R)}{RST} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT} = \frac{DSf}{T}$$

&c. &c. &c.

Wenn man also je zwey und zwey mit einander multiplicirt, so wird

$$(A-B)(B-C) = ABcd.\frac{P}{R};\ \text{und}\ \frac{R}{P} = \frac{ABcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$(B-C)(C-D) = BCde.\frac{Q}{S};\ \text{und}\ \frac{S}{Q} = \frac{BCed}{(B-C)(C-D)}$$

$$(C-D)(D-E) = CDef.\frac{R}{T};\ \text{und}\ \frac{T}{R} = \frac{CDef}{(C-D)(D-E)}$$

&c.

Da nun $P = b$; $Q = \frac{\alpha c}{A-B} = \frac{Abc}{A-B}$ ist, so wird

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

&c.

§. 368.

Hat man nun die Werthe der Zähler α, β, γ, δ, &c. gefunden, so kann man die Nenner b, c, d, e, &c. nach Belieben annehmen; doch ist es gut, sie so zu wählen, daß man, wenn man für sie ganze Zahlen gesetzt hat, auch für α, β, γ, δ, &c. ganze Zahlen erhalte. Dies hängt aber auch von der Natur der Zahlen A, B, C, D, &c. ab, je nach-

nachdem dieselben ganze Zahlen oder Brüche sind. Wenn sie ganze Zahlen sind, so geschiehet dem Verlangten ein Genüge, wenn man

$b = 1$	setzt	$\alpha = A$
$c = A - B$		$\beta = B$
$d = B - C$	denn alsdann	$\gamma = AC$
$e = C - D$		$\delta = BD$
$f = D - E$	wird	$\varepsilon = CE$
&c.		&c.

Wenn daher

$$x = A - B + C - D + E - F + \text{&c.}$$

ist: so kann man den Werth von x auf folgende Art durch einen continuirlichen Bruch ausdrucken:

$$x = \frac{A}{1 + \frac{B}{A - B + \frac{AC}{B - C + \frac{BD}{C - D + \frac{CE}{D - E + \text{&c.}}}}}}$$

§. 369.

Wenn aber alle Glieder der Reihe Brüche sind, so daß

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \text{&c.}$$

ist, so hat man für α, β, γ, δ, &c. folgende Werthe:

$$\alpha = \frac{b}{A}; \quad \beta = \frac{Abc}{B - A}; \quad \gamma = \frac{B^2cd}{(B - A)(C - B)};$$

$$\delta = \frac{C^2de}{(C - B)(D - C)}; \quad \varepsilon = \frac{D^2ef}{(D - C)(E - D)}; \text{&c.}$$

Man setze also

$b = A;$	folglich	$\alpha = 1$
$c = B - A;$		$\beta = AA$
$d = C - B;$		$\gamma = BB$
$e = D - C;$		$\delta = CC$
&c.		

und

und alsdann giebt x folgenden continuirlichen Bruch:

$$x = \frac{1}{A \dagger \frac{AA}{B-A \dagger \frac{BB}{C-B \dagger \frac{CC}{D-C \dagger \text{ &c.}}}}}$$

Erstes Exempel.

Es soll die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{2} \dagger \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{5} - \text{ &c.}$$

in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden.

Es ist also $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$, &c. und da der Werth der gegebenen Reihe $= 12$ ist, so ist also

$$12 = \frac{1}{1 \dagger \frac{1}{1 \dagger \frac{4}{1 \dagger \frac{9}{1 \dagger \frac{16}{1 \dagger \frac{25}{1 \dagger \text{ &c.}}}}}}}$$

Zweytes Exempel.

Es soll die unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} \dagger \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dagger \frac{1}{9} - \text{ &c.}$$

worin π die Peripherie eines Kreises bedeutet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden.

Setzt man für A, B, C, D, &c. die Zahlen 1, 3, 5, 7, &c. so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

und hieraus durch die Umkehrung

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}$$

Dies ist die Reihe, die Brouncker für die Quadratur des Kreises erfunden hat.

Drittes Exempel.

Es sey die unendliche Reihe

$$x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \&c.$$

in einen continuirlichen Bruch zu verwandeln.

Da hier $A = m$; $B = m + n$; $C = m + 2n$; &c. ist, so erhält man

$$x = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \&c.}}}}}$$

und daraus wird durch die Umkehrung des Bruchs

$$\frac{1}{x} - m = \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \&c.}}}}$$

Viertes

Viertes Exempel.

Da wir oben §. 178 gefunden haben, daß

$$\frac{\pi \cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} - \frac{1}{2n+m} - \text{&c.}$$

ist, so hat man, wenn man diesen Werth in einen continuirlichen Bruch verwandeln will, $A = m$; $B = n - m$; $C = n + m$; $D = 2n - m$; &c. Es wird daher

$$\frac{\pi \cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m + \frac{mm}{n-2m + \frac{(n-m)^2}{2m + \frac{(n+m)^2}{n-2m + \frac{(2n-m)^2}{2m + \text{&c.}}}}}}$$

§. 370.

Wenn die gegebene Reihe in continuirlichen Faktoren fortgehet, so daß

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \text{&c.}$$

ist: so entstehen folgende Bestimmungen:

$$\alpha = \frac{b}{A};\ \beta = \frac{bc}{B-1};\ \gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)};$$

$$\delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)};\ \varepsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)};\ \text{&c.}$$

Man setze also

	folglich	
$b = A$;		$\alpha = 1$
$c = B - 1$;		$\beta = A$
$d = C - 1$;		$\gamma = B$
$e = D - 1$;		$\delta = C$
$f = E - 1$;		$\varepsilon = D$

&c.

Als-

Alsdann wird

$$x = \frac{1}{A \dagger \frac{A}{B-1 \dagger \frac{B}{C-1 \dagger \frac{C}{D-1 \dagger \frac{D}{E-1 \dagger \text{ &c.}}}}}}$$

Erstes Exempel.

Da wir oben gesehen haben, daß, wenn e eine Zahl bedeutet, deren Logarithme = 1 ist,

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} \dagger \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} \dagger \frac{1}{1.2.3.4} - \text{ &c.}$$

oder

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} \dagger \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} \dagger \text{ &c.}$$

ist: so erhält man aus dieser Reihe einen continuirlichen Bruch, wenn man A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, &c. setzt. Es wird nemlich alsdann

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1 \dagger \frac{1}{1 \dagger \frac{2}{2 \dagger \frac{3}{3 \dagger \frac{4}{4 \dagger \frac{5}{5 \dagger \text{ &c.}}}}}}}$$

und hieraus, wenn man umkehrt, und die unähnlichen Glieder im Anfange wegschaft,

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{1 \dagger \frac{2}{2 \dagger \frac{3}{3 \dagger \frac{4}{4 \dagger \frac{5}{5 \dagger \text{ &c.}}}}}}$$

Zweytes

Zweytes Exempel.

Da der Cosinus eines Bogens, der dem Halbmesser gleich ist,

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.12} - \frac{1}{2.12.30} + \frac{1}{2.12.30.56} - \text{&c.}$$

ist: so wird, wenn man $A = 1$, $B = 2$, $C = 12$, $D = 30$, $E = 56$, &c. und den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, $= x$ setzt

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \text{&c.}}}}}}$$

oder

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \text{&c.}}}}}$$

§. 371.

Es sey außerdem die Reihe mit einer geometrischen verbunden, oder

$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - Fz^5 + \text{&c.}$

so wird

$$\alpha = Ab;\ \beta = \frac{Bbcz}{A - Bz};\ \gamma = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)};$$

$$\delta = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)};\ \varepsilon = \frac{CEefz}{(C - Dz)(D - Ez)};\ \text{&c.}$$

Man setze also

b

$b = 1$ und also $\alpha = A$
$c = A - Bz$ $\beta = Bz$
$d = B - Cz$ $\gamma = ACz$
$e = C - Dz$ $\delta = BDz$
&c.

so wird

$$x = \frac{A}{1 + \frac{Bz}{A - Bz + \frac{ACz}{B - Cz + \frac{BDz}{C - Dz + \&c.}}}}$$

§. 372.

Um aber diesen Fall allgemeiner zu machen, so sey

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \&c.$$

Hier erhält man durch angestellte Vergleichung

$$\alpha = \frac{Ab}{L}; \beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy}; \gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)};$$

$$\delta = \frac{BDN^2deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)}; \&c.$$

Nun nehme man b, c, d, &c. auf folgende Art:

$b = L;$ so wird $\alpha = A$
$c = AMz - BLy;$ $\beta = BLLy$
$d = BNz - CMy;$ $\gamma = ACM^2yz$
$e = COz - DNy;$ $\delta = BDN^2yz$
$f = DPz - EOy;$ $\varepsilon = CEO^2yz$
&c. &c.

Folglich ist der continuirliche Bruch, durch welchen die gegebene Reihe ausgedrückt werden kann,

$$x = \frac{A}{L + \frac{BLLy}{AMz - BLy + \frac{ACMMyz}{BNz - CMy + \frac{BDNNyz}{COz - DNy + \&c.}}}}$$

§. 373.

Hat endlich die gegebene Reihe folgende Gestalt:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \text{&c.}$$

so wird

$$\alpha = \frac{Ab}{L}; \quad \beta = \frac{Bbcy}{Mz - By}; \quad \gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz - By)(Nz - Cy)};$$

$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz - Cy)(Oz - Dy)}; \quad \varepsilon = \frac{EOefyz}{(Oz - Dy)(Pz - Ey)};$$

&c.

Um also diese Werthe in ganzen Zahlen zu erhalten, setze man

$b = Lz;$	so wird	$\alpha = Az$
$c = Mz - By;$		$\beta = BLyz$
$d = Nz - Cy;$		$\gamma = CMyz$
$e = Oz - Dy;$		$\delta = DNyz$
$f = Pz - Ey;$		$\varepsilon = EOyz$
&c.		&c.

Demnach wird die gegebene Reihe in folgenden continuirlichen Bruch

$$x = \frac{Az}{Lz + \frac{BLyz}{Mz - By + \frac{CMyz}{Nz - Cy + \frac{DNyz}{Oz - Dy + \text{&c.}}}}}$$

oder, damit das Progressions-Gesetz vom Anfang an in die Augen falle, in diesen

$$\frac{Az}{x} - Ay = Lz - Ay + \frac{BLyz}{Mz - By + \frac{CMyz}{Nz - Cy + \frac{DNyz}{Oz - Dy + \text{&c.}}}}$$

verwandelt.

§. 374.

§. 374.

Auf diese Art lassen sich unzählige ohne Ende fortgehende continuirliche Brüche von der Art finden, daß man ihren wahren Werth angeben kann. Denn da die unendlichen Reihen, die wir oben betrachtet haben und deren Summen bekannt sind, hierzu gebraucht werden können: so kann man eine jede von diesen Reihen in einen continuirlichen Bruch verwandeln, dessen wahrer Werth der Summe jener Reihe gleich seyn muß. Die Beyspiele, die bereits betrachtet worden sind, zeigen die Art und Weise hiervon hinlänglich; allein es wäre zu wünschen, daß man eine Methode erfinden möchte, durch welche sich der Werth eines gegebenen continuirlichen Bruchs unmittelbar darstellen oder angeben ließe. Denn obgleich jeder continuirliche Bruch in eine unendliche Reihe verwandelt, und die Summe dieser Reihe nach den oben erklärten Methoden gesucht werden kann: so werden denn doch diese Reihen gemeiniglich so zusammengesetzt, daß man daraus ihre obschon sehr einfache Summe kaum zu erforschen im Stande ist.

§. 375.

Damit man deutlich einsehe, daß es continuirliche Brüche gebe, deren Werth aus andern Quellen sehr leicht erhalten werden kann, ob man gleich denselben aus den unendlichen Reihen, worin man die Brüche verwandelt, auf keine Weise zu erforschen im Stande ist: so wollen wir diesen continuirlichen Bruch

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}$$

betrachten, dessen Nenner insgesammt einander gleich sind. Denn formiren wir daraus auf die oben erklärte Art die Brüche

$$\frac{0}{1}, \frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{12}, \frac{2}{29}, \frac{2}{70}, \text{ &c.}$$

so bekommen wir daher folgende Reihe:

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70} - \text{&c.}$$

oder, wenn wir immer zwey und zwey Glieder mit einander verbinden, diese:

$$x = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.29} + \frac{2}{29.169} + \text{&c.}$$

oder

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2.12} - \frac{2}{12.70} - \text{&c.}$$

Da überdem

$$x = \begin{matrix} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \text{&c.} \\ + \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \text{&c.} \end{matrix}$$

ist: so wird auch

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{2.12} + \frac{1}{5.29} - \frac{1}{12.70} + \text{&c.},$$

allein so sehr diese Reihen auch convergiren, so ist man doch nicht im Stande, ihre Summe aus ihrer Form abzuleiten.

§. 376.

Für dergleichen continuirliche Brüche aber, in welchen entweder alle Nenner einander gleich sind, oder immer eben dieselben Nenner wiederkehren, so daß ein solcher Bruch, nach-

nachdem man davon vom Anfang an einige Glieder abgeschnitten hat, doch noch dem ganzen Bruche gleich ist, giebt es eine sehr leichte Art, den Werth derselben zu finden. So ist in dem Exempel des vorhergehenden §, wo

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ &c.}}}}}$$

war, $x = \frac{1}{2+x}$, folglich $xx + 2x = 1$, und $x + 1 = \sqrt{2}$, so daß also der Werth des angeführten continuirlichen Bruchs $= \sqrt{2} - 1$ ist. Die Brüche aber, welche wir vorhin aus dem continuirlichen Bruche abgeleitet haben, nähern sich diesem Werthe unaufhörlich, und das so schnell, daß wohl schwerlich eine schnellere Art, diesen irrationalen Werth durch Rational-Zahlen näherungsweise auszudrucken, wird entdeckt werden können. Es ist nemlich ohne einen eben beträchtlichen Fehler $\sqrt{2} - 1 = \frac{29}{70}$. Denn zieht man die Wurzel wirklich aus, so ist

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}41421356236, \text{ und}$$

$$\frac{29}{70} = 0{,}41428571428$$

so daß der Fehler bloß die Hunderttausendtheile angeht.

§. 377.

So wie die continuirlichen Brüche einen sehr bequemen Weg an die Hand geben, sich dem Werthe der $\sqrt{2}$ zu nähern: so läßt sich dergleichen daraus auch für die Wurzeln anderer Zahlen herleiten. Es sey zu dem Ende

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \text{ꝛc.}}}}}}$$

wo also $x = \frac{1}{a + x}$, und $xx + ax = 1$, und also $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)} = \frac{\sqrt{(aa+4)} - a}{2}$ wird. Es dient daher dieser Bruch zur Erfindung der Quadrat-Wurzeln aus den Zahlen, die unter die Form $aa + 4$ gehören. Setzt man also für a nach und nach die Zahlen, 1, 2, 3, 4, ꝛc. so findet man $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{53}$; ꝛc. wenn man nemlich diese Wurzeln auf ihre einfachste Form zurückführt. Es ist folglich

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \text{ꝛc.} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \text{ꝛc.} = \sqrt{2}-1$$

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{10}{33},\ \frac{33}{109},\ \frac{109}{360},\ \text{ꝛc.} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{17},\ \frac{17}{72},\ \frac{72}{305},\ \frac{305}{1292},\ \text{ꝛc.} = \sqrt{5}-2$$

ꝛc.

Hierbey ist zu bemerken, daß die Näherung desto schneller erfolgt, je größer a ist. So ist in dem letzten Exempel $\sqrt{5}$

=

$= 2\frac{305}{1292}$, wobey der Irrthum geringer ist, als $\frac{1}{1292 \cdot 5473}$.

Es ist aber 5473 der Nenner des folgenden Bruchs $\frac{1292}{5473}$.

§. 378.

Auf diese Art aber können bloß die Wurzeln solcher Zahlen gefunden werden, die Summen zweyer Quadrate sind. Um daher dieses Näherungs-Mittel auch auf andere Zahlen auszudehnen, so sey

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \&c.}}}}}}$$

Alsdann wird

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}} = \frac{b + x}{ab + 1 + ax}$$

und folglich

$axx + abx = b$, und

$$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}\right)} = \frac{-ab + \sqrt{(aabb + 4ab)}}{2a}$$

Vermittelst dieser Formel lassen sich die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen finden. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 7$; so wird $x = \frac{-14 + \sqrt{14 \cdot 18}}{4} = \frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2}$; und diesen Werth von x erhält man in den Brüchen

$$\frac{2,}{0}, \frac{7,}{1}, \frac{2,}{7}, \frac{7,}{15}, \frac{2,}{32}, \frac{7,}{112}, \frac{2,}{239}, \frac{7,}{510}, \&c.$$

Es ist daher beynahe $\frac{-7+3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$, und $\sqrt{7} = \frac{2024}{765} = 2{,}6457516$. Dieser Werth weicht von dem wahren $2{,}64575131$ noch nicht um $\frac{3}{10000000}$ ab.

§. 379.

Nun wollen wir ferner

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{ &c.}}}}}}}}$$

setzen, woraus

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}} = \frac{1}{a+\frac{c+x}{bx+bc+1}} = \frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c}$$

wird. Hieraus aber fließt

$$(ab+1)xx+(abc+a-b+c)x = bc+1, \text{ und}$$

$$x = \frac{-abc-a+b-c+\sqrt{((abc+a+b+c)^2+4)}}{2(ab+1)}$$

Allein da die Größe unter dem Wurzel-Zeichen in diesem Ausdrucke wieder die Summe zweyer Quadrate ist, so kann man denselben bey der Extraction der Quadrat-Wurzeln nicht weiter gebrauchen, als wo man sich schon der ersten Formel bedienen konnte. Eben so reicht die Formel, welche man findet, wenn man die vier Buchstaben a, b, c, d, in

den

den Nennern des continuirlichen Bruchs wiederkehren läßt, nicht weiter als die zweyte, welche nur zwey Buchstaben enthält, ꝛc.

§. 380.

Da man sich also der continuirlichen Brüche mit so vielem Vortheile zur Extraction der Quadrat-Wurzel bedienen kann: so werden dieselben auch bey der Auflösung der quadratischen Gleichungen mit Nutzen gebraucht werden können; so wie solches auch schon aus der Rechnung erhellt, indem x durch eine unreine quadratische Gleichung bestimmt wird. Es kann aber auch umgekehrt die Wurzel jeder quadratischen Gleichung sehr leicht auf folgende Art durch einen continuirlichen Bruch dargestellt werden. Es sey die Gleichung

$$xx = ax + b$$

gegeben. Da man daraus

$$x = a + \frac{b}{x}$$

erhält, so setze man in dem letzten Gliede anstatt x den schon gefundenen Werth desselben, wo denn

$$x = a + \frac{b}{a + \frac{b}{x}}$$

wird. Fährt man auf diesem Wege weiter fort, so ist der Werth von x, durch einen ohne Ende fortlaufenden continuirlichen Bruch ausgedruckt,

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \text{ꝛc.}}}}$$

Allein da die Zähler b keine Einheiten sind, so läßt sich davon kein bequemer Gebrauch machen.

§. 381.

Um nun den Nutzen der continuirlichen Brüche in der Arithmetik zu zeigen, so ist zuvörderst zu bemerken, daß ein jeder gewöhnlicher Bruch in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden kann. Ist z. B. der Bruch $x = \frac{A}{B}$ gegeben, und darin A größer als B, so dividire man A durch B, wo denn der Quotient a und der Rest C seyn mag. Nun dividire man durch diesen Rest C den vorhergehenden Divisor B, und der Quotient sey b und der Rest D, den man nun wieder durch den vorhergehenden Divisor C dividiren muß. Auf diese Art setze man diese Operation, welche man gewöhnlich bey der Reduction der Brüche auf die kleinsten Zahlen anwendet, um den größten gemeinschaftlichen Faktor von A und B zu finden, fort, bis nichts mehr übrig bleibt. Hier ist ein Beyspiel:

B) A (a
C) B (b
D) C (c
E) D (d
F &c.

Nun ist, wegen der Natur der Division,

$A = aB + C$; also $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$

$B = bC + D$; $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$; $\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$

$C = cD + E$; $\frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}$; $\frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}$

$D = dE + F$; $\frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}$; $\frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}}$

&c. &c. &c.

Setzt

Setzt man daher die folgenden Werthe in die vorhergehenden, so wird

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}}$$

und demnach wird endlich x durch die gefundenen Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. allein auf folgende Art ausgedruckt:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{ꝛc.}}}}}}$$

Erstes Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{1461}{59}$ gegeben, welcher auf folgende Art in einen continuirlichen Bruch verwandelt wird, dessen Zähler lauter Einheiten sind. Man stelle zuvörderst die Operation an, wodurch der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen 59 und 1461 gesucht zu werden pflegt.

59) 1461 (24
118
281
236
45) 59 (1
45
14) 45 (3
42
3) 14 (4
12
2) 3 (1
2
1) 2 (2
2
0

Aus

Aus diesen Quotienten wird alsdann

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Zweytes Exempel.

Auch die Decimal-Brüche können auf diese Art verwandelt werden. Denn ist z. B.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356 = \frac{141421356}{100000000},$$

gegeben, so stellt man zuvörderst folgende Operation an

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314567	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418728	1010160	2
2c.	209364	

Da nun aus dieser Operation erhellet, daß jeder Nenner = 2 ist, so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 2c.}}}}$$

und

und die Beschaffenheit dieses Ausdrucks ist bereits aus dem Obigen bekannt.

Drittes Exempel.

Vorzüglich verdient die Zahl e, deren Logarithme = 1, und die selbst = 2,718281828459 ist, unsere Aufmerksamkeit. Da man daraus $\frac{e-1}{2} = 0,859140914229 5$ findet, so giebt dieser Bruch, wenn man ihn auf die vorhergehende Art behandelt, folgende Quotienten:

859140914229 5	100000000000000	1
845154514622 4	859140914229 5	6
13986399607 1	1408590857704	10
13931255791 6	1398639960710	14
55143815 5	9950896994	18
55022448 8	9925886790	22
1213667	25010204	

2c.

und setzt man diese Rechnung, wenn man den Werth von e nimmt, noch weiter fort, so findet man diese Quotienten,

1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 2c.

die, wenn man den ersten wegläßt, eine arithmetische Progression ausmachen. Es ist daher

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+2c.}}}}}}$$

In

In der Analysis des Unendlichen läßt sich dieser Bruch weiter untersuchen.

§. 382.

Da man aus dergleichen Ausdrücken Brüche ableiten kann, die sich dem wahren Werthe dieser Ausdrücke sehr schnell nähern; so kann man sich dieser Methode bedienen, um Decimal-Brüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln, die sich von jenen nur um einen unbeträchtlichen Theil unterscheiden. Ja, wenn ein Bruch, gegeben ist, dessen Zähler und Nenner sehr große Zahlen sind, so kann man dafür einen andern Bruch, dessen Zähler und Nenner aus kleinern Zahlen bestehen, finden, der zwar dem gegebenen Bruche nicht vollkommen gleich, aber doch auch nicht merklich von ihm unterschieden ist. Und so läßt sich jene Wallisische Aufgabe auflösen, worin verlangt wird, daß man Brüche finden soll, die durch kleinere Zahlen ausgedruckt werden, und den Werth des in größern Zahlen gegebenen Bruchs so genau erschöpfen, als es durch Zahlen, die nicht größer sind, geschehen kann. Die Brüche, welche wir auf dem beschriebenen Wege finden, nähern sich dem Werthe des continuirlichen Bruchs, aus welchem sie abgeleitet worden, so sehr, daß keine andere, die nicht aus größern Zahlen bestehen, sich ihm mehr nähern können.

Erstes Exempel.

Es soll das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise durch so kleine Zahlen ausgedruckt werden, daß solches auf keine genauere Art geschehen kann, wofern man nicht größere Zahlen nimmt.

Wenn

Wenn man den bekannten Decimal-Bruch

3,1415926535 ꝛc.

auf die beschriebene Art durch eine fortgesetzte Division entwickelt, so erhält man die Quotienten,

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, ꝛc.

und daraus ergeben sich folgende Brüche,

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \text{ ꝛc.}$$

Der zweyte zeigt schon an, daß sich der Durchmesser zur Peripherie wie 1 : 3 verhalte, und genauer kann dies Verhältniß durch keine andere als durch größere Zahlen ausgedruckt werden. Der dritte Bruch giebt das Archimedeische Verhältniß 7 : 22; und der fünfte das vom Metius, welches der Wahrheit schon so nahe kommt, daß der Fehler weniger als $\frac{1}{113.33102}$ beträgt. Uebrigens sind diese Brüche wechselsweise zu groß und zu klein.

Zweytes Exempel.

Man soll das Verhältniß eines Tages zum mittlern Sonnenjahre in den möglich kleinsten Zahlen ausdrucken.

Da dieses Jahr 365 T., 5 St., 48′, 55″ enthält, so besteht es aus $365\frac{20935}{86400}$ Tagen. Entwickelt man nun diesen Bruch, als worauf es allein ankommt, so findet man die Quotienten

4, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4

und aus ihnen folgende Brüche

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{55}{227}, \frac{63}{260}, \frac{181}{747}, \text{ ꝛc.}$$

Die

Die Stunden, Minuten und Secunden, welche das Jahr über 365 Tage enthält, machen also in 4 Jahren ohngefehr einen Tag, und darauf gründet sich die Einrichtung des Julianischen Calenders. Genauer gerechnet, so entstehen daraus in 33 Jahren 8 Tage, oder in 747 Jahren 181 Tage, so daß also in vier hundert Jahren 97 Tage zu viel herauskommen. Da also der Julianische Calender in diesem Zeitraume 100 Tage einschaltet, so verwandelt der Gregorianische in vier hundert Jahren drey Schaltjahre in gemeine Jahre.

Ende des ersten Buchs.



Anhang

Anhang

zu der

Uebersetzung des ersten Buchs

der

Eulerischen Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen,

welcher

außer einer vollständigen Darstellung der in dem gedachten Buche abgehandelten Materien verschiedene größtentheils aus andern Eulerischen Schriften genommene Zusätze enthält.

I.

Zusätze zum ersten Capitel.

A. Inhalt des ersten Capitels.

Euler beschäftiget sich in diesem Capitel mit dem Begriffe und den Arten der Funktionen. Da der Begriff der Funktion die Begriffe der beständigen und der veränderlichen Größe voraussetzt, so schickt er gleich im Anfange die Erklärungen dieser beyden Gattungen der Größen voraus, und theilt darauf den Begriff der Funktion auf die Art mit, daß er nicht nur die Funktion erklärt, sondern auch bemerkt, zu was für einer Gattung der Größen dieselbe gehört. Was die Arten der Funktionen betrifft, so redet Euler davon in der Ordnung, in welcher man sie bey der Eintheilung der Funktionen entdeckt. Man kann nemlich zuvörderst bey der Eintheilung der Funktionen jede Funktion entweder an und für sich betrachten, oder mehrere unter einander vergleichen. Im ersten Falle bietet sich wieder ein doppelter Theilungsgrund dar; denn es unterscheiden sich die Funktionen theils nach den Operationen, durch welche die veränderliche Größe in ihnen mit beständigen Größen verbunden ist, theils nach dem Werthe, welchen sie bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen. Wenn die Funktionen nach den Operationen eingetheilt werden sollen, durch welche ihre veränderliche Größe mit beständigen Größen verbunden ist: so kann man ihre Arten entweder nach den einzelnen Operationen,

oder nach den Gattungen derselben festsetzen. Im ersten Falle giebt es so viele Arten der Funktionen, als es einzelne Operationen giebt, durch welche Größen mit einander verbunden werden können. Im andern Falle aber sind die Funktionen entweder algebraische oder transcendente, und die algebraischen wieder entweder rationale oder irrationale Funktionen; endlich lassen sich die rationalen Funktionen noch in ganze und gebrochene, und die irrationalen in entwickelte und in verwickelte Funktionen eintheilen. Bey der Eintheilung der Funktionen nach dem Werthe, welchen sie bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen, findet ebenfalls ein zwiefacher Fall statt, indem man dabey einmal den Werth, den die Funktionen erhalten, wenn man für ihre veränderliche Größe irgend eine absolute beständige Größe setzt, betrachten, oder zweytens auf denjenigen sehen kann, den sie bekommen, wenn man für ihre veränderliche Größe nach einander zwey gleich große entgegengesetzte Größen setzt. Im ersten Falle sind die Funktionen entweder einförmig oder vielförmig, und das entweder nach allen ihren Werthen, oder bloß nach den reellen. Im andern Falle werden die Funktionen in gerade und in ungerade Funktionen getheilt. Was endlich zweytens die Eintheilung der Funktionen anlanget, wobey mehrere mit einander verglichen werden, so sind dabey die Funktionen theils einander ähnlich oder nicht, und hier läßt sich leicht einsehen, daß bloß von den ähnlichen gesprochen zu werden braucht.

Man kann also den Inhalt dieses Capitels in folgende Tabelle bringen.

Von den Funktionen überhaupt.

1. Begriff der Funktion, §. 1—5.
   a. Vorbereitende Erklärungen, §. 1—3.
      α. der beständigen Größe, §. 1.
      β. der veränderlichen Größe, §. 2. 3.
   b. Begriff der Funktion selbst, §. 4. 5.
      α. Erklärung der Funktion, §. 4.
      β. Anmerkung über die Art der Größe, zu welcher die Funktion gehört, §. 5.
2. Arten der Funktionen, §. 6 — — 26.
   a. wenn die Funktionen an und für sich betrachtet werden, §. 6 — — 25.
      α. in Ansehung der Operationen, durch welche die veränderliche Größe in denselben mit beständigen Größen verbunden ist, §. 6—9, und zwar
         aa. in Ansehung einzelner Operationen, §. 6.
         bb. in Ansehung der Gattungen dieser Operationen, §. 7—9.
            αα. Algebraische Funktionen, §. 8.
               aaa. Rationale, §. 8.
                  ααα. ganze
                  βββ. gebrochene } §. 9.
               bbb. Irrationale, §. 8.
                  ααα. entwickelte
                  βββ. verwickelte } §. 8.
            ββ. Transcendente Funktionen, §. 7.
      β. in Ansehung des Werthes, welchen die Funktionen bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen, §. 10 — — 25.
         aa. wenn für die veränderliche Größe der Funktionen irgend eine absolute beständige Größe gesetzt wird, §. 10—17.

αα. hieraus entstehende Arten der Funktionen, §. 10 — 15.

aaa. wenn jeder auf diesem Wege sich ergebende Werth der Funktionen in Betrachtung gezogen wird, §. 10 — 14.

ααα. Einförmige Funktionen, §. 10.

βββ. Vielförmige Funktionen, §. 10 — 14.

1. besondere Arten davon, §. 11 — 13.

a. zweyförmige, §. 11.

b. dreyförmige, §. 12.

c. vierförmige, §. 13.

2. vielförmige überhaupt, §. 10. 14.

bbb. wenn bloß die möglichen Werthe genommen werden §. 15. Vielförmige Funktionen, die wie einförmige oder zweyförmige gebraucht werden.

ββ. das Bisherige voraussetzende Erweiterung des Begriffs der Funktion, §. 16. 17.

bb. wenn für die veränderliche Größe der Funktionen nach einander zwey gleich große entgegengesetzte Größen gesetzt werden, §. 18 — 25.

αα. gerade Funktionen, §. 18 — 20.

aaa. Begriff der geraden Funktion, §. 18. 19.

ααα. überhaupt, §. 18.

βββ. insbesondere der einförmigen und vielförmigen, §. 18. 19.

bbb. Kennzeichen der geraden Funktion, §. 20.

ββ. ungerade Funktionen, §. 21 — 25.

aaa. Begriff der ungeraden Funktion, §. 21.

bbb. Entstehungsarten der geraden und ungeraden Funktionen aus einander. §. 22. 23.

ccc. Kennzeichen ungerader Funktionen. §. 24. 25.

b. Wenn

b. Wenn die Funktionen in Vergleichung mit einander betrachtet werden, §. 26. Begriff der ähnlichen Funktionen.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Funktionen auch nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größen in Funktionen einer, und in Funktionen zweyer oder mehrer veränderlicher Größen eingetheilt werden können. Da aber Euler in dem Capitel, wovon die vorhergehende Tabelle den Inhalt ausführlich darstellt, nur von den Funktionen überhaupt reden wollte: so hatte er dieser Eintheilung nicht nöthig zu gedenken, und konnte bey den Funktionen einer veränderlichen Größe stehen bleiben. Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen handelt das fünfte Capitel.

B. Ueber die Methode

aus zwey Gleichungen, die eine unbekannte Größe mit einander gemein haben, eine Gleichung zu finden, worin diese unbekannte Größe nicht enthalten ist.

Zu §. 17.

1. Newton giebt in seiner Arithmetica universali, nachdem er S. 57—61 von dieser Methode überhaupt geredet, und die bekannten Regeln für die leichtern Fälle mitgetheilt und erklärt hat, S. 62 und 63 folgende besondere, einige schwerere Fälle betreffende, Regeln:

1) Wenn

$axx + bx + c = 0$, und $fxx + gx + h = 0$

ist, so erhält man durch die Wegschaffung der gemeinschaftlichen Größe x folgende Gleichung:

$(ah - bg - 2cf) \times ah + (bh - cg) \times bf + (agg + cff) \times c = 0.$

2) Wenn

$ax^3 + bxx + cx + d = 0$, und $fxx + gx + h = 0$.

ist, so ist die Gleichung, welche man durch die Wegschaffung der unbekannten Größe x bekommt, folgende:

$(ah - bg - 2cf) \times ahh + (bh - cg - 2df) \times bfh + (ch - dg)$
$(agg + cff) + (3agh + bgg + dff) \times df = 0$

3) Wenn

$ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, und $fxx + gx + h = 0$ ist, so giebt die Wegschaffung von x die Gleichung:

$(ah - bg - 2cf) \times ah^3 + (bh - cg - 2df) \times bfhh + (agg + cff) \times (chh - dgh + egg - 2efh) + (3agh + bgg + dff) \times dfh + (2ahh + 3bgh - dfg + eff) \times eff - (bg - 2ah) \times efgg = 0$

4) Wenn

$ax^3 + bxx + cx + d = 0$, und $fx^3 + gxx + hx + k = 0$ ist, so bekommt man durch die Wegschaffung der gemeinschaftlichen Größe x die Gleichung:

$(ah - bg - 2cf) \times (adhh - achk) + (ak + bh - cg - 2df) \times bdfh - (ak + bh + 2cg + 3df) \times aakk + (cdh - ddg - cck + 2bdk) \times (agg + cff) + (3agh + bgg + dff - 3afk) \times ddf - (3ak - bh + cg + df) \times bcfk + (bk - 2dg) \times bbfk - (bbk - 3adh - cdf) \times agk = 0.$

2. Die Art und Weise, wie Newton diese Regeln gefunden, findet man zwar am angeführten Orte nicht bemerkt, indeß erhält man sie unter andern aus den allgemeinen Gleichungen, zu welchen sie gehören, wenn man aus denselben die Größe x nach den bekannten Regeln wegschaft. So ergiebt sich z. B. die erste Regel, wenn man

$axx + bx + c = 0$ in $afxx + bfx + cf = 0$, und

$fxx + gx + h = 0$ in $afxx + agx + ah = 0$ verwandelt, aus diesen beyden Gleichungen durch die Subtraction

$(bf - ag)x + cf - ah = 0$ macht

hieraus $x = \frac{ah - cf}{bf - ag}$ entwickelt, und

diesen

diesen Werth von x in die Gleichung $axx + bx + c = 0$ bringt. Da nemlich wegen des gefundenen Werthes von x,

$$x^2 = \frac{aahh - 2ahfc + ccff}{(bf - ag)^2}$$

ist, so erhält man dadurch die Gleichung

$$\frac{(aahh - 2ahfc + ccff)a}{(bf - ag)^2} + \frac{(ah - cf)b}{bf - ag} + c = 0$$

oder

$$a^3hh - 2aahfc + accff + abbfh - bbffc - aabgh + abcfg + bbffc - 2abcfg + aacgg.$$

$$=$$

$$aahh - 2ahfc + ccff + bbfh - abgh - bcfg + acgg$$

$$=$$

$$(ah - bg - 2fc) \times ah + (bh - cg) \times bf + (agg + cff) \times c = 0.$$

3. Den Gebrauch dieser Regeln zeigt Newton an folgenden Beyspielen:

a. Soll aus den Gleichungen $xx + 5x - 3yy = 0$, und $3xx - 2xy + 4 = 0$ die Größe x weggeschaft werden: so setzt man in der ersten Regel $a = 1$, $b = 5$, $c = -3yy$, $f = 3$, $g = -2y$ und $h = 4$. Dadurch bekommt man

$$(4 + 10y + 18yy) \times 4 + (20 - 6y^3) \times 15 + (4yy - 27yy) \times -3yy = 0$$

oder

$$16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$$

b. Soll man aus den Gleichungen, $y^3 - xyy - 3x = 0$, und $yy + xy - xx + 3 = 0$, die Größe y wegschaffen: so setzt man in der zweyten Regel $a = 1$, $b = -x$, $c = 0$, $d = -3x$; $f = 1$, $g = x$, $h = -xx + 3$, und $x = y$. Alsdann wird

$$(3 - xx + xx)(9 - 6xx + x4) + (-3x + x^3 + 6x)(-3x + x^3) + 3xx \times xx + (9x - 3x^3 - x^3 - 3x) \times -3x = 0$$

oder

$$27 - 18xx + 3x^4 - 9xx + x^6 + 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$$

oder

$$x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0.$$

4. Euler lehrt in seiner Nouvelle méthode d'éliminer ꝛc. einen andern Weg, diese Regeln zu finden. Er ist folgender.

a. Wenn

$$A + Bz = 0, \text{ und } a + bz = 0$$

ist, so wird, wenn man die erste Gleichung mit b und die andern mit B multiplicirt, und das letzte Produkt von dem ersten abzieht,

$$Ab - Ba = 0$$

Eben dieses findet man, wenn man die erste Gleichung mit a, und die andern mit A multiplicirt, das erste Produkt von dem zweyten abzieht, und die daher entspringende Gleichung $Abz - Baz = 0$ durch z dividirt.

b. Wenn

$$A + Bz + Czz = 0, \text{ und } a + bz + czz = 0$$

ist, so ist die Differenz zwischen der ersten Gleichung mit c und der andern mit C multiplicirt,

$$Ac - Ca + (Bc - Cb)z = 0$$

so wie die Differenz eben dieser Gleichungen, nachdem man die erste mit a und die andere mit A multiplicirt, die Differenz selbst aber durch z dividirt hat,

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z = 0$$

Auf diese Art hat man also zwey Gleichungen gefunden, aus welchen sich die unbekannte Größe z nach a wegschaffen läßt. Es wird aber alsdann

$$(Ac - Ca)(Ca - Ac) - (Bc - Cb)(Ba - Ab) = 0$$

oder

$$AAcc - 2ACac + CCaa + BBac - ABbc - BCab + ACbb = 0$$

c. Wenn

c. Wenn

$A + Bz + Czz + Dz^3 = o$, und $a + bz + czz + dz^3 = o$ ist, so wird, wenn man die erste Gleichung mit d und die andere mit D multiplicirt, und das letzte Produkt von dem ersten abzieht,

$Ad - Da + (Bd - Db)z + (Cd - Dc)zz = o$

Multiplicirt man hingegen die erste Gleichung mit a und die andere mit A, so ist die Differenz zwischen beyden durch z dividirt,

$Ba - Ab + (Ca - Ac)z + (Da - Ad)zz = o$

Man hat also zwey Gleichungen, aus welchen sich die unbekannte Größe z nach b wegschaffen läßt, und es ist leicht einzusehen, daß man auf eine ähnliche Art zwey biquadratische Gleichungen auf zwey cubische, und überhaupt jede zwey Gleichungen von irgend einem Grade auf zwey Gleichungen von einem niedrigern Grade zurückführen kann. Fährt man aber in dieser Reduktion fort, so kommt man endlich nothwendig auf eine Gleichung, in welcher die Größe z nicht mehr enthalten ist.

d. Um sich aber die Wegschaffung der Größe z aus den beyden cubischen Gleichungen $A + Bz + Czz + Dz^3 = o$, und $a + bz + czz + dz^3 = o$ zu erleichtern, so setze man

$Ad - Da = A'$ $\quad$ $aB - bA = a'$

$Bd - Db = B'$ $\quad$ $aC - cA = b'$

$Cd - Dc = C'$ $\quad$ $aD - dA = c'$

Hierdurch verwandeln sich die bey c gefundenen quadratischen Gleichungen in folgende:

$A' + B'z + C'zz = o$, und $a' + b'z + c'zz = o$.

Ferner setze man

$A'c' - C'a' = A''$ $\quad$ $a'B' - b'A' = a''$

$B'c' - C'b' = B''$ $\quad$ $a'C' - c'A' = b''$

um dadurch die beyden einfachen Gleichungen

$A'' - B''z = o$, und $a'' - b''z = o$

zu erhalten, welche folgende von z befreyte Gleichung geben

$A''b'' - B''a'' = o$.

e. Zählt man nun aber die Buchstaben A, B, C, D, a, b, c, d, welche in jedem Gliede in einander multiplicirt sind: so enthalten die Ausdrücke A', B', C', a', b', c' zwey, und die Ausdrücke A'', B'', a'', b'' vier Dimensionen, so daß also die Gleichung A''b'' — B''a'' eine Gleichung von 8 Dimensionen, oder jedes ihrer Glieder ein Produkt aus acht Größen ist. Entwickelt man indeß diese Gleichung, so findet sich, daß sie sich durch Ad — Da theilen, und folglich, wenn man wirklich dividirt, in eine Gleichung von sechs Dimensionen verwandeln läßt, welche folgende ist: $(Ad - Da)^3$

$+(Ac-Ca)^2(Cd-Dc) - 2(Ab-Ba)(Ad-Da)(Cd-Dc)$

$+(Bd-Db)^2(Ab-Ba) - (Ab-Ba)(Bc-Cb)(Cd-Dc) = o$

$-(Ad-Da)(Ac-Ca)(Bd-Db)$

f. Wenn zwey Gleichungen vom vierten Grade gegeben sind, so führt diese Methode auf eine Gleichung von 16 Dimensionen, die sich aber, weil sie durch eine Formel von 8 Dimensionen theilbar ist, auf eine Gleichung von 8 Dimensionen zurückführen läßt. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den folgenden höhern Gleichungen.

5. Außerdem macht Euler in der angeführten Abhandlung noch eine neue Methode der Wegschaffung einer unbekannten Größe aus zweyen Gleichungen bekannt, welche sich auf eine genauere Bestimmung des Begriffs der Elimination gründet. Ueberlegt man nemlich, daß man, wenn sich jede Gleichung vollkommen auflösen ließe, zur Wegschaffung einer zweyen Gleichungen gemeinschaftlichen Größe aus denselben überall den Weg einschlagen könnte, daß man die wegzuschaffende Größe aus beyden Gleichungen suchte, und aus dem auf diese Art gefundenen doppelten Werthe der-

derselben eine neue Gleichung machte: so sieht man bald, daß das Geschäfte der Elimination eigentlich in nichts anderm besteht, als in der Erfindung eines solchen Verhältnisses zwischen den in den gegebenen Gleichungen außer der wegzuschaffenden enthaltenen Größen, wobey die gedachten Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Soll also z. B. aus den Gleichungen

$zz + Pz + Q = o$, und $z^3 + pzz + qz + r = o$

z weggeschafft werden, so gebe man beyden Gleichungen die Wurzel ω, wodurch denn $z - \omega$ ein beyden Gleichungen gemeinschaftlicher Faktor wird. Ferner ist alsdann

$zz + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$

$z^3 + pzz + qz + r = (z - \omega)(zz + az + b)$ und also

$(zz + Pz + Q)(zz + az + b) = (z^3 + pzz + qz + r)(z + \mathfrak{A})$.

Entwickelt man nun diese Produkte, so ergeben sich aus der Vergleichung derselben folgende Gleichungen:

I. $P + a = p + \mathfrak{A}$; III. $Q + Pa + b = q + p\mathfrak{A}$;

II. $Pb + Qa = q\mathfrak{A} + r$; IV. $Qb = r\mathfrak{A}$.

Aus diesen Gleichungen lassen sich nicht nur die drey neuen Buchstaben $\mathfrak{A}$, a und b leicht bestimmen, sondern dann auch eine Gleichung finden, die das Verhältniß ausdruckt, welches die Größen P, Q, p, q, r zu einander haben müssen, wenn die gegebenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben sollen. Es folgt nemlich aus I.

$\mathfrak{A} = P - p + a$

und aus II.

$b = q + p\mathfrak{A} - Q - Pa$, oder $b = q + Pp - pp + pa - Q - Pa$.

Setzt man nun diese Werthe in III. so bekommt man

$Pq + PPp - Ppp - PQ + P(p - P)a + Qa = Pq - pq + qa +$

oder

$Pp(P - p) + pq - PQ - r = P(P - p)a - (Q - q)a$

woraus denn $a =$

$$a = \frac{Pp(P-p) + pq - PQ - r}{P(P-p) - (Q-q)} = p - \frac{Q(P-p) - r}{P(P-p) - (Q-q)}$$

wird. Eben diese Werthe, in IV gebracht, geben

$$Qq + PQp - Qpp - QQ + Q(p-P)a = r(P-p) + ra$$

oder

$$a = \frac{Qp(P-p) - Q(Q-q) - r(P-p)}{Q(P-p) + r} = p - \frac{Q(Q-q) - Pr}{Q(P-p) + r}$$

Es ist also

$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)} = \frac{Q(Q-q) + Pr}{Q(P-p) + r}, \text{ oder}$$

$$Q(P-p)(Pq-Qp) + 2Qr(P-p) + Pr(Q-q) - PPr(P-p) + Q(Q-q)^2 + rr = 0$$

6. Nunmehr ist auch leicht einzusehen, wie man die unbekannte Größe z aus zwey Gleichungen von jeglichem Grade wegschaffen kann. Denn soll man aus den beyden Gleichungen

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + Sz^{m-4} + \text{&c.} = 0$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + sz^{n-4} + \text{&c.} = 0$$

eine neue Gleichung machen, worin z nicht mehr enthalten ist: so ist das eben so viel, als, man soll das Verhältniß zwischen den Coefficienten P, Q, R, &c. p, q, r, &c. bestimmen, wobey die gegebenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel oder einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Es sey also $z - \omega$ der gemeinschaftliche Faktor. Alsdann wird

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{&c.} = (z-\omega)(z^{m-1} + Az^{m-2} + Bz^{m-3} + \text{&c.})$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{&c.} = (z-\omega)(z^{n-1} + az^{n-2} + bz^{n-3} + \text{&c.})$$

Macht man nun hieraus die Gleichung

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{&c.})(z^{n-1} + az^{n-2} + bz^{n-3} + \text{&c.}) = (z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{&c.})(z^{m-1} + Az^{m-2} + Bz^{m-3} + \text{&c.})$$

und entwickelt man die auf beyden Seiten derselben stehen-

den

den Produkte: so erhält man daraus, da die ersten Glieder in beyden Hälften einander gleich werden, $m+n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der Buchstaben A, B, C, ꝛc. Da nun die Zahl der Buchstaben A, B, C, ꝛc. $m-1$, und die Zahl der Buchstaben a, b, c, ꝛc. $n-1$, und also die Anzahl aller dieser Buchstaben $m+n-2$ ist: so reichen zu ihrer Bestimmung eben so viele Gleichungen hin. Da man also noch eine Gleichung mehr hat, so gelangt man endlich zu einer Gleichung, worin keiner von den Buchstaben A, B, C, ꝛc., a, b, c, ꝛc. enthalten ist, und da auch z nicht darin vorkommt, so ist dieses die gesuchte Gleichung.

7. Diese Eulerische Eliminations-Methode verdient auch deswegen gemerkt zu werden, weil man dadurch zur Auflösung folgender Aufgabe vorbereitet wird: Es sind zwey unbestimmte algebraische Gleichungen gegeben; man soll die Bestimmungen finden, bey welchen diese Gleichungen zwey oder mehrere Wurzeln mit einander gemein haben. Uebrigens giebt Euler selbst zu, daß diese Methode, bloß als Eliminations-Methode betrachtet, nicht immer den übrigen vorzuziehen sey.

II.

Zusätze zum zweyten Capitel.

A. Inhalt des zweyten Capitels.

Dieses Capitel hängt mit dem zunächst folgenden aufs genaueste zusammen, welches auch am Ende des 27sten §. von Eulern selbst bemerkt worden ist. Es redet aber Euler darin zuvörderst von den beyden ersten Arten der Verwandlung der Funktionen, so, daß er dieselben nach ihrer Beschaffenheit und der Absicht, warum sie vorgenommen werden, kurz beschreibt, und dann betrachtet er die Umformung der Funktionen ohne Substitution ausführlicher. Diese Untersuchung zerfällt in zwey Theile; der erste beschäftiget sich mit den ganzen, und der andere mit den gebrochenen Funktionen. Die Verwandlung der ganzen Funktionen, die hier betrachtet wird, besteht lediglich in der Auflösung dieser Funktionen in Faktoren, und davon redet Euler so, daß er zuerst überhaupt die Beschaffenheit dieser Verwandlung, und die Art, wie sie zu Stande gebracht werden kann, beschreibt, und darauf insbesondere die Frage beantwortet: In was für und in wie viel reelle Faktoren jede ganze Funktion aufgelöset werden kann? Bey den gebrochenen Funktionen ferner wird zuerst die Auflösung der unächten gebrochenen Funktionen in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion, und zweytens die Auflösung der ächten gebrochenen Funktionen in Partial-

Brüche

Brüche betrachtet. Bey diesem zweyten Stücke wird erstlich von solchen Brüchen geredet, deren Nenner aus lauter einfachen und einander ungleichen Faktoren bestehen; dann folgen diejenigen, die unter die Form $\frac{P}{(p-qz)^n}$ gehören, in welcher die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät ist, als die höchste Potestät eben dieser z im Nenner; und endlich wird von solchen Brüchen gesprochen, deren Nenner aus beyden Arten von Faktoren bestehen.

Tabellarisch dargestellt ist also der Inhalt des zweyten Capitels folgender:

Von der Umformung der Funktionen.

1. Vorläufig von den beyden zunächst zu betrachtenden Arten der Verwandlung der Funktionen überhaupt, §. 27.
2. Von einer jeden dieser Verwandlungsarten der Funktionen insbesondere §. 28. bis zu Ende des dritten Capitels.
   a. Von der Umformung der Funktionen, §. 28 — 46. a.
      α. der ganzen Funktionen, §. 28 — — 37. Auflösung derselben in Faktoren.
         aa. überhaupt, §. 28 — 29.
            αα. Beschaffenheit und Nutzen dieser Verwandlungsart, §. 28.
            ββ. Art und Weise, wie sie zu Stande gebracht wird. §. 29.
         bb. Auflösung derselben in reelle Faktoren, oder Bestimmung der Art und der Anzahl der reellen Faktoren, worin jede ganze Funktion aufgelöset werden kann, §. 30 — 37, und zwar
            αα. der reellen doppelten Faktoren, die statt der einfachen imaginären genommen werden können. §. 30 — 32.

aaa. vorläufige Anmerkung über die Anzahl der imaginären Faktoren in einer ganzen Funktion und der Beschaffenheit des Produkts aus allen, §. 30.

bbb. die gedachte Bestimmung selbst, §. 31—32.

αaα. wenn die Funktion ein Produkt aus vier, §. 31.

ββββ. wenn dieselbe ein Produkt aus irgend einer geraden Anzahl imaginärer Faktoren ist, §. 32.

ββ. der reellen einfachen Faktoren, §. 33—37.

aaa. ein vorläufiger Satz §. 33.

bbb. die erwähnte Bestimmung selbst, §. 34—37.

αaα. bey solchen Funktionen, in welchen der Exponent der höchsten Potestät von x eine ungerade Zahl ist §. 34. 35.

ββββ. bey solchen Funktionen, worin eben dieser Exponent eine gerade Zahl ist. §. 36. 37.

1. überhaupt, §. 36.

2. wenn die beständige Größe der Funktion negativ ist, §. 37.

β. der gebrochenen Funktionen, §. 38— —46. a.

aa. Auflösung der unächten gebrochenen Funktionen in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion. §. 38.

bb. Auflösung der ächten gebrochenen Funktionen in Partial-Brüche, §. 39—46. a.

αα. solcher Funktionen, deren Nenner aus lauter ungleichen Faktoren bestehen, §. 39—41.

aaa. wenn der Nenner ein Produkt aus zwey Faktoren ist, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, §. 39.

bbb. wenn

bbb. wenn der Nenner ein Produkt aus lauter einfachen ungleichen Faktoren ist, §. 40. 41.

αααα. von der Auflösung dieser Brüche in Partial-Brüche überhaupt, §. 40.

βββ. wie man zu einem gegebenen Faktor des Nenners den zugehörigen Partial-Bruch findet, §. 41.

ββ. solcher Funktionen, deren Nenner aus lauter gleichen Faktoren zusammengesetzt sind, §. 42.

γγ. solcher Funktionen, deren Nenner Produkte aus zusammengesetzten und einfachen Faktoren sind. §. 43 — 46. a.

aaa. Auflösung dieser Funktionen in Ansehung des zusammengesetzten Faktors ihres Nenners, §. 43 — 45.

ααα. wenn derselbe $(p - qz)^2$ §. 43.

βββ. wenn derselbe $(p - qz)^3$ §. 44.

γγγ. wenn derselbe $(p - qz)^n$ ist, §. 45.

bbb. Auflösung derselben in Ansehung aller Faktoren ihres Nenners. §. 46. a.

Die Untersuchungen des gegenwärtigen Capitels sind in dem neunten und zwölften Capitel eben dieses Buchs weiter fortgesetzt, und die Auflösung der Brüche von Eulern außerdem in dem letzten Capitel des zweyten Theils seiner Differential-Rechnung auf eine sehr vortheilhafte Art erleichtert und erweitert worden.

B. Ueber die Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren.

Zu §. 31. 32.

1. Da Euler im neunten Capitel den Satz: Jede ganze rationale Funktion läßt sich in reelle, einfache entweder oder

doppelte, Faktoren auflösen; oder: Man kann die imaginären Faktoren jeder ganzen rationalen Funktion zu zwey und zwey auf die Art verbinden, daß ihr Produkt reell wird; als einen ausgemachten Satz anführt, selbigen aber gleichwohl weder hier noch bis zu der angeführten Stelle sonst wo in dem gegenwärtigen Werke bewiesen hat: so verdient ein Auszug aus den in der Anmerkung zum letzten der vorstehenden §§. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations auch aus diesem Grunde hier einen Platz. Es beweiset nemlich Euler in diesen Recherches bis §. 63. den angeführten Satz von den Gleichungen, und was hier von den Gleichungen gilt, gilt bekannter Maaßen auch von den Funktionen, auf folgende Art.

2. Zuvörderst schickt er nach einigen anderweitigen Betrachtungen von §. 20 — 26 drey Lehrsätze voraus. Der erste ist mit dem §. 34. 35, der andere mit dem §. 36, und der dritte mit dem §. 37. des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen übereinstimmend, und die Beweise, die er dafür giebt, sind die in den Anmerkungen zu den angeführten §§. mitgetheilten. Auf diese Lehrsätze gründet er darauf von §. 27 an den Beweis der Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Gleichung, deren Coefficienten lauter reelle Größen sind, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren, durch folgende Schlüsse.

3. Jede Gleichung vom vierten Grade, wie

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

läßt sich allemal in zwey reelle doppelte Faktoren auflösen.

Setzt man $x = y - \frac{1}{4}A$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine Gleichung von eben dem Grade, worin das zweyte Glied fehlt. Angenommen also, daß das zweyte Glied bereits fehle, und daß also die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

in

in zwey reelle doppelte Faktoren aufzulösen sey: so fällt in die Augen, nicht nur, daß diese Faktoren folgende Form

$$(xx + ux + \alpha)(xx - ux + \beta) = 0$$

haben müssen, sondern auch, daß sie reell seyn werden, wenn u, α und β reell sind. Vergleicht man nun aber das angeführte Produkt mit der gegebenen Gleichung, so wird

$$B = \alpha + \beta - uu;\ C = (\beta - \alpha)u;\ D = \alpha\beta,$$

und hieraus fließet,

$$\alpha + \beta = B + uu;\ \beta - \alpha = \frac{C}{u};$$ so wie hieraus

$$2\beta = uu + B + \frac{C}{u};\ \text{und}\ 2\alpha = uu + B - \frac{C}{u}.$$

Ferner ist $4\alpha\beta = 4D$, und folglich

$$u4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D$$

oder

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0.$$

Da nun das absolute Glied dieser Gleichung, — CC, nothwendiger Weise negativ ist, so hat die Gleichung zum wenigsten zwey reelle Wurzeln (Einl. B. 1. Cap. 2. §. 37.) und nimmt man eine davon für u, so werden auch α und β, und folglich auch die beyden angenommenen doppelten Faktoren $xx + ux + \alpha$ und $xx - ux + \beta$ der Gleichung $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$ reell.

4. Verbindet man mit diesem Satze die Behauptungen des 30sten §. des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, so erhellet, daß auch jede Gleichung von jeglichem Grade, die nicht mehr als vier einfache imaginäre Faktoren hat, in lauter reelle Faktoren aufgelöset, werden kann. Es ist demnach jede Gleichung vom fünften Grade, weil sie als ein Ausdruck, worin der Exponent der höchsten Potestät der unbekannten Größe eine ungerade

Zahl ist, nach Einl. B. 1. Cap. 2. §. 34 nothwendig einen reellen einfachen Faktor hat, in lauter reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren auflösbar.

5. Die Stärke des angeführten Beweises beruhet darauf, daß die unbekannte Größe u durch eine Gleichung vom 6ten Grade bestimmt wird, deren absolutes Glied nothwendiger Weise negativ ist. Daß dieses so seyn müsse, läßt sich auch ohne die Gleichung selbst aufzusuchen erkennen. Angenommen nemlich, daß die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

folgende seyen,

$$x = a,\ x = b,\ x = c,\ x = d;$$

so lehrt der bloße Anblick dieser Gleichung, daß

$$a + b + c + d = 0$$

seyn muß. Läßt man ferner $xx - ux + \beta$ jeden doppelten Faktor derselben bedeuten, oder setzt man $xx - ux + \beta = 0$, so ist ausgemacht, daß u die Summe jedes Paars von den Wurzeln a, b, c, und d ist. Betrachtet man also u als unbekannt, so hat dasselbe so viel Werthe, als es verschiedene Combinationen der Buchstaben a, b, c, d, zu zweyen giebt; und da die Anzahl dieser Combinationen $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ ist, so hat u sechs Werthe und nicht mehr. Es wird also u durch eine Gleichung vom 6ten Grade bestimmt, deren Wurzeln folgende sind.:

I. $u = a + b$; II. $u = a + c$; III. $u = a + d$;
IV. $u = c + d$; V. $u = b + d$; VI. $u = b + c$.

Nun ist $a + b + c + d = 0$, und wenn man also die drey ersten Wurzeln

I. $u = p$; II. $u = q$; III. $u = r$

setzt, so werden die drey übrigen

IV. $u = -p$; V. $u = -q$; VI. $u = -r$,

so daß also auch jeder Werth von u, negativ genommen, ebenfalls ein Werth von u ist. Nachdem man auf diese Art alle sechs Wurzeln kennen gelernt hat, so ist die Gleichung, aus welcher sich alle finden lassen:

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r)=0, \text{ oder}$$
$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-rr)=0,$$

welches eine Gleichung vom 6ten Grade ist, worin alle ungeraden Potestäten von u fehlen, gerade so, als wir dieselbe vorhin gefunden haben. Aber außerdem ist darin auch das letzte oder beständige Glied nothwendiger Weise negativ, weil es $= -pp.-qq.-rr = -ppqqrr$ und also ein Quadrat mit dem Zeichen — ist. Es hat folglich diese Gleichung nothwendig zwey reelle Wurzeln, und setzt man die eine davon für u, so erhält man dadurch den doppelten Faktor der gegebenen Gleichung reell.

6. Wollte man hiergegen einwenden, daß daß Quadrat ppqqrr, weil die Wurzeln a, b, c, d, imaginäre Größen sind, nicht nothwendiger Weise positiv sey: so läßt sich dieser Einwurf auf folgende Art widerlegen. Da

$$a+b+c+d=0$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=B$$
$$abc+abd+acd+bcd=C, \text{ und}$$
$$abcd=D$$

ist, und B, C und D reelle Größen sind: so ist auch das Produkt

$$pqr=(a+b)(a+c)(a+d)$$

da es sich aus den Größen B, C und D bestimmen läßt, reell. Es ist nemlich

$$pqr=(a+b)(a+c)(a+d)=aaa+aab+aac+aad$$
$$+abc+abd+acd+bcd=aa(a+b+c+d)$$
$$+abc+abd+acd+bcd=C.$$

7. Jede Gleichung vom 8ten Grade läßt sich allemal in zwey reelle Faktoren vom vierten Grade auflösen.

Bringt man das zweyte Glied weg, so erhält die gegebene Gleichung folgende Form:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0,$$

und die beyden Faktoren derselben vom vierten Grade lassen sich auf folgende Art ausdrucken:

$$x^4 + ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
$$x^4 - ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Macht man nun das Produkt aus diesen beyden Faktoren der gegebenen Gleichung gleich, so bekommt man 7 Gleichungen, oder eben so viel, als man unbekannte Coefficienten $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, hat. Aus diesen Gleichungen kann man nun nach und nach, und zwar, wie bekannt ist, ohne Ausziehung der Wurzeln, die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ wegschaffen, so daß die Werthe derselben insgesammt durch die bekannten Größen B, C, D, E, F, G, H und die unbekannte Größe u reell ausgedruckt werden, und man kommt also endlich zu einer Gleichung, die außer u lauter bekannte Größen enthält. Hieraus muß nun u bestimmt werden, und ist sein Werth reell, so werden auch die Werthe der Buchstaben α, β, γ, ꝛc. und folglich auch die angenommenen Faktoren vom vierten Grade reell werden.

Es kommt also nunmehr auf die Erfindung der Gleichung an, aus welcher sich der Werth von u bestimmen läßt. Da nun u überhaupt die Summe jeglicher vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdruckt, und die Anzahl dieser Wurzeln = 8 ist: so hat u so viel verschiedene Werthe, als sich acht Größen zu vier combiniren lassen, oder $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$, und es wird folglich u durch eine Gleichung vom 70sten Grade bestimmt. Setzt man ferner einen

Werth

Werth von u = p, so ist p die Summe von vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, und also die Summe der übrigen vier = — u, weil die Summe von allen = o ist. Ist daher u — p ein Faktor der gedachten Gleichung vom 70sten Grade, so ist auch u + p ein Faktor derselben, und also uu — pp ein doppelter Faktor eben dieser Gleichung. Es wird demnach die Gleichung, aus welcher sich u bestimmen läßt, 35 Faktoren von der Form uu — pp haben, oder ein Produkt aus 35 Faktoren von folgender Art seyn:

(uu — pp) (uu — qq) (uu — rr) (uu — ss) ꝛc.

Ferner wird das letzte oder das absolute Glied dieser Gleichung ein Produkt aus 35 negativen Quadraten, und also selbst negativ, nemlich — pp qq rr ss ꝛc. Es läßt sich nemlich die Wurzel dieses Quadrats, pqrs ꝛc. aus den Buchstaben B, C, D, ꝛc. bestimmen, und sie ist daher reell, und folglich ihr Quadrat ppqqrrss ꝛc. eine positive Größe. Da also der unbekannte Coefficient u durch eine Gleichung vom 70sten Grade bestimmt wird, deren letztes Glied nothwendiger Weise negativ ist, so hat diese Gleichung zum wenigsten zwey reelle Werthe, und einen davon für u genommen, so erhält man einen reellen Faktor vom vierten Grade für die gegebene Gleichung, und es läßt sich daher dieselbe in zwey reelle Faktoren vom vierten Grade auflösen.

8. Da jeder Faktor vom vierten Grade in zwey reelle doppelte Faktoren aufgelöset werden kann, so läßt sich nunmehr auch jede Gleichung vom achten Grade in vier reelle Faktoren vom zweyten Grade auflösen.

Ferner ist nun klar, daß jede Gleiche vom 9ten Grade in einen einfachen und in vier doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann.

Endlich kann auch jede Gleichung vom 6ten oder 7ten Grade in einfache oder doppelte reelle Faktoren aufgelöset

werden, weil man daraus durch die Multiplication mit xx oder x eine Gleichung vom 8ten Grade machen kann.

9. Aber werden auch, wenn u reell ist, die übrigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. insgesammt reell werden? Hiervon kann man sich auf folgende Art überzeugen. Man betrachte u als eine bekannte Größe, so daß man also eine Gleichung mehr hat, als unbekannte Größen zu bestimmen sind. Dann schaffe man von diesen Größen, so weit es ohne Extraction der Wurzel angeht, eine nach der andern weg, und wenn man dies gethan hat, so wird eine gewisse Anzahl von Gleichungen übrig bleiben, und die Anzahl der unbekannten Größen wird um 1 kleiner seyn. Angenommen, daß noch einige unbekannte Größen zu bestimmen sind, davon jede in den Gleichungen als eine Potestät vorkommt, so kann man von diesen Gleichungen immer je zwey auf eine solche Art mit einander verbinden, daß man daraus endlich eine Gleichung findet, worin die unbekannte Größe nur eine Dimension hat, und die unbekannte Größe aus dieser Gleichung also auch rational bestimmen. Auf diese Art gelangt man endlich zu zwey Gleichungen, worin die letzte unbekannte Größe enthalten ist, und da mag denn die Potestät dieser unbekannten Größe seyn, welche sie will, so kann man aus jenen Gleichungen nach bekannten Regeln der Algebra allemal eine Gleichung finden, worin die unbekannte Größe nur in der ersten Potestät vorkommt, und woraus sie sich also durch einen rationalen Ausdruck bestimmen läßt. Setzt man nun diesen Werth in die bereits gefundenen Werthe der übrigen Coefficienten, so erhält man für sie rationale Bestimmungen, und es werden folglich, wenn u reell ist, auch alle übrigen Coefficienten nothwendiger Weise reell.

10. Jede Gleichung vom 16ten Grade läßt sich allemal in zwey reelle doppelte Faktoren vom 8ten Grade auflösen.

Nach der Wegschaffung des zweyten Gliedes hat die gedachte Gleichung folgende Form:

$x^{16} + Bx^{14} + Cx^{13} + Dx^{12} + \text{&c.} \ldots\ldots = 0,$

so daß die Anzahl ihrer Coefficienten B, C, D, &c. = 15 ist, und die beyden Faktoren vom 8ten Grade, worin diese Gleichung sich auflösen läßt, sind:

$x^8 + ux^7 + \alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$

$x^8 - ux^7 + \vartheta x^6 + \iota x^5 + \varkappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi = 0.$

Macht man also das Produkt aus diesen beyden Faktoren der gegebenen Gleichung gleich, so bekommt man 15 Gleichungen, aus welchen man die Buchstaben u, α, β, γ, δ, &c. zu bestimmen suchen muß, und da die Anzahl dieser unbekannten Größen ebenfalls = 15 ist, so ist die Aufgabe bestimmt. Betrachtet man nun zuvörderst u als eine bekannte Größe, so hat man eine Gleichung mehr, als unbekannte Größen α, β, γ, δ, &c. zu bestimmen sind, und man ist daher im Stande, die Werthe von diesen Größen durch die Größen u, B, C, D, E, &c. anzugeben, ohne daß man dabey die Extraction der Wurzeln anzuwenden hat. Es werden demnach die Werthe von α, β, γ, δ, &c. rational werden, und daher auch, wenn u einen reellen Werth hat, reelle Größen seyn. Es kommt folglich jetzt alles bloß darauf an, zu zeigen, daß man allemal im Stande sey, einen reellen Werth für u zu finden.

Um dieses zu beurtheilen betrachte man die Gleichung zwischen u und den bekannten Größen B, C, D, E, &c., zu welcher man durch die Wegschaffung aller übrigen unbekannten Größen α, β, γ, δ, &c. gelangt, und worin u, da es überhaupt die Summe jeder 8 Wurzeln von den 16 Wurzeln

der

der gegebenen Gleichung bedeutet, auf die Potestät steigen muß, deren Exponent $= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ $= 12870$ ist. Es wird also u durch eine Gleichung von dem 12870sten Grade bestimmt, und da die Summe aller 16 Wurzeln der gegebenen Gleichung $= 0$ ist, so wird, wenn man irgend eine Summe von 8 von diesen Wurzeln, d. h. $u = p$ setzt, die Summe der übrigen 8 Wurzeln $= -p$, und folglich auch $-p$ ein Werth von u seyn. Man kann daher diese Gleichung auch als ein Produkt aus $\frac{1}{2} \cdot 12870 = 6435$ Faktoren von dieser Form $uu - pp$ betrachten, oder dafür

$(uu - pp)(uu - qq)(uu - rr)(uu - ss)$ &c. $= 0$

setzen, so daß die Anzahl dieser Faktoren $= 6435$ ist. Da nun dies eine ungerade Zahl ist, und das letzte oder absolute Glied der Gleichung $= -ppqqrrss$ &c. wird, die Wurzel daraus aber, nemlich $pqrs$ &c. aus den Buchstaben B, C, D, E, &c. auf eine solche Art bestimmt werden kann, daß es eine rationale und eben deswegen auch reelle Funktion davon ist: so ist das letzte Glied der Gleichung, wodurch u bestimmt wird, nothwendiger Weise negativ, und es hat daher u zum wenigsten zwey reelle Werthe, die denn, für u gesetzt, die beyden gesuchten reellen Faktoren vom achten Grade für die gegebene Gleichung hervorbringen.

11. Da sich also nach 7 und 8 jede Gleichung vom achten Grade in vier reelle Faktoren vom 2ten Grade auflösen läßt, so kann man nunmehr auch jede Gleichung vom 16ten Grade in ein Produkt aus 8 doppelten reellen Faktoren verwandeln, und da jede Gleichung vom 17ten Grade zum wenigsten einen reellen einfachen Faktor hat, so kann man sie außerdem auch noch in acht doppelte reelle Faktoren auflösen.

lösen. Eben so ist nunmehr jede Gleichung, die zu einem niedrigern als dem 16ten Grade gehört, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösbar. Denn multiplicirt man dieselbe mit x, oder x^2 oder x^3 ꝛc., um sie dadurch zu einer Gleichung vom 16ten Grade zu machen, so kann man diese neue Gleichung in 8 doppelte reelle Faktoren auflösen, und sondert man darauf von diesen Faktoren die Faktoren x, welche man durch die Multiplication mit denselben verbunden hat, wieder ab, so erhält man die reellen Faktoren der gegeben Gleichung, die entweder einfach oder doppelt seyn werden.

12. Ueberdenkt man die bisher geführten Beweise, so sieht man bald, daß ihre Stärke darauf beruht, daß die letzte Gleichung, wodurch u bestimmt wird, eine Gleichung von einem ungeraden Exponenten und mit einem negativen Quadrate zum absoluten Gliede ist. Auch erkennt man leicht, daß dieser letzte Umstand nicht statt finden kann, wofern nicht der Exponent der Gleichung für u eine solche gerade Zahl 2n ist, daß ihre Hälfte n eine ungerade Zahl wird. Denn da das letzte Glied dieser Gleichung ein Produkt aus n negativen Quadraten ist, so würde es positiv seyn, wenn n eine gerade Zahl wäre. Aus diesem Grunde kann daher die gedachte Beweisart bey den Gleichungen vom 12ten oder 20sten Grade nicht gebraucht werden, sondern sie paßt allein auf solche Gleichungen, deren Exponent eine Potestät der 2 ist. Indeß ist es genug, um die Auflösbarkeit aller Gleichungen in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren zu beweisen, daß man dieselbe bey den Gleichungen von dem Grade 2^n außer Zweifel setzt, indem dieselbe, wenn sie auf diese Art von den Gleichungen irgend eines Grades dargethan worden ist, auch bey allen Gleichungen, die zu einem niedrigern Grade gehören, weiter keinen Zweifel leidet.

13.

13. Jede Gleichung von einem Grade, dessen Exponent eine Potestät der 2 oder 2^n ist, wenn n von 2 an irgend eine ganze Zahl bedeutet, läßt sich in zwey reelle Faktoren vom Grade 2^{n-1} auflösen.

Nach der Wegschaffung des zweyten Gliedes hat die gedachte Gleichung folgende Form:

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + Dx^{2^n-4} + \text{&c.} = 0$$

und die Anzahl der Coefficienten B, C, D, E &c. ist $= 2^n - 1$. Setzt man ferner die beyden gesuchten Faktoren

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \text{&c.} = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \text{&c.} = 0$$

so ist auch die Anzahl der zu bestimmenden Coefficienten u, α, β, &c. $= 2^n - 1$. Vergleicht man also das Produkt dieser beyden Faktoren mit der gegebenen Gleichung, so erhält man dadurch eben so viel Gleichungen, als unbekannte Größen zu bestimmen sind, und man kann daher α, β, γ, δ, &c. durch die bekannten Größen B, C, D, &c. und die unbekannte Größe u ohne die Extraction der Wurzeln und folglich reell finden. Um aber zuletzt u zu bestimmen, gelangt man zu einer Gleichung, deren Grad durch folgenden Exponenten angezeigt wird:

$$\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)\ldots\ldots(2^{n-1}+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 2^{n-1}}$$

wie aus den Regeln der Combination bekannt ist. Es sey dieser Exponent $= N$, so ist, wenn man die Ordnung der Faktoren des Nenners umkehrt,

$$N = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^n-2}{2^{n-1}-2} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^n-4}{2^{n-1}-4} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{n-1}+1}{1}$$

oder um die kleinsten Zahlen zu nehmen

$$N = 2 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-3}-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{n-1}+1}{1},$$

Es

Es ist also ausgemacht, daß N eine ganze Zahl ist, und da sowohl der Zähler als der Renner zu den ungeraden Zahlen gehören, so ist N eine ungerademal gerade, und also $\frac{1}{2}$ N eine ungerade Zahl. Da nun in der gegebenen Gleichung das zweyte Glied fehlt, so ist, wenn p eine Wurzel von u ist, auch — p eine Wurzel von u, und also uu—pp ein doppelter Faktor der Gleichung, wodurch u bestimmt wird, und solcher Faktoren hat diese Gleichung $\frac{1}{2}$ N, welches eine ungerade Zahl ist. Es ist daher auch das letzte Glied der Gleichung für u ein negatives Quadrat, woher denn u zum wenigsten zwey reelle Werthe bekommt, die, für u gesetzt, die beyden angenommenen Faktoren zu reellen Faktoren machen.

14. Es läßt sich also jede Gleichung vom 32sten Grade in zwey reelle Faktoren vom 16ten Grade, und also nach 10 auch in 16 reelle doppelte Faktoren auflösen. Ferner sind nunmehr auch alle Gleichungen die zu einem niedrigern Grade als dem 32sten gehören, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösbar. Etwas ähnliches gilt aber nun auch von den Gleichungen vom 64sten, vom 128sten, vom 256sten Grade ꝛc. so wie auch von allen den Gleichungen, die zu Graden gehören, die niedriger sind, als die genannten.

15. Auf diese Art ist also bewiesen, daß jede ganze rationale Gleichung einer veränderlichen Größe

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

allemal in lauter reelle Faktoren, einfache entweder von der Form $x + p$, oder doppelte von der Form $xx + px + q$ aufgelöset werden kann, und eben diese Auflösbarkeit kommt folglich auch jeder ganzen rationalen Funktion einer veränderlichen Größe zu. Um indeß den angeführten Satz noch mehr zu bestätigen zeigt Euler vom 50sten §. an, daß

jede

jede Gleichung vom 6ten und überhaupt vom $(4n + 2)$ten Grade, unabhängig von den vorhergehenden Sätzen, zum wenigsten einen reellen Faktor vom zweyten Grade, jede Gleichung vom $(8n + 4)$ten Grade eben so zum wenigsten einen reellen Faktor vom 4ten Grade jede Gleichung vom $(16n + 8)$ten Grade zum wenigsten einen reellen Faktor vom 8ten Grade hat ꝛc. Es ist aber die Beweisart, die er dabey gebraucht, der vorhergehenden ähnlich, und kann also um so eher hier weggelassen werden.

16. Nun ist folgender Satz leicht zu beweisen: Wenn eine algebraische Gleichung, sie mag zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, imaginäre Wurzeln hat, so ist jede dieser Wurzeln unter der Form $M + N\sqrt{-1}$ begriffen, wo M und N reelle Größen bedeuten.

So wie man, wenn man die Wurzeln einer Gleichung kennt, daraus die einfachen und doppelten reellen Faktoren zusammensetzen kann, in welche sich die Gleichung auflösen läßt: so kann man umgekehrt aus den gedachten Faktoren die Wurzeln der Gleichung finden. Ferner erhält man insbesondere die imaginären Wurzeln aus den doppelten reellen Faktoren, deren allgemeine Form $xx - 2px + q$ ist, wenn man davon diejenigen nimmt, worin pp kleiner als q ist, $xx - 2px + q = 0$ setzt, und aus dieser Gleichung x entwickelt. Es erhalten demnach, wenn man $pp - q = -rr$ setzt, alle imaginären Wurzeln jeder Gleichung folgende Form

$$x = p + r\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x = p - r\sqrt{-1}$$

und es sind dieselben folglich auch insgesammt unter der Form $M + N\sqrt{-1}$ begriffen.

17. Wenn also eine Gleichung die imaginäre Wurzel $x = p + r\sqrt{-1}$ hat, so hat sie auch folgende: $x = p - r\sqrt{-1}$. Und da die Anzahl der imaginären Wurzeln in

in jeder Gleichung eine gerade Zahl ist, so gehört zu jeder imaginären Wurzel $x = p \pm r\sqrt{-1}$ eine andere $x = p - r\sqrt{-1}$, so daß die Summe von beyden, $2p$, und das Produkt beyder, $pp \pm rr$, reell sind. Ferner hat jede Gleichung, wovon $x - p - r\sqrt{-1}$ ein imaginärer Faktor ist, auch den imaginären Faktor $x - p \pm r\sqrt{-1}$, und daher auch den doppelten reellen Faktor $xx - 2px \pm pp \pm rr$.

18. Vom 64sten § an sucht Euler den bisher bewiesenen Satz noch auf eine andere Art außer Zweifel zu setzen. Er zeigt nemlich, und zwar unabhängig von dem Bisherigen, daß alle unmögliche Wurzeln jeder Gleichung unter die Form $M \pm N\sqrt{-1}$ gehören, und leitet daraus, nachdem er solches bewiesen hat, die Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in lauter reelle einfache oder doppelte Faktoren mit eben so vielem Rechte her, als er vorhin die Allgemeinheit jener Form aus der bewiesenen Auflösbarkeit der ganzen rationalen Funktionen in lauter reelle Faktoren gefolgert hatte. Er gebraucht aber dabey mehrere Sätze, die erst in den folgenden Capiteln erklärt und bewiesen werden, und es gehört daher das, was von §. 64. an folgt, nicht hieher.

C. Zusatz zu §. 39.

Jede unächte gebrochene Funktion läßt sich nach §. 38. in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion auflösen, und dies ist der Grund, warum in dem gegenwärtigen §. bloß von ächten Brüchen geredet wird.

Ferner läßt sich, wenn der Zähler und Nenner einer ächten gebrochenen Funktion einen gemeinschaftlichen Divisor haben, diese Funktion nach bekannten Regeln in eine solche verwandeln, wo der Zähler und Nenner Prim-Größen

zu einander sind, und man kann sich daher bey dem Beweise des im gegenwärtigen § enthaltenen Satzes auf solche Brüche einschränken, deren Zähler und Nenner durch keinen gemeinschaftlichen Divisor theilbar sind.

Dies vorausgesetzt, so läßt sich die Unmöglichkeit der hier gelehrten Auflösung einer ächten gebrochenen Funktion, wenn die Faktoren ihres Nenners keine Prim-Größen zu einander sind, auf folgende Art darthun.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{N}{D}$ in die beyden Partial-Brüche $\frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ aufzulösen, wo also vorausgesetzt wird, daß $D = M \cdot P$, und N, D, M, P, X und Y ganze rationale Funktionen einer und derselben veränderlichen Größe, z. B. von z, seyen, und daß z in N weniger Dimensionen als in D, und N und D keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Da also

$$\frac{N}{D} = \frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$$

seyn soll, so muß auch

$$\frac{N}{D} = \frac{PX + MY}{MP} = \frac{PX + MY}{D}$$

und also

$$N = PX + MY, \text{ und}$$

$$X = \frac{N - MY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{M}$$

seyn. Nun sollen aber X und Y ganze rationale Funktionen seyn, und es muß sich daher $N - MY$ durch P, und $N - PX$ durch M ohne Rest dividiren lassen, und da N und D Prim-Größen zu einander sind, so müssen auch N und P, desgleichen

chen N und M solches seyn. Wären aber dabey nicht auch M und P Prim-Größen zu einander, sondern hätten den Divisor p mit einander gemein, so könnte man $M = pQ$, und $P = pR$ setzen, und dann müßte, weil alsdann

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$

würde, wider die Voraussetzung auch N und D gemeinschaftlich durch p getheilt werden können. Es läßt sich also der Bruch $\frac{N}{D}$ unter den vorausgesetzten Bedingungen nicht anders in die Partial-Brüche $\frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ auflösen, als wenn M und D keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

3. Will man indeß diesen Satz auch für die gebrochenen Funktionen beweisen, deren Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor, q, aber auch weiter keinen als diesen, haben, so setze man $D = qS$ und $S = MP$, also $D = qMP$, und behalte übrigens die vorhin angenommenen Bedingungen bey. Hier hätte man also

$$\frac{N}{D} = \frac{X}{qM} + \frac{Y}{P} = \frac{PX + qMY}{D}, \text{ und folglich}$$

$$N = PX + qMY, \text{ und}$$

$$X = \frac{N - qMY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{qM},$$

so daß $N - qMY$ durch P, und $N - PX$ durch qM theilbar seyn müßte. Sollten nun qM und P nicht Prim-Größen zu einander, sondern beyde durch irgend eine

Größe p theilbar seyn, so würde $qM = pQ$ und $P = pR$, und also

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$

werden, und folglich N und D außer q auch noch durch p theilbar seyn, welches ebenfalls wider die angenommenen Bedingungen streitet. Es ist daher der im §. enthaltene Satz auch ohne die vorhin festgesetzte Einschränkung von allen ächten gebrochenen Funktionen wahr.

4. Was nun die Auflösung der Funktion $\frac{N}{D}$ in die Funktionen $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$ selbst betrifft, so muß, da $\frac{N}{D}$ eine ächte gebrochene Funktion seyn soll, z in N weniger Dimensionen als in D haben, und die Summe der Dimensionen von z in M und P muß der Anzahl der Dimensionen eben dieser z in D gleich seyn. Man kann also, wenn man die Zahl der Dimensionen von z in $D = m$, und $m = n + \mu$ annimmt,

$$N = \mathfrak{A} z^{m-1} + \mathfrak{B} z^{m-2} + \mathfrak{C} z^{m-3} + \ldots\ldots \mathfrak{Z}$$
$$M = A z^{n} + B z^{n-1} + C z^{n-2} + \ldots\ldots K$$
$$P = a z^{\mu} + b z^{\mu-1} + c z^{\mu-2} + \ldots\ldots k$$

und außerdem, wenn man zuvörderst X finden will,

$$Y = \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma z^{\mu-3} + \delta z^{\mu-4} \ldots\ldots$$

setzen. Da nun $m = n + \mu$ ist, so fließt hieraus

$$MY = A\alpha z^{m-1} + \left.\begin{matrix} B\alpha \\ A\beta \end{matrix}\right\} z^{m-2} + \left.\begin{matrix} C\alpha \\ B\beta \\ A\gamma \end{matrix}\right\} z^{m-3} + \left.\begin{matrix} D\alpha \\ C\beta \\ B\gamma \\ A\delta \end{matrix}\right\} z^{m-4} + \text{u.}$$

und

und $N - MY =$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -A\alpha\end{matrix}\right\}z^{m-1} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{B}\\ -B\alpha\\ -A\beta\end{matrix}\right\}z^{m-2} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{C}\\ -C\alpha\\ -B\beta\\ -A\gamma\end{matrix}\right\}z^{m-3} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{D}\\ -D\alpha\\ -C\beta\\ -B\gamma\\ -A\delta\end{matrix}\right\}z^{m-4} + \text{&c.}$$

Da ferner $X = \frac{N - MY}{P}$ eine ganze rationale Funktion seyn soll, so muß sich dieser für $N - MY$ gefundene Ausdruck durch P ohne Rest dividiren lassen, und folglich

$$X = A'z^{m-\mu-1} + B'z^{m-\mu-2} + C'z^{m-\mu-3} + D'z^{m-\mu-4} + \text{&c.}$$

seyn; vorausgesetzt, daß A', B', C', D' &c. gehörig bestimmt werden. Diese Bestimmung ist aber allemal möglich. Denn da $PX = N - MY$ ist, so hat man

$$\left.\begin{matrix}A'az^{m-1}\\ +A'b\end{matrix}\right\}z^{m-2} \left.\begin{matrix}+C'a\\ +B'b\\ +A'c\end{matrix}\right\}z^{m-3} \left.\begin{matrix}+D'a\\ +C'b\\ +B'c\\ +A'd\end{matrix}\right\}z^{m-4} + \text{&c.}$$

$=$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -A\alpha\end{matrix}\right\}z^{m-1} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{B}\\ -B\alpha\\ -A\beta\end{matrix}\right\}z^{m-2} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{C}\\ -C\alpha\\ -B\beta\\ -A\gamma\end{matrix}\right\}z^{m-3} \left.\begin{matrix}+\mathfrak{D}\\ -D\alpha\\ -C\beta\\ -B\gamma\\ -A\delta\end{matrix}\right\}z^{m-4} + \text{&c.}$$

und folglich

$$\begin{aligned} A'a &= \mathfrak{A} - A\alpha \\ B'a + A'b &= \mathfrak{B} - B\alpha - A\beta \\ C'a + B'b + A'c &= \mathfrak{C} - C\alpha - B\beta - A\gamma \\ D'a + C'b + B'c + A'd &= \mathfrak{D} - D\alpha - C\beta - B\gamma - A\delta \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

Da ferner die Anzahl dieser aus der vorhergehenden fließenden Gleichungen $= m$ ist, und dieselben lauter einfache

Gleichungen sind, überdem darin von den unbekannten Größen A', B', C', D' ꝛc. nicht mehr als $m - \mu$, und von α, β, γ, δ ꝛc. nicht mehr als μ, also überhaupt nicht mehr als m unbekannte Größen vorkommen; so lassen sich daraus auch alle diese unbekannte Größen vollkommen entwickeln. Kennt man aber A', B', C', D' ꝛc., so kennt man auch

$$X = A'z^{m-\mu-1} + B'z^{m-\mu-2} + C'z^{m-\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

und kennt man α, β, γ, δ ꝛc., so kennt man auch

$$Y = \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma^{\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

und dadurch denn auch die Partial-Brüche $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$. Uebrigens ist der gegenwärtige Zusatz aus des Herrn Obrist-Lieutenants von Tempelhof Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen Cap. 10. §. 785. f. entlehnt.

D. Zusatz zu §. 41.

Die hier beschriebene Methode, zu einem jeden Faktor des Nenners einer gegebenen gebrochenen Funktion den zugehörigen Partial-Bruch zu finden, ohne dabey die übrigen Faktoren selbst sondern nur ihr Produkt zu brauchen, rührt von Eulern selbst her. Er bemerkt dieses im ersten Theile des vierten Bandes der neuen Sammlungen der Schriften der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1780, in der Abhandlung, welche überschrieben ist: Nova methodus, fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi. In den Zusätzen zum zwölften Capitel wird des Inhalts dieses Aufsatzes, so weit es geschehen kann, ausführlicher gedacht werden.

III.

Zusätze zum dritten Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Nachdem Euler in dem vorhergehenden Capitel die Umformung der Funktionen abgehandelt, so geht er nunmehr.

b. (s. S. 433) zu der Verwandlung der Funktionen durch Substitution fort.. Der Weg, den er bey dieser Untersuchung genommen hat, ist folgender.

α. Zuvörderst zeigt er, daß sich jede Funktion y von z, wenn z durch eine neue veränderliche Größe x bestimmt wird, ebenfalls durch x bestimmen lasse, und berührt dabey zugleich die zwiefache Absicht, in welcher dergleichen Substitution vorgenommen zu werden pflegt, §. 46. b. Dann erklärt er

β. die Art und Weise, gegebene Funktionen durch Substitution zu verwandeln, §. 47 — 58; und zwar

aa. wenn dadurch eine irrationale Funktion in eine rationale umgeändert werden soll, §. 47 — 51. Die Fälle, welche er hier betrachtet, sind folgende:

αα. wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$ ist, §. 47.

ββ. wenn $y = (a + bz)^{m:n}$ ist, §. 48.

γγ. wenn $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{m:n}$ ist, §. 49.

δδ. wenn $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))}$ ist, §. 50.

εε. wenn $y = \sqrt{(p + qz + rzz)}$ ist, §. 51.

bb. wenn dadurch eine neue veränderliche Größe x gefunden werden soll, durch welche sich y und z aus einer verwickelten Funktion entwickelt darstellen lassen, §. 52——58. Hier wird

αα. ein allgemeiner Fall auf die Art betrachtet, daß die Art und Weise gelehret wird,

aaa. aus einer gegebenen Funktion die gedachten Bestimmungen für z und y, §. 52., und

bbb. aus diesen Bestimmungen von y und z die Gleichung, woraus sie erhalten werden können, zu finden, §. 53. Dann folgen

ββ. einige besondere Fälle, §. 54—58.

aaa. wenn $y = ayy + byz + czz + dy + ez = 0$ ist, §. 54.

bbb. wenn $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = 0$ ist, §. 55.

ccc. wenn $ayy + byz + czz = d$ ist, §. 56.

ddd. wenn $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \text{&c.} = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \text{&c.}$ ist, §. 57.

eee. wenn in der zwischen y und z gegebenen Gleichung dreyerley Dimensionen vorkommen, so, daß die höchste die mittelste in Ansehung der Höhe um eben so viel übersteigt, als die niedrigste unter der mittelsten ist, §. 58.

IV.

Zusätze zum vierten Capitel.

A. Inhalt des vierten Capitels.

Das gegenwärtige Capitel, worin die Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen gelehret wird, zerfällt in zwey Haupttheile. Nachdem nemlich §. 59. einige vorläufige Bemerkungen über diese Verwandlung der Funktionen vorausgeschickt worden, so wird

1. die Art und Weise erklärt, wie gebrochene Funktionen in unendliche Reihen aufgelöset werden können, §. 60 bis 70. Dabey werden
   a. solche Brüche betrachtet, in deren Nenner das erste Glied oder die beständige Größe nicht = 0 ist, §. 60 — 68; und diese Untersuchung beschäftiget sich wieder
      α. mit gebrochenen Funktionen überhaupt §. 60 — 63. wobey denn
         aa. folgende zwey einzelne Brüche

$$\alpha\alpha.\ \frac{a}{\alpha + \beta z},\ \text{§. 60.}$$

$$\beta\beta.\ \frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz},\ \text{§. 61., und dann}$$

         bb. der allgemeine Bruch $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$

§. 63. in unendliche Reihen verwandelt werden, nachdem zuvor §. 62. die Beschaffenheit dieser

Reihen aus den §. 60 und 61. gefundenen allgemein beschrieben worden ist.

β. mit solchen gebrochenen Funktionen, deren Nenner eine Potestät, §. 64—68., und zwar

aa. von einem Binomium, §. 64—67., oder

αα. $(1 - \alpha z)^2$, §. 64.

ββ. $(1 - \alpha z)^3$, §. 65.

γγ. $(1 - \alpha z)^4$, §. 66.

δδ. $(1 - \alpha z)^n$, §. 67., und

bb. von einer vieltheiligen Größe ist, §. 68.

b. folgen die Brüche, in deren Nenner das beständige Glied $= 0$ ist, §. 69. Den Beschluß dieser Untersuchung macht §. 70. eine Anmerkung über die Menge der unendlichen Reihen, worin man jeden Bruch verwandeln kann, weil sich aus jedem Bruche durch die Substitution unzählige andere finden lassen.

2. Der zweyte Haupttheil dieses Capitels handelt von der Verwandlung der irrationalen Funktionen in unendliche Reihen, §. 71—76., und zwar so, daß die Verwandlung dieser Funktionen

a. §. 71. 72. allgemein beschrieben, und die Reihen mitgetheilt werden, die man

α. für $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$, §. 71., und

β. für $(1 + Z)^m$, wenn m einen Bruch bedeutet, nach dem Binomischen Lehrsatze erhält, §. 72. Hierauf werden

b. noch insbesondere die Reihen betrachtet, die sich nach eben diesem Lehrsatze

α. aus $(1 + \alpha z)^{m-1}$, §. 73.

β. aus $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1}$, §. 74.

γ. aus $(1 + \alpha z + \beta zz + \gamma z^3)^{m-1}$, §. 75., und endlich

δ.

δ. aus $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{&c.})^{m-1}$ erge-
ben, §. 76.

B. Zusatz zu §. 59.

Es kann beym ersten Anblick auffallen, wenn hier behauptet wird, daß die Natur der gebrochenen und transcendenten Funktionen leichter erkannt werden könne, wenn man diese Funktionen in unendliche Reihen verwandele. Allein, wenn man unendliche, das heißt, ohne Ende fortlaufende Reihen untersucht, so stellt man sich, wie der Herr Hofrath Kästner, nicht nur in seinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verstande sind, Göttingen 1767, sondern auch in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen bemerkt, nicht alle einzelne Glieder dieser Reihen, sondern nur das Gesetz vor, welches alle diese Glieder gemeinschaftlich beobachten. Auch ist es gar nicht nothwendig, daß jede unendliche Reihe eine unendliche Größe vorstelle, es kann vielmehr die Größe, die durch eine unendliche Reihe ausgedruckt wird, in sehr enge Grenzen eingeschlossen seyn, so wie z. B. die Reihe, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \text{&c.}$ ohne Ende, nie $= 1$ werden kann. Diese Anmerkung hat schon Leibnitz in seiner Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus in den Actis eruditorum vom Jahr 1682 gemacht.

C. Zusatz zu §. 60.

Daß, wenn

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{&c.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{&c.,}$$

ist, auch $a = \alpha A$, und $\alpha B + \beta A$, so wie auch die übrigen Coefficienten einer jeden Potestät von z, $= 0$ seyn müsse,

läßt

läßt sich auf folgende Art zeigen. Da z eine veränderliche Größe ist, so muß die angeführte Gleichung, wenn sie überhaupt richtig seyn soll, ebenfalls für jeden bestimmten Werth von z wahr seyn, und es ist daher alles das streng und allezeit richtig, ohne welches diese Gleichung bey einem bestimmten Werthe von z nicht bestehen kann. Nun kann dieselbe, wenn man $z = o$ setzt, nicht anders bestehen, als wenn $a = \alpha A$ ist, folglich ist $a = \alpha A$. Ferner kann, da $a = \alpha A$, und also

$$o = \frac{\alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{ꝛc.}}{\beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{ꝛc.}}$$

seyn muß, die obige Gleichung ebenfalls nicht bestehen, wofern nicht $\alpha B + \beta A = \alpha C + \beta B = \alpha D + \beta C = \alpha E + \beta D = o$ ist, ꝛc., und es ist daher auch dieses richtig. Auf eine ähnliche Art kann man bey andern ähnlichen Fällen verfahren, oder auch die Beweisart brauchen; der sich Euler im dreyzehnten Capitel dieses ersten Buchs im 214ten §. bedient hat.

D. Zusatz zu §. 64.

1. Dieser und die folgenden §§. setzen den Binomischen Lehrsatz in seinem ganzen Umfange, oder den Satz voraus, daß

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 + \text{ꝛc.}$$

sey, nicht nur, wenn n eine ganze positive, sondern auch, wenn es eine ganze negative, und auch, wenn es eine gebrochene, positive oder negative, Zahl bedeutet. Da dieser Lehrsatz in den Anfangsgründen der gemeinen Algebra gewöhnlich nur für den Fall bewiesen wird, wenn n eine

ganze

ganze positive Zahl ist, so wird die Mittheilung des Eulerischen Beweises für die übrigen Fälle in dem neunzehnten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1774 nicht überflüssig seyn. Die Abhandlung, woraus das Folgende genommen ist, führt den Titel: Demonstratio theorematis Newtoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri, und fängt S. 103. an.

2. Vorläufig schickt Euler darin zuvörderst einiges über die Nothwendigkeit des Beweises des Binomischen Lehrsatzes für die Fälle, wenn n keine ganze positive Zahl ist, voraus. Diese Nothwendigkeit erhellet unter andern daraus, weil es ähnliche Sätze giebt, z. B.

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{ꝛc.}$$

welche nur in den Fällen wahr sind, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Ferner gedenket er des Beweises, den der Staatsrath Aepinus im achten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1763 gegeben hat, und bemerkt darauf, daß man, um den Binomischen Lehrsatz in seinem ganzen Umfange zu beweisen, nur nöthig habe zu zeigen, daß für jeden Werth für n

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + \text{ꝛc.}$$

sey, weil nemlich $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ ist, und es also nur auf die Entwickelung des Ausdrucks $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ ankommt,

der

der sich, wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzt, in $(1 + x)^n$ verwandelt.

Nach diesen vorläufigen Sätzen ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes selbst folgender.

3. Es sey

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + \text{&c.}$$

so ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$[n] = (1 + x)^n.$$

Dieses wird aus den Anfangsgründen der gemeinen Algebra vorausgesetzt, und kann daraus auch allerdings mit Recht vorausgesetzt werden. Ferner sey

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^3 + \text{&c.}$$

und also

$$[m].[n] = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{&c.}$$

wenn die Buchstaben A, B, C, D, E, &c. gehörig bestimmt werden.

4. Um die Buchstaben A, B, C, D, &c. zu bestimmen, müßte man eigentlich die beyden durch die unbekannten Größen [m] und [n] ausgedruckten Reihen mit einander multipliciren, und das Produkt mit der Reihe $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{&c.}$ vergleichen. Allein es ist, auch ohne daß man solches wirklich thut, nicht schwer, sich davon zu überzeugen, einmal, daß die Buchstaben A, B, C, D, &c. durch die beyden Buchstaben m und n bestimmt werden, und zweytens, daß die Art, wie solches geschiehet, sie mag auch seyn welche sie will, keinesweges von der Beschaffenheit der Buchstaben m und n abhange, und also immer dieselbe seyn werde, es mögen nun diese Buchstaben ganze oder gebrochene, positive oder negative

Zah-

Zahlen bedeuten. Und dieses ist zu der gegenwärtigen Absicht hinlänglich.

5. Denn da der Binomische Lehrsatz für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl ist, in der gemeinen Algebra aus der Lehre von den Combinationen hinlänglich bewiesen, und also für diesen Fall als ausgemacht vorausgesetzt werden kann: so ist daher klar, daß, wenn m und n ganze positive Zahlen bedeuten,

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^3 + \text{&c.} = (1+x)^m$$

und

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + \text{&c.} = (1+x)^n$$

und folglich

$$[m].[n] = (1+x)^{m+n} = [m+n] = [r] = 1 + \frac{r}{1}x + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}x^2 + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}x^3 + \text{&c.}$$

ist, wenn man $m + n = r$ setzt. Da nun hieraus

$$A = \frac{r}{1}$$

$$B = \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}$$

$$C = \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}$$

$$D = \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{r-3}{4}$$

&c.

wird, und diese Buchstaben aus den Buchstaben m und n, was man sich hierunter auch für Zahlen gedenken mag, nach

nach Absatz 4 doch immer auf eine und dieselbe Art bestimmt werden: so erhellet nunmehr, daß für jeden Werth von m und n allemal

$$[m] . [n] = [m + n]$$

ist.

6. Da also, was auch m und n für Zahlen bedeuten, allemal

$$[m] . [n] = [m + n]$$

ist, so ist ferner, und zwar auch für jeden Werth von m, n, p, q ꝛc.

$$[m] . [n] . [p] = [m + n + p]$$
$$[m] . [n] . [p] . [q] = [m + n + p + q]$$
ꝛc.

und, da man dabey auch $m = n = p = q$ ꝛc. annehmen kann, ebenfalls

$[m]^2 = [2m]$; $[m]^3 = [3m]$; $[m]^4 = [4m]$; ꝛc.

und überhaupt

$$[m]^a = [am]$$

wenn a irgend eine ganze positive Zahl bedeutet.

7. Nun sey i irgend eine ganze positive Zahl, und dabey sey zugleich $am = i$, und folglich $m = \frac{i}{a}$. Hier fließt aus der letzten Formel des vorhergehenden Absatzes

$$[\tfrac{i}{a}]^a = [i] = (1 + x)^i$$

weil i eine ganze positive Zahl ist. Hieraus aber folgt weiter

$$[\tfrac{i}{a}] = (1 + x)^{\frac{i}{a}}$$

so daß also hierdurch der Binomische Lehrsatz auch für den Fall bewiesen wird, wenn n eine gebrochene Zahl ist.

8. Da

8. Da auf diese Art, wenn m nur eine positive, übrigens aber entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl bedeutet, allemal

$$[m] = (1 + x)^m$$

ist, so sey nunmehr $n = -m$. Alsdenn wird $m + n = 0$, und folglich

$$[0] = (1 + x)^0 = 1.$$

Setzt man aber diese Werthe in die Formel $[m] . [n] = [m + n]$, so wird

$(1 + x)^m . [-m] = 1$, und folglich

$$[-m] = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m}$$

wodurch denn der Binomische Lehrsatz auch für den Fall erwiesen ist, wenn n eine gebrochene Zahl bedeutet.

9. Wenn p und q die beyden Grenzen vorstellen, zwischen welchen die irrationale Größe $\sqrt[r]{e}$ liegt, so ist nach dem bisher Erwiesenen, wie groß oder wie klein auch der Unterschied zwischen p und q seyn mag, allemal

$$[p] = (1 + x)^p, \text{ und}$$
$$[q] = (1 + x)^q.$$

Da nun das, was von jeder der beyden Grenzen einer Irrational-Größe gilt, auch von dieser Irrational-Größe selbst behauptet werden kann, so erhellet hieraus die Wahrheit des Binomischen Lehrsatzes für den Fall, wenn n eine Irrational-Zahl ist; oder es ist nunmehr auch

$$[\sqrt[r]{e}] = (1 + x)^{\sqrt[r]{e}}$$

10. Ob aber gleich bey diesem letzten Satze $\sqrt[r]{e}$ sowohl positiv als negativ seyn kann, so ist doch bey dem Beweise desselben e als eine absolute Zahl betrachtet worden, und

man darf daher, wenn e eine positive oder negative Zahl ist, davon weiter keinen Gebrauch machen, als wenn sowohl im ersten Falle von $\sqrt[r]{+e}$ als im andern von $\sqrt[r]{-e}$ bloß die reellen Werthe genommen werden. Wenn daher r eine ungerade Zahl ist, und die unmöglichen Werthe von $\sqrt[r]{\pm e}$ ausgeschlossen worden, so ist allemal $[\sqrt[r]{\pm e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{\pm e}}$; wenn aber r eine gerade Zahl ist, so ist bloß $[\sqrt[r]{+e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{+e}}$ erwiesen, und der Fall, wo $\sqrt[r]{-e}$ vorkommt, ist in der obigen Formel gar nicht begriffen.

11. Vermittelst der Differential-Rechnung läßt sich die Wahrheit des Binomischen Lehrsatzes selbst für den Fall darthun, wenn n eine unmögliche Zahl ist, aber für die gegenwärtige Absicht reicht schon das im dritten bis zum achten Absatze Enthaltene hin, und so weit hat auch Euler nur den Beweis geführt. Da sich indeß der Satz im neunten und zehnten Absatze leicht mit den vorhergehenden verbinden ließ, so schien es mir nicht unzweckmäßig, auch ihn herzusetzen.

12. Nach §. 3. hat Euler den Binomischen Lehrsatz sonst mit Hülfe der Analysis des Unendlichen bewiesen, nachmals aber diesen Beweis verwerflich gefunden, weil die Analysis des Unendlichen auf den Binomischen Lehrsatz gegründet seyn soll. So wie Euler in seiner Differential-Rechnung verfährt, wo er im fünften Capitel des ersten Theils mit dem Satze anfängt: Wenn $y = x^n$ ist, so ist

$$y^1 = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}dx^2 + \text{u.s.}$$

setzt

setzt allerdings die Analysis des Unendlichen den ganzen Binomischen Lehrsatz voraus; allein man würde sehr unrecht handeln, wenn man dieses ganz allgemein behaupten wollte. Der Hr. Hofrath Kästner z. B. beweiset in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen den Binomischen Lehrsatz bloß für ganze bejahte Exponenten, und erweitert darauf denselben in den Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen auf andere als bejahte Exponenten auf eine solche Art, daß es wohl Niemanden einfallen wird, diesem Beweise einen Erschleichungsfehler vorzuwerfen. Da man überdem die Formel $d(x^n) = n x^{n-1} dx$, wenn n eine ganze positive Zahl ist, aus der Regel für die Erfindung des Differentials der Produkte ableiten kann, ohne dazu die Binomial-Formel im geringsten zu gebrauchen, indem man nemlich $x^n = xxxxx.....$ setzt: so läßt sich diese Formel selbst für bejahte und ganze Exponenten durch Hülfe der Differential-Rechnung darthun, ohne daß dabey das mindeste erschlichen wird. Vortheilhaft aber bleibt es immer, einen so außerordentlich wichtigen Satz auf mehr als eine Art kennen gelernt zu haben, und wenn daher auch die Beweise vermittelst der Analysis des Unendlichen viel kürzer sind, so muß man doch die Elementar-Beweise deswegen nicht verachten.

13. Von der Geschichte der Binomial-Formel findet man in den angeführten Schriften des Hrn. Hofrath Kästners das merkwürdigste. Auf eine andere Art als Euler haben kürzlich der Herr Hauptmann von Massenbach in seinen Anfangsgründen der Differential- und Integral-Rechnung, Halle 1784. und Herr Professor Busse in seinen Beyträgen zur Mathematik, Leipzig 1786. dieselbe elementarisch zu beweisen gesucht. Für die negativen Exponenten habe ich in meinen Briefen über die Buchstaben-

Rechnung und Algebra, Berlin 1786, und in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, Berlin 1788 die Richtigkeit der Binomial-Formel auf die Art erwiesen, daß ich dieselbe zuerst für den Fall wenn $n = -1$ ist, dargethan, und darauf gezeigt habe, daß sie, wenn sie für irgend einen negativen Werth für n gilt, auch für den um 1 vergrößerten negativen Werth gelte.

14. Wenn n negativ ist, so läßt sich die Binomial-Formel auf folgende Art Art ausdrucken:

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}b^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-n-3}b^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-n-4}b^4 - \text{u.}$$

und wenn b negativ ist, so wird

$$(a-b)^{-n} = a^{-n} + na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-n-3}b^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-n-4}b^4 + \text{u.}$$

Wird $a = 1$, so verwandelt sich $(a - b)^{-n}$ in

$$(1-b)^{-n} = 1 + nb + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 + \text{u.}$$

und da ist denn

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+p-2)(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)\cdot p}b^p$$

ein allgemeiner Ausdruck für alle Glieder. Setzt man nun n einer ganzen Zahl gleich, so erhält man hieraus für $n = 2$, $(p+1)b^p$; für $n = 3$, $\frac{(p+1)(p+2)}{1\cdot 2}b^p$; für $n = 3$, $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1\cdot 2\cdot 3}b^p$, ꝛc., und hieraus lassen sich die hieraus fließenden Sätze des 64 bis 66sten §. des 4ten Capitels der Eulerischen Einleitung sehr leicht herleiten.

V.

V.

Zusätze zum fünften Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

1. Erklärung der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, §. 77. 78.
   a. Begriff der von einander unabhängigen Größen, §. 77.
   b. Erklärung der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, §. 78.
2. Eintheilung der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, §. 79——87.
   a. Eintheilung, die diesen Funktionen mit den Funktionen einer veränderlichen Größe gemein ist, §. 79——82. Hiernach sind sie
      α. in Ansehung der Operationen, durch welche die veränderlichen und beständigen Größen in ihnen mit einander verbunden sind,
         aa. algebraische, §. 79., und diese wieder
            αα. rationale, ganze entweder oder gebrochene,
            ββ. irrationale Funktionen, §. 80.
         bb. transcendente, §. 79.
      β. in Ansehung des Werthes, welchen sie bey Bestimmung der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größen enthalten,
         aa. einförmige, } §. 81. 82.
         bb. vielförmige, }

b. Eintheilung, die diesen Funktionen allein zukommt, §. 83.

α. in homogene,

β. in heterogene Funktionen, §. 83.

3. Betrachtung der hieraus sich ergebenden Unterarten der Funktionen zweyer veränderlichen Größen, §. 84—95.

a. von den homogenen Funktionen zweyer veränderlichen Größen, §. 84 — 91.

α. Arten derselben, §. 84—87.

aa. ganze, §. 84.

bb. gebrochene, §. 85.

cc. irrationale, §. 86. 87.

αα. entwickelte, §. 86.

ββ. verwickelte, §. 87.

β. Verwandlung derselben, §. 88 — 91.

aa. durch Substitution, §. 88. 89.

αα. der homogenen Funktionen zweyer veränderlichen Größen überhaupt, §. 88.

ββ. der homogenen Funktionen zweyer veränderlichen Größen von der Dimension o, §. 89.

bb. durch Auflösung in Faktoren von der Form $\alpha u \dotplus \beta$, §. 90. 91.

b. von den heterogenen Funktionen, §. 92. 93.

α. Eintheilung derselben, §. 92.

β. Verwandlung derselben durch Substitution in homogene Funktionen, §. 93.

c. noch einige andere Eintheilungen der Funktionen zweyer veränderlichen Größen, §. 94. 95.

α. Eintheilung dieser Funktionen überhaupt nach Ordnungen, §. 94.

β. Eintheilung der ganzen Funktionen in complexe und incomplexe. §. 95.

VI.

Zusätze zum sechsten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

1. Von den Exponential-Größen, §. 96 — 101.
   a. Begriff der Exponential-Größe, und dabey zugleich, warum diese Größen an dem gegenwärtigen Orte untersucht werden, so wie auch, was für welche betrachtet werden sollen, §. 96.
   b. Werthe der Exponential-Größe, a^z, §. 97 — 99.
      α. bey Bestimmung des veränderlichen Exponenten z, §. 97.
      β. aus dem Werthe, der a beygelegt wird, §. 98. 99.
         aa. wenn a positiv genommen, §. 98.
         bb. wenn $a = 0$, und wenn es einer negativen Größe gleich gesetzt wird, §. 99.
   c. Betrachtung der Gleichung $y = a^z$ für den Fall, wenn a eine positive Zahl bedeutet, die größer als 1 ist, §. 100. 101.
      α. allgemeine Bestimmung der Werthe, die y erhalten kann, §. 100.
      β. über die Art, wie darin y von z abhängt, §. 101.
2. Von den Logarithmen, §. 102 — 113.
   a. Von den Logarithmen überhaupt, §. 102 — 106.

α. Erklärung der Logarithmen und der Basis derselben, §. 102.

β. Erfindung der Logarithmen, §. 103 — 106.

aa. wenn sie aus den gegebenen Dingen genau, §. 103. 104.

bb. wenn sie nur näherungsweise gefunden werden können, §. 105. 106.

b. Von den logarithmischen Systemen, §. 107—113.

α. Wieviel logarithmische Systeme möglich sind, §. 107.

β. Verhältniß der Logarithmen zweyer Zahlen in zwey logarithmischen Systemen, §. 108.

γ. Verfertigungs-Art der logarithmischen Systeme,

δ. Nutzen derselben, §. 110.

c. Von dem gemeinen logarithmischen Systeme insbesondere. §. 112. 113.

B. Zusatz zu §. 97.

1. Es ist in der vorhergehenden Tabelle bemerkt worden, daß Euler in dem gegenwärtigen §. bloß von den Werthen rede, welche die Exponential-Größe a^z bekommt, wenn für z bestimmte Werthe gesetzt werden. Es muß also a hier ganz allgemein betrachtet, oder weder positiv noch negativ, sondern absolute genommen werden; und da frägt sich denn: Ob mit Recht behauptet werden könne, daß die Werthe $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ &c. vielfach seyn, und $a^{\frac{5}{2}}$ sowohl $= -aa\sqrt{a}$ als $= +aa\sqrt{1}$ gesetzt werden müsse? Da die Beantwortung dieser Frage den Grund enthält, warum man von den mehrern Werthen der Größen $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ &c., $a^{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{7}$ 2 &c. nach Eulers Behauptung jedesmal nur die Hauptwerthe

werthe, d. h. die reellen und positiven nehmen muß, und zugleich auf die Umstände führt, unter welchen man dies zu thun hat, (denn es wird sich nachher zeigen, daß es nicht allemal geschehen darf): so ist dieselbe ohnstreitig schon dadurch wider den Vorwurf der Unnützlichkeit geschützt. es werden sich aber daraus in der Folge noch wichtigere Vortheile ziehen lassen.

2. Wenn ganz allgemein behauptet werden kann, daß man für A, was für eine Größe es auch vorstellen mag, auch allemal + A setzen könne: so ist auch Eulers Behauptung von den vielfachen Werthen der im vorhergehenden Absatze angeführten Größen ohne Einschränkung richtig; aber dann scheint es wenigstens etwas willkührliches an sich zu haben, daß man von diesen mehreren Werthen jedesmal nur die positiven und reellen nehmen soll. Dies bestimmt den Punkt, von welchem bey der gegegenwärtigen Untersuchung ausgegangen werden muß.

3. Wenn Größen positiv oder negativ genommen, und also ihren Constructionen die Zeichen + und — vorgesetzt werden, so geschiehet solches eigentlich deswegen, weil man bey ihnen außer ihren wesentlichen Eigenschaften eine zufällige Beschaffenheit unter zwey einander entgegenstehenden Bedingungen auf die Art betrachtet, daß man von diesen Bedingungen bald die eine, bald die andere statt finden läßt. Bey geraden Linien, bey den bewegenden Kräften, bey den Exponenten der Dignitäten u. d. gl. nimmt man dieses sehr bald und aufs deutlichste wahr. Hiernach weisen also die Worte positiv und negativ, und die Zeichen + und — eigentlich auf etwas hin, was man sich ohne sie nicht gedacht haben würde; und wenn man folglich das Größen absolute betrachten nennt, wenn man bloß ihre wesentlichen Eigenschaften in Erwägung zieht, und dabey die

Abwesenheit der Zeichen + und — vor ihren Constructionen (Ausdrücken durch allgemeine Zeichen) ein Kennzeichen seyn läßt, daß diese Größen absolute betrachtet werden sollen; so ist klar, daß die absoluten Größen jedesmal von den positiven unterschieden werden müssen, und daß man also eigentlich, und bey allgemeinen Betrachtungen nie berechtigt ist, A und + A als einander vollkommen gleich anzusehen, und daher beyde Bezeichnungen mit einander zu verwechseln.

4. Das kann hierwider kein Einwurf seyn, daß man, wenn zwey absolute Größen A und B zu einander addirt werden sollen, solche auf die Art neben einander zu setzen pflegt, daß man vor die zweyte das Zeichen + schreibt. Denn in dem Ausdrucke A + B, als dem Ausdrucke einer Summe der beyden absoluten Größen A und B, gehört das Zeichen + nicht eigentlich, sondern nur in so fern zu B als es mit A die summirenden Theile einer dritten Größe ausmacht, und steht also hier schon in einer uneigentlichen oder abgeleiteten Bedeutung. Die ursprüngliche oder erste Bedeutung der Zeichen sowohl als der Wörter ist nemlich allemal die, woraus sich alle übrigen Bedeutungen als Arten aus dem Geschlechte ableiten lassen, und darnach wäre es sehr unrecht, die Bedeutung der Zeichen + und —, nach welcher sie Zeichen der Addition und Subtraction sind, zu der ersten und ursprünglichen Bedeutung dieser Zeichen machen zu wollen. Da man aber bey allgemeinen Untersuchungen allemal die allgemeinsten Begriffe zum Grunde legen muß, und das Allgemeine auch in allem ihm untergeordneten Besondern anzutreffen seyn muß, so erhellet, daß man von den Zeichen + und — nichts allgemein behaupten darf, was ihnen nicht als Zeichen des Positiven und Negativen zukommt, und zugleich, daß man diese Zeichen

chen allgemein als Zeichen des Positiven und Negativen betrachten könne.

5. Es drucken also die Zeichen + und — allezeit bloß eine zufällige Eigenschaft der Größen aus, vor deren Construction sie stehen; und da man das Zufällige am besten erst nach dem Wesentlichen betrachtet, so bedient man sich der Zeichen + und — auch am besten so, daß man die Größen, zu deren Constructionen sie gehören, erst dann nach ihnen bestimmt, wenn man jene zuvor nach allen außer diesen Zeichen in den Constructionen vorkommenden Bezeichnungen entwickelt hat. Wäre es daher auch in manchen Fällen vollkommen gleichgültig, ob man A oder + A setzte, so muß man doch aus dem angeführten Grunde nie z. B. $+\sqrt[n]{A}$ mit $\sqrt[n]{(+A)}$ und eben so wenig $+A^{\frac{m}{n}}$ mit $(+A)^{\frac{m}{n}}$ verwechseln, ob man gleich unter der angeführten Voraussetzung, wenn $A^{\frac{m}{n}} = C$ wäre, $A^{\frac{m}{n}} = +C$ setzen könnte. Ausdrücke also wie $+A^{\frac{m}{n}}$ muß man so verstehen, daß man das Zeichen + als zu $A^{\frac{m}{n}}$ und nicht als zu A gehörig betrachtet, und außerdem auch nie + A für A setzen, außer wenn A als ein summirender Theil neben einem oder mehrere andere summirende Theile einer dritten Größe gesetzt werden soll.

6. Hat man also ein Recht, Ausdrücken, wie $\sqrt[n]{A}$, $A^{\frac{m}{n}}$, $A^{\sqrt[n]{m}}$ vielfache Werthe beyzulegen? Wenn man auch jedem dieser Ausdrücke an und für sich genommen das Zeichen + vorsetzen dürfte, so müßte man nach dem Vorhergehen-

gehenden doch dafür $\pm\sqrt[n]{A}$, $\pm A^{\frac{m}{n}}$, $\pm \sqrt[n]{A^m}$ und nicht $\sqrt[n]{(\pm A)}$, $(\pm A)^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{(\pm A)^m}$ schreiben, und da fällt denn ebenfalls nach dem vorhergehenden Absatze in die Augen, daß zwar die Werthe von $\sqrt[n]{(\pm A)}$, $(\pm A)^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{(\pm A)^m}$, vielfach sind, nicht aber die Werthe von $\pm\sqrt[n]{A}$, $\pm A^{\frac{m}{n}}$, $\pm \sqrt[n]{A^m}$. So ist also auch $a^{\frac{5}{2}} = \pm a^{\frac{5}{2}}$ zwar $= \pm aa\sqrt{a} = aa\sqrt{a}$, nicht aber $= -aa\sqrt{a}$.

7. Wenn man die Bedeutung der Zeichen $\pm$ und $-$ nicht auf die Art bestimmt, als es bisher geschehen ist, und folglich auch ohne alle Einschränkung A und $\pm A$ als gleichgültige Bezeichnungen betrachtet, so wird es nothwendig, daß man von den mehrern Werthen der Ausdrücke $\sqrt[n]{A}$, $A^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{A^m}$, wenn man dieselben in fernern Rechnungen gebrauchen will, bloß die positiven und reellen Werthe nimmt. Denn wollte man solches nicht thun, so würde nicht $A = A^{\frac{m}{m}}$ gesetzt werden können, weil sonst eine und dieselbe Größe mehrern von einander verschiedenen, und eine mögliche Größe selbst unmöglichen Größen müßte gleich seyn können. Aber auf diese Art bleibt doch wenigstens in der Folge noch manche anderweitige Schwierigkeit übrig, die sich sehr leicht wird heben lassen, wenn man die absoluten Größen allemal von den positiven unterscheidet, und nur dann A und $\pm A$ als gleichgültige Ausdrücke ansieht, wenn das Zeichen $\pm$ wegen der statt findenden beson-

sondern Umstände mehr das Zeichen der Addition, als das Zeichen des Positiven ist, oder der Construction vor welcher es steht, wenn man sie allein nimmt, keine neue Bestimmung zusetzt.

C. Zusatz zu §. 98.

Wenn die Werthe von a^z betrachtet werden sollen, die bey den für a möglichen Substitutionen statt finden können, wie solches wegen des Gebrauchs, der von dem Gegenwärtigen in der Folge gemacht wird, allerdings nöthig ist, so muß man, wenn man alle Fälle nehmen, und dabey die in dem vorhergehenden Zusatze festgesetzten Unterschiede beobachten will, für a erst die absoluten Zahlen, wobey $a = o$ als ein besonderer Fall angesehen werden kann, und dann die positiven, und nun erst die negativen Zahlen nehmen. Werden für a die absoluten Zahlen gesetzt, so findet man, was der gegenwärtige §. enthält. Von den Werthen, die a^z bekommt, wenn man a positiv nimmt, sagt Euler nichts, weil er die absoluten Zahlen und die positiven nicht unterscheidet. Was von diesem Falle an dem gegenwärtigen Orte zu merken ist, läßt sich auf folgende Behauptung zurückbringen. Nimmt man a positiv, so hat a^z, wenn z eine ganze positive Zahl ist, jedesmal nur einen und zwar positiven Werth, so wie, wenn z ein positiver Bruch ist, a^z zwey und mehrere, und darunter auch unmögliche Werthe haben kann. Setzt man z einer negativen ganzen oder gebrochenen Zahl gleich, so ist leicht einzusehn, daß dann die Bestimmung der Werthe von a^z noch schwieriger wird.

D. Zusatz zu §. 99.

1. Wenn man a in a^z negativ setzt, so fällt sogleich im Anfange in die Augen, daß die Untersuchung dieser Größe

auf

auf keine brauchbare Sätze führe; da aber die Theorie der Exponential-Größen nicht bloß in der Arithmetik, sondern auch in der analytischen Geometrie und in der angewandten Mathematik gebraucht wird, so ist es zur Vermeidung aller Schwierigkeiten nicht hinreichend, daß man a positiv seyn läßt, sondern man muß dasselbe einmal absolute nehmen, und dann auch den Fall untersuchen, wo a eine Größe ist, bey welcher, außer ihren wesentlichen Eigenschaften auch eine solche zufällige Beschaffenheit betrachtet wird, als zu entgegengesetzten Größen erforderlich ist. Läßt man nun a eine absolute Zahl bedeuten, die größer als 1 ist, denn bey diesem Falle kann man hier aus den von Eulern angeführten Gründen allerdings stehen bleiben, so hat a^z für jeden möglichen Werth von z nie mehr als einen, aber allemal reellen und absoluten Werth, und dabey ist es zugleich erlaubt, für a^z, $a^{\frac{nz}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a^z}$ zu setzen. Dies letztere darf man nicht, wenn a positiv genommen wird, weil, wenn dabey a^z einen Werth hat, der Größe $a^{\frac{nz}{n}}$ allemal n Werthe zukommen müssen, obgleich darunter mehrere imaginär sind. Hieraus erhellet schon die Nothwendigkeit der Unterscheidung zwischen a absolute und a positiv genommen, wenn die Theorie der Exponential-Größen von allen Schwierigkeiten befreyet werden soll, zumal da es, wie sich in der Folge zeigen wird, nicht hinlänglich ist, zu sagen, daß man von den mehrern Werthen von $a^{\frac{nz}{n}}$ jedesmal nur den positiven und reellen nehmen müsse. Uebrigens gilt für den Fall, wenn a eine absolute Zahl und größer als 1 ist, alles das was Euler in gegenwärtigen §. gesagt hat.

2.

2. Nimmt man a nicht absolute, und soll dabey a^z mit $a^{\frac{nz}{n}}$ verwechselt, und folglich auch $a^{\frac{n}{n}}$ für a^1 gesetzt werden können, welches allerdings, wenn man die Theorie der Exponential-Größen allenthalben ohne Schwierigkeit gebrauchen will, nothwendig ist; so muß, da n auch jede gerade Zahl bedeuten kann, a^z für jeden Werth von z zwey reelle entgegengesetzte, sonst einander gleiche, und außerdem noch jede beliebige Anzahl unmöglicher Werthe haben. Ob man in diesem Falle a positiv oder negativ annimmt, ist gleich, eigentlich aber darf man diese beyden Fälle nicht von einander unterscheiden, sondern muß sie ungetrennt lassen, und das Allgemeine zum Grunde legen. Sobald man für a eine Größe setzt, die sich nicht absolute betrachten läßt, sondern wo man zugleich auf eine zufällige Beschaffenheit unter zwey entgegenstehenden Bedingungen auf die Art sehen muß, daß man darin bald die eine bald die andere statt finden läßt, wie dies der Fall ist, wenn a eine gerade Linie bedeutet, und a^z geometrisch construirt wird: so zeigt sich die Richtigkeit dieser Behauptungen in den gedachten geometrischen Constructionen auf eine sehr deutliche und unwidersprechliche Weise.

3. Bey der Lehre von den Logarithmen, welche Euler in dem 102ten §. vorzutragen anfängt, wird sich Gelegenheit finden, die bisher über die Werthe von a in der Exponential-Größe a^z vorgebrachten Behauptungen anzuwenden. Da aber dazu manches aus dem folgenden Capitel erforderlich ist, so will ich, um das, was ich von den Logarithmen zu sagen habe, nicht zu trennen, solches überhaupt bis zu dem Zusatze zu dem folgenden Capitel verspahren, der die Ueberschrift, Von den Logarithmen, führt.

VII.

Zusätze zum siebenten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch unendliche Reihen.

1. Von der Entwickelung der Exponential-Größen durch Reihen, §. 114 — 117.
   a. Einige vorläufige Sätze, §. 114.
   b. Entwickelung der Exponential-Größen durch unendliche Reihen, §. 115 — 117 und 125.
      α. ohne Logarithmen, §. 115. 116.
      β. mit Hülfe der Logarithmen, §. 117.
      γ. mit Hülfe der natürlichen Logarithmen, §. 125.
2. Von der Entwickelung der Logarithmen durch Reihen, §. 118 — 125. und zwar
   a. der Logarithmen überhaupt, §. 118 — 121.
   b. der natürlichen Logarithmen, §. 122 — 123.
   c. Vergleichung der natürlichen Logarithmen mit den gemeinen, §. 123.

B. Von den Logarithmen.

1. Man mag die Logarithmen als Exponenten oder als Verhältnißzahlen ansehen, so fällt ein großer Theil des Nutzens, den man von Logarithmischen Tabellen haben kann, weg, wofern man nicht, wenn m einen Logarithmen bedeutet, dafür auch allemal und ohne die geringste Einschränkung $\frac{nm}{n}$ setzen kann. Da also nur, wenn a eine absolute Zahl bedeutet, ohne alle weitere Bedingung $a^m = a^{\frac{nm}{n}}$ ist, hingegen, wenn a nicht absolute genommen wird, a^m bloß dann $a^{\frac{nm}{n}}$ gleich gesetzt werden kann, wenn von $a^{\frac{nm}{n}}$ allein die reellen Werthe genommen werden, und im Fall n eine gerade Zahl ist, a^m sowohl positiv als negativ seyn kann: so ist es ohnstreitig am besten, zum allgemeinen Gebrauch ein solches Logarithmisches System zu wählen, worin die Basis absolute angenommen worden ist. Thut man nemlich dieses, so kann man allemal und ohne die geringste Einschränkung nicht nur $a^r \times a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = a^{r-s}$; sondern auch $(a^r)^n = a^{nr}$, und $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$ setzen; r und s mögen ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten, und dies sind bekannter Maaßen die Sätze, worauf sich die Regeln des Gebrauchs der Logarithmen gründen. Für diesen Fall gilt denn auch alles das in möglich größter Strenge und ohne weitere Einschränkung von den Logarithmen, was Euler darüber im sechsten Capitel von §. 102. an gesagt hat, so wie dabey auch die Sätze des siebenten Capitels nur weniger Zusätze bedürfen, die gelegentlich hier hinzugefügt werden sollen.

2. Bedeutet nun a eine absolute Zahl, die größer als 1 ist, und wird dabey ω und ψ so genommen, als es Euler §. 114. gethan hat, so kann man allemal, wenn nur n groß genug gesetzt wird, auch $a^{\omega} = a^{\frac{1}{2^n}}$ setzen, und dann erhält man aus $a^{\omega} = 1 + k\omega$, da nun $\omega = \frac{1}{2^n}$ ist,

$$a^{\frac{1}{2^n}} = 1 + k \times \frac{1}{2^n}, \text{ und hieraus}$$

$$k = \frac{a^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \left(a^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) \times 2^n$$

Wird hier a einer bestimmten Zahl gleich gesetzt, so findet man nach dieser Formel ebenfalls einen bestimmten Werth für k, und sie druckt daher die Art, wie k von a abhängt, und welche Euler in dem Exempel bey §. 114. in einem einzelnen Falle dargestellt hat, allgemein aus. Betrachtet man hingegen k als bekannt, so erhält man daraus zur Erfindung von a aus k die Formel

$$a = (1 + \frac{1}{2^n} k)^{2^n}$$

3. So wie Euler $\psi = k\omega$ gesetzt hat, so kann man auch $\omega = \frac{1}{k}\psi$ setzen, und dann erhält man aus $a^{\omega} = 1 + \psi$, wenn man a die Basis eines Logarithmischen Systems seyn läßt

$$\frac{1}{k}\psi = l(1 + \psi)$$

Macht man also $1 + \psi = f^{\frac{1}{2^n}}$, welches allemal möglich ist, wo-

wofern nur n groß genug genommen wird, und f eine absolute Zahl bedeutet, die größer als 1 ist: so wird $\psi = f^{\frac{1}{2^n}} - 1$, und man hat folglich

$$1f^{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{k}(f^{\frac{1}{2^n}} - 1), \text{ und hieraus}$$

$$1f = \frac{1}{k} 2^n (f^{\frac{1}{2^n}} - 1).$$

Ist also k bekannt, so hat man hierin eine Formel, nach welcher man den Logarithmen jeder Zahl, wenn gleich auf eine weitläuftige Art, doch allemal so genau finden kann, als man will.

4. Da 2^n, wenn n eine ganze Zahl ist, so wie man solches hier annehmen muß, allemal eine gerade Zahl wird, so würde, wenn man f in $f^{\frac{1}{2^n}}$ nicht absolute, sondern positiv nehmen wollte, $f^{\frac{1}{2^n}}$ zwey entgegengesetzte sonst einander gleiche Werthe haben, und folglich $+\sqrt[2^n]{f-1}$ und $-\sqrt[2^n]{f-1}$ nicht nur einander entgegengesetzt, sondern, absolute betrachtet, auch um zwey unterschieden seyn. Es würde demnach jede ganze positive Zahl außer einen positiven Logarithmen auch einen negativen von jenem der Größe nach unterschiedenen Logarithmen haben, und die negativen Logarithmen folglich auch dann, wenn die Basis größer als 1 wäre, nicht bloß zu den ächten Brüchen gehören. Hieraus erhellet, daß man in der Lehre von den Logarithmen das Absolute von dem Positiven sorgfältig unterscheiden müsse.

5. Da nach Absatz 2 ebensowohl a aus k als k aus a gefunden werden kann, so ist es, überhaupt genommen, willkührlich, ob man bey einem Logarithmischen System einen bestimmten Werth von a oder von k zum Grunde legen will. Thut man das letztere auf die Art, daß man $k = 1$ setzt, so fällt in die Augen, daß dadurch die Bestimmung der Logarithmen am allereinfachsten, und folglich auch das darauf sich gründende System im Allgemeinen unter allen das brauchbarste seyn werde. In diesem Systeme, welches man bekannter Maaßen das System der natürlichen Logarithmen nennt, ist daher

$$a = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n} = 2,7182818284590\ldots.$$

und diesen Werth findet man desto genauer, je größer man n annimmt. Ferner wird darin

$$lf = 2^n (f^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

und man findet aus den Logarithmen dieses Systems die Logarithmen jedes andern Systems, wenn man aus der Basis dieses letztern k nach Absatz 2 entwickelt, und darauf jene Logarithmen durch k dividirt, oder mit $\frac{1}{k}$ multiplicirt.

6. Es wäre indeß sehr unbequem, wenn man die Logarithmen aller Zahlen, wenigstens aller einfachen Zahlen bloß nach der so eben gefundenen Regel berechnen sollte, ja es ist darnach die Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen schon eine beschwerliche Sache. Man kann sich hiervon, wenn man will, durch die Berechnung des Logarithmen der Zahl 5 überzeugen, welche man in des Hrn. Ober-Baurath Schulze Taschenbuche für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Meßkunst zu machen sich vorsetzen, Berlin 1782 und 1783, und zwar im zweyten Hefte S. 47 bis

bis 52 findet, und doch ist dieser Logarithme nur bis auf 7 Decimal-Stellen gesucht worden. Man muß daher das Bisherige vorzüglich gebrauchen, um daraus kürzere Verfahrungsarten abzuleiten, und am besten ist es, für die Logarithmen kleiner, für die Logarithmen größerer, und für die Logarithmen sehr großen Zahlen besondere Regeln zu suchen.

7. Für die Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen ist die Regel sehr brauchbar, welche Euler §. 123 mitgetheilt hat, und wornach

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \text{&c.}\right)$$

ist. Denn setzt man $\frac{1+x}{1-x} = n$, so wird

$$x = \frac{n-1}{n+1};$$

also allemal ein Bruch, dessen Zähler und Nenner um zwey unterschieden sind, und dessen Dignitäten daher, wenn x eine kleine Zahl ist, bald so klein werden, daß man nicht weiter nöthig hat, sie in Anschlag zu bringen, zumal, da außerdem von jedem x^n nur $\frac{2}{n}$ genommen werden dürfen.

8. Um diese Regel aus der Absatz 5 gefundenen Formel $lf = 2^n(f^{\frac{1}{2^n}} - 1)$ abzuleiten, so sey $f = 1+x$, und $m = \frac{1}{2^n}$, so daß m einen sehr kleinen Bruch bedeute. Alsdenn ist, nach der angeführten Formel

$$l(1+x) = \frac{f^m - 1}{m} = \frac{-1+(1+x)^m}{m} = x + \frac{m-1}{1.2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 + \text{&c.}$$

Da sich aber $\frac{m-1}{1.2}$ von $-\frac{1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ von $-\frac{2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$ von $-\frac{3}{4}$ desto weniger unterscheidet, je größer man n annimmt, und man hier n über alle Grenzen wachsen oder unendlich groß annehmen kann: so erhält man durch die Substitution dieser Werthe anstatt der vorhergehenden Bestimmung

$$1f = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \text{&c.}$$

9. So wie man aber bey den §. 114. angenommenen Bedeutungen der Buchstaben k und ψ, $a^{\frac{1}{k}\psi} = 1 + \psi$ setzen kann, wenn a eine Zahl bedeutet, die größer als 1 ist: so kann man auch $\alpha^{\frac{1}{k}\psi} = 1 - \psi$ setzen, wenn α kleiner als 1, oder ein ächter Bruch ist, und k und ψ die erwähnte Bedeutung behalten. Läßt man also a die Basis eines Logarithmischen Systems, und $\alpha = \frac{1}{a}$ seyn, so hat man daher

$$-\frac{1}{k}\psi = l(1-\psi)$$

und für die hyperbolischen Logarithmen, wo $k = 1$ ist,

$$-\psi = l(1-\psi)$$

Ist nun g ein ächter Bruch, so kann man allemal

$$g^{\frac{1}{2^n}} = 1 - \psi$$

setzen, und daraus wird denn

$$-\psi = g^{\frac{1}{2^n}} - 1$$

Hier-

Hierdurch aber verwandelt sich die Formel $-\psi = l(1-\psi)$ in

$$lg^{\frac{1}{2^n}} = g^{\frac{1}{2^n}} - 1$$

und es wird daher

$$lg = 2^n(g^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

so daß die Absatz 8 gefundene Formel auch für die Erfindung der Logarithmen der ächten Brüche gilt.

10. Dies vorausgesetzt, so sey $g = 1 - x$, und also x ein ächter Bruch. Dann ist, wenn m die Absatz 8 angenommene Bedeutung behält,

$$lg = \frac{g^m - 1}{m} = \frac{-1 + (1-x)^m}{m} = -x + \frac{m-1}{1.2}x^2 - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 - \text{ꝛc.}$$

oder, da man auch hier $\frac{m-1}{1.2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{(m-2)}{3} = -\frac{2}{3}$ ꝛc. setzen kann

$$lg = l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \text{ꝛc.}$$

Nimmt man nun diese Formel mit der Absatz 8 gefundenen zusammen, so erhält man daher

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \text{ꝛc.})$$

11. Da x bey den geführten Beweisen als ein ächter Bruch betrachtet worden ist, so muß man die gefundenen Sätze auch nicht weiter als auf die Fälle ausdehnen, wo x

eine solche Bedeutung bekommt; und wenn dieselben bey Vernachläßigung dieser Regel auf paradoxe Folgen führen, so ist die Schuld nicht ihnen, sondern der unrechten Anwendung, die man davon macht, zuzuschreiben. Setzt man z. B. $\frac{1+x}{1-x} = -2$, so wird $1+x = -2+2x$, und folglich $x = 3$. Hiernach hätte man

$$l\frac{1+x}{1-x} = l - 2 = 2(3 + \frac{27}{3} + \frac{243}{5} + \frac{2187}{7} + \text{&c.})$$

und doch wird behauptet, daß der Logarithme jeder negativen Zahl unmöglich sey. Ferner erhielte man, wenn man in der Formel

$$l(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \text{&c.})$$

$x = 2$ setzte,

$$l(1-x) = l - 1 = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{32}{5} - \text{&c.}$$

und setzte man darin $x = 3$, so würde

$$l(1-x) = l - 2 = -(3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{3} + \frac{81}{4} + \frac{243}{5} + \text{&c.})$$

Aber was für Folgerungen würde die Vergleichung dieses und des vorhergehenden Logarithmen von -2 an die Hand geben?

12. Uebriges läßt sich bey den Absatz 8 und 10 geführten Beweisen daher nicht der geringste Grund zum Einwurfe wider die Strenge dieser Beweise nehmen, daß darin $\frac{m-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m-2}{3} = -\frac{2}{3}$ &c. gesetzt worden. Denn es wird ja $\frac{m-(p-1)}{p}$ um so mehr $= -\frac{p-1}{p}$ je größer p wird, und bey den Absatz 8 angenommenen

nen Bedeutungen von m und n kann man ja schon $\frac{m-(p-1)}{p} = -\frac{p-1}{p}$ setzen, wenn $p = 1$ ist, und kleiner wird es nie angenommen. Etwas mehr hätte der Einwurf auf sich, wenn man wider die Eulerische Behauptung §. 116., daß man, wenn i eine unendliche Zahl bedeutet, $\frac{i-1}{i} = 1$; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$; ꝛc. setzen könne, einwenden wollte, daß dies wenigstens nicht statt finde, wenn die bey i in dem Zähler dieser Brüche mit dem Zeichen — stehende Zahl selbst unendlich groß werde. Allein so lange diese Zahl eine bestimmte Größe behält, ist denn doch immer $\frac{i-p}{i} = 1$; und dies zugegeben, so ist wenigstens $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc., man mag diese Reihe fortsetzen, so weit man will, wofern nur die Anzahl der Glieder eine Zahl bleibt, die sich angeben läßt; und dies ist genug, um sowohl diese Reihe, als die darauf gebaueten brauchbar zu machen.

13. Für die Findung der Logarithmen größerer Zahlen lassen sich aus den für $l(1+x)$ und $l(1-x)$ Absatz 8 und 10 gefundenen Formeln mit leichter Mühe eben so bequeme Ausdrücke finden. Denn setzt man $x = \frac{y}{a}$, so erhält man daraus

$$l(1+\frac{y}{a}) = +\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + \frac{y^5}{5a^5} -$$ ꝛc.

und

$$l(1-\frac{y}{a}) = -(\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \frac{y^4}{4a^4} + \frac{y^5}{5a^5} +$$ ꝛc.)

Hieraus aber fließt

$$l(1+\frac{y}{a})-l(1-\frac{y}{a})=l\frac{1+\frac{y}{a}}{1-\frac{y}{a}}=l\frac{a+y}{a-y}=$$

$$l(a+y)-l(a-y)=2(\frac{y}{a}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^5}{5a^5}+\frac{y^7}{7a^7}+\text{ꝛc.})$$

oder

$$l(a+y)=l(a-y)+2(\frac{y}{a}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^5}{5a^5}+\frac{y^7}{7a^7}+\text{ꝛc.})$$

und wenn man $y=1$ setzt

$$l(a+1)=l(a-1)+2(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{5a^5}+\frac{1}{7a^7}+\text{ꝛc.})$$

So lange man y nicht größer als a annimmt, fließen diese Sätze aus den angeführten in größter Strenge, größer als a muß aber auch y nie angenommen werden, wenn dieselben zu der Absicht, zu welcher sie erfunden worden, brauchbar seyn sollen.

14. Ferner fließt aus $l(1+\frac{y}{a})=l\frac{a+y}{a}=l(a+y)-la$

$$=\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\text{ꝛc.}$$

$$l(a+y)=la+\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\text{ꝛc.}$$

und aus der für $l(1-\frac{y}{a})=l\frac{a-y}{a}=l(a-y)-la$ gefundenen Bestimmung

$$l(a-y)=la-(\frac{y}{a}+\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^4}{4a^4}+\text{ꝛc.})$$

Diese Formeln sind sehr bequem, um darnach die Logarithmen sehr großer Zahlen zu finden. Denn so groß eine Zahl auch immer seyn mag, so läßt sie sich doch allemal in zwey Theile $a \pm y$ theilen, so daß a viel größer als y, und der Lo-

Logarithme von a bekannt ist. So ist 369423597639425 = 369400000000000 + 23597639425, und wenn man jenen Theil a und diesen y nennt, so ist der Logarithme von a aus den Logarithmischen Tafeln bekannt, und um den Logarithmen der ganzen Zahl zu finden, darf man von der für $1(a+y)$ gefundenen Reihe nur einige wenige Glieder entwickeln. Sollte man den Logarithmen von 3694992345682 finden, so wäre es am besten 3694992345682 = 3695000000000 − 7654318 zu setzen, 3695000000000 = a, und y = 7654318 zu nehmen, und dann nach der Formel

$$1(a-y) = 1a - \left(\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \text{ꝛc.}\right)$$ zu rechnen.

15. Aus $1f = \frac{f^m - 1}{m}$ Absatz 8 folgt $m\,1f = f^m - 1$, und wenn man $m\,1f = M$ setzt, so wird $1 + M = f^m$, oder

$$(1+M)^{\frac{1}{m}} = f.$$

Man setze $\frac{1}{m} = p$, so wird

$$f = (1+M)^p = 1 + \frac{p}{1}M + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}M^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}M^3 + \text{ꝛc.}$$

und hieraus wegen der Bedeutung von $\frac{1}{m} = p$

$$f = 1 + pM + \frac{p^2M^2}{1.2} + \frac{p^3M^3}{1.2.3} + \frac{p^4M^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

oder, da $pM = \frac{M}{m} = 1f$

$$f = 1 + 1f + \frac{(1f)^2}{1\,.\,2} + \frac{(1f)^3}{1.2.3} + \frac{(1f)^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

Hiernach kann man, wenn ein Logarithme bekannt ist, aus demselben die zu ihm gehörige Zahl finden.

16.

16. Uebrigens betreffen die bisher gefundenen Sätze bloß die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen. Will man sie auch bey den gemeinen Logarithmen brauchen, so darf man nur, wenn Logarithmen gefunden werden sollen, die gefundenen hyperbolischen Logarithmen nach §. 124. der Eulerischen Einleitung in gemeine verwandeln, und wenn die zu einem gemeinen Logarithmen gehörige Zahl gefunden werden soll, den gegebenen Logarithmen zuvor auf die entgegenstehende Art in einen hyperbolischen verwandeln. In des Hrn. Ober-Baurath Schulze bereits angeführten Taschenbuche im zweyten Hefte, welches ich hiebey gebraucht habe, findet man die mitgetheilten Regeln weitläuftig durch Exempel erläutert. Soviel von den Logarithmen, wenn die Basis derselben absolute und größer als 1 angenommen wird.

17. Wenn man die Basis nicht absolute betrachtet, so muß man bey der Untersuchung der Beschaffenheit der alsdann sich ergebenden Logarithmen das nicht aus der Acht lassen, daß kein Logarithmisches System zum Calcul brauchbar ist, wofern man nicht ohne alle weitere Einschränkung $a^{\frac{nz}{n}} = a^z$ setzen kann. Geht man hiervon aus, so muß man, wenn $\pm a$ die Basis seyn soll, dafür auch $(\pm a)^{\frac{n}{n}}$ setzen können, und läßt man nun n eine gerade Zahl bedeuten, so ist nicht nur $1 = 1 \pm a$, sondern auch $= 1 - a$, und außerdem auch noch der Logarithme von $n - 2$ unmöglichen Größen. Nähme man $-a$ zur Basis an, so müßte $-a = (-a)^{\frac{n}{n}}$ gesetzt werden können, aber auch dann würde 1, wenn man n abermals eine gerade Zahl bedeuten ließe, nicht nur der Logarithme von $-a$, sondern auch der Lo-

Logarithme von $\dagger a$, und außerdem noch von $n - 2$ unmöglichen Größen. Aus diesem Grunde habe ich S. 479. Absatz 2 gesagt, daß es, wenn man die Basis nicht absolute nehmen will, gleich sey, ob man dieselbe positiv oder negativ annehme, und daß man hier diese beyden Fälle eigentlich gar nicht trennen sollte. Nun sey $f = a^z$, so ist $\pm f = \pm a^z = (\dagger a)^{\frac{2nz}{n}}$ und folglich, da f jede Zahl bedeuten kann, $z = \frac{2nz}{2n} = l(\pm f)$ und außerdem zugleich der Logarithme von mehrern unmöglichen Größen. Wenn man daher die Basis nicht absolute annimmt, sondern dabey auf eine zufällige Beschaffenheit auf eine solche Art sieht, als zu entgegengesetzten Größen erforderlich ist: so gehört jeder Logarithme zu zwey einander entgegengesetzten sonst gleichen, und außerdem noch zu einer Menge unmöglicher Größen.

18. Da auf diese Art jeder Logarithme zu unendlich vielen Zahlen gehört, so frägt sich, ob umgekehrt auch jede Zahl, wenn sie nicht absolute betrachtet wird, unendlich viele Logarithmen habe? Euler behauptet dieses im fünften Bande der Memoires der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahr 1749, in der Abhandlung, de la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires. Ich will den zu dieser Absicht S. 156. 157 stehenden Lehrsatz mit seinem Beweise von Wort zu Wort hersetzen.

Lehrsatz.

Jeder gegebenen Zahl kommen unendlich viele Logarithmen zu; oder: Wenn y den Logarithmen der Zahl x bezeichnet, so hat y unendlich viel Werthe.

Be-

Beweis.

Ich will mich hier bloß auf die hyperbolischen Logarithmen einschränken, weil bekannter Maaßen die Logarithmen jedes andern Systems zu diesen ein beständiges Verhältniß haben, und z. B. wenn der hyperbolische Logarithme der Zahl $x = y$ gesetzt wird, der gemeine Logarithme eben dieser Zahl $= 0{,}4342944819 . y$ ist. Nun beruhen die hyperbolischen Logarithmen auf dem Satze, daß der Logarithme von $1 + \omega$, wenn ω eine unendlich kleine Zahl ist, $= \omega$, oder $l(1 + \omega) = \omega$ sey. Hieraus fließt $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$; und überhaupt $l(1 + \omega)^n = n\omega$. Da aber ω eine unendlich kleine Zahl bedeutet, so kann die Zahl $(1 + \omega)^n$ nicht anders jeder gegebenen Zahl x gleich gesetzt werden, als wenn n unendlich genommen wird. Es sey daher n eine unendlich große Zahl, und $x = (1 + \omega)^n$, folglich $lx = y = n\omega$. Um nun y durch x auszudrucken, so giebt die erste Formel $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$, und $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, und durch die Substitution dieses Werthes erhält man aus der zweyten Formel

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

Hieraus erhellet, daß sich der Werth der Formel $nx^{\frac{1}{n}} - n$ dem Logarithmen von x um so mehr nähert, je größer man n annimmt, und daß diese Formel den wahren Werth des Logarithmen von x ausdruckt, wenn man n unendlich groß werden läßt. So wie nun ausgemacht ist, daß $x^{\frac{1}{2}}$ zwey, $x^{\frac{1}{3}}$ drey, $x^{\frac{1}{4}}$ vier verschiedene Werthe hat, ꝛc., so leidet

es

es auch keinen Zweifel, daß der Ausdruck $x^{\frac{1}{n}}$ unendlich viele Werthe in sich schließt. Es muß folglich diese unendliche Menge der Werthe von $x^{\frac{1}{n}}$ auch eine unendliche Menge von Werthen für lx geben, und also jede gegebene Zahl x unendlich viel Logarithmen haben.

19. Beym ersten Anblick scheint hiernach die obige Frage allerdings bejahet werden zu müssen. Allein wenn $(1 + \omega)^n = x$ soll gesetzt werden können, so muß man, da nicht nur $l(1 + \omega) = \omega$, sondern auch $(1 + \omega)^n = x$ seyn soll, (und beydes muß statt finden, wenn der geführte Beweis nicht fehlerhaft seyn soll,) entweder ω bloß positiv nehmen, und dann wird $x = (1 + \omega)^n$ allemal eine positive Zahl, die größer als 1 ist, oder, wenn man auch $l(1 - \omega) = -\omega$ setzen will, $(1 - \omega)^n$ nicht einer Zahl, die größer als 1 ist, sondern nur einem Bruche gleich annehmen, der desto kleiner wird, je größer n ist. Es gelten also die von Eulern gemachte Schlüsse nur in so fern allgemein, als ω positiv bleibt, und x eine Zahl bedeutet, die größer als 1 und also ebenfalls positiv ist. Dies nun vorausgesetzt, so ist auch nur in dem Falle $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$, und $\omega = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, wenn von den unendlich vielen Werthen, die $x^{\frac{1}{n}}$ haben würde, wenn man es wie $(+x)^{\frac{1}{n}}$ betrachtete, bloß der positive Werth genommen wird; und es hat demnach, wenn man auch sonst $x^{\frac{1}{n}}$ und $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ als eine unendlich vielförmige Funk-

Funktion von x betrachten kann, doch hier sowohl $x^{\frac{1}{n}}$ als $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ nicht mehr als einen Werth, und eben das gilt denn natürlicher Weise von $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = lx$, so daß also keine positive Zahl mehr als einen Logarithmen hat.

20. Um dies noch mehr zu bestätigen, so sey $l(1-\omega) = -\omega$, folglich $l(1-\omega)^2 = -2\omega$; $l(1-\omega)^3 = -3\omega$; und überhaupt $l(1-\omega)^n = -n\omega$. Ferner sey $(1-\omega)^n = z$, und also $1 - \omega = z^{\frac{1}{n}}$, wo aber offenbar wieder von $z^{\frac{1}{n}}$ bloß der absolute oder positive Werth genommen werden darf. Alsdann ist $\omega = z^{\frac{1}{n}} - 1$ und $l(1-\omega)^n = lz = n(z^{\frac{1}{n}} - 1)$. Da nun aber $1 - \omega$ ein ächter, obgleich von der Einheit nur um einen unendlich kleinen Theil unterschiedenen Bruch ist, so muß auch $(1-\omega)^n = z$ ein ächter, und zwar um so kleinerer Bruch $= \frac{1}{\infty}$, je größer n angenommen wird. Man findet also auf diesem Wege nichts weiter, als daß die Logarithmen der ächten Brüche negativ sind, weil $z^{\frac{1}{n}} - 1$ negativ ist, und desto größer werden, je kleiner die Brüche sind, zu welchen sie gehören. Aber daß zu jeder Zahl eine unendliche Menge von Logarithmen gehören solle, davon entdeckt sich hier auch nicht die geringste Spur.

21. Da also, wenn $l(1+\omega) = \omega$ soll gesetzt werden können, ω nichts weiter als eine unendlich kleine positive oder negative reelle Größe bedeuten kann, so muß man, wenn jede Zahl mehr als einen Logarithmen hat, dieselben auf andern Wegen aufzufinden suchen. Allein man nehme an, daß eine Zahl x außer dem bekannten Logarithmen, der m heißen mag, noch den negativen Logarithmen $-e$ habe. Nennt man die Basis a, so müßte dann, weil $lx = m$ ist, $x = a^m$, und weil außerdem auch $lx = -e$ ist, zugleich $x = a^{-e}$ seyn; oder man müßte annehmen wollen, daß eine Zahl durch ihren Logarithmen und die Basis des Systems, zu welchem dieser Logarithme gehört, noch nicht völlig bestimmt würde. Auf eine ähnliche Art würde x, wenn es außer dem Logarithmen m noch den unmöglichen Logarithmen $e\sqrt{-1}$ hätte, nicht bloß $= a^m$, sondern auch $= a^{e\sqrt{-1}}$ seyn, und es scheint demnach das sicherste zu seyn, daß man jeder positiven oder absoluten Zahl nicht mehr als einen Logarthmen beylege.

22. Eben das ergiebt sich mit ziemlicher Gewißheit aus dem bloßen Begriffe der Logarithmen. Die Logarithmen sind nemlich entweder Exponenten, die anzeigen, was für eine Dignität eine Zahl x von einer gegebenen beständigen Zahl a sey, oder Verhältnißzahlen, welche zu erkennen geben, wie eine Zahl x aus einer gegebenen beständigen Zahl a entstehe, im Grunde aber laufen beyde Vorstellungen auf eines hinaus. Nun sey $x = a^m$, so daß m irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bedeute. Annehmen, daß eine und dieselbe Zahl x unendlich viele Logarithmen habe, heißt daher behaupten, daß eine und dieselbe Zahl $x = a^m$ auch gefunden werden könne, wenn

man dieselbe aus a nach der Formel a^{-e} oder $a^{e\sqrt{-1}}$ sucht, und wer kann das behaupten?

23. Aber es hat ja Euler in der Absatz 18 angeführten Abhandlung die unendlich vielen Logarithmen, die eine jede positive Zahl hat, S. 158 — 161 in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe einzeln dargelegt? Die Quelle, woraus er sie abgeleitet hat, ist der aus $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ hergeleitete Satz, $y = 1l = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$, verbunden mit dem, $1A = 1l + 1A$. Nun kann man zwar in $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ nur unter der Bedingung $x = 1$ setzen, daß, so wie in $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ der Ausdruck $x^{\frac{1}{n}}$ nicht mehr als einen Werth haben kann, so auch $1^{\frac{1}{n}}$ in $n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$ nicht mehr als den Werth 1 habe. Allein da Euler das Folgende eigentlich aus dem aus $y = 1l = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$ fließenden Satze $(1 + \frac{y}{n})^n = 1$ herleitet, so darf man sich bey der Beurtheilung seiner Resultate nicht darauf berufen, sondern muß sich lediglich an den Satz $(1 + \frac{y}{n})^n = 1$ halten. Dieser Satz kann nun durchaus nicht bestehen, wofern nicht $y = 0$ gesetzt wird. Denn man nehme y außerdem an, wie man will, so wird

$(1 +$

$$(1 + \frac{y}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{y}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^2}{n^2} +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^3}{n^3} + \text{ꝛc.} =$$
$$1 + y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3\,4} + \text{ꝛc.}$$

nie $= 1$, und am allerwenigsten, wenn y einer unmöglichen Größe gleich gesetzt wird. Wenn man daher gleich ferner nach ganz richtigen Regeln $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ findet; so ist doch in dieser Formel λ noch nicht weiter bestimmt, als daß man dafür, überhaupt genommen, alle Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. setzen könne, und man muß also noch erst anderweitig woher bestimmen, wie viel von diesen Werthen λ wirklich bekommen müsse. Nun kann nur $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ seyn, wenn dabey $(1 + \frac{y}{n})^n = (1 \pm \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n = 1$ wird; und da dies bloß statt findet, wenn $\lambda = 0$ ist, so findet man durch das Eulerische Verfahren eigentlich nichts weiter, als was sonst schon allgemein bekannt ist, daß $1^1 = 0$ ist.

24. Da ich hier allgemein angenommenen Sätzen widersprechen muß, so wird es mir sehr angenehm seyn, wenn man alles das, was ich über die Logarithmen, deren Basis nicht absolute angenommen worden ist, gesagt habe, bloß als einen Versuch ansehen will, die, bisher denn doch noch nicht von allen Schwierigkeiten befreyte, Theorie von den Logarithmen durch einige genauere Unterscheidungen wenigstens von einigen dieser Schwierigkeiten zu befreyen. Die Vortheile, die daher entspringen können, brauche ich hier nicht aufzuzählen. Sind die Behauptungen, die ich vorgebracht habe, wahr, so wird sich ihr Nutzen in der

Folge von selbst finden; und habe ich mich geirret, so ist mein Name von zu geringer Bedeutung, als daß ich durch aufrichtige Vorlegung meiner Irrthümer irgend jemand zu verführen befürchten sollte. Ich will also noch eins und das andere, was mir nicht unwichtig scheint, hinzufügen.

25. Euler betrachtet die Formel $y = lx = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ als eine allgemein gültige Formel, selbst, wenn x negative genommen wird, und leitet daraus in der schon öfters angeführten Abhandlung S. 161. 162. den Satz her, daß die Logarithmen jeder negativen Zahl lauter imaginäre Größen sind. Nun soll sich doch nach dem, was Absatz 18 aus dieser Abhandlung mitgetheilt worden ist, der Werth der Formel $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ dem Logarithmen von x um so mehr nähern, je größer man n annimmt, und diese Formel den wahren Werth von x genau ausdrücken, wenn man n unendlich groß werden läßt. Man setze also für x irgend eine negative Zahl, und für n nach und nach immer größere positive aber ungerade Zahlen. Alsdann findet man für $x^{\frac{1}{n}}$ außer den unmöglichen Werthen auch allemal einen reellen negativen Werth, und es sollte folglich hiernach jede negative Zahl außer den imaginären auch einen reellen und zwar negativen Logarithmen haben, der, mit dem Logarithmen der gleich großen positiven Zahl verglichen, größer seyn würde. Ferner setze man für n nach und nach immer größere positive aber gerade Zahlen, und lasse x positiv seyn. Alsdann hat $x^{\frac{1}{n}}$ zwey einander entgegengesetzte sonst gleiche Werthe,

Werthe, und es müßte demnach $y = lx = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ einen doppelten, sowohl den Zeichen als der Größe nach verschiedenen, Werth haben. Die Folgen, die sich hieraus ziehen lassen, habe ich nicht nöthig herzusetzen.

26. Angenommen nun, daß zu jeder positiven Zahl nicht mehr als ein Logarithme gehöre, denn weiter reichen die in dem Vorhergehenden geführten Beweise nicht: so läßt sich solches auch leicht von den negativen und unmöglichen Zahlen darthun. Ist nemlich $\pm a$ die Basis eines Logarithmischen Systems, so ist jede negative und einfach unmögliche Zahl mit in dem Ausdrucke $(\pm a)^{\frac{m}{n}}$ enthalten, und folglich ihr Logarithme $\frac{m}{n}$. Sollte nun diese negative oder unmögliche Zahl auch noch einen andern Logarithmen $\frac{p}{q}$, der von $\frac{m}{n}$ wirklich verschiedene wäre, haben, so müßten $(\pm a)^{\frac{m}{n}} = (\pm a)^{\frac{p}{q}}$ einen Werth mit einander gemein haben, und wenn man diesen Werth $= r$ setzte, so müßte ferner, da man für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ zwey andere von gleichen Zählern und ungleichen Nennern z. B. $\frac{s}{t}$ und $\frac{s}{v}$ nehmen könnte, $r^{\frac{s}{t}} = r^{\frac{s}{v}}$ werden können, welches unmöglich ist.

27. Wenn man also die Basis eines Logarithmischen Systems, und folglich auch alle Zahlen absolute

nimmt, so kann man ohne alle Einschränkung behaupten, daß zu jeder Zahl nicht mehr als ein Logarithme, und zu jedem Logarithmen nicht mehr als eine Zahl gehöre, und dann auch allemal mit vollem Rechte $a^m = a^{\frac{nm}{n}}$ setzen. In diesem Falle haben also nicht nur gleiche Größen gleiche Logarithmen, sondern es gehören auch allemal zu gleichen Logarithmen gleiche Größen, und für diesen Fall ist daher auch die Lehre von den Logarithmen von allen Schwierigkeiten frey. Nimmt man die Basis nicht absolute, so finden allerdings bey dem Gebrauche der Logarithmen mancherley Schwierigkeiten statt, wofern man nicht alle bey der Rechnung sich ergebende der Basis entgegenstehende und unmögliche Werthe ausschließt, und zugleich die Basis bloß positiv annimmt; sobald man indeß dies thut, so hat auch hier jede positive Zahl nicht mehr als einen Logarithmen, und jeder Logarithme nicht mehr als eine positive Zahl, zu welcher er gehört, und man kann alsdann ebenfalls mit vollkommener Sicherheit von der Gleichheit zweyer Größen auf die Gleichheit ihrer Logarithmen, und von der Gleichheit zweyer Logarithmen auf die Gleichheit der zu ihnen gehörenden Größen schließen, und so auch jedesmal $a^{\frac{nm}{n}}$ für a^m setzen. Da sich nun unter dieser Einschränkung die positiven Zahlen von den absoluten, die mit ihnen einerley Logarithmen haben, in Ansehung der Größe gar nicht unterscheiden, so ist das ohnstreitig der Grund gewesen, warum man es in der Lehre von den Logarithmen für überflüssig gehalten hat, einen Unterschied zwischen der absoluten und positiven Basis, und den absoluten und positiven Zahlen zu machen.

28. Bey der im vorhergehenden Absatze festgesetzten Einschränkung ist indeß eine positive Zahl im Grunde mit der absoluten einerley, und das Zeichen + bey ihr hat weiter keine Bedeutung, als wenn vor ihr noch eine andere Zahl vorhergeht, und ist folglich entweder eigentlich das Zeichen der Addition, oder es steht so, daß es dem Begriffe der Zahl nicht die mindeste Bestimmung zusetzt. So lange man daher mit bloßen Zahlen zu thun hat, oder bey den Größen, die man untersucht, einzig und allein auf die Menge ihrer Theile sieht, so lange kann man auch die Logarithmen ohne alle Schwierigkeit gebrauchen, wenn man dieselben nur nach einer absoluten und nach einer positiven Basis unter der vorhin gedachten Einschränkung sich bekannt gemacht hat. Aber wenn man die Größen, welche man bey dem Gebrauche der Logarithmen findet, geometrisch construiren, oder die Lehrsätze von den Logarithmen bey allgemeinen Untersuchungen gebrauchen will, wo man sich die Zeichen + und — nicht als Zeichen der Addition und Subtraction, sondern als Zeichen des Positiven und Negativen zu denken hat: so werden die Sätze von den Logarithmen, die zu einer nicht absolute genommenen Basis gehören, schlechterdings unentbehrlich.

29. Um diese Sätze nochmals kurz zu wiederholen, so sind sie folgende.

Zu jeder Größe, sie mag nun positiv oder negativ, reell oder imaginär seyn, gehört ein möglicher Logarithme und nicht mehrere, und wenn die Basis, absolute betrachtet, größer als 1 ist, so gehört zu jeder positiven oder negativen ganzen Zahl, und zu jedem positiven oder negativen unächten Bruche ein positiver, zu jedem positiven oder negativen ächten Bruche hingegen ein negativer Logarithme.

Ferner: Zu jedem Logarithmen gehören nicht nur zwey einander entgegengesetzte sonst gleiche Zahlen, zu jedem positiven Logarithmen nemlich ganze Zahlen oder unächte Brüche und zu jedem negativen Logarithmen ächte Brüche, sondern es ist derselbe außerdem auch noch der Logarithme einer Menge unmöglicher Größen, nemlich aller derer, die mit den reellen Zahlen, zu welchen er gehört, auf einerley Art aus der positiven oder negativen Basis hervorgebracht werden können.

Drittens gehören zwar, wenn die Basis nicht absolute betrachtet wird, zu jeden zwey gleichen Größen gleiche Logarithmen, aber da jeder Logarithme zu mehr als einer Größe gehöret, so läßt sich nicht umgekehrt von der Gleichheit zweyer Logarithmen auf die Gleichheit jeder zweyer einzelnen zu ihnen gehörigen Größen schließen, sondern es ist nur immer eine von den Größen, die zu dem einen Logarithmen gehören, einer von den Größen des andern Logarithmen gleich.

Endlich ist der Logarithme jeder positiven oder negativen Größe bey einer nicht absolute betrachteten Basis kein anderer als der Logarithme der mit ihnen gleich großen absoluten Zahl, die aus der gleich großen absoluten Basis auf eben die Art gefunden werden kann. Mit andern Worten: Ist der Logarithme von f bey der absoluten Basis a gleich m, so ist auch m der Logarithme von $+f$ und $-f$, bey der Basis a, wenn dieselbe nicht absolute genommen wird.

30. Die bisher betrachteten Logarithmen waren insgesammt reell, selbst wenn sie zu unmöglichen Größen gehörten. Ob nun gleich, wenn man die Basis nicht absolute betrachtet, jede reelle oder mögliche Größe auch einen reellen Logarithmen und nicht mehrere hat, und außerdem auch

die

die reellen Logarithmen zu imaginären Größen gehören: so giebt es doch auch imaginäre Größen, deren Logarithmen ebenfalls imaginär sind. So ist $1a^{\sqrt[n]{m}} = \sqrt[n]{m}$, und da m sowohl positiv als negativ seyn kann, so enthält der Ausdruck $\sqrt[n]{m}$ allerdings unmögliche Werthe. Genau erwogen gehört aber auch hier zu jeder Größe nicht mehr als ein Logarithme, obgleich zu jedem Logarithmen, sobald die Basis nicht absolute betrachtet wird, mehrere Größen gerechnet werden müssen.

31. Was die Nothwendigkeit der Theorie der Logarithmen betrifft, wenn die Basis nicht absolute angenommen wird, so will ich hier darüber nur etwas weniges sagen, indem sich in der Folge öfters Gelegenheit zeigen wird, solche außer allen Zweifel zu setzen. Im vierzehnten Capitel beweiset Euler, §. 240., daß

$$\sin.nz = 2^{n-1}\sin.z.\sin.(\tfrac{\pi}{n} - z).\sin.(\tfrac{\pi}{n} + z).\sin.(\tfrac{2\pi}{n} - z).$$
$$\sin.(\tfrac{2\pi}{n} + z).\sin.(\tfrac{3\pi}{n} - z).\sin.(\tfrac{3\pi}{n} - z)\ \text{&c.}$$

sey, wenn man jedesmal so viel Faktoren nimmt als n Einheiten hat, und setzt darauf §. 241. hinzu, daß dieser Ausdruck sehr bequem sey, um darnach die Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel zu finden. Es muß also auch

$$1\sin.nz = (n-1)12 + 1\sin.z + 1\sin.(\tfrac{\pi}{n} - z) + 1\sin.(\tfrac{\pi}{n} + z) +$$
$$1\sin.(\tfrac{2\pi}{n} - z) + 1\sin.(\tfrac{2\pi}{n} + z) + 1\sin.(\tfrac{3\pi}{n} - z) + 1\sin.(\tfrac{3\pi}{n} + z)\ \text{&c.}$$

seyn, wenn man so viel Logarithmen der Sinus nimmt, als n Einheiten hat. Hier kann nun z sehr leicht so angenommen werden, daß unter den Faktoren, wodurch sin. nz

bestimmt wird, mehrere negativ werden, ohne daß deswegen die hergesetzten Behauptungen aufgehoben würden. Dergleichen Fälle machen nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man hier Logarithmen braucht, die zu einer nicht absoluten Basis gehören, und auch selbst dann, wenn man aus der letzten Formel durch die Differentiation andere Formeln ableitet. Braucht man hingegen bloß solche Logarithmen, die zu einer absoluten Basis gehören, so muß man zum wenigsten zuvor mit der gegebenen Formel in Ansehung der Zeichen ihrer Faktoren eine solche Veränderung vornehmen, daß man alle diese Faktoren als positiv betrachten kann.

32. Ferner findet man, wenn man Logarithmen braucht, die zu einer absoluten Basis gehören, aus jedem gegebenen Logarithmen und der Basis nicht mehr als eine zugehörige Größe. Wendet man daher Formeln, bey welchen dergleichen Logarithmen zum Grunde liegen, auf solche Fälle an, wo die Basis nicht absolute gedacht werden kann, so findet man darnach, wenn man aus den Logarithmen auf die zu ihnen gehörigen Größen schließen will, nicht alle Größen, von denen doch auf andern Wegen gezeigt werden kann, daß sie der Aufgabe ein Genüge thun. So ergiebt sich, wenn man die Formel für die Logarithmische Linie $a^x = y$ arithmetisch behandelt, zu jedem x nicht mehr als ein y, und doch läßt sich auf andere Art zeigen, daß zu jedem x ein positives und ein negatives y gehöre, und daß also auch eigentlich $a^x = \pm y$ gesetzt werden müsse, welches sich auch findet, wenn man ein Logarithmisches System zum Grunde legt, dessen Basis nicht absolute genommen ist.

33. Wenn man von den Größen, die zu einem Logarithmen gehören, nicht nur alle unmöglichen, sondern selbst die negativen ausschließt, so ist das im Grunde eben so viel, als

als ob man Logarithmen gebraucht, die zu einer absoluten Basis gehören, und alle Größen, mit welchen man zu thun hat, ebenfalls bloß absolute betrachtet. Dies kann zur Erklärung des Umstandes dienen, daß in diesem Falle die Resultate gleich sind, man mag das Positive von dem Absoluten unterscheiden oder nicht, denn man hat in diesem Fall den Einfluß, den die Setzung des Zeichens † oder die Verwechselung des Positiven mit den Absoluten haben könnte, durch die gedachte Einschränkung aufgehoben.

34. Zum Schlusse will ich noch die Methode hersetzen, nach welcher Hr. Prof. Bürja die Logarithmen der absoluten Zahlen berechnen lehrt. Man findet dieselbe in seinem selbstlernenden Algebristen, Berlin und Libau 1786. S. 164 f. Um aber die daselbst §. 12. stehende Aufgabe zu verstehen, muß man die S. 153. §. 2. gegebenen Erklärungen zu Hülfe nehmen. Größen exponenziren heißt erforschen, die wievielte Potenz eine Größe von einer andern Größe ist, oder zur wievielten Potenz eine Größe erhoben werden muß, daß sie einer andern gegebenen Größe gleich werde. Die eine gegebene Größe wird also als Wurzel angesehen, und soll hier eigentlich Basis genannt werden; die andere wird als Potenz betrachtet, und soll hier eigentlich Dignität genannt werden. Was herauskömmt ist der Exponent, oder eigentlich der Logarithmus. Außerdem braucht man noch dazu folgende Bezeichnung:

$\overset{a}{=}_{b}$, welches bedeutet, a durch b exponenziret.

35. So wie ich die angeführten Erklärungen mit des Hrn. Prof. Bürja's Worten mitgetheilt habe, so will ich solches auch mit der §. 12. vorkommenden und hieher gehörigen Aufgabe thun. Sie ist folgende.

Auf-

Aufgabe.

Eine bestimmte Zahl durch eine bestimmte Zahl exponenziren.

Vorbereitung. Es sey die Basis a, und der Logarithmus einer Zahl n sey = 23; 645, wo die drey letzten Ziffern Decimalbrüche vorstellen. So folget daraus

$$a^{23;645} = n$$

oder $$a^{20+3+\frac{6}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}} = n$$

oder $$a^{20} \cdot a^{3} \cdot a^{\frac{6}{10}} \cdot a^{\frac{4}{100}} \cdot a^{\frac{5}{1000}} = n$$

oder

$$(a^{10})^{2} \cdot (a^{1})^{3} \cdot (a^{\frac{1}{10}})^{6} \cdot (a^{\frac{1}{100}})^{4} \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^{5} = n.$$

Weil die Wurzel a gegeben ist, so können die Potenzen a^{10}, a^{1}, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, $a^{\frac{1}{1000}}$, als bekannt angenommen werden.

Wenn man die Größe a^{10} nach und nach zu ihren Potenzen erhebet, so wird man finden, daß $(a^{10})^{2}$ der Zahl n am nächsten kommen muß. Wäre also der Exponent 2 unbekannt, so würde man ihn finden, indem man nur beobachtete, welche Potenz von a^{10} der Zahl n am nächsten kömmt.

Nun dividire ich die ganze Gleichung beyderseits durch $(a^{10})^{2}$, und setze $n : (a^{10})^{2} = {}'n$; so kömmt

$$(a^{1})^{3} \cdot (a^{\frac{1}{10}})^{6} \cdot (a^{\frac{1}{100}})^{4} \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^{5} = {}'n.$$

Wenn ich die Größe a^{1} oder a nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so muß ich finden, daß $(a^{1})^{3}$ der Zahl $'n$ am nächsten kömmt. Folglich würde ich auf diese Art den Exponenten 3 entdecken, wenn er unbekannt wäre.

Ich dividire vorige Gleichung durch $(a^{1})^{3}$, und setze $'n : (a^{1})^{3} = {}''n$; so kömmt

(a

$$(a^{\frac{1}{10}})^6 \cdot (a^{\frac{1}{100}})^4 \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^5 = {}''n.$$

Wenn ich die Größe $a^{\frac{1}{10}}$ nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so wird sich finden, daß $(a^{\frac{1}{10}})^6$ der Zahl $''n$ am nächsten kömmt. Folglich könnte der Exponent 6 auf dieser Art entdecket werden.

Nun dividire man die Gleichung durch $(a^{\frac{1}{10}})^6$, und bezeichne $''n : (a^{\frac{1}{10}})^6$ durch $'''n$, so kömmt

$$(a^{\frac{1}{100}})^4 \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^5 \cdot = {}'''n.$$

Man kann auf die nemliche Art fortfahren, und nach und nach die Exponenten 4 und 5 erforschen, wenn sie unbekannt sind. Also erhält man zuletzt alle Ziffern des Logarithmus 23;645. Uebrigens ist es klar daß die nemlichen Schlüsse sich auf einen jeden Logarithmus anwenden lassen.

Der Kürze wegen, wollen wir solche Größen a^{100}, a^1, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, u. s. f. Hauptpotenzen von a nennen. Erhebet man diese wiederum zur 1sten, 2ten, 3ten, u. s. f. bis zur 9ten Potenz, so bekömmt man $(a^{100})^1$, $(a^{100})^2$, $(a^{100})^3$, u. s. f. $(a^{10})^1$, $(a^{10})^2$, $(a^{10})^3$, u. u. f. $(a^1)^1$, $(a^1)^2$, $(a^1)^3$, u. s. f. $(a^{\frac{1}{10}})^1$, $(a^{\frac{1}{10}})^2$, $(a^{\frac{1}{10}})^3$, u. s. f. Diese Größen wollen wir Nebenpotenzen von a nennen, und ihre neuen Exponenten sollen Nebenexponenten seyn.

Auflösung. Die Schlüsse, welche wir jetzt gemacht haben, führen auf folgende Regel zur Erforschung der bestimmten Exponenten.

Man suche erstlich die Hauptpotenz und dann die Nebenpotenz der Basis, welche der gegebenen Dignität am nächs-

nächsten kommen. Hierauf dividire man die gegebene Dignität durch die gefundene Potenz.

Man nehme die Hauptpotenz, welche nächst kleiner ist, als die vorher gebrauchte. Man suche die Nebenpotenz, welche dem gefundenen Quotienten am nächsten kömmt. Man dividire den Quotienten durch die gefundene Potenz.

Man wiederhole dieses Verfahren, so oft man es für nöthig halten wird.

Man schreibe die Nebenexponenten nach einander auf, so wie man sie entdecket. Sie sind nichts anders, als die Zifern des gesuchten Logarithmus.

Man setze das Dezimalzeichen vor die Zifer, die aus dem Hauptexponenten $\frac{1}{10}$ entstanden ist.

Exempel. Es wird verlanget

$$\frac{8765102325977}{2}$$

das ist, man will wissen, zur wievielten Potenz 2 erhoben werden muß, daß die obere Zahl herauskomme. Man suche erstlich die Hauptpotenzen von 2.

$$2^{10} = 1024$$
$$2^{1} = 2$$
$$2^{\frac{1}{10}} = 1;07177\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{100}} = 1;00695\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{1000}} = 1;00069\ldots. \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Die gebrochenen Potenzen $2^{\frac{1}{10}}$, $2^{\frac{1}{100}}$, $2^{\frac{1}{1000}}$ kann man finden, indem man wechselsweise die zweyte und fünfte Wurzel ausziehet. Denn $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ferner $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2^{\frac{1}{10}}}} = \left((2^{\frac{1}{10}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = (2^{\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{100}}$ u. s. f. Die Nebenpotenzen findet man, wenn man jede Hauptpotenz

tenz einigemal mit sich selbst multipliziret Dieses vorausgesetzt, wird die Operation also zu stehen kommen.

	Dignität.	Basis.	Logarithmus.
	8765102325977	2	42; 994....
Div.	$10995116277776 = (2^{10})^4$		
Quoz.	7; 97181		
Div.	$4 = (2^1)^2$		
Quoz.	1; 99295		
Div.	$1; 86608 = (2^{\frac{1}{10}})^9$		
Quoz.	1; 06799		
Div.	$1; 06410 = (2^{\frac{1}{100}})^9$		
Quoz.	1; 00337		
Div.	$1; 00279 = (2^{\frac{1}{1000}})^4$		
Quoz.	1; 00058		

2c. 2c.

Anmerkung. Anstatt daß man die Hauptpotenz erhebet, um den Nebenexponenten zu finden, kann man auch durch die Hauptpotenz so viel mal als möglich dividiren. Die Anzahl der Divisionen giebt den Nebenexponenten. Z. E. Wenn man gleich anfänglich die gegebene Dignität durch 2^{10} oder 1024, den Quotienten wieder durch 1024, u. s. f. dividiret hätte, so würde man gefunden haben, daß man 4mal dividiren kann, und der letzte Quotient wäre gewesen 7; 97181. Man nehme aaaaac, so kann ich entweder durch a^4 oder 4mal durch a dividiren, der letzte Quotient ist in beyden Fällen c.

VIII.

Zusätze zum achten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

1. Vorläufig, §. 126 — 131.
   a. Anzeige des Zusammenhangs dieses Capitels mit dem vorhergehenden, und der Bedeutung des Buchstabens π in der nun folgenden Untersuchung, §. 126.
   b. Verschiedene aus den Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie entlehnte, nebst andern aus ihnen abgeleiteten Formeln, § 127 — 131.
      α. Die aus den Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie entlehnte Formeln, §. 127. 128.
      β. Benutzung derselben durch verschiedene mit ihnen vorgenommene Combinationen zur Erfindung anderer Formeln, §. 128 — 131.
         aa. solcher, nach welchen der Sinus und Cosinus eines Winkels mit dem Cosinus und Sinus eines andern Winkels verwechselt werden kann, §. 128.
         bb. solcher, wodurch die Sinus und Cosinus derer Winkel bestimmt werden, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten, §. 129.
         cc. solcher, wodurch der Sinus und Cosinus eines Winkels aus dem Cosinus des doppelt so großen Winkels gegeben wird, §. 130, nebst einigen andern,

andern, in welchen die trigonometrischen Linien zweyer Winkel mit den trigonometrischen Linien der Hälften ihrer Summe und ihrer Differenz mit einander verglichen werden, §. 131.

2. Entwickelung der trigonometrischen Linien durch unendliche Reihen, in welchen diese Linien mit den Bogen, zu welchen sie gehören, verglichen werden, §. 132—137.
   a. diese Reihen selbst, §. 132—135.
      α. Reihen für die Sinus und Cosinus, §. 132—134.
         aa. Reihen, in welchen die Sinus und Cosinus solcher Winkel, die Vielfache eines andern Winkels sind, mit den Sinus und Cosinus des einfachen Winkels verglichen werden, §. 132. 133.
         bb. hieraus fließende Reihen, in welchen die Sinus und Cosinus aus den Bogen, zu welchen sie gehören, bestimmt werden, §. 134.
      β. Reihen, in welchen die Tangenten und Cotangenten mit den Bogen, zu welchen sie gehören, verglichen werden, §. 135.
   b. Anleitung zum vortheilhaften Gebrauche der gedachten Reihen zur Erfindung der trigonometrischen Linien aller Bogen oder Winkel, §. 136. 137, nemlich
      α. der Sinus und Cosinus, §. 136.
      β. der Tangenten und Cotangenten, §. 137.
      γ. der Secanten und Cosecanten, §. 137.
3. Vergleichung der Kreisgrößen mit den Exponential-Größen und den Logarithmen. §. 138—142.
   a. diese Vergleichung selbst, §. 138. 139.
      α. Formeln, wonach die unmöglichen Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus reeller Bogen, §. 138.
      β. Formel, wonach die unmöglichen Logarithmen auf Kreisbogen reducirt werden können, §. 139.

b. Benutzung der gefundenen Formel zur Erfindung einer andern die Bestimmung eines Kreisbogens aus seiner Tangente betreffenden, §. 140.

α. Formel, welche diese Bestimmung enthält, §. 140.

β. Gebrauch dieser Formel zur Erfindung des Verhältnisses des halben Umfanges eines Kreises zum Radius, §. 141. 142.

aa. um dieses Verhältniß darnach unmittelbar zu bestimmen, §. 141.

bb. um solches nach einer andern daraus abgeleiteten zu eben dieser Absicht noch bequemern Formel zu finden, §. 142.

B. Zusatz zu §. 133.

1. Daß

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$$

sey, fließt aus dem von Eulern geführten Beweise bloß für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Da indeß, wenn n eine ganze positive Zahl bleibt, auch

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{2n} = \cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz$$

seyn muß, so bekommt man, wenn man jene Formel durch diese dividirt,

$$\frac{(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{2n}} = \frac{\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz}$$

oder

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1} \sin. z)^{-n} = \cos. -nz \pm \sqrt{-1}. \sin. -nz.$$

Denn einmal ist $\cos. nz = \cos. -nz$, und $\sin. -nz = -\sin. nz$, und folglich $\pm \sqrt{-1}. \sin. -nz = \mp \sqrt{-1}. \sin. nz$. Ferner ist

$$\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz.$$

$$=$$

$$(\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz) \times (\cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz)$$

wel-

welches zu finden man nur wirklich multipliciren, und das Produkt nach Formel 1. 2. 3. und 4 des 130sten §. verändern darf. Folglich ist auch

$$\frac{\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz} = \cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz$$

und da nun $\cos. nz = \cos. -nz$, und $\mp\sqrt{-1}. \sin. nz = \pm\sqrt{-1}. \sin. -nz$ ist, so ist hieraus

$$\frac{\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz} = \cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz =$$

$$\cos. -nz \pm \sqrt{-1}. \sin. -nz = (\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz)^{-n}$$

2. Ferner ist, wenn auch p eine ganze Zahl bedeutet

$$(\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z)^p = \cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z$$

und also $\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z$ die pte Wurzel aus $\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z$, oder

$$\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin z)^{\frac{1}{p}}.$$

Nun sey auch m eine ganze Zahl, so wird

$$(\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z)^m = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{\frac{m}{p}},$$

folglich

$$\cos. \frac{m}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{m}{p} z = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{\frac{m}{p}}.$$

3. Hiernach gilt also der Satz, daß

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$$

sey, nicht nur für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl, sondern auch, wenn es eine negative Zahl oder ein Bruch ist. Behandelt man ferner die für den positiven Bruch-Werth von n gefundene Formel, wie Absatz 1 die für den ganzen positiven Werth eben dieses Buchstabens schon von Eulern festgesetzte: so überzeugt man sich auch davon, daß $\frac{m}{p}$ sowohl

positiv als negativ genommen werden könne. Endlich läßt sich für jede Irrational-Zahl auf dem Wege der Näherung ein Bruch finden, den man für sie setzen kann und dadurch ist denn der obige Satz zugleich für die Irrational-Werthe von n bewiesen.

C. Zusatz zu §. 140.

1. Da ich in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, Absatz 8 bis 11, gezeigt habe, daß die Formel

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{&c.}$$

nach dem von Eulern in diesem Capitel geführten Beweise bloß für den Fall dargethan worden, wenn x einen ächten Bruch bedeutet: so entsteht beym gegenwärtigen § die Frage: Ob nicht darin die gedachte Formel über ihre Grenzen ausgedehnt werde, indem für x die imaginäre Größe $\sqrt{-1} \times \text{tang.}\, z$ gesetzt wird? Müßte man nicht in den Formeln $a^\omega = 1 + k\omega$, und $\omega = l(1 + k\omega)$, §. 114, desgleichen in $(1 + k\omega)^i = x$; und $i\omega = \frac{i}{k}((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1)$, §. 119, a, k, x und ω schlechterdings als unbenannte Zahlen betrachten, wie solches bey einiger Ueberlegung von selbst einleuchtet: so ließe sich vielleicht darauf antworten, daß man $\sqrt{-1} \times \text{tang.}\, z$ als einen ächten benannten Bruch, dessen Name $\sqrt{-1}$ sey, ansehen könne, und daß alles das, was von Zahlen überhaupt gelte, auch bey den Arten derselben statt finden müsse. Allein da aus dem angeführten Grunde die zu Anfange des § stehende Formel bloß für die unbenannten Zahlen erwiesen ist, so läßt sich daran mit nicht dem geringsten Rechte denken.

2. Es scheint also allerdings zugegeben werden zu müssen, daß Euler den Satz:

$$1\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ꝛc.};$$

in dem oben stehenden § nicht mit der erforderlichen Befugniß gebrauche. Allein da das, was Euler vermittelst dieses Satzes in dem gedachten §. und in den beyden auf ihn folgenden gefunden hat, eben so wahr als wichtig ist, so wird dadurch in einem sehr hohen Grade wahrscheinlich, daß der Satz,

$$1\frac{1+1}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ꝛc.}$$

so wie auch die beyden, aus welchen er hergeleitet worden, eines weitern Umfangs fähig seyn, als ihnen nach Zusatze B zum siebenten Capitel zukömmt; und es frägt sich daher, theils, ob sich solches so verhalte? theils, wenn dieses ist, wie sich alsdann die obige Einschränkung derselben mit dieser Erweiterung ihrer Grenzen vertrage?

3. Vorausgesetzt, daß $d.1x = \frac{dx}{x}$ ist, x mag eine Größe bedeuten, was für eine es will, so läßt sich vermittelst der Differential-Rechnung, (denn zu dieser muß man hierbey wohl seine Zuflucht nehmen, wenigstens sehe ich mich genöthiget, am gegenwärtigen Orte eine Ausnahme von dem Vorsatze zu machen, in diesem Werke nichts aus der Differential-Rechnung zu berühren,) sehr leicht beweisen, daß die in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, Absatz 8—11, festgesetzten Einschränkungen für die daselbst für $1(1+x)$, $1(1-x)$, $1\frac{1+x}{1-x}$, gefundenen Formeln wegfallen können, und daß alle diese Formeln ihre Gültigkeit behalten, man

mag darin für x eine Größe setzen, welche man will. Denn setzt man zuvörderst

$$l(1 \pm x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{&c.}$$

welches allemal erlaubt ist, wofern man die Werthe von A, B, C, D, &c. erst aus dieser Gleichung bestimmt, so erhält man, wenn man differentiirt,

$$\frac{\pm dx}{1 \pm x} = B\,dx + 2Cx\,dx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{&c.}$$

und wenn man beyde Hälften dieser Gleichung durch dx dividirt,

$$\frac{\pm 1}{1 \pm x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{&c.}$$

und hieraus durch die Multiplication mit $1 \pm x$

$$\pm 1 = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{&c.}$$
$$\pm Bx \pm 2Cx^2 \pm 3Dx^3 \pm 4Ex^4 \pm \text{&c.}$$

Da nun x als eine veränderliche Größe jeden Werth haben kann, so fließt hieraus, wenn man $x = 0$ setzt

$$B = \pm 1,$$

und da B nicht anders $= \pm 1$ seyn kann, als wenn für jeden andern Werth für x

$$0 = + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{&c.}$$
$$\pm Bx \pm 2Cx^2 \pm 3Dx^3 \pm 4Ex^4 \pm \text{&c.}$$

ist, so ist dadurch auch die Wahrheit dieser Gleichung erwiesen Aus ihr aber wird

$$2C \pm B = 3D \pm 2C = 4E \pm 3D = 5F \pm 4E = 0 \text{ &c.}$$

folglich, da $B = \pm 1$ ist,

$$C = -\frac{1}{2};\ D = \pm\frac{1}{3};\ E = -\frac{1}{4};\ F = \pm\frac{1}{5};\ \text{&c.}$$

und also

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \text{&c.}$$

4.

4. Läßt sich nun in dieser Formel für x jede Größe setzen, so braucht das weiter nicht bewiesen zu werden, daß solches auch in der Formel

$$1\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{&c.}$$

erlaubt sey, indem dieselbe aus jener auf eine solche Art abgeleitet ist, daß in ihr alle die Werthe für x müssen gesetzt werden können, welche man in jener dafür setzen kann. Und was die imaginären Werthe betrifft, so setze man, wenn man sich in Ansehung ihrer durch einen besondern Beweis überzeugen will,

$$1(1 \pm z\sqrt{-1}) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{&c.}$$

Alsdann findet man, wenn man wieder so wie vorhin verfährt, nach und nach

$$\frac{\pm\sqrt{-1}.dz}{1 \pm z\sqrt{-1}} = B\,dz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz + \text{&c.}$$

$$\frac{\pm\sqrt{-1}}{1 \pm z\sqrt{-1}} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \text{&c.}$$

$$\pm\sqrt{-1} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{&c.}$$
$$\pm\sqrt{-1}.Bz \pm 2\sqrt{-1}.Cz^2 \pm 3\sqrt{-1}.Dz^3 \pm \text{&c.}$$

$$B = \pm\sqrt{-1}$$

$$2C \pm \sqrt{-1}\,B = 3D \pm 2\sqrt{-1}.C = 4E \pm 3\sqrt{-1}.D = 0, \text{&c.}$$

$$C = +\frac{1}{2};\ D = \mp\frac{\sqrt{-1}}{3};\ E = -\frac{1}{4};\ F = \pm\frac{\sqrt{-1}}{5};\ \text{&c.}$$

$$1(1 \pm z\sqrt{-1}) = \pm z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} \mp \frac{z^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \frac{z^5\sqrt{-1}}{5} - \text{&c.}$$

und eben dieses erhält man aus der Formel am Ende des vorhergehenden Absatzes, wenn man darin $z\sqrt{-1}$ für x setzt.

5. Hiernach ist also das keinem Zweifel unterworfen, daß die für $l(1+x)$, $l(1-x)$, und $l\frac{1+x}{1-x}$ bekannten Formeln für x jeden Werth zulassen, wenn für jeden Werth von x, er sey positiv oder negativ, reell oder imaginär, $d.lx = \frac{dx}{x}$ ist; allein dieses muß denn auch, ehe man weiter schließt, zuvor außer allen Zweifel gesetzt seyn, und ich darf hier diese Untersuchung um so weniger unterlassen, da sonst die in den Zusätzen zum siebenten Capitel geäußerten Behauptungen von einer Seite angegriffen werden zu können scheinen mögten, von welcher sie doch, genau betrachtet, nur noch mehr Bestätigung erhalten.

6. Euler beweiset den Satz, daß, wenn $y = lx$ gesetzt wird,

$$dy = \frac{dx}{x}$$

sey, im ersten Theile seiner Institutionum Calculi differentialis, im sechsten Capitel, §. 180. für die hyperbolischen Logarithmen auf folgende Art. Setzt man $y = lx$, so geht, wenn man $x + dx$ für x nimmt, y in $y + dy$ über Es wird folglich

$$y + dy = l(x + dx), \text{ und } dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \tfrac{dx}{x}).$$

Da nun, wenn die hyperbolischen Logarithmen genommen werden,

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \text{&c.}$$

ist, so ergiebt sich, wenn man $\frac{dx}{x}$ für z in diese Formel bringt,

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{&c.}$$

und

und da alle Glieder dieser Reihe vom zweyten an gegen das erste verschwinden, so ist

$$dy = \frac{dx}{x}$$

7. Zu diesem Beweise fügt er im 181sten § noch folgenden. Wenn p irgend eine Zahl bedeutet, und ω unendlich klein angenommen wird, so kann man den Logarithmen von p auf die Art ausdrucken, daß man

$$lp = \frac{p^{\omega} - 1}{\omega}$$

setzt. Hieraus ergiebt sich durch die Differentiation

$$d.lp = d.\ \frac{1}{\omega} p^{\omega} = p^{\omega-1} dp = \frac{dp}{p}$$

weil ω als eine unendlich kleine Größe in $p^{\omega-1} dp$ gegen -1 verschwindet.

8. Allein durch beyde Beweise wird offenbar die Richtigkeit der Formel, $dy = d.lx = \frac{dx}{x}$ nicht weiter dargethan, als so weit ohne Differential-Rechnung die Richtigkeit der Formeln

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{und } lp = \frac{p^{\omega} - 1}{\omega}$$

erwiesen worden ist, und also bloß für den Fall, wenn von den Logarithmen absoluter Zahlen die Rede ist, und im Fall diese Zahlen als positiv angesehen werden, solches unter der S. 501. f. Absatz 27 und 28 beschriebenen Einschränkung geschieht. Nun kann man zwar die obige Formel auch geometrisch an der Logarithmischen Linie darthun, aber man gewinnt dadurch in Ansehung des Umfangs derselben nichts, und es scheinen demnach die Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc. und}$$

$$l\frac{1 \dagger x}{1 - x} = \frac{2x}{1} \dagger \frac{2x^3}{3} \dagger \frac{2x^5}{5} \dagger \frac{2x^7}{7} \dagger \text{ꝛc.}$$

selbst von der Differential-Rechnung keine Erweiterung zu erwarten zu haben.

9. Wahr muß es indeß doch seyn, daß man in der Formel $dy = d.lx = \frac{dx}{x}$ für x jede Größe, sie mag positiv oder negativ, eine ganze oder gebrochene Zahl, reell oder imaginär seyn, setzen könne; denn wie wäre es sonst möglich, daß man bey dem häufigen und mannigfaltigen Gebrauche dieser Formel dennoch durch dieselbe zu keinem Irrthume verführt worden wäre? Die Art, wie ich mir hier die Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen gesucht habe, und welche ich bey dieser Gelegenheit Kennern zur Prüfung vorlegen will, ist folgende.

10. Ich habe in den Zusätzen zum siebenten Capitel zu zeigen gesucht, daß die Logarithmen, wenn die Basis ihres Systems und folglich auch die Zahlen, zu welchen sie gehören, nicht absolute genommen werden, nicht bloß zu positiven sondern auch zu negativen, ja selbst zu einer unbegrenzten Menge imaginärer Größen gehören, jeder einzelne Logarithme nemlich zu allen den Größen, welche mit der positiven, zu welcher er gehört, aus einer Größe und durch einerley Erhebung zu Dignitäten und Extraction der Wurzel entspringen. So findet man z. B. wenn man den Ausdruck $\sqrt[4]{(\dagger x4)}$ entwickelt, $\dagger x$, $-x$, $\dagger x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$, und ist nun $x = a^m$, und $\dagger a$ die Basis eines Logarithmischen Systems, so ist $lx4 = la^{4m} = 4m$, und

$$l(\sqrt[4]{x4}) = \tfrac{1}{4}.\,4m = m = l \dagger x = l - x = l \dagger x\sqrt{-1}$$

=

$= 1 - x\sqrt{-1}$. Eben so gehört überhaupt der Logarithme, der zu $\pm x$ gehört, da $\pm x$ einer von den Werthen ist, die in $(\pm x)^{\frac{2n}{2n}}$ begriffen sind, auch zu $-x$, weil auch $-x$ ein Werth von $(\pm x)^{\frac{2n}{2n}}$ ist, und außerdem noch zu allen imaginären Größen, die in $(\pm x)^{\frac{2n}{2n}}$ enthalten sind, und deren Menge desto größer wird, je größer man n annimmt. Dies also als ausgemacht vorausgesetzt, und man muß entweder es zugeben, oder die Logarithmen gar nicht bey wirklich positiven und negativen, und noch weniger bey imaginären Größen brauchen; so weiß man, daß für jede Größe von x zu $\pm x$, $-x$, $\pm x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$ nicht mehr als ein Logarithme gehört. Da nun eine und dieselbe Größe nicht mehr als ein Differential hat, und der Satz, daß $d.l \pm x = d.lx = \frac{dx}{x}$ sey, durch die vorhin angeführten Beweise hinlänglich dargethan ist: so ist klar, daß auch $d.l - x = d.l \pm x\sqrt{-1} = d.l - x\sqrt{-1} = \frac{dx}{x}$ seyn muß. Aber es ist auch $\frac{-dx}{-x}$, desgleichen $\frac{\sqrt{-1}.dx}{\sqrt{-1}.x}$, und $\frac{-\sqrt{-1}.dx}{-\sqrt{-1}.x} = \frac{dx}{x}$, und man findet folglich das Differential des Logarithmen einer negativen Größe $-x$, und der imaginären Größen von der Form $\pm x\sqrt{-1}$, wenn man solches nach der Formel $d.lz = \frac{dz}{z}$ sucht, indem man darin für z allenthalben die Größe setzt, deren Logarithmen-Differential man verlangt.

11. Hier hätte sich also eine von den Gelegenheiten gefunden, deren ich S. 505. Absatz 31. gedacht habe. Allein wenn die Formel $d.lz = \frac{dz}{z}$ für jeden Werth von z gilt, und wer darf solches, selbst wenn er den hier gegebenen Beweis nicht brauchen will, leugnen, da darauf in der Differential- und Integral-Rechnung so viel beruhet? so ist dadurch auch, wie schon gesagt, die Gültigkeit der Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc., und}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

für jeden Werth von x außer allen Zweifel gesetzt; und nun muß man folglich auch zugeben, daß

$$1 - 2 = -3 - \frac{9}{2} - \frac{27}{3} - \frac{81}{4} - \frac{243}{5} - \text{ꝛc.}$$

und zugleich

$$1 - 2 = 2(3 + \frac{27}{3} + \frac{243}{5} + \frac{2187}{7} + \text{ꝛc.})$$

sey, indem man nur, um jene Bestimmung zu finden, in der Formel

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc.}$$

und um diese zu erhalten, in der Formel

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

$x = 3$ setzen darf. Hier entstehen aber neue Schwierigkeiten. Sollen die angeführten Formeln bloß in den in dem Zusatze B zum siebenten Capitel festgesetzten Einschränkungen gelten? Wie kann denn die Differential-Rechnung sie als allgemein gültige Formeln darstellen? Oder will man sie

für

für jeden Werth von x gültig annehmen. Wie soll man sich dann den doppelten unendlich großen Logarithmen denken, den man dabey durch sie für jede negative Zahl zu finden im Stande ist? Wie soll man ferner das erklären, daß man nach keiner von diesen Formeln den unmöglichen Logarithmen, den nach den gewöhnlichen Vorstellungen jede negative Zahl haben soll, und eben so wenig den reellen Logarithmen, der ihr nach meiner Vorstellungsart zukommt, findet? Endlich, wie kann eine jede negative Zahl außer den reellen Logarithmen, den ich ihr beygelegt habe, noch zwey andere reelle, einen positiven und einen negativen, und beyde unendlich groß, und jenen, soweit man hier vergleichen darf, größer als diesen haben, da doch allgemein behauptet wird, daß selbst jeder positiven Zahl nicht mehr als ein reeller Logarithme zukomme, und ich so gar keiner Zahl mehr als einen Logarithmen eingeräumt habe? So groß auch diese Schwierigkeiten zu seyn scheinen, so sind sie gleichwohl nichts weniger als unübersteiglich, indem die Quelle davon lediglich in einem nicht hinlänglich deutlichen und bestimmten Begriffe von den positiven und negativen Zahlen und von den Logarithmen liegt. Ich will versuchen, sie auf eine befriedigende Art aus dem Wege zu räumen, muß aber dabey um Erlaubniß bitten, einige von den Vorstellungsarten, die ich bereits in meinen Briefen über die Buchstabenrechnung und Algebra, so wie auch in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gebraucht habe, auch hier gebrauchen, und dieselben, um den Leser des Gegenwärtigen die Mühe des Nachsehens zu ersparen, zum voraus kurz mittheilen zu dürfen.

12. Daß Zahlen Mengen von Einheiten sind, ist allerdings eine richtige Vorstellung, allein man reicht damit nicht aus, wenn man die Regeln der Arithmetik weiter als

auf

auf die absoluten und unbenannten Zahlen ausdehnen will, und mehr zu thun hat, als zu addiren und zu subtrahiren. Denn will man sich jede Zahl bloß als eine Menge von Einheiten denken, so ist eine benannte Zahl auch weiter nichts als eine Menge benannter Einheiten, und eben so jede positive Zahl bloß eine Menge positiver, und jede negative Zahl bloß eine Menge negativer Einheiten. Allein was soll man sich dabey unter der Multiplication, Division ꝛc. mit einer benannten Zahl vorstellen? Oder soll man sagen, daß man in keinem Sinne mit einer benannten Zahl multipliciren oder dividiren könne? Wie kann man alsdann in der analytischen Geometrie von Produkten gerader Linien, und in der angewandten Mathematik von Produkten aus Kräften in ihre Entfernungen u. d. gl. reden? Und da sich die benannten Zahlen von den unbenannten bloß darin unterscheiden, daß sie außer der Menge der Theile, welche diese allein zu erkennen geben, auch noch die Art der Theile anzeigen, und also außer den wesentlichen Eigenschaften der Zahlen nach etwas Zufälliges ausdrucken: so müßte man, wenn man die Multiplication und Division benannter Zahlen nicht gelten lassen wollte, auch die Multiplication und Division positiver und negativer Zahlen verwerfen, denn im Grunde sind ja die positiven und negativen Zahlen nichts anders, als eine besondere Art von benannten Zahlen. Es ist daher besser, wenn man sich die Zahlen als Begriffe, welche die Entstehungsart einer Größe aus der ersten absoluten Einheit, oder aus Eins darstellen, und die Ziffern als die Zeichen dieser Begriffe gedenkt; und demnach jede absolute Zahl weiter nichts anzeigen läßt, als daß man die erste absolute Einheit oder Eins, ohne allen weitern Zusatz, mehrere Mal nehmen, den benannten und positiven und negativen Zahlen aber die Bedeutung giebt, daß man darnach

nach zuvörderst die erste absolute Einheit mehrere Mal nehmen, und darauf der gefundenen Menge den Namen oder das Zeichen der gegebenen Zahl zusetzen solle.

13. Um von dieser Aumerkung an dem gegenwärtigen Orte weiter keinen Gebrauch zu machen, als den, um dessen willen ich sie habe hersetzen müssen, so ist eigentlich unter zwey entgegengesetzten sonst gleichen Zahlen, wenn man beyde aus der ersten absoluten Einheit entstehen läßt, in Ansehung dieser Entstehungsart, im Allgemeinen betrachtet, kein Unterschied, indem man bey der einen die erste absolute Einheit eben so vielmal als bey der andern nehmen, und dann auch bey der einen sowohl als bey der andern die erhaltene absolute Zahl durch Hinzufügung einer zufälligen Bestimmung modificiren muß. Wollte man hieraus die Folge herleiten, daß auf diese Weise in Ansehung der Entstehungsart aller Unterschied zwischen den positiven, negativen, und benannten Zahlen jeder Art, selbst wenn ihr Name eine unmögliche Größe ausdruckt, wegfalle, wofern nur bey allen diesen Zahlen eine und dieselbe Zifer statt finde, und also die Entstehungsart von $+x$, von $-x$, von $+x\sqrt{-1}$, von $-x\sqrt{-1}$ u. d. gl. aus der ersten absoluten Einheit dieselbe seyn müsse: so läßt sich dawider nichts einwenden, es wird sich aber bey genauer Ueberlegung auch finden, daß sich dieses, so lange man beym Allgemeinen stehen bleibt, sehr wohl behaupten lasse, und am allerwenigsten steht daher wegen der aus jener Behauptung hier zu ziehenden Folgen etwas zu befürchten. Wenn also die Entstehungsart einer nicht absoluten Zahl aus der ersten absoluten Einheit gegeben ist, so muß entweder dabey die zufällige Bestimmung ausdrücklich angezeigt werden, wodurch die gedachte Zahl zu einer nicht absoluten Zahl wird, oder es wird diese Zahl durch die gedachte Entstehungsart nicht

genau

genau bestimmt; und ist die erwähnte zufällige Bestimmung bereits gegeben, so bleibt in Ansehung der Entstehungsart der Zahl aus der ersten absoluten Einheit nichts weiter anzuzeigen übrig, als wie vielmal man diese zu nehmen habe.

14. In einem Logarithmischen Systeme werden nun alle Zahlen als aus der Basis durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln entstanden betrachtet, und die Exponenten, welche jedesmal anzeigen, wie man die Basis durch die Erhebung zu Dignitäten und die Extraction der Wurzel verändern müsse, um gegebene Zahlen zu finden, die Logarithmen dieser Zahlen genannt. Dabey nimmt man die Basis der Bequemlichkeit wegen größer als die Einheit an, so daß die Logarithmen aller Zahlen, die größer als die Einheit sind, positiv, und die Logarithmen aller ächten Brüche negativ werden. Wird nun außerdem die Basis auch absolute angenommen, so ist der Logarithme hinlänglich, um jede Zahl genau zu bestimmen, weil dann jede dieser Zahlen auch absolute genommen werden muß; legt man aber eine nicht absolute Zahl zum Grunde, so führt jeder Logarithme $\pm m$, insbesondere, wenn man ihn im $\pm \frac{nm}{n}$ verwechselt, auf mehr denn eine Zahl, und es wird also dadurch bloß die Zifer dieser Zahlen, nicht aber die Einheit oder das Zeichen bestimmt, welches man sich dabey gedenken muß, um sie vollkommen zu kennen. Wenn also eine Zahl durch ihren Logarithmen gegeben wird, so findet man, wenn man die Basis nach diesem Logarithmen behandelt, am Ende weiter nichts, als wie ihre absolute Zifer aus der ersten absoluten Einheit durch Wiederholuug und Theilung derselben hervorgebracht werden kann; über die Einheit, welche man sich dabey gedenken soll, sagt der Logarithme nichts, und eben deswegen sind bloß die absoluten Zahlen

durch

durch die Basis und den Logarithmen vollkommen bestimmt, weil man die Einheit schon zum voraus kennt, worauf sie sich beziehen.

15. Um sich dieses noch deutlicher zu machen, so stelle man sich die Zahlen nach folgendem Schema vor.

$$0\left\{\begin{array}{c} \left[\dagger 1\sqrt{-1}, \dagger 2\sqrt{-1}, \dagger 3\sqrt{-1}, \dagger 4\sqrt{-1}, \dagger 5\sqrt{-1}, \dagger \ldots\ldots\right] \\ \left|\dagger\ 1\ ,\ \dagger\ 2\ ,\ \dagger\ 3\ ,\ \dagger\ 4\ ,\ \dagger\ 5\ ,\ \dagger \ldots\ldots\right| \\ \quad 1\ ,\ \ 2\ ,\ \ 3\ ,\ \ 4\ ,\ \ 5\ ,\ \ldots\ldots \\ \left|-1\ ,-2\ ,-3\ ,-4\ ,-5\ ,\ \ldots\ldots\right| \\ \left[-1\sqrt{-1}, -2\sqrt{-1}, -3\sqrt{-1}, -4\sqrt{-1}, -5\sqrt{-1}, - \ldots\ldots\right] \end{array}\right\}\infty$$

Nach demselben sind alle Zahlen zwischen den Grenzen 0 und ∞ enthalten. Ferner kann man, wenn man bald diese bald jene Einheit annimmt, jede Zahl als eine Menge von Einheiten ansehen, und z. B. $\dagger 5\sqrt{-1}$ als das Fünffache von $\dagger 1\sqrt{-1}$, $\dagger 5$ als das Fünffache von $\dagger 1$, 5 als das Fünffache von 1, -5 als das Fünffache von -1, und $-5\sqrt{-1}$ als das Fünffache von $-1\sqrt{-1}$ betrachten. Aber eben sowohl läßt sich drittens jede Zahl als aus der ersten absoluten Einheit entstanden annehmen, indem man jedesmal die unter oder über ihr stehende absolute Zahl auf die gewöhnliche Art aus dieser Einheit hervorbringen, und dann hieraus jene Zahl durch Hinzusetzung des Zeichens oder des Namens, wodurch sie sich unterscheidet, erhalten kann. Endlich läßt sich jede absolute Zahl entweder genau oder näherungsweise aus jeder andern absoluten Zahl durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln erhalten, und jede nicht absolute Zahl, ihrer Zifer nach, aus eben dieser Zahl und auf eben diese Art entstanden gedenken; so daß man sich also auch jede nicht absolute Zahl als aus jeder beliebig angenommenen absoluten Zahl durch Veränderung derselben nach irgend einem Exponenten, und

durch Hinzusetzung des sie unterscheidenden Zeichens oder Namens zu dem durch diese Operation gefundenen hervorgebracht vorstellen kann.

16. Will man die positiven und negativen und die unmöglichen Zahlen von der Form $x\sqrt{-1}$ nicht auf diese Art aus einer absoluten Basis ableiten, so kann man auch eine positive oder negative Zahl zur Basis annehmen. Aber wenn man dieses thut, so kann man allemal $+x$, $-x$, $+x\sqrt{-1}$ und $-x\sqrt{-1}$ durch eine und dieselbe Operation aus der angenommenen Basis hervorbringen, und es wird also alsdann durch die Basis und den Exponenten bloß x genau bestimmt, und es bleibt ungewiß, ob dasselbe positiv oder negativ sey, und ob es sich auf eine mögliche oder auf eine unmögliche Einheit beziehe. Man mag also die Basis annehmen, wie man will, so ist man aus dem Logarithmen einer Zahl weiter nichts im Stande zu schließen, als wie groß dieselbe in Vergleichung mit der Einheit sey, wovon sie als ein Vielfaches betrachtet werden kann, aber dieses zeigt denn auch der Logarithme, ohngeachtet er uns über die gedachte Einheit in einer völligen Ungewißheit läßt, jedesmal genau und richtig an. Und da $\pm x\sqrt{-1} : \pm 1\sqrt{-1} = \pm x : \pm 1 = x : 1$ ist, so kommt man hierdurch wieder auf den Satz zurück, daß die Zahlen $\pm x\sqrt{-1}$, $\pm x$ nicht mehr als einen Logarithmen, und zugleich, daß sie denselben Logarithmen haben, der der absoluten Zahl x zukommt.

17. Die Basis als bekannt vorausgesetzt, lehrt also der Logarithme einer Zahl weiter nichts, als wie groß diese Zahl sey, aber dies allemal; denn wenn die Basis größer als die Einheit angenommen worden ist, so ist bekannt, daß die Logarithmen mit den Zahlen, zu welchen sie gehören, wachsen und abnehmen. Es hängt folglich auch jeder Logarithme

nicht

nicht von der Beschaffenheit, sondern bloß von der Größe der Zahl ab, zu welcher er gehört, und wenn die Beschaffenheit einer Zahl auf die Bestimmung des Logarithmen Einfluß haben soll, so muß sie eine solche Beschaffenheit seyn, daß sie auch als eine Größen-Bestimmung gedacht werden kann. Ist dieses, so ist der gedachte Einfluß nicht nur möglich, sondern er muß sich auch allemal äußern, so oft man die erwähnte Vorstellung zum Grunde legt, aber eben so auch mit dieser Vorstellung zugleich wieder verschwinden. Hier frägt sich also: Kann man die durch die Zeichen + und — und durch die Benennungen positiv und negativ ausgedruckten zufälligen Beschaffenheiten der Zahlen auch als Größen-Bestimmungen ansehen? und wie wird, wenn dieses möglich ist, die Größe der Zahlen durch die gedachten Zeichen und Benennungen bestimmt? Auf der Beantwortung dieser Frage beruhet, so viel ich einsehe, durchaus, die Möglichkeit der Wegräumung der Absatz 11 erwähnten Schwierigkeiten, und es wird also der Mühe nicht unwerth seyn, dieselbe zu untersuchen.

18. Gewöhnlich macht man zwischen den absoluten und positiven Zahlen keinen Unterschied, und stellt sich dann die negativen Zahlen als aus den positiven durch fortgesetzte Subtraction der 1 vor. Dabey findet man kein Bedenken, die positiven Zahlen größer und die negativen Zahlen kleiner als 1 zu nennen, und macht also hier schon das Zeichen — und die Benennung negativ zu Bezeichnungen einer Größen-Bestimmung. Auch muß man gestehen, daß diese Vorstellung von den negativen Zahlen als eine relative Vorstellung behandelt, nicht nur keine Irrthümer erzeuge, sondern selbst öfters zur leichtern und schnellern Entdeckung der wahren Beschaffenheit der Größen diene. Aber man rede nicht relative sondern absolute von Größen, die kleiner seyn

sollen als nichts; was läßt sich dann für ein Begriff fassen? Wie also wenn man sich die negativen Zahlen, wie auch schon mehrere bey andern Gelegenheiten auf den Gedanken gefallen sind, ebenfalls größer als das Unendliche denken könnte? Eine Größe, die in einer und eben derselben Rücksicht kleiner als nichts und größer als das Unendliche seyn sollte, wäre freylich ein Widerspruch: allein wenn man die negativen Größen in einer Rücksicht kleiner als nichts, und in einer andern größer als das Unendliche nennt, so kann ja das sehr wohl mit einander bestehen. Auch läßt sich allerdings nicht leugnen, daß die Vorstellung der negativen Zahlen als größer wie das Unendliche, vorausgesetzt, daß sie statt finden kann, der Natur der relativen Vorstellungen gemäß, in Schwierigkeiten verwickele, sobald man sie unter andern Umständen gebrauchen will, als unter solchen, wo ihre Gültigkeit dargethan ist; allein das macht denn doch diese Vorstellung nicht an und für sich und unter allen Umständen verwerflich. Euler verwirft sie im ersten Theile seiner Anleitung zur Differential-Rechnung im zweyten Capitel im 100 und 104ten und den folgenden §§, allein wie nachher gezeigt werden soll, mit Unrecht. Also zur Untersuchung der Frage, ob man, und unter was für Umständen man die negativen Größen größer als das Unendliche nennen könne?

19. So wie alle angebliche absolute Zahlen zwischen o und ∞ enthalten sind, so muß man sich solches auch von den positiven und negativen Zahlen vorstellen, und zwar so, daß man das positive und negative Unendliche eben so wohl als die positive und negative o zusammenfallen läßt. Eine ähnliche Beschaffenheit haben z. B. die Tangenten der Winkel. Die positiven und negativen fangen beyde von o an, und sobald sie unendlich groß werden, so sind sie es so-

wohl

wohl auf der positiven als auf der negativen Seite. Denkt man sich also die positiven und negativen Zahlen in ihrer Folge nach diesem Schema:

$$0\left\{\begin{matrix}+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7 +\ldots\ldots\ldots \\ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7 -\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right\}\infty$$

so kann man von den positiven Zahlen zu den negativen, wenn man nicht durch die Veränderung des Zeichens + und — unmittelbar von jenen zu diesen übergehen will, theils durch die Grenze 0, theils durch die Grenze ∞ kommen, und es liegen also die negativen Zahlen, von den positiven an gerechnet, nicht nur jenseits 0, sondern auch jenseits des Unendlichen. Nun kann man sich die Größe, die einer Zahl in Vergleichung mit einer andern zukommt, wenn beyde durchaus von einerley Art sind, nach der Entfernung vorstellen, in welcher jene von dieser entweder nach der Seite der 0 oder nach der Seite des ∞ zu steht, und thut man es, so nennt man jede Zahl in Vergleichung mit jeder andern desto kleiner, je weiter sie von ihr nach der Seite von 0, und desto größer, je weiter sie von ihr nach der Seite des Unendlichen hin entfernt ist. Wenn man also die Zeichen + und — nicht als Zeichen des Positiven und Negativen, sondern als Größen-Bestimmungen ansieht, und dies geschiehet, wenn man die positiven Zahlen und die absoluten nicht von einander unterscheidet, und bey der Vergleichung zweyer entgegengesetzter Zahlen mit einander allemal von der positiven ausgeht: so ist allerdings jede negative Zahl nicht nur kleiner als nichts, sondern auch größer als das Unendliche, und dabey zugleich jedesmal um weniger kleiner als nichts, als sie größer denn das Unendliche ist.

20. Legt man nun entweder eine absolute oder eine mit + bezeichnete Zahl, die größer als 1 ist zum Grunde, und verändert diese durch die Erhebung zu Dignitäten und die Extraction der Wurzeln, so daß man die Exponenten so-

wohl der Dignitäten als der Wurzeln, welche man sucht, immer größer und größer werden läßt: so erreicht man auf dem Wege der Erhebung zu Dignitäten das Unendliche, und auf dem Wege der Extraction der Wurzel die o nie, so lange der Exponent eine angebliche Zahl bleibt, sondern erst, wenn dieser Exponent unendlich und im letztern Falle zugleich negativ wird. Will man also auf diesem Wege über das Unendliche und über o hinaus gehen, so muß man die zum Grunde gelegte Zahl nach einem mehr als unendlichen Exponenten verändern, wobey man denn, wenn dieser Exponent positiv ist, über das Unendliche, und wenn er negativ ist, über o hinauskommt; und will man auf beyden Wegen eine und dieselbe Zahl finden, so muß, da jede bestimmte Zahl näher bey o als bey dem Unendlichen liegt, der positive Exponent den negativen in Ansehung der Größe übertreffen, obgleich beyde mehr als unendlich seyn müssen.

21. Betrachtet man also die mit — bezeichneten Zahlen so, daß man das Zeichen — nicht als das Zeichen des Negativen ansieht, sondern dadurch die Größe der Zahl, vor welcher es steht, in Vergleichung mit den absoluten Zahlen, bestimmt werden läßt: so läßt sich jede negative Zahl auf eine zwiefache Art, nemlich theils als eine mehr denn unendlich kleine, und theils als eine mehr denn unendlich große Zahl gedenken; und nimmt man hierzu die Bedeutung, die dieselbe alsdann hat, wenn das Zeichen — als das Zeichen des Negativen eigentlich genommen wird, so stellt jede negative Zahl eine dreyfache Größe, eine endliche, und zwey mehr als unendliche, der Größe nach unendlich verschiedene, Zahlen vor. Uebrigens kommt es hier auf keine Weise darauf an, ob jede negative Zahl diese beyden letzten Bedeutungen allemal haben könne? es ist hinlänglich,

sich, daß gezeigt worden ist, mit was für Vorstellungsarten diese Bedeutungen zusammenhängen, und es versteht sich von selbst, daß sie mit jenen Vorstellungsarten zugleich eintreten und verschwinden. Das Bedingte ist nur dann brauchbar, wenn die Bedingungen, welche es voraussetzt, wirklich da sind, aber dann wird es selbst unentbehrlich; und es wäre sehr inconsequent und so gehandelt, wie man es von Mathematikern nicht erwarten darf, wenn etwas Bedingtes deswegen allgemein verworfen werden sollte, weil es nicht anders als unter den erforderlichen Bedingungen gebraucht werden darf.

22. Um nun das Bisherige zur Auflösung der S. 524. 525. Absatz 11. angeführten Schwierigkeiten anzuwenden, so beruhet die Gültigkeit der Formel

$$\mathrm{d.l}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

für jeden Werth von x auf dem Satze, daß $1 + x = 1 - x = 1 + x\sqrt{-1} = 1 - x\sqrt{-1}$ sey, (S. 522. 523. Abs. 10.) und damit ist folgender, den auch der vollständig deutliche Begriff von den Logarithmen an die Hand giebt, unzertrennlich verbunden, daß der Logarithme jeder nicht absoluten Zahl weder von dem bey ihr befindlichen Zeichen noch von ihrem Namen, sondern lediglich von der Größe der absoluten Zifer, welche sie enthält, abhange. Unter dieser Voraussetzung darf man sich also auch nur die Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \text{&c.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{&c.}$$

durch die Differential-Rechnung erweitert vorstellen, und ist folglich auch durch sie bloß unter der Bedingung berech-

tiget, in jene Formeln jeden Werth von x zu bringen, daß die dabey für $1 \pm x$ oder $\frac{1+x}{-x}$ sich ergebende Zahl, oder diejenige, deren Logarithmen man sucht, als eine absolute Zahl betrachtet werde.

23. Dieses vorausgesetzt, so kann zuvörderst die Einschränkung der Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{&c.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{&c.}$$

welche ich ihnen in dem Zusatze B zum siebenten Capitel gegeben habe, sehr wohl mit der Erweiterung ihrer Grenzen bestehen, welche sie durch die Differential-Rechnung erhalten. Hiernach kann man zwar in jenen Formeln für x jede Größe, sie mag positiv oder negativ, reell oder imaginär seyn, setzen, und man ist dabey insbesondere in der Formel

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{&c.}$$

ganz und gar nicht an einen absoluten Bruch-Werth für x gebunden. Allein nach dem vorhergehenden 22sten Absatze muß dabey doch immer die für $1 \pm x$ und $\frac{1+x}{1-x}$ sich ergebende Zahl als eine absolute Zahl angesehen, und folglich, wenn sie das Zeichen — vor sich hat, solches bey ihr nicht als das Zeichen des Negativen, sondern als ein Zeichen einer Größen-Bestimmung betrachtet werden. Man findet daher in diesem Falle nicht den Logarithmen einer negativen Zahl im gewöhnlichen Verstande, sondern einer absoluten Zahl, die man sich entweder jenseits 0 oder jenseits des Unendlichen liegend, und also entweder kleiner als

o oder größer als das Unendliche denken muß. Da nun in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, so wie in der gemeinen Algebra immer, bloß von solchen Zahlen die Rede seyn konnte, die zwischen o und ∞ fallen, und die Differential-Rechnung für diesen Fall die daselbst festgesetzten Einschränkungen nicht im mindesten aufhebt: so ist ja das nichts auffallendes und noch weniger etwas widersprechendes, daß die Differential-Rechnung bey veränderten Umständen einen andern, oder eigentlich bey einem erweiterten Ziele einen breitern Weg zu gehen erlaubt.

24. Zum andern ist nun sehr leicht zu erklären, warum man für jede negative Zahl $-m$, wenn man einmal $1-x=-m$, und dann $\frac{1+x}{1-x}=-m$ setzt, nach den Formeln

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{ꝛc.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\text{ꝛc.}$$

einen doppelten unendlich großen Logarithmen findet. Die erste dieser Formeln gilt nemlich nach S. 487. Abs. 10. für die Erfindung der Logarithmen der ächten Brüche, und die andere zwar überhaupt für die Erfindung der Logarithmen jeder absoluten Zahl, allein mit dem Unterschiede, daß, wenn x positiv wird, der gefundene Logarithme zu einer Zahl, die größer als 1, und wenn x negativ wird, zu einem ächten Bruche gehöret. Setzt man also $1-x=-m$, so findet man aus

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{ꝛc.}$$

wenn man darin $x=m-1$ macht, den Logarithmen, der zu $-m$ als einem Bruche gehört, der kleiner ist als o;

und setzt man $\frac{1+x}{1-x} = -m$, so wird $x = \frac{m+1}{m-1}$, und also, wenn m größer als 1 ist, allemal x positiv, und man findet daher in diesem Falle nach

$$1\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{5} + \frac{2x^5}{6} + \frac{2x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

wenn man darin $x = \frac{m+1}{m-1}$ macht, den Logarithmen, der zu $-m$ gehört, wenn dasselbe als eine Zahl betrachtet wird, die jenseits des Unendlichen liegt, und also als mehr denn unendlich groß angesehen werden muß.

25. Drittens ist nun auch leicht einzusehen, warum man nach keiner von den angeführten Formeln den unmöglichen Logarithmen, den nach den gewöhnlichen Vorstellungen jede negative Zahl haben kann, und eben so wenig den reellen Logarithmen, der ihr nach meiner Vorstellungsart zukommt, findet. Hätte nemlich auch jede negative Zahl einen imaginären Logarithmen, obgleich nach der im Zusatze B zum siebenten Capitel enthaltenen Theorie von den Logarithmen solches nicht ist: so müßte der Grund von der Unmöglichkeit dieses Logarithmen in der durch das Zeichen — ausgedruckten Beschaffenheit seiner Zahl liegen, und er selbst also nicht bloß von der Größe, sondern auch von der Beschaffenheit seiner Zahl abhängen. Allein nach Absatz 22 findet man nach keiner von den bekannten Formeln, selbst wenn sie durch die Differential-Rechnung die möglich größte Ausdehnung erhalten haben, den Logarithmen einer Zahl weiter, als in so fern er von ihrer Größe abhängt. Aus eben diesem Grunde kann man durch das im vorhergehenden Absatze beschriebene Verfahren nach jenen Formeln den reellen Logarithmen nicht finden, den jede negative Zahl nach meiner Vorstellungsart hat. Denn sobald $-m = 1 - x$

oder

oder $= \frac{1+x}{1-x}$ gesetzt wird, um den daraus sich ergebenden Werth von x in den gedachten Formeln zur Erfindung des Logarithmen von $-m$ zu brauchen, so hört $-m$ auf eine negative Zahl zu seyn, und erhält dafür eine andere zwiefache vorhin angegebene Bedeutung. Der einzige Weg, den Logarithmen von $\pm x$ und $\pm x\sqrt{-1}$ zu finden, bleibt daher der, daß man $1x$ suchet, und diesen Logarithmen nach der obigen Theorie auch als den Logarithmen von $\pm x$ und $\pm x\sqrt{-1}$ und überhaupt von allen den Größen betrachtet, die mit $\pm x$ aus der angenommenen Basis nach einerley Exponenten zugleich hervorgebracht werden können.

26. Endlich stellt nach Absatz 21 jede negative Zahl eine dreyfache Größe, eine endliche und zwey mehr als unendliche der Größe nach unendlich verschiedene Zahlen vor. Von diesen letzten ist ferner die eine kleiner als o, und die andere größer als das Unendliche, und diese letzte, so weit man hier vergleichen kann, um viel mehr größer denn das Unendliche, als jener kleiner denn o ist. Hiermit stimmt aber das vollkommen überein, daß jede negative Zahl drey Logarithmen, einen endlichen und zwey unendlich große, und von diesen den einen negativ und den andern positiv, und den positiven größer als den negativen hat, und sonach wären alle S. 524. 525. angeführte Schwierigkeiten gehoben.

27. Es hält schwer, eine, in mehrern Stücken wenigstens, neue Theorie, so lange man dieselbe nur bloß nach seiner eigenen Vorstellungsart zu prüfen, und noch nicht Gelegenheit gehabt hat, den belehrenden Tadel der Kenner darüber zu vernehmen, und darnach dieselbe weiter zu vervollkommnen, so vorzutragen, daß der Ausdruck nicht manche Unbequemlichkeiten herbeyführe. Ich empfinde

dieses

dieses hier sehr lebhaft und versichere daher, daß ich jeder Belehrung offen mich erhalten, ja jede gründliche Beurtheilung des Bisherigen, so vieler Fehltritte sie mich auch überführen mag, wofern sie nur gründlich und also auch belehrend ist, mit dem aufrichtigsten Danke erkennen werde. Daß ich mich an mehrern Orte kürzer hätte fassen können, räume ich zum voraus ein; allein da das ganze Werk, welches ich hier bearbeite, obgleich von einem Meister, dennoch für Anfänger geschrieben ist, so habe ich mir bey dieser Abhandlung eben dergleichen als meine Leser vorgestellt, und hoffe in dieser Rücksicht, wegen der hier und da sonst zu großen Ausführlichkeit, Verzeihung. Jetzt will ich die bisherige Untersuchung mit ein Paar Anmerkungen beschließen.

28. Ein Hauptsatz ist es sowohl in diesem Zusatze als in dem Zusatze B zum vorhergehenden Capitel, daß man das Absolute von dem Positiven unterscheiden, und insbesondere auch die absoluten Zahlen von den positiven trennen müsse. Hierdurch leugne ich nicht, daß es Fälle giebt, wo diese Unterscheidung überflüßig seyn kann, ich räume dergleichen vielmehr in Menge ein, und lasse sehr gern jene Unterscheidung allenthalben für unnütz gelten, wo man die Zeichen + und — eben sowohl als Zeichen der Addition und Subtraction betrachten, als sie für Zeichen des Positiven und Negativen nehmen kann. Indeß dies zugegeben, so bleibt dieselbe in vielen andern Fällen doch schlechterdings nothwendig, und das nicht bloß bey Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie, oder beym Gebrauche derselben in der angewandten Mathematik, sondern auch in der Arithmetik selbst, z. B. so oft Zahlen zu Dignitäten erhoben und Wurzeln ausgezogen werden sollen. Unterscheidet man das Absolute nicht von dem Positiven, so muß man auch alle

von

von den absoluten Zahlen bewiesene Sätze in eben dem Umfange von den positiven bewiesen annehmen, und dann müssen sich, die sich von selbst verstehenden Modificationen dieser Sätze vorausgesetzt, auch die negativen Zahlen vollständig nach ihnen behandeln lassen. Aber sucht man nun z. B. die Quadratwurzel aus -4 nach dem Binomischen Lehrsatze, indem man $-4 = 1-5$ setzt, und darauf den Ausdruck $(1-5)^{\frac{1}{2}}$ entwickelt, so erhält man eine ohne Ende fortlaufende Reihe von lauter möglichen Größen, die folglich da $\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ ist, $= \pm 2\sqrt{-1}$ sollte gesetzt werden können. Eben so ist $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$, nach

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{&c.}$$

aber gesucht, findet man

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{&c.}$$

und doch giebt diese Reihe auch bey der Hinzufügung ihrer Ergänzung nie 1. Daß man sich, wenn man bedingte Sätze als unbedingte behandelt, nicht über die paradoxen und falschen Resultate zu wundern habe, welche man dabey findet, ist freylich etwas sehr bekanntes; allein wenn man die Quelle dieser paradoxen und falschen Folgerungen nicht kennt, so vermögen sie gleichwohl große Schwierigkeiten zu erregen: und warum sollte man also nicht früh und gleich beym Anfange der Betrachtung der entgegengesetzten Größen darauf aufmerksam machen, daß nicht alles, was von den absoluten Zahlen erwiesen ist, schon deswegen und eben so, auf die positiven und negativen Größen angewandt werden dürfe? In dem Zusatze B zum vierzehnten Capitel Capitel werde ich von der Unterscheidung des Absoluten von dem Positiven bey der Bestimmung der Wurzeln der Gleichungen

chungen, in welchen die Sinus, Cosinus ꝛc. vielfacher Winkel mit den Sinus, Cosinus ꝛc. der einfachen Winkel verglichen werden, eine andere nicht ganz unwichtige Anwendung machen.

29. Der Satz, daß jeder Logarithme bey einer nicht absoluten Basis zu zwey einander entgegengesetzten sonst gleichen, und außerdem noch zu einer unbestimmten Menge unmöglicher Größen gehöre, (S. 492. 493. Abs. 17.) ist, so viel ich weiß, noch von Niemanden in der Lehre von den Logarithmen behauptet worden; allein das ist ein ganz allgemein bekannter und gebrauchter Satz, daß $(\pm a)^{\frac{nm}{n}}$, wenn man für n jede Zahl setzen darf, eine unbestimmte Menge von Werthen enthalte, und jener sagt im Grunde durchaus eben dasselbe. Wenn man indeß jede auch nicht absolute Zahl auf die Absatz 15. beschriebene Art aus irgend einer absoluten Zahl durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln entstehen läßt, und dabey die Bedeutung der Logarithmen nach Absatz 16. sich gedenkt, so gehören auch bey einer absoluten Basis zu jedem Logarithmen eben so viel Zahlen als bey einer nicht absoluten Basis und vielleicht ist es noch zweckmäßiger, sich die Beschaffenheit der Logarithmen auf diese letzte Art vorzustellen.

30. Als sich mir der im vorhergehenden Absatze nochmals gedachte Satz bey der Ausarbeitung des Abschnitts, von den Logarithmen, in meinen kürzlich erschienenen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra zuerst darbot, denn ungesucht und von selbst stellte er sich mir bey der Voraussetzung, daß die absoluten Zahlen nicht immer mit den positiven verwechselt werden können, dar: so dachte

ich

ich nicht daran, daß er in der Differential-Rechnung bey dem Beweise des Satzes, daß für jeden Werth von x das Differential des Logarithmen davon $d.lx = \frac{dx}{x}$ sey, als ein unentbehrlicher Satz erscheinen würde. Ich nahm ihn auf, weil er sich mir von selbst darbot, und weil er mir die Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen zu heben schien, derer ich in der Vorrede zu den erwähnten Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gedacht habe. Ist indeß das richtig, was ich über den gewöhnlichen Beweis des Satzes, daß $d.lx = \frac{dx}{x}$ und zwar für jeden Werth von x sey, Absatz 6 — 8 gesagt habe, so erhält er dadurch einen Grad von Wichtigkeit mehr, und um so mehr wünschte ich daß Männer von mehrern Kenntnissen als ich sich herablassen mögten, meine Vorstellungen gründlich zu untersuchen. Auch erstreckt sich sein Einfluß, so wie auch der Einfluß der Unterscheidung, welche mich auf ihn geführt hat, noch weiter als ich es hier aus einander setzen darf, und so weit ich deutlich sehe, wird gleichwohl dadurch kein wahrer und brauchbarer Satz umgestoßen, sondern nur in seine ihm zukommende Grenzen eingeschränkt, dagegen aber viele Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt.

31. Diejenigen, die die negativen Zahlen sonst schon theils als mehr denn unendlich klein, theils als mehr denn unendlich groß haben betrachten wollen, sind dabey auf den Gedanken gefallen, einen Unterschied zwischen den negativen Zahlen von der Form $-1, -2, -3$ ꝛc. und den negativen Zahlen von der Form $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-2}, \frac{+3}{-3}$ ꝛc. zu machen. Es ginge solches wohl an, wenn man nicht vom

An-

Anfang an gewöhnt würde, in der ganzen Mathematik $\frac{+1}{-1} = -1$, $\frac{+2}{-1} = -2$ ꝛc. anzunehmen, und dann müßte man doch auch der Analogie wegen die letzten Zahlen durch $\frac{-1}{+1}$, $\frac{-2}{+1}$, $\frac{-3}{+1}$ ꝛc. bezeichnen. Allein aus dem angeführten Grunde hat Euler im ersten Theile seiner Differential-Rechnung §. 105. Recht, diese doppelte Bezeichnung durchaus zu verwerfen, nur hätte er nicht sich deswegen auch zugleich wider die Vorstellung von den negativen Zahlen, die sie freylich veranlaßt, aber nicht nothwendig erzeugt hatte, als wider eine durchaus unstatthafte Vorstellung erklären, und so zu sagen das Kind mit dem Bade ausschütten sollen. Ich fürchte wenigstens eine ähnliche Verhaltungsart von meinen künftigen Beurtheilern nicht.

IX.

Zusätze zum neunten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

1. Vorläufig von der Nothwendigkeit dieser Lehre für die Erfindung der imaginären Faktoren der Funktionen, §. 143. 144.
2. Allgemeine Regel zur Erforschung der trinomischen Faktoren, §. 145 — — 149.
   a. Vorbereitung dazu, §. 145.
   b. die gedachte Regel selbst, §. 146 — 149.
      α. für die gegebenen Funktionen in unveränderter Form, §. 146.
      β. für diese Funktionen, nachdem sie zuvor zur bequemern Erreichung des vorgesetzten Endzwecks abgeändert worden, §. 147 — 149.
         aa. Anleitung zu dieser Abänderung der Funktionen, §. 147 — 149.
         bb. Art und Weise, wie man aus den abgeänderten Funktionen die gesuchten trinomischen Faktoren findet, §. 148. 149, am Ende.
3. Erläuterung der gegebenen Regel an einigen öfters vorkommenden Funktionen, §. 150 — 164.

a. an algebraischen, §. 150 — 154.

α. solchen, die unter die Form $a^n + z^n$, §. 150.
β solchen, die unter die Form $a^n - z^n$, §. 151 } §. 152.

γ. solchen, die unter die Form $a^{2n} - 2a^n z^n . \cos. g + z^{2n}$, §. 153.

δ. solchen, die unter die Form $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$, ꝛc. gehören, §. 154.

b. an transcendenten Funktionen, §. 155 — 164. Die hier betrachteten Funktionen sind lauter unendliche Reihen, welche Exponential-Größen ausdrucken, nemlich

α. die Exponential-Größe e^x, §. 155.

β. die Exponential-Größe $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, §. 156.

γ. die Exponential-Größe $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, §. 157.

δ. die Exponential-Größe $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ und

$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, §. 158.

ε. die Exponential-Größe $e^x - 2 \cos. g + e^{-x}$, §. 159.

ζ. die Exponential-Größe $e^{b+x} \mp e^{c-x}$, §. 160—164.

Hier wird

aa. $\frac{e^{b+x} \mp e^{c-x}}{e^b \mp e^c}$ in eine unendliche Reihe von Faktoren aufgelöset, §. 160. 161.

bb. dann darin $b = o$, und c theils positiv theils negativ gesetzt, §. 162, und die hierdurch sich ergebenden Reihen

cc. auf den Kreis, und zwar auf eine doppelte Art angewandt, §. 163. 164.

B.

B. Zusatz zu §. 153.

1. Die am Ende des vorstehenden § von mir gedachte Anwendung der Eulerischen Methode die trinomischen Faktoren zu erforschen, ist folgende. Wenn φ einen Winkel bedeutet, und man

$$\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi = p, \text{ und } \cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi = q$$

setzt, so wird

$$pq = 1;\ p^n = \cos.n\varphi + \sqrt{-1}.\sin.n\varphi;\ q^n = \cos.n\varphi - \sqrt{-1}.\sin.n\varphi$$

folglich

$$p^n + q^n = 2\cos.n\varphi; \text{ und } q^n - q^n = 2\sqrt{-1}.\sin.n\varphi;$$

und man ist also im Stande, durch Auflösung der Formeln $p^n + q^n$, und $p^n - q^n$ in ihre Faktoren die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel durch Produkte auszudrucken.

2. Nimmt man nemlich zuvörderst die Formel

$$p^n + q^n = 2\cos.n\varphi$$

so hat dieselbe, wenn n eine ungerade Zahl ist, den einfachen Faktor $p + q - 2\cos.\varphi$, so daß in diesen Fällen $\cos.\varphi$ ein Faktor des $\cos.n\varphi$ ist. Läßt man nun die Formel

$$pp - 2pq\cos.\omega + qq$$

eine allgemeine Trinomie für die übrigen Faktoren seyn, so daß $p^n + q^n$ verschwindet, wenn $pp - 2pq\cos.\omega + qq = 0$ wird: so hat man daher

$$p = q(\cos.\omega + \sqrt{-1}.\sin.\omega) \text{ oder } p = q(\cos.\omega - \sqrt{-1}.\sin.\omega)$$

und folglich

$$p^n = q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega)$$

Es muß demnach

$$q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega) + q^n = 0, \text{ oder}$$
$$\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega + 1 = 0$$

seyn, und hierdurch wird sin. n ω = 0, und cos. n ω = −1. Da also cos. n ω = −1 ist, so muß n ω entweder π, oder 3π, oder 5π, oder 7π, ꝛc. seyn, und bedeutet daher i jede ungerade Zahl, so wird n ω = iπ, und $\omega = \frac{i\pi}{n}$, und der allgemeine doppelte Faktor der Formel $p^n + q^n$ ist

$$pp - 2pq.\cos.\frac{i\pi}{n} + qq.$$

3. Es läßt sich aber derselbe auf folgende Art verwandeln. Aus $p^n + q^n = 2\cos. n\phi$ fließt $pp + qq = 2\cos. 2\phi$, und durch diese Substitution wird, da pq = 1 ist,

$$pp - 2pq\cos.\frac{i\pi}{n} + qq = 2\cos. 2\phi - 2\cos.\frac{i\pi}{n}.$$

Ferner ist aus Capitel 8, §. 131. 4

$$\cos. b - \cos. a = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\sin.\frac{a-b}{2}, \text{ folglich}$$

$$\cos. 2\phi - \cos.\frac{i\pi}{n} = 2\sin.(\frac{i\pi}{2n} + \phi)\sin.(\frac{i\pi}{2n} - \phi).$$

Hierdurch erhält man zum allgemeinen Faktor der Formel $p^n + q^n$

$$4\sin.(\frac{i\pi}{2n} + \phi)\sin.(\frac{i\pi}{2n} - \phi)$$

und setzt man darin für i nach und nach die ungeraden Zahlen, so bekommt man

$$2\cos. n\phi = 4\sin.(\frac{\pi}{2n} + \phi).\sin.(\frac{\pi}{2n} - \phi).4\sin.(\frac{3\pi}{2n} + \phi).$$

$$\sin.(\frac{3\pi}{2n} - \phi).4\sin.(\frac{5\pi}{2n} + \phi).\sin.(\frac{5\pi}{2n} - \phi) \text{ ꝛc.}$$

bis man überhaupt n Faktoren hat.

4. Es ist demnach

für

$$n=1 \mid 2\cos.\ \varphi = 2\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$n=2 \mid 2\cos.\ 2\varphi = 2^2\sin.\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$$

$$n=3 \mid 2\cos.\ 3\varphi = 2^3\sin.\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{6}-\varphi\right)$$

$$n=4 \mid 2\cos.\ 4\varphi = 2^4\sin.\left(\frac{\pi}{8}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{8}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{8}-\varphi\right)$$
$$\sin.\left(\frac{3\pi}{8}+\varphi\right)$$

$$n=5 \mid 2\cos.\ 5\varphi = 2^5\sin.\left(\frac{\pi}{10}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{10}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{10}-\varphi\right)$$
$$\sin.\left(\frac{3\pi}{10}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{10}-\varphi\right)$$

$$n=6 \mid 2\cos.\ 6\varphi = 2^6\sin.\left(\frac{\pi}{12}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{12}-\varphi\right)$$
$$\sin.\left(\frac{3\pi}{12}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{12}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)$$

und überhaupt

$$\cos.\ n\varphi = 2^{n-1}\sin.\left(\frac{\pi}{2n}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{2n}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{2n}-\varphi\right)$$
$$\sin.\left(\frac{3\pi}{2n}+\varphi\right)\text{ ꝛc.}$$

bis man n Faktoren hat. Man vergleiche hiermit das vierzehnte Capitel des ersten Theils der gegenwärtigen Einleitung, §. 242.

5. Behandelt man nunmehr die Formel

$$p^n - q^n = 2\sqrt{-1}.\ \sin.\ n\varphi$$

auf eine ähnliche Art, und nimmt man zum allgemeinen doppelten Faktor derselben wieder wie vorhin

$$pp - 2pq\cos.\omega + qq$$

an, so wird, wenn man denselben $= o$ setzt, abermals $p = q(\cos.\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.\omega)$ und $p^n = q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega)$ und es muß demnach

$$q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega) - q^n = \cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.$$
$$\sin.n\omega - 1 = o$$

und folglich

$$\sin.n\omega = o, \text{ und } \cos.n\omega = 1$$

seyn.

6. Auf diese Art erkennt man, daß der Winkel $n\omega$ entweder o, oder 2π, oder 4π, oder 6π, ꝛc. oder $2i\pi$ seyn muß, wenn i jede ganze Zahl bedeutet. Es ist also der allgemeine Faktor der Formel $p^n - q^n$

$$pp - 2pq\cos.\frac{2i\pi}{n} + qq = 2\cos.2\phi - 2\cos.\frac{2i\pi}{n}$$

und da derselbe in die beyden Faktoren

$$2\sin.(\frac{i\pi}{n} - \phi).2\sin.(\frac{i\pi}{n} + \phi)$$

aufgelöset werden kann, und die Formel $p^n - q^n$, außerdem noch den einfachen Faktor

$$p - q = 2\sqrt{-1}.\sin.\phi$$

hat: so wird

$$\sin.n\phi = \sin.\phi.2\sin.(\frac{i\pi}{n} - \phi).2\sin.(\frac{i\pi}{n} + \phi)$$

und folglich

$$\sin.n\phi = \sin.\phi.2\sin.(\frac{\pi}{n} - \phi).\ 2\sin.(\frac{\pi}{n} + \phi).$$
$$2\sin.(\frac{2\pi}{n} - \phi).2\sin.(\frac{2\pi}{n} + \phi).2\sin.(\frac{3\pi}{n} - \phi) \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\sin.n\phi = 2^{n-1}\sin.\phi.\sin.(\frac{\pi}{n} - \phi).\ \sin.(\frac{\pi}{n} + \phi).$$
$$\sin.(\frac{2\pi}{n} - \phi).\sin.(\frac{2\pi}{n} + \phi).\sin.(\frac{3\pi}{n} - \phi) \text{ ꝛc.}$$

bis

bis man n Faktoren hat. Man vergleiche hiermit Einleitung Cap. 14. §. 240.

7. Hieraus fließt

für

$n=1$ | $\sin.\ \varphi = 2^0.\sin.\varphi$

$n=2$ | $\sin.2\varphi = 2\sin.\varphi\sin.(\frac{\pi}{2}-\varphi)$

$n=3$ | $\sin.3\varphi = 4\sin.\varphi\sin.(\frac{\pi}{3}-\varphi)\sin.(\frac{\pi}{3}+\varphi)$

$n=4$ | $\sin.4\varphi = 8\sin.\varphi\sin.(\frac{\pi}{4}-\varphi)\sin.(\frac{\pi}{4}+\varphi)\sin.(\frac{2\pi}{4}-\varphi)$

$n=5$ | $\sin.5\varphi = 16\sin.\varphi\sin.(\frac{\pi}{5}-\varphi)\sin.(\frac{\pi}{5}+\varphi)\sin.(\frac{2\pi}{5}-\varphi)$
$\sin.(\frac{2\pi}{5}+\varphi)$

$n=6$ | $\sin.6\varphi = 32\sin.\varphi\sin.(\frac{\pi}{6}-\varphi)\sin.(\frac{\pi}{6}+\varphi)\sin.(\frac{2\pi}{6}-\varphi)$
$\sin.(\frac{2\pi}{6}+\varphi)\sin.(\frac{3\pi}{6}-\varphi).$

&c.

8. Was den Gebrauch betrifft, den Euler an dem Orte, woher dieser Zusatz genommen ist, von den für $\sin.nz$ und $\cos.nz$ gefundenen Bestimmungen macht, indem er daraus durch Hülfe der Logarithmen und der Differentiation Formeln für die Tangenten und Cotangenten vielfacher Winkel ableitet, so muß ich ihn übergehen, weil er außer den Grenzen einer Einleitung in die Analysis des Unendlichen liegt.

X.

Zusätze zum zehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von dem Gebrauche der trinomischen Faktoren bey der Summirung der Reihen.

1. Vorläufig ein Hülfssatz, von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln, §. 165. 166.
2. Summirung verschiedener unendlicher Reihen, §. 167 bis 183, nemlich

a. derer, die unter $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ &c. begriffen sind, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, §. 167, 168.

α. Darstellung der Summen dieser Reihe überhaupt, §. 167.

β. Darstellung derselben in einer mehr entwickelten Form, §. 168.

b. derer, die unter die Form $1 \mp \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \mp \frac{1}{4^n} +$ &c. und $1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} +$ &c. gehören, wenn n eine gerade Zahl ist, §. 169, 170.

c. derer, deren allgemeine Form $\frac{1}{(n-m)^n} \mp \frac{1}{(n+m)^n}$

+

$\dagger \frac{1}{(3n-m)^n} \mp \frac{1}{(3n\dagger m)^n} \dagger \frac{1}{(5n-m)^n} \mp$ &c., oder

$\frac{1}{(m)^n} \mp \frac{1}{(2n-m)^n} \dagger \frac{1}{(2n\dagger m)^n} \mp \frac{1}{(4n-m)^n} \dagger$ &c. ist,

so daß die obern Zeichen gelten, wenn n eine ungerade, und die untern, wenn es eine gerade Zahl bedeutet, §. 171 — 177.

α. Summirung dieser Reihen in ihrer allgemeinen Form, §. 171 — 174, nemlich

aa. der Reihen $\frac{1}{(n-m)^n} \mp \frac{1}{(n\dagger m)^n} \dagger$

$\frac{1}{(3n-m)^n} \mp$ &c. §. 171. 172.

bb. der Reihen $\frac{1}{m^n} \mp \frac{1}{(2n-m)^n} \dagger$

$\frac{1}{(2n\dagger m)^n} \mp$ &c. §. 173. 174.

β. Summirung verschiedener aus ihnen abgeleiteten besondern Reihen, §. 175 — 177, und zwar solcher, die aus ihnen entstanden sind,

aa. durch die Substitution $m = 1$, und $n = 2$, §. 175.

bb. durch die Substitution $m = 1$, und $n = 3$, §. 176, 177.

αα. aus der ersten allgemeinen Reihe, §. 176.

ββ. aus der andern, §. 177.

d. derer Reihen, die man aus den bey c angeführten durch die Addition und Subtraction derselben zu und von einander findet, §. 178 — 180.

α. Summirung der auf diese Art gefundenen allgemeinen Reihen, §. 178.

β. Summirung verschiedener aus ihnen abgeleiteten besondern Reihen, §. 179. 180.

aa. solcher, die man aus ihnen durch Setzung bestimmter Werthe für m und n erhält, §. 179.

bb. solcher, die man aus den hierdurch gefundenen Reihen durch Combination derselben ferner ableiten kann, §. 180.

e. derer Reihen, die man aus den bey d beschriebenen durch die Vereinigung je zweyer Glieder in eine Summe, und die Addition der hierdurch gefundenen Reihen erhalten kann, §. 181 — 183.

α. Summirung dieser Reihen in der Form, in welcher man sie gefunden hat, §. 181.

β. Summirung derselben in abgeänderter Form, §. 182. 183.

B. Zusatz zu §. 166.

1. Ich muß mich hier des in der Anmerkung zum vorstehenden § gethanen Versprechens entledigen, und ich will es auf die Art thun, daß ich zuvörderst die hieher gehörigen von Eulern gegebenen Beweise mittheile, und dann einige Anmerkungen hinzufüge. Der erste Beweis, den ich hersetzen werde, ist in der Abhandlung in Eulers Opuscolis varii argumenti, welche den Titel führt: Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cujusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum ejusdem, und in der zweyten Sammlung S. 108 anfängt, der zweyte, und daselbst von §. 8 bis zu Ende enthalten. Euler schlägt darin den Weg ein, daß er die Wahrheit des zu beweisenden Satzes bloß an einer algebraischen Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

aber auf eine solche Art zeigt, daß leicht in die Augen fällt,

daß

daß eben derselbe Beweis bey jeder andern Gleichung geführt werden könne. Der ganze Beweis ist folgender.

2. Es sey die Gleichung

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

gegeben, und α, β, γ, δ, und ε seyen die Wurzeln dieser Gleichung; auch sey

$$S\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$
$$S\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$$
$$S\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3$$
$$S\alpha^4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4$$
$$S\alpha^5 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5$$

Dieses vorausgesetzt, so ist zuvörderst

$$\alpha^5 - A\alpha^4 + B\alpha^3 - C\alpha^2 + D\alpha - E = 0$$
$$\beta^5 - A\beta^4 + B\beta^3 - C\beta^2 + D\beta - E = 0$$
$$\gamma^5 - A\gamma^4 + B\gamma^3 - C\gamma^2 + D\gamma - E = 0$$
$$\delta^5 - A\delta^4 + B\delta^3 - C\delta^2 + D\delta - E = 0$$
$$\varepsilon^5 - A\varepsilon^4 + B\varepsilon^3 - C\varepsilon^2 + D\varepsilon - E = 0$$

und hieraus erhält man durch die Addition

$$S\alpha^5 - AS\alpha^4 + BS\alpha^3 - CS\alpha^2 + DS\alpha - 5E = 0$$

oder

$$S\alpha^5 = AS\alpha^4 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha + 5E.$$

3. Ist daher irgend eine algebraische Gleichung, sie mag zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, oder

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots, \mp Mx \mp N = 0$$

gegeben, wo in den letzten Gliedern die obern Zeichen gelten, wenn n eine ungerade, und die untern, wenn es eine gerade Zahl ist: so ist offenbar, daß, wenn α jede Wurzel dieser Gleichung bedeutet,

$$S\alpha^n = AS\alpha^{n-1} - BS\alpha^{n-2} + CS\alpha^{n-3} - \ldots \mp MS\alpha \pm nN$$

seyn werde. Es erhellet also auf diese Art die Wahrheit des Newtonianischen Satzes für einen Fall allemal, und es ist folglich nur noch übrig, dieselbe auch für die höhern und niedern Dignitäten zu beweisen.

4. Für die höhern Potestäten läßt sich indeß eben derselbe Beweis führen. Denn thun die Werthe, α, β, γ, δ, ε, der Gleichung

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

ein Genüge, so gehören sie auch zu den Wurzeln folgender Gleichungen:

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex = 0$$
$$x^7 - Ax^6 + Bx^5 - Cx^4 + Dx^3 - Ex^2 = 0$$
$$x^8 - Ax^7 + Bx^6 - Cx^5 + Dx^4 - Ex^3 = 0$$
$$\text{\&c.}$$

und setzt man daher in jede dieser Gleichungen für x die Werthe α, β, γ, δ, und ε, und addirt die hierdurch gefundenen zu einander, so wird

$$S\alpha^6 = AS\alpha^5 - BS\alpha^4 + CS\alpha^3 - DS\alpha^2 + ES\alpha$$
$$S\alpha^7 = AS\alpha^6 - BS\alpha^5 + CS\alpha^4 - DS\alpha^3 + ES\alpha^2$$
$$S\alpha^8 = AS\alpha^7 - BS\alpha^6 + CS\alpha^5 - DS\alpha^4 + ES\alpha^3$$
$$\text{\&c.}$$

5. Bedeutet also α jede Wurzel der Gleichung:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots \pm Mx \mp N = 0$$

so ist nicht nur, wie wir bereits gefunden haben,

$$S\alpha^n = AS\alpha^{n-1} - BS\alpha^{n-2} + CS\alpha^{n-3} - DS\alpha^{n-4} \ldots \mp MS\alpha \pm nN$$

sondern auch

$$S\alpha^{n+1} = AS\alpha^n - BS\alpha^{n-1} + CS\alpha^{n-2} - DS\alpha^{n-3} + \ldots \mp MS\alpha^2 \pm NS\alpha$$

$$S\alpha^{n+2} = AS\alpha^{n+1} - BS\alpha^n + CS\alpha^{n-1} - DS\alpha^{n-2} + \ldots \mp MS\alpha^3 \pm NS\alpha^2$$

$$S\alpha^{n+3} = AS\alpha^{n+2} - BS\alpha^{n+1} + CS\alpha^n - DS\alpha^{n-1} + \ldots \mp MS\alpha^4 \pm NS\alpha^3$$

&c.

und überhaupt, wenn zu n irgend eine Zahl m hinzugesetzt wird

$$S\alpha^{n+m} = AS\alpha^{n+m-1} - BS\alpha^{n+m-2} + CS\alpha^{n+m-3} - \ldots \mp MS\alpha^{m+1} \pm NS\alpha^m$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man die zuerst gefundene, wenn man $m = 0$ setzt, indem alsdann $\alpha^0 = 1$, $\beta^0 = 1$, $\gamma^0 = 1$, &c. und also $S\alpha^0 = n$ wird.

6. Nun ist zwar diese Formel ebenfalls wahr, wenn man m negativ nimmt, und es finden deswegen für die Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

auch folgende Formeln statt:

$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha^1 - DS\alpha^0 + ES\alpha^{-1}$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha^1 + CS\alpha^0 - DS\alpha^{-1} + ES\alpha^{-2}$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha^1 - BS\alpha^0 + CS\alpha^{-1} - DS\alpha^{-2} + ES\alpha^{-3}$$

&c.

allein dieses sind nicht die Formeln, welche nach dem Lehrsatze gefunden werden müssen. Es soll vielmehr bewiesen werden, daß

$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$$
$$S\alpha = A$$

sey. Die Richtigkeit dieser Formeln erhellet also auf folgende Art.

7.

7. Man mache mit Beybehaltung der Coefficienten der gegebenen Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

folgende Gleichungen der niedern Grade:

$$z - A = 0,$$
$$z^2 - Az + B = 0$$
$$z^3 - Az^2 + Bz - C = 0$$
$$z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D = 0,$$

und setze die Wurzel der ersten Gleichung $= p$, ferner jede Wurzel der zweyten Gleichung $= q$, jede Wurzel der dritten Gleichung $= r$, und jede Wurzel der vierten Gleichung $= s$. Ob nun gleich die Wurzeln dieser Gleichung sehr von einander verschieden sind, so ist doch die Summe der Wurzeln einer jeden Gleichung $= A$, die Summe der Produkte aus je zwey und zwey Wurzeln der zweyten, dritten und vierten Gleichung $= B$, die Summe der Produkte aus je drey Wurzeln in der dritten und vierten Gleichung $= C$, und das Produkt aller vier Wurzeln der vierten Gleichung $= D$. Da nun, wenn in zwey oder mehrern Gleichungen nicht nur die Summen der einzeln Wurzeln, sondern auch die Summen der Produkte aus je zwey Wurzeln einander gleich sind, ebenfalls die Summen der Quadrate der Wurzeln dieselben sind, und eben dieses von den Summen der Würfel der Wurzeln behauptet werden kann, wenn außerdem noch die Summen der Produkte aus je drey Wurzeln, und von den Summen der Biquadrate der Wurzeln, wenn auch die Summen der Produkte aus je vier Wurzeln in den gedachten Gleichungen gleich sind: so ist

$$S\alpha = Ss = Sr = Sq = Sp$$
$$S\alpha^2 = Ss^2 = Sr^2 = Sq^2$$
$$S\alpha^3 = Ss^3 = Sr^3$$
$$S\alpha^4 = Ss^4$$

Es

Es beruhet aber der hierbey zu Hülfe genommene Satz darauf, daß die Summe der Quadrate mehrerer Größen durch die Summe dieser Größen und die Summe der Produkte aus je zweyen von ihnen, bestimmt werde, und daß zur Bestimmung der Summe der Würfel dieser Größen außerdem noch die Summe der Produkte aus je dreyen, und zur Bestimmung der Summe ihre Biquadrate noch die Summe der Produkte aus je vieren von ihnen erforderlich sey u. s. f.

8. Nun ist nach Absatz 3

$Sp = A$

$Sq^2 = ASq - 2B$

$Sr^3 = ASr^2 - BSr + 3C$

$Ss^4 = ASs^3 - BSs^2 + CSs - D$, und folglich in der Gleichung vom fünften Grade:

$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$

wenn man in diesen Formeln die Werthe des vorhergehenden Absatzes substituiret

$S\alpha = A$

$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$

$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$

$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$

und in der allgemeinen Gleichung:

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots \pm N = 0$,

wenn α jede Wurzel bedeutet,

$S\alpha = A$

$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$

$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$

$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$

$S\alpha^5 = AS\alpha^4 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha + 5E$

9. Außer diesem Beweise hat Euler in seinen Opuscülis analyticis, im ersten Theile, der zu Petersburg 1783 herausgekommen ist, und zwar in der Abhandlung, die den Titel, Miscellanea analytica führt, S. 337. f. das Verhältniß der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln durch die Auflösung der Aufgabe gesucht: Wenn die Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{&c.}$ ein Produkt aus den Faktoren $1 + \alpha z$, $1 + \beta z$, $1 + \gamma z$, $1 + \delta z$, $1 + \varepsilon z$, &c. ist, die Summe der Potestäten von α, β, γ, δ, ε, &c. zu finden. Nachdem er, um sich bey der Auflösung kurz ausdrucken zu können,

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{&c.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{&c.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{&c.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \text{&c.}$$
$$\text{&c.}$$

gesetzt und angemerkt hat, daß alles darauf ankomme, die Werthe von P, Q, R, S, &c. durch die Buchstaben A, B, C, D, &c. zu bestimmen; daß P bloß von A abhänge, weil $P = A$ ist; daß Q bloß durch A und B bestimmt werden könne, weil die Produkte aus je drey Buchstaben α, β, γ, δ, ε, nicht in die Bestimmung der Quadrate kommen; und daß aus ähnlichen Gründen zur Bestimmung von R bloß A, B und C, zur Bestimmung von S bloß A, B, C, D, erfordert werde, &c.: schließet er folgender Maaßen.

10. Wegen der so eben gedachten Beschaffenheit der Abhängigkeit der Buchstaben P, Q, R, S &c. von den Buchstaben A, B, C, D, &c. läßt sich der Buchstabe P auf eben die Art finden, als wenn bloß die Formel $1 + Az$ gegeben wäre, und die übrigen Buchstaben, B, C, D, E, &c. verschwänden. Unter diesen Umständen aber hat $1 + Az$ nicht mehr als einen Faktor, der $1 + az$ seyn mag, so daß

$a = P$ sey. Setzt man also $1 + az = 0$, oder $z = -\frac{1}{a}$, so muß auch $1 + Az = 0$ werden, und folglich $1 - \frac{A}{a} = 0$, oder $a - A = 0$ seyn. Hieraus aber folgt $a = P = A$, wie auch schon ohnedem bekannt ist.

11. Ferner erhält der Buchstabe Q eben den Werth, als wenn bloß $1 + Az + Bzz$ da wäre, und die Glieder von Cz^3 an verschwänden. Da diese Formel zwey Faktoren hat, die $1 + az$ und $1 + bz$ seyn mögen, so wird dabey $P = a + b$, und $Q = a^2 + b^2$. Setzt man nun $1 + az = 0$, oder $z = -\frac{1}{a}$, so muß auch $1 + Az + Bzz = 0$ werden, und folglich $1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} = 0$, oder $a^2 - Aa + B = 0$ seyn. Auf eben die Art aber erhält man aus dem andern Faktor die Gleichung $b^2 - Ab + B = 0$, und folglich aus beyden, wenn man sie zu einander addirt, und Q für $a^2 + b^2$, und P für $a + b$ schreibt, $Q - 2AP + 2B = 0$, oder

$$Q = AP - 2B.$$

12. Den wahren Werth von R findet man aus der Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3$, welche man $= (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)$ setzen kann, so daß $P = a + b + c$; $Q = a^2 + b^2 + c^2$, und $R = a^3 + b^3 + c^3$ wird. Alsdann geben die Substitutionen $z = -\frac{1}{a}$, $z = -\frac{1}{b}$, $z = -\frac{1}{c}$ die Gleichungen:

$$a^3 - Aa^2 + Ba - C = 0$$
$$b^3 - Ab^2 + Bb - C = 0$$
$$c^3 - Ac^2 + Bc - C = 0$$

und daraus findet man durch die Addition und den Gebrauch der Buchstaben R, Q, P

$$R - AQ + BP - 3C = 0, \text{ oder } R = AQ - BP + 3C.$$

13. Eben so findet man den Werth von S aus der Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$. Setzt man nemlich dieselbe $= (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)$ und folglich

$$P = a + b + c + d, \quad Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \quad S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

so bekömmt man durch die Substitutionen $z = -\frac{1}{a}$; $z = -\frac{1}{b}$; $z = -\frac{1}{c}$; $z = -\frac{1}{d}$ die Gleichungen:

$$a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D = 0$$
$$b^4 - Ab^3 + Bb^2 - Cb + D = 0$$
$$c^4 - Ac^3 + Bc^2 - Cc + D = 0$$
$$d^4 - Ad^3 + Bd^2 - Cd + D = 0$$

die, zu einander addirt, $S - AR + BQ - CP + 4D = 0$, oder

$$S = AR - BQ + CP - 4D$$

geben.

14. Hieraus läßt sich schon abnehmen, wie die Summen der höhern Potestäten oder T, U, V, &c. bestimmt werden. Es ist nemlich

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$U = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$
$$V = AU - BT + CS - DR + EQ - FP + 7G$$

&c.

15.

15. Zu diesen beyden hier eigentlich nur her gehörenden Beweisen, weil dabey keine Differential-Rechnung gebraucht wird, kann ich aus gewissen Gründen nicht umhin, auch den vermittelst der Differential-Rechnung von Eulern geführten Beweis zu setzen. Es ist derselbe in der aus seinen Opusculis varii argumenti vorhin angeführten Abhandlung der erste, und folgender.

16. Es sey

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm N = Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\nu)$$

wo denn die Anzahl der Faktoren $(x-\alpha)(x-\beta)$ &c. $= n$ ist. Alsdann wird

$$lZ = l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) + \ldots + l(x-\nu)$$

und, wenn man diese Gleichung differentiirt

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dx}{x-\alpha} + \frac{dx}{x-\beta} + \frac{dx}{x-\gamma} + \ldots + \frac{dx}{x-\nu}$$

und das Gefundene durch dx dividirt

$$\frac{dZ}{Z\,dx} + \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots + \frac{1}{x-\nu}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\alpha^4}{x^5} + \text{&c.}$$

$$\frac{1}{x-\beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \frac{\beta^4}{x^5} + \text{&c.}$$

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \frac{\gamma^4}{x^5} + \text{&c.}$$

&c.

$$\frac{1}{x-\nu} = \frac{1}{x} + \frac{\nu}{x^2} + \frac{\nu^2}{x^3} + \frac{\nu^3}{x^4} + \frac{\nu^4}{x^5} + \text{&c.}$$

und folglich, da man n solcher Reihen erhält, vorausgesetzt, daß die Absatz 2 erklärten Bezeichnungen hier in eben der Bedeutung gebraucht werden,

$$\frac{dZ}{Z\,dx} = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}S\alpha + \frac{1}{x^3}S\alpha^2 + \frac{1}{x^4}S\alpha^3 + \frac{1}{x^5}S\alpha^4 + \text{&c.}$$

17. Zum andern ist auch

$$dZ = nx^{n-1}dx - (n-1)Ax^{n-2}dx + (n-2)Bx^{n-3}dx - (n-3)Cx^{n-4}dx + (n-4)Dx^{n-5}dx - \text{&c.}$$

und daher, wenn man auch diese Gleichung durch dx dividirt,

$$\frac{dZ}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{&c.}$$

so wie hieraus, wenn man durch $Z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{&c.}$ dividirt

$$\frac{dZ}{Z\,dx} = \frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{&c.}}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{&c.}}$$

18. Da man also durch Vergleichung der beyden hier gefundenen Bestimmungen von $\frac{dZ}{Z\,dx}$

$$\frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{&c.}}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{&c.}} = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}S\alpha + \frac{1}{x^3}S\alpha^2 + \frac{1}{x^4}S\alpha^3 + \frac{1}{x^5}S\alpha^4 + \text{&c.}$$

bekommt, so wird, wenn man beyde Hälften dieser Gleichung durch $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{&c.}$ multiplicirt,

$$\begin{aligned} nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{&c.} = \\ nx^{n-1} + x^{n-2}S\alpha + x^{n-3}S\alpha^2 + x^{n-4}S\alpha^3 + \text{&c.} \\ - nAx^{n-2} - Ax^{n-3}S\alpha - Ax^{n-4}S\alpha^2 - \text{&c.} \\ + nBx^{n-3} + Bx^{n-4}S\alpha + \text{&c.} \\ - nCx^{n-4} - \text{&c.} \end{aligned}$$

Hier

Hier sind nun zu beyden Seiten die ersten Glieder nx^{n-1} einander gleich, und es müssen daher auch die zweyten, die dritten, die vierten ꝛc. einander gleich seyn. Folglich ist

$$-(n-1)A = S\alpha - nA$$
$$+(n-2)B = S\alpha^2 - AS\alpha + nB$$
$$-(n-3)C = S\alpha^3 - AS\alpha^2 + BS\alpha - nC$$
$$+(n-4)D = S\alpha^4 - AS\alpha^3 + BS\alpha^2 - CS\alpha + nD$$

ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem diese Gleichungen fortschreiten, ist leicht wahrzunehmen, und eben so leicht findet man aus diesen Gleichungen die Neutonianischen Bestimmungen:

$$S\alpha = A$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$$
$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$$
$$S\alpha^5 = AS\alpha^4 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha + 5E$$
$$S\alpha^6 = AS\alpha^5 - BS\alpha^4 + CS\alpha^3 - DS\alpha^2 + ES\alpha - 6F$$

ꝛc.

19. Vergleicht man diesen letzten Beweis mit den beyden vorhergehenden, so ist der Vorzug, welchen er vor denselben hat, gar nicht zu verkennen. Der Satz, der dadurch erhärtet werden soll, wird so allgemein und so strenge, und dabey auf eine so wenig weitläuftige Art dargethan, daß nichts weiter zu verlangen übrig bleibt. Bey dem ersten, Absatz 2 bis 8 mitgetheilten, Beweise wird Absatz 7 eine Behauptung zu Hülfe genommen, die einen neuen Beweis nöthig macht, da sie nicht zu den Elementar-Sätzen gehört; und vielleicht ist die genaue Bestimmung der darin genannten Summen von Potestäten nicht einmal anders möglich, als eben durch den Neutonianischen Satz. Bey dem andern, Absatz 9 bis 14 stehenden, Beweise ist das ein nicht ganz unwichtiger Umstand, daß dabey die

Buchstaben P, Q, R, S ꝛc. nicht immer Summen von einer und derselben Anzahl von Größen sind.

20. Der Herr Hofrath Käſtner hat in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen, am Ende, den Neutonianischen Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln auf seine Art, d. h. kurz, deutlich und bündig, bewiesen, und zugleich eines andern Beweises von dem ehemaligen Prof. Bärmann zu Wittenberg Erwähnung gethan Da indeß jeder deutsche Mathematiker des Herrn Hofrath Käſtners Werke besitzen muß, so habe ich nicht nöthig, daraus hier etwas herzusetzen.

21. Der französische Uebersetzer des ersten Theils der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Herr Pezzi, dessen Uebersetzung Strasburg 1786 erschienen ist, hat ebenfalls in einem Anhange zum zehnten Capitel die von Eulern bey §. 166 gelassene Lücke durch einen ohne Differential-Rechnung geführten Beweis des Neutonianischen Satzes auszufüllen gesucht. Es empfiehlt sich indeß dieser Beweis weder durch Kürze, noch durch Leichtigkeit, und ich kann daher überhoben seyn, ihn abzuschreiben. Herr Pezzi hat des Hrn. Hofr. Käſtners Werke nicht gekannt, das gesteht er selbst, daß er aber auch die Eulerischen hier mitgetheilten Beweise nicht gewußt hat, läßt sich daraus abnehmen, weil er sich rühmt, durch die Differential-Rechnung eine andere Methode gefunden zu haben, ohne dessen, was Euler in dieser Rücksicht schon im Jahr 1750 gethan hat, auch nur im mindesten zu erwähnen.

22. Uebrigens sind die Sätze aus der Differential-Rechnung, die bey dem Absatz 15 bis 17 stehenden Beweise gebraucht werden, von der Art, daß dieselben eher bekannt

seyn

seyn können, als der Neutonianische Satz, so wie es Euler gethan hat, gebraucht wird. Ich habe daher um so weniger Bedenken getragen, den gedachten Beweis hier mitzutheilen, zumal, da er nicht so bekannt zu seyn scheint, als er es verdient. Wenigstens ist Euler dadurch wider den Vorwurf gesichert, als ob er das am Ende des 166sten § gethane Versprechen nicht gehalten, weil man den gedachten Beweis nicht in seiner Differential-Rechnung findet.

C. Zusatz zu §. 167 und 168.

1. Es ist eben so angenehm als nützlich, mehrere zu einem Ziele führenden Wege mit einander zu vergleichen. Ich will daher aus der Abhandlung de summis serierum reciprocarum im siebenten Bande der Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1734 und 35 die Art und Weise mittheilen, wie Euler lange vor der Ausarbeitung der Einleitung in die Analysis des Unendlichen die Summen der in den oben stehenden §§ untersuchten Reihen mit Hülfe des Kreises bestimmt hat.

2. Wenn s einen Bogen, y den Sinus und x den Cosinus desselben bedeutet, so ist nach Capitel 8 der Einleitung §. 134.

$$y = s - \frac{s^3}{1.2\,3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5\,6.7} + \text{ꝛc., und}$$

$$x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

Eigentlich werden durch diese Formeln die Sinus und Cosinus eines Bogens aus diesem Bogen bestimmt, man kann sie aber eben so gut gebrauchen, um nach jener einen Bogen durch seinen Sinus, und aus dieser durch den Cosinus zu finden. Zu dieser Absicht soll hier indeß bloß die erste

Formel untersucht werden, und dazu ist es am bequemsten ihr folgende Form zu geben:

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \text{ꝛc.}$$

3. Da dieses eine Gleichung von unendlich vielen Dimensionen ist, so muß sie auch eine unendliche Anzahl von Wurzeln haben, und nennt man dieselben A, B, C, D, E, ꝛc, so wird, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist,

$$1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \frac{s^7}{1.2.3\ldots7.y} - \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$(1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})(1 - \frac{s}{E})\ \text{ꝛc.}$$

und folglich

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{1}{E} + \text{ꝛc.}$$

$0 =$ der Summe der Produkte aus je zweyen

$$-\frac{1}{1.2.3.y} =$$ der Summe der Produkte aus je dreyen

$0 =$ der Summe der Produkte aus je vieren

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.y} =$$ der Summe der Produkte aus je fünfen

von diesen Größen $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}, \frac{1}{E}$ ꝛc.

4. Nun sind aber die Wurzeln der Gleichung Absatz 2 keine andere als alle die Bogen, deren Sinus $= y$ ist, und also, wenn man den kleinsten dieser Bogen durch A und den halben Umkreis durch π ausdruckt, folgende:

$$A, \pi - A, 2\pi + A, 3\pi - A, 4\pi + A, 5\pi - A, \text{ꝛc.}$$

desgleichen

$$-\pi - A, -2\pi + A, -3\pi - A, -4\pi + A, -5\pi - A, \text{ꝛc.}$$

Es ist demnach auch

die Summe aller dieser Größen $= \frac{1}{y}$

die Summe aller Produkte aus je zweyen $= 0$

die Summe aller Produkte aus je dreyen $= \frac{-1}{1.2.3.y}$

die Summe aller Produkte aus je vieren $= 0$

die Summe aller Produkten aus je fünfen $= \frac{1}{1.2.3.4.5.y}$

die Summe aller Produkte aus je sechsen von ihnen $= 0$

&c.

5. Setzt man nunmehr

$$P = \frac{1}{A} + \frac{1}{\pi - A} + \frac{1}{-\pi - A} + \frac{1}{2\pi + A} + \frac{1}{-2\pi - A} + \&c.$$

$$Q = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{(\pi - A)^2} + \frac{1}{(-\pi - A)^2} + \frac{1}{(2\pi + A)^2} + \frac{1}{(-2\pi - A)^2} + \&c.$$

$$R = \frac{1}{A^3} + \frac{1}{(\pi - A)^3} + \frac{1}{(-\pi - A)^3} + \frac{1}{(2\pi + A)^3} + \frac{1}{(-2\pi - A)^3} + \&c.$$

$$S = \frac{1}{A^4} + \frac{1}{(\pi - A)^4} + \frac{1}{(-\pi - A)^4} + \frac{1}{(2\pi + A)^4} + \frac{1}{(-2\pi - A)^4} + \&c.$$

&c.

so wird nach dem in der Einleitung, Theil 1. Cap. 10. §. 166, angeführten Neutonianischen Satze

$$P = \frac{1}{y};$$

$$Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2};$$

$$R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$$

$$S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$$

$$T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{I}{1.2.3.4.y}$$

$$V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$$

$$W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5.y} - \frac{I}{1.2.3.4.5.6.y}$$

&c.

6. Angenommen also, daß $y = r = 1$ sey, so ist der kleinste Bogen A von denen, deren Sinus $= 1$ ist, $= \frac{1}{2}\pi$, oder wenn man $\frac{1}{2}\pi = q$ setzt, $A = q$ und $\pi = 2q$. Dabey verwandelt sich die obige Reihe Absatz 4 in folgende:

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, -\frac{1}{3q} - \frac{1}{3q}, + \frac{1}{5q}, + \frac{1}{5q}, - \frac{1}{7q}, - \frac{1}{7q} +$$

$$\frac{1}{9q} + \frac{1}{9q}, + \text{ &c.}$$

Hieraus aber fließt

$$\frac{2}{q}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ &c.}\right) = P = 1$$

und es ist demnach

$$\frac{q}{2} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ &c.}$$

welches die bekannte Leibnitzische Reihe zur Bestimmung des halben Umfangs eines Kreises zum Radius, oder des ganzen Umfanges zum Durchmesser desselben ist.

7. Nimmt man nun die Quadrate derer Größen, die sich aus der Voraussetzung, $y = 1$, ergeben haben, so erhält man

$$+ \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} + \text{ &c.}$$

und durch die Bestimmungen im fünften Absatze also

$$\frac{2}{q^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{ &c.}\right) = Q = P = 1$$

oder

oder

$$\frac{q^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{&c.}$$

Nun ist aber $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{&c.} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{&c.} - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{&c.})$, und es wird folglich

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{&c.}$$

8. Da in dem Falle, wenn $y = 1$ ist, $P = Q = 1$ wird, so ist, für $y = 1$, $R = \frac{1}{2}$; $S = \frac{1}{3}$; $T = \frac{5}{24}$; $V = \frac{2}{15}$; $W = \frac{61}{720}$; $X = \frac{17}{315}$, &c. Aus $R = \frac{1}{2}$ aber hat man

$$\frac{2}{q^3}(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{&c.}) = \frac{1}{2}$$

oder

$$\frac{q^3}{4} = \frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{&c.}$$

Ferner fließt aus aus $S = \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{q^4}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{&c.}) = \frac{1}{3}$$

oder

$$\frac{q^4}{6} = \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{&c.}$$

und da diese Reihe mit $\frac{16}{15}$ multiplicirt die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{&c.}$$

giebt,

giebt, so findet man dadurch

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ꝛc.}$$

9. Auf eine ähnliche Art entdeckt man die Summen der höhern Potestäten, nemlich

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{ꝛc.} = \frac{5q^5}{48} = \frac{5\pi^5}{1536}$$

und

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.} = \frac{q^6}{15} = \frac{\pi^6}{960}$$

Aus dieser letzten Reihe aber ergiebt sich auch

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^6}{945}$$

Für die siebenten Dignitäten erhält man

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{ꝛc.} = \frac{61q^7}{1440} = \frac{61\pi^7}{184320}$$

und für die achten

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \frac{1}{11^8} + \text{ꝛc.} = \frac{17q^8}{630} = \frac{17\pi^8}{161280}$$

woraus sich denn weiter

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^8}{9450}$$

ergiebt. Da bey ungeraden Exponenten die Zeichen vor den Gliedern abwechseln, und nur bloß bey den geraden Potestäten gleich sind, so ist dies die Ursache, daß man die allgemeine Form

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc.}$$

nur in den Fällen summiren kann, wenn n eine gerade Zahl ist.

10. Setzt man den kleinsten zu y gehörigen Bogen $= \frac{1}{4}\pi$ und also $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird

$$\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \frac{4}{9\pi} + \frac{4}{11\pi} - \text{&c.} = P = \frac{1}{y} = \sqrt{2}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{&c.}$$

Ferner ist die Summe der Quadrate jener Glieder oder

$\frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{&c.} = Q = 2$, und also

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{&c.} = \frac{\pi^2}{8}$$

wie bereits vorher gefunden worden ist.

11. Macht man $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ so wird der kleinste zu y gehörige Bogen $= \frac{1}{3}\pi$. Alsdann erhält man

$$\frac{3}{\pi} + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{4\pi} - \frac{3}{5\pi} + \frac{3}{7\pi} + \frac{3}{8\pi} \text{&c.} = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

und es ist daher

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{&c.}$$

Ferner wird die Summe der Quadrate dieser Glieder $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}$ und folglich

$$\frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \text{&c.}$$

in welcher Reihe alle aus 3 zusammengesetzte Glieder fehlen. Es hängt aber diese Reihe auch mit folgender

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{&c.} = \frac{\pi^2}{6}$$

zu-

zusammen, indem diese mit $(1 - \frac{1}{9})$ multiplicirt, jene giebt, und ihre Summe ist daher $= \frac{\pi^2}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4\pi^2}{27}$.

12. Setzt man $y = 0$, so verwandelt sich die im Anfange Absatz 2 zum Grunde gelegte Gleichung in folgende:

$$0 = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind alle die Bogen, deren Sinus $= 0$ ist. Die kleinste Wurzel ist daher $s = 0$, und dividirt man hierdurch die vorhergehende Gleichung, so bekömmt man

$$0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind alle übrige Bogen, deren Sinus $= 0$ ist, oder π, $-\pi$, $+2\pi - 2\pi$, $+3\pi$, -3π ꝛc. Hieraus fließt

$$1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.} = (1 - \frac{s}{\pi})$$

$$(1 + \frac{s}{\pi})(1 - \frac{s}{2\pi})(1 + \frac{s}{2\pi})\text{ꝛc.} = (1 - \frac{s^2}{\pi^2})(1 - \frac{s^2}{4\pi^2})$$

$$(1 - \frac{s^2}{9\pi^2})(1 - \frac{s^2}{16\pi^2})$$

ꝛc.

13. Nimmt man nun auch hier den Neutonianischen Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln zu Hülfe, so findet man

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^4}{90} = Q$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{&c.}=\frac{\pi^6}{945}=R$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{&c.}=\frac{\pi^8}{9450}=S$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{&c.}=\frac{\pi^{10}}{93555}=T$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{&c.}=\frac{691\pi^{12}}{6825\cdot 93555}=V$$

und hieraus

$$\pi^2=6P=\frac{15Q}{P}=\frac{21R}{2Q}=\frac{10S}{R}=\frac{99T}{10S}=\frac{6825V}{691T}\text{&c.}$$

14. Auch kann man aus den bisher gefundenen Bestimmungen folgende Werthe von π ableiten.

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{&c.}\right)$$

$$\pi=2\left(\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\text{&c.}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{&c.}}\right)$$

$$\pi=4\left(\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{&c.}}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\text{&c.}}\right)$$

$$\pi=3\left(\frac{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\text{&c.}}{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{&c.}}\right)$$

$$\pi=\frac{16}{5}\left(\frac{1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+\text{&c.}}{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\text{&c.}}\right)$$

$$\pi = \frac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{ꝛc.}}\right)$$

$$\pi = \frac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.}}\right)$$



XI.

Zusätze zum eilften Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

1. Verschiedene andere unendliche Ausdrücke für die Bogen und die Sinus, §. 184—196.
   a. diese unendliche Ausdrücke für die Bogen und die Sinus selbst, §. 184—187.
      α. Reihen für die Sinus und Cosinus, die, so wie sie aus den bereits gefundenen abgeleitet sind, bey der gegenwärtigen Untersuchung als Grundreihen behandelt werden, §. 184.
      β. verschiedene daraus abgeleitete Reihen, §. 185—187.
         aa. zur Bestimmung von π, §. 185.
         bb. für die Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten, §. 186.
         cc. zur Erfindung des Sinus und Cosinus eines Winkels aus dem Sinus und Cosinus eines andern Winkels, §. 187.
   b. Gebrauch dieser unendlichen Ausdrücke, §. 188—196.
      α. von ihrem Gebrauche überhaupt, §. 188.
      β. von der Anwendung derselben zur Erfindung der

Logarithmen von π und der trigonometrischen Linien insbesondere §. 189—196, und zwar

aa. zur Erfindung des Logarithmen von π, §. 189. 190.

bb. zur Erfindung der Logarithmen des Sinus und Cosinus, §. 191—195.

αα. der hyperbolischen Logarithmen, §. 191 bis 194.

ββ. der tabularischen Logarithmen, §. 195.

cc. von der Erfindung der Logarithmen, der Tangenten und Cotangenten ꝛc. aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus, §. 196.

2. Reihen zur Erfindung der Tangenten und Cotangenten eines Bogens aus diesem Bogen, §. 197. 198. a. 198. b.

XII.

Zusätze zum zwölften Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen.

1. Nothwendigkeit der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen, §. 199.

2. Art und Weise, wie sie zu Stande gebracht wird, §. 200 bis 210.

   a. wenn der Nenner der zu entwickelnden gebrochenen Funktion den Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ bloß in der ersten Potestät enthält, §. 200 — 205.

      α. erster Weg, §. 200 — 203.

      β. zweyter Weg, §. 204. 205.

   b. wenn der Nenner der zu entwickelnden gebrochenen Funktion den Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ im Quadrat oder in einer noch höhern Potestät in sich begreift, §. 206 — 210.

      α. wenn er denselben im Quadrat enthält, §. 206 — 208.

      β. wenn $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^k$ ein Faktor davon ist. §. 209.

Zum Beschlusse wird §. 210. noch angemerkt, wie man jedesmal den Bruch des Complements finden könne.

Anmerk. Die Methode, welche Euler im ersten Theile des fünften Bandes der Actorum der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1780, S. 32. f. bekannt gemacht hat, jeden gegebenen rationalen Bruch in einfache Brüche aufzulösen, beruhet darauf, daß wenn $(z-a)^k$ ein Faktor des Nenners des gegebenen Bruchs ist, alle aus diesem Faktor entspringende Partial-Brüche über alle Grenzen wachsen, wenn man $z = a$ setzt, dagegen alle übrige Partial-Brüche endlich bleiben, und also gegen jene gleichsam verschwinden. Wie man dieses bey der Auflösung der Brüche in einfache Partial-Brüche mit Vortheil gebrauchen könne, solches zeigt Euler am angeführten Orte für den Bruch $\frac{P}{Q}$ erstlich für den Fall, wenn Q den Faktor $z-a$, dann für den, wenn Q den Faktor $(z-a)^2$, drittens für den, wenn es den Faktor $(z-a)^3$ hat, und setzt darauf hinzu, daß und wie diese Methode ebenfalls anwendbar sey, wenn die Faktoren des Nenners imaginair sind. Da dazu einige Sätze erfordert werden, welche in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen noch nicht vorkommen, so muß ich es hier bey der gegebenen Anzeige bewenden lassen.

XIII.

Zusätze zum dreyzehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von den wiederkehrenden Reihen.

1. Von der Art und Weise, das allgemeine Glied jeder wiederkehrenden Reihe zu finden, §. 211—230.
   a. Methode, jede wiederkehrende Reihe in Partial-Reihen aufzulösen, die zusammengenommen ihr gleich sind, § 211—214.
   b. Art und Weise, das allgemeine Glied jeder wiederkehrenden Reihe zu finden, §. 215—230.
      α. Erklärung der Art und Weise, das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe zu finden, wenn die Partial-Brüche der Funktion bekannt sind, woraus diese Reihe entspringt, § 215—223.
         aa. wenn diese Partial-Brüche unter die Form $\frac{A}{(1-pz)^k}$ gehören, §. 215, 216.
         bb. wenn sie unter der Form $\frac{A+Bz}{(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k}$ begriffen sind, §. 217—223. Hier werden folgende Fälle betrachtet:
            αα. wenn $k=1$ ist, §. 217, 218.

ββ. wenn k irgend eine andere ganze Zahl bedeutet, §. 219—223, und dieser

aaa. allgemein, §. 219.

bbb. besonders, wenn $k = 2$, §. 220, wenn $k = 3$, §. 221, §. 222 ist, u. s. f.

cc. wenn beyde Formen statt finden, §. 223.

β. Methode, das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe aus ihrer Beziehungs-Scale zu entwickeln, §. 224 — 230.

aa. Erklärung der Beziehungs-Scale, §. 224.

bb. Methode, das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe aus der Beziehungs-Scale derselben zu finden, §. 225, 226.

cc. Hieraus abgeleitete Methode,

αα. wenn die Beziehungs-Scale zweytheilig ist,

aaa. jedes Glied der wiederkehrenden Reihe aus einem einzigen vorhergehenden zu finden, §. 226. 227.

bbb. aus jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern Pz^n und Qz^{n+1} das von ihnen durch mehrere andere getrennte Glied Xz^{2n} zu entwickeln, §. 228. 229.

ββ. wenn die Beziehungs-Scale dreytheilig ist, jedes Glied aus den zwey vorhergehenden zu finden, §. 230.

2. Von der Art und Weise, die Summe einer wiederkehrenden Reihe zu finden, §. 231 — 233.

a. Methode, die Summe aller ohne Ende fortlaufenden Glieder einer wiederkehrenden Reihe zu finden, §. 231.

b. Methode, die Summe einer wiederkehrenden Reihe bis auf ein gegebenes Glied derselben zu finden, §. 232, 233.

α. allgemein, §. 232.

β. wenn die Beziehungs Scale zweytheilig ist, §. 233.

B. Zusatz zu §. 222.

Ich war anfänglich willens, die Entwickelung des zweyten Theils des allgemeinen Gliedes der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{A + Bz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^3}$ entspringt, ganz herzusetzen, und also den Fall des gegenwärtigen §. eben so zu behandeln, als den im vorhergehenden. Da aber die Zusätze zu diesem ersten Bande schon so sehr angewachsen sind, und die gedachte Entwickelung für denjenigen, der alles vorhergehende mit dem erforderlichen Nachdenken gelesen hat, allenfalls als überflüßig angesehen werden kann, so befürchte ich über die Abänderung meines Entschlusses keinen Vorwurf.

XIV.

Zusätze zum vierzehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Multiplication und Division der Winkel.

1. Bestimmung der trigonometrischen Linien solcher Bogen oder Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten, §. 234 — 257.
   a. der Sinus, §. 234 — 241.
   b. der Cosinus, §. 242 — 245.
   c. der Secanten, § 246 247.
   d. der Cosecanten, §. 248.
   e. der Tangenten und Cotangenten, §. 249 — 257.
2. Summation der Sinus und Cosinus der Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, §. 258—260. Den Beschluß machen einige Winke zur weitern Benutzung des Bisherigen nebst dem Verzeichniß einiger dazu nothwendigen Sätze, §. 261—263.

B. Zusatz zu §. 234 — 241.

1. Wenn z einen Bogen eines Kreises bedeutet, dessen Radius = 1 ist, und dabey sin. z = x, und cos. z = y gesetzt wird, so findet man zwar, wenn man x oder y aus z bestimmt, sowohl für x als für y nicht mehr als einen Werth, aber dagegen gehören zu jedem x und y unendlich viele

viele Bogen, so daß in diesem Fall z eine unendlich vielfache Bedeutung bekommt. Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet, sowohl, wenn man den Begriff eines Sinus und Cosinus genau überlegt, als auch aus den oben im achten Capitel, §. 134, gefundenen Formeln, nach welchen

$$\text{sin. } z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

und

$$\text{cos. } z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

ist.

2. Will man folglich einen Sinus oder Cosinus bloß auf die Art ausdrucken, daß man den Bogen anzeigt, zu welchem er gehöret: so kann man solches auf unzählige Arten thun. Bedeutet nemlich s irgend einen Bogen, und π den halben Umkreis, so ist, wenn man bey der Bestimmung der Sinus und Cosinus außer der Größe derselben auch ihre Lage in Erwägung zieht, und also die positiven von den negativen unterscheidet,

$$\text{sin. } s = \text{sin. } (\pi - s) = \text{sin. } (2\pi + s) = \text{sin. } (3\pi - s) = \text{sin. } (4\pi + s) \text{ ꝛc.}$$

und

$$\text{cos. } s = \text{cos. } (2\pi - s) = \text{cos. } (2\pi + s) = \text{cos. } (4\pi - s) = \text{cos. } (4\pi + s) \text{ ꝛc.}$$

Betrachtet man aber die Sinus und Cosinus bloß ihrer Größe nach oder absolute, so wird sogar

$$\text{sin. } s = \text{sin. } (\pi - s) = \text{sin. } (\pi + s) = \text{sin. } (2\pi - s) = \text{sin. } (2\pi + s) = \text{sin. } (3\pi - s) = \text{sin. } (3\pi + s) = \text{sin. } (4\pi - s) \text{ ꝛc.}$$

und

$$\text{cos. } s = \text{cos. } (\pi - s) = \text{cos. } (\pi + s) = \text{cos. } (2\pi - s) =$$

$$\cos.(2\pi + s) = \cos.(3\pi - s) = \cos.(3\pi + s) = \cos.(4\pi - s) \text{ ꝛc.}$$

3. Da also in der Gleichung:

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{ꝛc.})$$

der Sinus in der ersten Hälfte oder $\sin. nz$ bloß durch den Bogen angezeigt ist, zu welchem er gehöret: so kann man dafür, wenn man $nz = s$ macht, ohne die Gleichung zu zu zerstören, entweder

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(2\pi + s) = \sin.(3\pi - s) \text{ ꝛc.}$$

oder auch

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(\pi + s) = \sin.(2\pi - s) = \sin.(2\pi + s) \text{ ꝛc.}$$

setzen, je nachdem man bey den Sinus entweder ihre Größe und Lage, oder ihre Größe allein in Erwägung zieht. Ferner kann man darin für x, da x durch diese Gleichung nicht weiter bestimmt wird, als daß es der Sinus von $\frac{1}{n}$ von dem Bogen seyn soll, dessen Sinus ihre erste Hälfte ausmacht, entweder

$$\sin.\frac{s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{\pi - s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{2\pi + s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{3\pi - s}{n} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\sin.\frac{s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{\pi - s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{\pi + s}{n} \text{ oder } \sin.\frac{2\pi - s}{n} \text{ ꝛc.}$$

setzen, je nachdem wieder entweder der erste oder der zweyte von den so eben gedachten Fällen angenommen wird. Zugleich wird dabey immer y, als der Cosinus des Bogens, von welchem x der Sinus ist, $= \sqrt{(1 - xx)}$.

4. Bringt man nun den jetzt gedachten Werth $y = \sqrt{(1 - xx)}$ in die Gleichung:

sin.

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{ꝛc.})$$

so erhält man dadurch eine solche, die bloß x enthält, und dieser Gleichung thun folglich, weil bey der Erfindung derjenigen, woraus sie abgeleitet ist, die Lage der Sinus mit in Erwägung gezogen worden, die Werthe

$$\sin. \frac{s}{n};\ \sin. \frac{\pi - s}{n};\ \sin. \frac{2\pi + s}{n};\ \sin. \frac{3\pi - s}{n};\ \text{ꝛc.}$$

in aller Rücksicht; die Werthe aber

$$\sin. \frac{s}{n};\ \sin. \frac{\pi - s}{n};\ \sin. \frac{\pi + s}{n};\ \sin. \frac{2\pi - s}{n};\ \text{ꝛc.}$$

in so fern ein Genüge, als sie und ihre Grundgleichung durch Beyseitsetzung der Lage der Sinus nicht geändert wird.

5. So weit ist man also im Stande, die Werthe, welche x in der aus der Gleichung:

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{ꝛc.})$$

durch die Substitution $y = \sqrt{(1 - xx)}$ entspringenden Formel haben kann, mit der vollkommensten Gewißheit zu bestimmen, ohne daß man nöthig hat, diese Substitution wirklich zu gebrauchen, und ohne die Anzahl der Dimensionen von x in der dadurch entstehenden Gleichung zu wissen. Allein unter den unendlich vielen Werthen, die x auf diese Art in der gedachten Gleichung haben kann, giebt es bey jedem bestimmten Werthe von n auch nur eine bestimmte Anzahl von einander verschiedener Werthe von x, und die Kenntniß dieser Werthe ist es, worauf es hier vorzüglich ankommt. Man gelangt dazu durch folgende Betrachtungen.

6. Zuvörderst kehren von $\sin. \frac{2n\pi + s}{n}$ an die schon dagewesenen Werthe in eben der Ordnung wieder, indem $\sin. \frac{2n\pi + s}{n} = \sin. \frac{s}{n}$; $\sin. \frac{(2n+1)\pi - s}{n} = \sin. \frac{\pi - s}{n}$; ꝛc. ist, und es kann also die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe von x, wenn man die Sinus der Größe und Lage nach betrachtet, nicht größer als $2n$, wenn man sie aber absolute nimmt, nicht größer als $4n$ seyn. Zum andern sind, wenn n eine ungerade Zahl ist, unter den $2n$ Werthen im ersten Falle je zwey, und unter den $4n$ Werthen im andern Falle je vier Werthe einander gleich, so daß, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, für x nicht mehr als n von einander verschiedene Werthe übrig bleiben. Denn einmal ist

$$\sin. \frac{s}{n} = \sin. \frac{n\pi - s}{n}$$

$$\sin. \frac{\pi - s}{n} = \sin. \frac{(n-1)\pi + s}{n}$$

$$\sin. \frac{2\pi + s}{n} = \sin. \frac{(n-2)\pi - s}{n}$$

ꝛc.

desgleichen

$$\sin. \frac{(n+1)\pi + s}{n} = \sin. \frac{(2n-1)\pi - s}{n}$$

$$\sin. \frac{(n+2)\pi - s}{n} = \sin. \frac{(2n-2)\pi + s}{n}$$

$$\sin. \frac{(n+3)\pi + s}{n} = \sin. \frac{(2n-3)\pi - s}{n}$$

ꝛc.

Zweytens sind, wenn man die Sinus absolute betrachtet, die Sinus von

sin.

$\sin.\frac{s}{n}$ an bis zum $\sin.\frac{n\varpi - s}{n}$

von den Sinus von

$\sin.\frac{n\varpi + s}{n}$ an bis zum $\sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$

nicht verschieden, und außerdem ist auch

$$\sin.\frac{s}{n} = \sin.\frac{n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(n-1)n + s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(n-1)n - s}{n}$$

&c.

desgleichen

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n} = \sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\pi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

&c.

Zum dritten sind, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, unter den vorhin gedachten 2n Werthen n positive und n negative, und unter den erwähnten 4n Werthen 2n Sinus, die zu Bogen gehören, die kleiner sind als ϖ, und 2n Sinus, die zu Bogen gehören, die größer sind als ϖ und kleiner als 2ϖ, und unter jenen sowohl als unter diesen je zwey, und unter allen je vier gleiche, so daß, wenn n eine gerade Zahl ist, für x entweder die Anzahl von 2n Werthen, n positiven und n negativen, mit jenen gleich großen, oder von n absoluten Werthen entsteht. Denn einmal unterscheiden sich, wenn n eine gerade Zahl ist, die Sinus.

$$\sin.\frac{s}{n},\ \sin.\frac{\varpi - s}{n},\ \sin.\frac{2\varpi + s}{n} \ldots\ldots,\ \sin.\frac{(n-1)\varpi - s}{n}$$

von den Sinus

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n},\ \sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n},\ \sin.\frac{(n+2)\varpi + s}{n} \ldots$$

$$\ldots \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

bloß durch ihre Lage; und zweytens ist wieder, wie vorhin,

$$\sin.\frac{s}{n} = \sin.\frac{n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(n-1)\varpi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(n-1)\varpi - s}{n}$$

&c.

desgleichen

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n} = \sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

&c.

7. Will man also bloß alle von einander verschiedene Werthe haben, die x in der aus

$$\sin. n z =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2n^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \&c.)$$

durch die Substitution $y = \sqrt{(1 - xx)}$ entspringenden Gleichung bekommen kann, und dieselben auf die bequemste Art ausdrucken: so sind dieselben

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, und zwar

a. wenn die Sinus sowohl ihrer Lage als ihrer Größe nach betrachtet werden:

$$\sin. z; \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{4\varpi}{n} \dagger z); \ldots\ldots \sin.(\tfrac{(2n-2)\varpi}{n} \dagger z)$$

b. wenn die Sinus bloß ihrer Größe nach genommen werden:

$$\sin. z; \sin.(\tfrac{\varpi}{n} - z); \sin.(\tfrac{\pi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} - z); \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} \dagger z);$$

$$\sin.(\tfrac{3\varpi}{n} - z) \ldots\ldots \sin.(\tfrac{\frac{1}{2}(n-1)\varpi}{n} \dagger z).$$

2. wenn n eine gerade Zahl ist, und zwar

a. wenn man die Sinus nach Größe und Lage zugleich betrachtet,

$$\pm \sin. z; \pm \sin.(\tfrac{\varpi}{n} - z); \pm \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} \dagger z); \ldots$$

$$\ldots \pm \sin.(\tfrac{(n-1)\varpi}{n} - z)$$

b. wenn man sie bloß nach der Größe betrachtet,

$$\sin. z; \sin.(\tfrac{n}{n} - z); \sin.(\tfrac{\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} - z);$$

$$\sin.(\tfrac{2\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{3\varpi}{n} - z) \ldots. \sin.(\tfrac{1}{2}\varpi - z).$$

8. Da sich das Allgemeine allemal in das ihm untergeordnete Besondere durch Hinzusetzung dessen, was aus dem specifischen Unterschiede fließt, muß verwandeln lassen: so muß man auch aus den Werthen von x

$$\sin. z; \sin.(\tfrac{\varpi}{n} - z); \sin.(\tfrac{\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} - z); \text{ ꝛc.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, die Werthe

$$\sin. z; \sin.(\tfrac{2\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{4\varpi}{n} \dagger z); \sin.(\tfrac{6\varpi}{n} \dagger z); \text{ ꝛc.}$$

so wie auch, wenn n eine gerade Zahl ist, folgende

$\pm \sin.z ; \pm \sin.(\frac{\varpi}{n} - z) ; \pm \sin.(\frac{2\varpi}{n} + z) ; \pm \sin.(\frac{3\varpi}{n} - z) ; \text{ꝛc.}$

bloß durch Hinzufügung der Zeichen + und − herleiten können. Nun ist in Ansehung der ersten Werthe

$$\sin. z = \sin. z$$

$$\sin.(\frac{\varpi}{n} - z) = \sin.(\frac{(n-1)\varpi}{n} + z)$$

$$-\sin.(\frac{\varpi}{n} + z) = \sin.(\frac{(n+1)\varpi}{n} + z) = \sin.(\frac{(2n-1)\varpi}{n} - z)$$

$$-\sin.(\frac{2\varpi}{n} - z) = \sin.(\frac{(n+2)\varpi}{n} - z) = \sin.(\frac{(2n-2)\varpi}{n} + z)$$

ꝛc.

und in Ansehnng der andern

$$\pm \sin.z = \pm \sin.z$$

$$\pm \sin.(\frac{\varpi}{n} - z) = \pm \sin.(\frac{\varpi}{n} - z);$$

$$\pm \sin.(\frac{\varpi}{n} + z) = \pm \sin.(\frac{(n-1)\varpi}{n} - z);$$

$$\pm \sin.(\frac{2\varpi}{n} - z) = \pm \sin.(\frac{(n-2)\varpi}{n} + z);$$

ꝛc.

Man kann demnach, wenn die Sinus der Größe und Lage nach betrachtet werden, die Werthe für x, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, auch durch

$$\sin.z ; + \sin.(\frac{\varpi}{n} - z) ; - \sin.(\frac{\varpi}{n} + z) ; - \sin.(\frac{2\varpi}{n} - z) ;$$

$$+ \sin.(\frac{2\varpi}{n} + z) ; + \sin.(\frac{3\varpi}{n} - z) ; - \sin.(\frac{3\varpi}{n} + z) ;$$

$$-\sin.(\frac{4\varpi}{n} - z) ; + \sin.(\frac{4\varpi}{n} + z) ; + \text{ꝛc.}$$

und wenn n eine gerade Zahl ist, auch durch

$\pm \sin.z ; \pm \sin.(\frac{\varpi}{n} - z) ; \pm \sin.(\frac{\varpi}{n} + z) ; \pm \sin.(\frac{2\varpi}{n} - z) \text{ꝛc.}$

aus-

ausdrucken. Im ersten Falle findet man bey einigem Nachdenken überdem auch bald, daß die Anzahl der negativen Werthe jedesmal die kleinere Hälfte von n, und folglich allezeit eine gerade Zahl ist.

9. Bringt man nunmehr den Werth $y = \sqrt{(1 - xx)}$ in die Gleichung

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{&c.})$$

wobey es am besten ist, daß man den von Eulern eingeschlagenen Werth betritt; so erhält man, wenn n eine ungerade Zahl ist, eine rationale Gleichung von n, und wenn n eine gerade Zahl ist, eine rationale Gleichung von 2n Dimensionen. Von diesen Gleichungen sind also aus dem Vorhergehenden alle Wurzeln aufs vollkommenste bekannt, weil die Anzahl derselben im ersten Falle = n, und im andern = 2n ist, und man kann also nun diese Wurzeln mit den Gliedern der Gleichung mit vollkommener Sicherheit vergleichen.

10. Dadurch, daß die Wurzeln der gedachten Gleichungen in dem Vorhergehenden auf mehr denn eine Art bestimmt sind, wird diese Vergleichung sehr erleichtert. So sieht man z. B. den Grund von den im dritten Exempel, S. 276. stehenden Gleichungen darnach sehr bald, so wie daraus auch die Gleichung des 240sten §. leicht gefunden werden kann. Bey dieser Gleichung kann außerdem der Gebrauch der absoluten Werthe von x von Nutzen seyn, zumal, wenn man davon die Anwendung machen will, deren Euler im 241 und 245sten §. gedenkt. Uebrigens finde ich nicht nöthig, auf eine ähnliche Art die Wurzeln der Gleichung zu betrachten, welche Euler im 243sten § mitgetheilt hat, um darauf die Betrachtung der Cosinus viel-

facher Winkel zu gründen; denn wer das Bisherige mit Aufmerksamkeit gelesen hat, muß die dabey nöthigen Ueberlegungen selbst anstellen können.

C. Einige Sätze von Bogen, die in einer geometrischen Progression fortgehen.

1. Die Sätze von den Bogen und ihren Sinus, Cosinus, Tangenten, Secanten u. s. f., welche das vierzehnte Capitel des ersten Theils der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen enthält, beruhen auf der Betrachtung solcher Bogen oder Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten. Man kann ihre Anzahl beträchtlich vermehren, wenn man dazu die Untersuchung solcher Winkel setzt, die in einer geometrischen Progression stehen; und es wird nicht undienlich seyn, einige von den Sätzen, worauf diese Untersuchung der Bogen führt, aus Eulers Opusculis analyticis, und zwar aus der Abhandlung im ersten Theile, welche den Titel: Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes, führt, herzusetzen.

2. Da

$$\text{sin. } 2\varphi = 2 \text{ sin. } \varphi . \text{ cos. } \varphi$$

ist, so wird, wenn s irgend einen Winkel bedeutet,

$$\text{sin. } s = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} s . \text{ cos. } \tfrac{1}{2} s$$
$$\text{sin. } \tfrac{1}{2} s = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{4} s . \text{ cos. } \tfrac{1}{4} s$$
$$\text{sin. } \tfrac{1}{4} s = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{8} s . \text{ cos. } \tfrac{1}{8} s$$
$$\text{sin. } \tfrac{1}{8} s = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{16} s . \text{ cos. } \tfrac{1}{16} s$$
$$\text{&c.}$$

Hieraus fließt

$$\text{sin. } s = 16 . \text{sin. } \tfrac{1}{16} s . \text{cos. } \tfrac{1}{2} s . \text{cos. } s . \tfrac{1}{4} \text{cos. } \tfrac{1}{8} s . \text{cos. } \tfrac{1}{16} s$$

und überhaupt

wenn i eine unendlich große Potestät der 2 bedeutet,

sin.

$$\sin. s = i. \sin. \frac{s}{i}. \cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\sin. s = s. \cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{32} s. \text{ ꝛc.}$$

weil $\sin. \frac{s}{i}$, wegen der ynendlichen Größe von i, $= \frac{s}{i}$, und also $i. \sin. \frac{s}{i} = s$ ist.

3. Hieraus ergiebt sich

$$s = \frac{\sin. s}{\cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{32} s \text{ ꝛc.}}$$

oder

$$s = \sin. s. \sec. \tfrac{1}{2} s. \sec. \tfrac{1}{4} s. \sec. \tfrac{1}{8} s. \sec. \tfrac{1}{16} s. \sec. \tfrac{1}{32} s. \text{ ꝛc.}$$

und daraus erhält man, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$1s = 1\sin. s + 1\sec. \tfrac{1}{2} s + 1\sec. \tfrac{1}{4} s + 1\sec. \tfrac{1}{8} s + 1\sec. \tfrac{1}{16} s + \text{ ꝛc.}$$

4. Setzt man $s = \frac{\pi}{2} = 90°$, so wird

$$1\frac{\pi}{2} = 0 + 1\sec. 45° + 1\sec. 22°, 30' + 1\sec. 11°, 15' + \text{ ꝛc.}$$

Da nun

$1\sec. 45°$	$= 0,1505150$
$1\sec. 22°, 30'$	$= 0,0343847$
$1\sec. 11°, 15'$	$= 0,0084261$
$1\sec. 5°, 37\frac{1}{2}'$	$= 0,0020963$
$1\sec. 2°, 48\frac{3}{4}$	$= 0,0005235$
$1\sec. 1°, 24\frac{3}{8}$	$= 0,0001309$
$1\sec. 0°, 42\frac{3}{16}$	$= 0,0000327$
$1\sec. 0°, 21\frac{3}{32}$	$= 0,0000082$

und die Summe der übrigen $= 0,0000027$ ist, so wird

$$1\frac{\pi}{2} = 0,1961201, \text{ und da}$$

$$1\,2 = 0,30103000,$$

$$1\,\pi = 0,4971501, \text{ und folglich}$$
$$\pi = 3,1415941.$$

5. Ferner ist aus

$$4(\sin.\varphi)^3 = 3\sin.\varphi - \sin.3\varphi,$$

Cap. 8. §. 130. Anmerkung,

$$\sin.3\varphi = 3\sin.\varphi - 4\sin.\varphi^3 = 3\sin.\varphi(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\varphi^2).$$

Bedeutet daher s irgend einen Bogen, so wird

$$\sin.\ s = 3\sin.\tfrac{1}{3}s(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{3})$$

$$\sin.\tfrac{1}{3}s = 3\sin.\frac{s}{9}(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{9})$$

$$\sin.\frac{s}{9}s = 3\sin.\frac{s}{27}(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{27})$$

&c.

und folglich, wenn man auf diese Art fortfährt

$$\sin.s = s(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{3})(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{9})(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{27})\,\&c.$$

6. Es lassen sich aber diese zusammengesetzten Faktoren auf folgende Art einfacher ausdrucken. Da

$$\sin.\varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.2\varphi$$

ist (Cap. 8. §. 130. Anmerk.) so wird

$$1 - \tfrac{4}{3}\sin.\varphi^2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cos.2\varphi = \frac{2\cos.60^\circ + 2\cos.2\varphi}{3}$$

Nun ist

$$\cos.a + \cos.b = 2(\cos.\frac{a+b}{2})(\cos.\frac{a-b}{2}),\ \text{§. 131.}$$

folglich

$$\cos.60^\circ + \cos.2\varphi = 2\cos.(30^\circ + \varphi)\cos.(30^\circ - \varphi)$$

und daher

$$1 - \tfrac{4}{3}\sin.\varphi^2 = \tfrac{2}{3}(\cos.60^\circ + \cos.2\varphi) = \tfrac{4}{3}\cos.(30^\circ + \varphi)$$
$$(\cos.30^\circ - \varphi)$$

Bringt man diese Werthe in die vorhin gefundene Formel, so bekommt man

$$\frac{\sin.s}{s} = \frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{3})\cos.(30^\circ - \frac{s}{3})$$
$$\frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{9})\cos.(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{27})\cos.(30^\circ - \frac{s}{27})$$
$$\text{&c.}$$

und, wenn man die Secanten braucht,

$$\frac{s}{\sin.s} = \frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{3})\sec.(30^\circ - \frac{s}{3})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{9})\sec.(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{27})\sec.(30^\circ - \frac{s}{27})$$
$$\text{&c.}$$

7. Diesen beyden Beyspielen ein drittes von den Tangenten beyzufügen, so ist aus dem 249sten § des 14ten Capitels, wenn man $\text{tang.}\varphi = t$ setzt,

$$\text{tang.}3\varphi = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}, \text{ und folglich}$$

$$\cot.3\varphi = \frac{1 - 3tt}{3t - t^3}, \text{ und } 3\cot.3\varphi = \frac{3 - 9tt}{t(3 - tt)}.$$

Da nun $\cot.\varphi = \frac{1}{t}$ ist, so findet man daraus

$$3\cot.3\varphi - \cot.\varphi = \frac{-8tt}{t(3 - tt)} = \frac{-8t}{3 - tt}$$

und wenn man $t = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$ setzt,

$$3\cot. 3\varphi - \cot.\varphi = \frac{-8 \sin.\varphi . \cos.\varphi}{3\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2}.$$

Ferner ist

$$\cos.\varphi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos. 2\varphi, \text{ und}$$
$$\sin.\varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos. 2\varphi$$

folglich

$$3\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2 = 1 + 2\cos. 2\varphi = 2(\cos. 60^\circ + \cos. 2\varphi)$$
$$= 4\cos.(30^\circ + \varphi)\cos.(30^\circ - \varphi)$$

weil $\cos. a + \cos. b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\cos.\frac{a-b}{2}$ ist, und dabey

Hat man

$$-8\sin.\varphi.\cos.\varphi = -4\sin. 2\varphi, \text{ §. 129. Anmerk.}$$

Da nun überhaupt

$$\sin. 2\varphi = \sin.(a+\varphi)\cos.(a-\varphi) - \cos.(a+\varphi)\sin.(a-\varphi)$$

ist, so wird, wenn man $a = 30^\circ$ setzt,

$$3\cot. 3\varphi - \cot.\varphi =$$
$$-\frac{\sin.(30^\circ+\varphi)\cos.(30^\circ-\varphi) + \cos.(30^\circ+\varphi)\sin.(30^\circ-\varphi)}{\cos.(30^\circ+\varphi)\cos.(30^\circ-\varphi)}$$
$$=$$
$$-\operatorname{tang.}(30^\circ+\varphi) + \operatorname{tang.}(30^\circ-\varphi)$$

und es ist folglich

$$\cot. 3\varphi = \tfrac{1}{3}\cot.\varphi - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang.}(30^\circ+\varphi) + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang.}(30^\circ-\varphi)$$

8. Setzt man also s anstatt 3φ, so erhält man

$$\cot. s = \frac{1}{3}\cot.\frac{s}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{tang.}(30^\circ+\frac{s}{3}) + \frac{1}{2}\operatorname{tang.}(30^\circ-\frac{s}{3})$$

und auf eine ähnliche Art ist denn auch

$$\frac{1}{3}\cot.\frac{s}{3} = \frac{1}{9}\cot.\frac{s}{9} - \frac{1}{9}\operatorname{tang.}(30^\circ+\frac{s}{9}) + \frac{1}{9}\operatorname{tang.}(30^\circ-\frac{s}{9})$$
$$\frac{1}{9}\cot.\frac{s}{9} = \frac{1}{27}\cot.\frac{s}{27} - \frac{1}{27}\operatorname{tang.}(30^\circ+\frac{s}{27}) + \frac{1}{27}\operatorname{tang.}(30^\circ-\frac{s}{27})$$

Geht man auf diese Art ohne Ende fort, so wird endlich

$$\frac{1}{i}\cot.\frac{s}{i} = \frac{\text{cos.}\frac{s}{i}}{\text{sin.}\frac{s}{i}}$$

und folglich

$$\cot. s = \begin{aligned} &-\frac{1}{3}\tang.(30^\circ + \frac{s}{3}) - \frac{1}{9}\tang.(30^\circ + \frac{s}{9}) - \\ &\frac{1}{27}\tang.(30^\circ + \frac{s}{27}) \ldots \frac{1}{s} \\ &+\frac{1}{3}\tang.(30^\circ - \frac{s}{3}) + \frac{1}{9}\tang.(30^\circ - \frac{s}{9}) + \\ &\frac{1}{27}\tang.(30^\circ - \frac{s}{27}) \ldots \end{aligned}$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = \cot. s &+ \frac{1}{3}\tang.(30^\circ + \frac{s}{3}) + \frac{1}{9}\tang.(30^\circ + \frac{s}{9}) + \\ &\frac{1}{27}\tang.(30^\circ + \frac{s}{27}) + \text{ꝛc.} \\ &- \frac{1}{3}\tang.(30^\circ - \frac{s}{3}) - \frac{1}{9}\tang.(30^\circ - \frac{s}{9}) - \\ &\frac{1}{27}\tang.(30^\circ - \frac{s}{27}) + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

9. Diese Formel hat Euler in der Abhandlung, woraus das Vorhergehende insgesammt entlehnt ist, auch aus der Formel

$$\begin{aligned} \frac{s}{\text{sin. } s} = &\frac{3}{4}\text{sec.}(30^\circ + \frac{s}{3})\ \text{sec.}(30^\circ - \frac{s}{3}) \\ &\frac{3}{4}\text{sec.}(30^\circ + \frac{s}{9})\ \text{sec.}(30^\circ - \frac{s}{9}) \\ &\frac{3}{4}\text{sec.}(30^\circ + \frac{s}{27})\ \text{sec.}(30^\circ - \frac{s}{27}) \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

durch die Differentiation gefunden, und außerdem folgende aus

$$\sin. 4\varphi = 8 \sin. \varphi . \cos.(45° + \varphi) \cos.(45° - \varphi) \cos. \varphi$$

und

$$\sin. 5\varphi = 16 \sin. \varphi . \cos.(18° + \varphi) \cos.(18° - \varphi) \cos.(54° + \varphi) \cos.(54° - \varphi)$$

fließende Formeln mitgetheilt:

$$\frac{1}{s} = \cot. s + \frac{1}{4} \tang. \frac{s}{4} + \frac{1}{16} \tang. \frac{s}{16} + \frac{1}{64} \tang. \frac{s}{64} \text{ u.}$$
$$+ \frac{1}{4} \tang.(45° + \frac{s}{4}) + \frac{1}{16} \tang.(45° + \frac{s}{16}) +$$
$$\frac{1}{64} \tang.(45° + \frac{s}{64}) + \text{u.}$$
$$- \frac{1}{4} \tang.(45° - \frac{s}{4}) - \frac{1}{16} \tang.(45° - \frac{s}{16}) -$$
$$\frac{1}{64} \tang.(45° - \frac{s}{64}) - \text{u.}$$

$$\frac{1}{s} = \cot. s + \frac{1}{5} \tang.(18° + \frac{s}{5}) + \frac{1}{25} \tang.(18° + \frac{s}{25}) \text{ u.}$$
$$- \frac{1}{5} \tang.(18° - \frac{s}{5}) - \frac{1}{25} \tang.(18° - \frac{s}{25}) \text{ u.}$$
$$+ \frac{1}{5} \tang.(54° + \frac{s}{5}) + \frac{1}{25} \tang.(54° + \frac{s}{25}) \text{ u.}$$
$$- \frac{1}{5} \tang.(54° - \frac{s}{5}) - \frac{1}{25} \tang.(54° - \frac{s}{25}) \text{ u.}$$

XV.

Zusätze zum funfzehnten Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von den Reihen, die aus der Entwickelung der Faktoren entspringen.

1. Art und Weise, wie man Produkte in Reihen verwandelt, §. 264 — — 276.
   a. Reihen, welche aus dem Produkte: $(1 \dagger \alpha z)(1 \dagger \beta z)(1 \dagger \gamma z)$ entspringen, §. 264 — 269.
      α. die daraus entspringende allgemeine Reihe, §. 264.
      β. daraus fließende bestimmtere Reihen, §. 265 — 269.
         aa. wenn bloß für z ein bestimmter Werth angenommen wird, §. 265. 266.
            αα. wenn $z = \dagger 1$, §. 265.
            ββ. wenn $z = -1$ gesetzt wird, §. 266.
         bb. wenn außerdem auch für α, β, γ, ꝛc. bestimmte Größen gesetzt werden, §. 267 — 269.
            αα. wenn $z = \dagger 1$, und für α, β, γ, ꝛc.
               aaa. alle Prim Zahlen, 2, 3, 5, 7, ꝛc. §. 267.
               bbb. die Potestäten der Prim-Zahlen mit negativen Exponenten genommen werden, §. 268.
            ββ. wenn $z = -1$, und für α, β, γ, ꝛc. wieder die gedachten Potestäten der Prim-Zahlen gesetzt werden, §. 269.

b. Reihen, die aus dem Produkte

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\,\text{ꝛc.}}$$

entspringen, §. 270 — — 276.

α. die daraus entspringende allgemeine Reihe, §. 270.

β. daraus fließende besondere Reihen, §. 271 — — 276.

aa. wenn $z = 1$, §. 271 — 275. und zwar entweder

αα bloß $z = 1$, §. 271, 272, oder außerdem auch

ββ. für α, β, γ, δ, ꝛc. die Einheit

aaa. durch alle einzelne Prim-Zahlen, §. 273, oder

bbb. durch die Potestäten dieser Prim-Zahlen dividirt gesetzt werden. §. 274. 275.

ααα. die in diesem letzten Falle entstehende Reihe an und für sich, §. 274.

βββ. Vergleichung derselben mit der §. 269, §. 275.

bb. wenn $z = -1$, und für α, β, γ, δ, die Einheit durch die Potestäten der Prim-Zahlen dividirt gesetzt werden. §. 276.

2. Art und Weise, wie man Reihen in Produkte verwandelt, §. 277 — — 296.

a. vermittelst der vorhergehenden Lehrsätze, §. 277 — 282.

α. die Art und Weise, wie man Reihen in Produkte verwandelt, selbst, §. 277.

β. Anwendung des Gefundenen, §. 277 — 282.

aa. zur Bestimmung des Werths der gedachten Produkte und verschiedener Reihen, §. 277.

bb. zur Erfindung von Logarithmen, §. 278 — 282.

αα. allgemeine Formeln hierzu, §. 278.

ββ. einzelne Fälle, 279. 280.

γγ. Summation der dabey vorkommenden Reihen

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc. §. 281. 282.}$$

b. directe Methode dieser Verwandlung, §. 283 — — 297.

α. diese Methode selbst, §. 283.

β. Anwendung derselben zur Verwandlung verschiedener oben gefundener Reihen in unendliche Produkte, §. 284 — 296.

aa. der §. 175. summirten Reihen, $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} -$

$\frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} -$ ꝛc. §. 284 — — 291.

αα. allgemein betrachtet, §. 284.

ββ. besonders, §. 285 — 287.

aaa. wenn $n = 1$ ist, §. 285 — 286.

bbb. wenn $n = 3$ ist, §. 287.

γγ. hierauf gegründete Erfindung verschiedener Reihen aus Produkten, §. 288 — 291.

bb. der §. 176. summirten Reihen $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} -$

$\frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} +$ ꝛc. wenn n eine ungerade Zahl ist, §. 292 — 294.

αα. allgemein betrachtet, §. 292.

ββ. besondere Fälle, §. 293. 294.

cc. der §. 179. für $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ gefundenen Reihe, §. 295.

dd. allgemeine Anmerkung wegen der übrigen oben gefundenen und hieher gehörigen Reihen, §. 296.

XVI.

Zusätze zum sechszehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Theilung der Zahlen.

1. Von der Theilung der Zahlen überhaupt, wo gezeigt gezeigt wird, daß die Entwickelung der Produkte:

$$(1 + x^{\alpha}z)(1 + x^{\beta}z)(1 + x^{\gamma}z)(1 + x^{\delta}z)(1 + x^{\varepsilon}z) \text{ ꝛc.}$$

und

$$\frac{1}{(1 - x^{\alpha}z)(1 - x^{\beta}z)(1 - x^{\gamma}z)(1 - x^{\delta}z)(1 - x^{\varepsilon}z) \text{ ꝛc.}}$$

auf Reihen führe, woraus man erkennen kann, nicht nur, auf wie vielerley Arten eine Zahl n die Summe von m verschiedenen Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ꝛc. seyn, sondern auch auf wie vielerley Arten eine Zahl n aus m entweder gleichen oder verschiedenen Gliedern der angeführten Reihe durch die Addition entstehen kann, §. 297 — 305. Hierbey betrachtet Euler

a. die Reihe, die aus dem Produkte $(1 + x^{\alpha}z)(1 + x^{\beta})z$ $(1 + x^{\gamma}z)$ ꝛc. entspringt, §. 297 — 301, und zwar

α. die daher entspringende ganz allgemeine Reihe, §. 297 — 299.

β. die daher entstehenden besondern Reihen, §. 300 — 301, wenn man

aa. für α, β, γ, δ, ε, &c. die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, &c. §. 300, und

bb. außerdem auch noch $z = 1$ setzt, §. 301.

b. die Reihe, die aus dem Produkte $\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)\&c.}$

entspringt, §. 302—305, und dabey wieder

α. die daher sich ergebende allgemeine Reihe, §. 302, 303.

β. die daher entspringenden besondern Reihen, §. 304, 305, wenn man

aa. für α, β, γ, δ, ε, &c. die natürlichen Zahlen, §. 304, und

bb. außerdem noch $z = 1$ setzt, §. 305.

2. Von der Art und Weise, die Menge der Zusammensetzungen gegebener Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu bestimmen, genauer betrachtet, wo gezeigt wird, daß es leicht sey, anzugeben, auf wie viel Arten sich eine Zahl entweder in m ungleiche, oder überhaupt in m Theile theilen lasse, wofern man nur wisse, auf wie viel Arten jede Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden könne, §. 306 bis 315. Hier werden

a. folgende zwey Sätze bewiesen:

α. Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n durch die Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m hervorbringen kann, auf eben so viele Arten läßt sich auch die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ in m ungleiche Theile theilen, §. 306 — 312, und dabey werden

aa. die Coefficienten der Glieder der Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c. = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\&c.$ durch Funktionen von x ausgedruckt, §. 306, 307.

bb.

bb. daraus verschiedene specielle, unter dem angeführten begriffene Sätze abgeleitet, §. 308 — 311, und

cc. hierauf der gedachte allgemeine Satz gegründet, §. 312.

ß. Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + m in m Theile theilen, §. 313, 314. Auch hier werden

aa. die Coefficienten der Glieder der Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{&c.} = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)}$ &c. durch Funktionen von x ausgedruckt, §. 313,

bb. daraus verschiedene specielle, unter dem angeführten allgemeinen begriffene Sätze abgeleitet, §. 314,

cc. hierauf der gedachte allgemeine Satz gegründet, §. 314.

b. werden aus den vorhergehenden Sätzen andere abgeleitet, welche lehren, auf wie viel Arten sich eine Zahl entweder in m ungleiche oder überhaupt in m Theile theilen läßt, wenn bekannt ist, auf wie vielerley Arten eine Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4....m durch die Addition hervorgebracht werden kann. §. 315.

3. Methode, die Menge der Arten, auf welche eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann, durch Formirung widerkehrendender Reihen zu finden, §. 316 — 318.

a.

a. diese Methode überhaupt beschrieben, §. 316.

b. daraus abgeleitetes leichteres Verfahren, nebst der Beschreibung einer hiernach verfertigen Tabelle, §. 317, 318.

4. Verschiedene speciellere Betrachtungen, §. 319 — 332.

a. Vergleichung die in der vorhin gedachten Tabelle, und zwar in den Vertical-Reihen derselben stehende Zahlen mit den natürlichen Zahlen, den Trigonal- den Pyramidal-Zahlen, u. s. w. §. 319 — 322.

b. Ueber die Arten, auf welche eine Zahl durch die Addition der ungeraden Zahlen entstehen kann, §. 323 bis 327.

c. Von der Zusammensetzung der ganzen Zahlen aus den Potestäten der 2 und der 3. §. 328 — 331.

B. Zusatz zu §. 318.

1. Die bequemste Art, die im § gedachte Tabelle nach der Regel $N = L + M$ zu verfertigen, wird sich am besten an folgender Tabelle erläutern lassen. Setzt man

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{1-x} \qquad \mathfrak{Q} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

&c.

so ist:

	1,	x,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9,	x^{10},
P=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	1	2	2	3	3	4	4	5
Q=	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
			1	1	2	3	4	5	7	8	
R=	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14
					1	1	2	3	5	6	9
S=	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
						1	1	2	3	5	7
T=	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30
							1	1	2	3	5
U=	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35
								1	1	2	3
X=	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38
									1	1	2
Y=	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40
										1	1
Z=	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41
											1

&c.

Läßt man nemlich n^{*m*} die Menge der Arten anzeigen, auf welche die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m durch die Addition hervorgebracht werden kann, so verwandelt sich die Regel N = L + M in folgende:

$$n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$$

wobey aber zu bemerken ist, daß der Ausdruck $(n-m)^{*m*}=0$ wird, wenn n kleiner als m ist, und daß $(n-m)^{*m*}=0^{*m*}$, wenn n = m wird, desgleichen $1^{*m*} = 1$ gesetzt werden muß. Außerdem ist auch, da keine Zahl aus bloßen Einheiten

x^{11},	x^{12},	x^{13},	x^{14},	x^{15},	x^{16},	x^{17},	x^{18} ꝛc.
1 † 1	† 1	† 1	† 1	† 1	† 1	† 1	† 1 † ꝛc.
5	6	6	7	7	8	8	9
6 † 7	† 7	† 8	† 8	† 9	† 9	† 10	† ꝛc.
10	12	14	16	19	21	24	27
16 † 19	† 21	† 24	† 27	† 30	† 33	† 37	† ꝛc.
11	15	18	23	27	34	39	47
27 † 34	† 39	† 47	† 54	† 64	† 72	† 84	† ꝛc.
10	13	18	23	30	37	47	57
37 † 47	† 57	† 70	† 84	† 101	† 119	† 141	† ꝛc.
7	11	14	20	26	35	44	58
44 † 58	† 71	† 90	† 110	† 136	† 163	† 199	† ꝛc.
5	7	11	15	21	28	38	49
49 † 65	† 82	† 105	† 131	† 164	† 201	† 248	† ꝛc.
3	5	7	11	15	22	29	40
52 † 70	† 89	† 116	† 146	† 186	† 230	† 288	† ꝛc.
2	3	5	7	11	15	22	30
54 † 73	† 94	† 123	† 157	† 201	† 252	† 318	† ꝛc.
1	2	3	5	7	11	15	22

ꝛc.

heiten auf mehr denn eine Art entstehen kann, allemal $n^{*1*} = 1$. Dies vorausgesetzt, so hat

die Reihe,	das allgem. Glied,	die Reihe,	das allgem. Glied,
P	$n^{*1*} = 1$	S	$n^{*4*} = n^{*3*} + (n-4)^{*4*}$
Q	$n^{*2*} = 1 + (n-2)^{*2*}$	T	$n^{*5*} = n^{*4*} + (n-5)^{*5*}$
R	$n^{*3*} = n^{*2*} + (n-3)^{*3*}$	U	$n^{*6*} = n^{*5*} + (n-6)^{*6*}$

ꝛc.

Um also aus der Reihe P die Reihe Q zu bekommen, darf man nur zu jedem nten Gliede der Reihe P, oder zu 1, das (n—2)te Glied der Reihe Q; um aus der Reihe Q die Reihe R zu erhalten, zu jedem nten Gliede der Reihe Q des (n—3)te Glied der Reihe R; um aus der Reihe R die Reihe S zu finden, zu jedem nten Gliede der Reihe R das (n—4)te Glied der Reihe S setzen, u. s. f. Um also aus der (r—1)ten Reihe die rte Reihe zu finden, addirt man zu jedem nten Gliede der (r—1)ten Reihe das (n—r)te Glied der rten Reihe, und es sind folglich die ersten r Glieder beyder Reihen allemal einander gleich. Ferner findet man die zweyten r Glieder der rten Reihe, wenn man ihre ersten r Glieder unter die zweyten r Glieder der (r—1)ten Reihe setzt, und beyde zusammen addirt; die dritten r Glieder der rten Reihe, wenn man ihre zweyten r Glieder unter die dritten r Glieder der (r—1)ten Reihe setzt und beyde wieder zusammenaddirt u. s. w.

2. Die Regel: $N = L + M$, oder: $n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$ läßt sich auch auf folgende Art finden. Wenn man unter n alle ganze Zahlen in ihrer natürlichen Folge versteht, so ist

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{1-x} = n^{*1*}x^n$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = n^{*2*}x^n$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = n^{*3*}x^n$$

und überhaupt

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-1})} = n^{*m-1*}x^n$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} = n^{*m*}x^n$$

Da aber auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(1 - x^2)$; $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}(1 - x^3)$; ꝛc. und $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}(1 - x^m)$ ist, so wird hieraus, wenn man für $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die aus ihren allgemeinen Gliedern entspringende Reihen setzt, die zweyte Hälfte der auf diese Art entstehenden Gleichungen entwickelt, und darauf die gleich hohen Potestäten beyder Hälften mit einander vergleicht,

$n^{*1*}x^n = (n^{*2*} - (n-2)^{*2*})x^n$

$n^{*2*}x^n = (n^{*3*} - (n-3)^{*3*})x^n$, und überhaupt

$n^{*m-1*}x^n = (n^{*m*} - (n-m)^{*m*})x^n$; folglich

$n^{*2*} = n^{*1*} + (n-2)^{*2*}$

$n^{*3*} = n^{*2*} + (n-3)^{*3*}$, und überhaupt

$n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$.

3. Die bey S. 348. befindliche Tabelle kann auch dann gebraucht werden, wenn n größer ist als 59. Es sey z. B. $n = 60$ und $m = 20$, so ist nach der Regel $n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$

$60^{*20*} = 60^{*19*} + 40^{*20*}$; $60^{*19*} = 60^{*18*} + 41^{*19*}$; $60^{*18*} = 60^{*17*} + 42^{*18*}$ ꝛc.

und folglich

$60^{*20*} = 40^{*20*} + 41^{*19*} + 42^{*18*} + 43^{*17*} + \ldots \ldots 59^{*1*}$

Sucht man diese Werthe in der Tabelle auf, so findet man $60^{*20*} = 791131$. Ist indeß der Unterschied zwischen der gegebenen Zahl und der höchsten in der Tabelle nur einigermaßen groß, so wird dieser Weg sehr beschwerlich.

C. Zusatz zu §. 323.

1. Daß die Vertical-Reihen der Tabelle S 348. alle auf einerley Art anfangen, und immer mehrere Glieder mit einander gemein haben, je größer die über ihnen stehende Zifer ist, davon fällt der Grund aus der Absatz 1 des vorhergehenden Zusatzes beschriebenen Verfertigungsart dieser

Tabelle sehr bald in die Augen. So wie nun n^{*1*} das allgemeine Glied der Vertical Reihe I; n^{*2*} das allgemeine Glied der Vertical-Reihe II; n^{*3*} das allgemeine Glied der Vertical-Reihe III u. s. w. ist: so läßt sich auch eine Reihe denken, deren allgemeines Glied $n^{*\infty*}$ ist, und diese Reihe ist dem Anfange nach diejenige, die in der Tabelle unter ∞ steht. Da in dieser Reihe für jeden Werth von n, doch so, daß dafür bloß ganze absolute Zahlen gesetzt werden,

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*1*} + (n-2)^{*2*} + (n-3)^{*3*} + \ldots + (n-n)^{*n*}$$

seyn muß, indem $n^{*\infty*}$, weil keine Zahl n aus mehr als aus n Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann, eigentlich $= n^{*n*} = n^{*n-1*} + (n-n)^{*n*} = n^{*n-2*} + (n-n+1)^{*n-1*} + (n-n)^{*n*} = n^{*n-3*} + (n-n+2)^{*n-2*} + (n-n+1)^{*n-1*} + (n-n)^{*n*}$ u. s. f. ist: so erhellet hieraus, daß und wie diese Reihe aus den vorhergehenden durch die Addition gemacht werden kann. So ist z. B. $6^{*\infty*} = 5^{*1*} + 4^{*2*} + 3^{*3*} + 2^{*4*} + 1^{*5*} + 0^{*6*} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$

2. Aus

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*1*} + (n-2)^{*2*} + (n-3)^{*3*} + (n-4)^{*4*} + \text{ꝛc.}$$

wird, wenn man allenthalben $n-1$ statt n setzt, und der Gleichförmigkeit wegen $(n-1)^{*0*} = 0$ dazu schreibt,

$$(n-1)^{*\infty*} = (n-1)^{*0*} + (n-2)^{*1*} + (n-3)^{*2*} + (n-4)^{*3*} + \text{ꝛc.}$$

Zieht man diese letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, und verändert dabey die Differenz nach $n^{*m*} - n^{*m-1*} = (n-m)^{*m*}$, so wird

$$n^{*\infty*} - (n-1)^{*\infty*} = (n-2)^{*1*} + (n-4)^{*2*} + (n-6)^{*3*} + (n-8)^{*4*} + \text{ꝛc.}$$

Setzt

Setzt man ferner in dieser Reihe (n—2) für n, so wird, wenn man wieder der Gleichförmigkeit wegen $(n-2)^{*0*}=0$ dazu setzt, die gefundene Reihe von ihr abzieht, und die Differenz ebenfalls wie vorhin abändert,

$$n^{*\infty*} - (n-1)^{*\infty*} - (n-2)^{*\infty*} + (n-3)^{*\infty*} \} = (n-3)^{*1*} + (n-6)^{*2*} + (n-9)^{*3*} + \text{&c.}$$

oder

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*\infty*} + (n-2)^{*\infty*} - (n-3)^{*\infty*} + P$$

wenn man P die zweyte Hälfte der letzten Gleichung bedeuten läßt. Fährt man auf diesem Wege fort, so verschwindet endlich P, und dann wird jedes Glied der Reihe ∞ bloß durch die vorhergehenden Glieder bestimmt, und ist also eine wiederkehrende Reihe.

3. Die Beziehungs-Scale dieser Reihe findet man, wenn man den Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ &c.}}$$

entwickelt, indem sie selbst aus der Entwickelung dieses Bruchs entspringt; und es wird demnach

$$\begin{aligned} n^{*\infty*} = {} & (n-1)^{*\infty*} + (n-2)^{*\infty*} - (n-5)^{*\infty*} - \\ & (n-7)^{*\infty*} + (n-12)^{*\infty*} + (n-15)^{*\infty*} - \\ & (n-22)^{*\infty*} - (n-26)^{*\infty*} + (n-35)^{*\infty*} + \\ & (n-40)^{*\infty*} - (n-51)^{*\infty*} - (n-57)^{*\infty*} + \text{&c.} \end{aligned}$$

4. Da diese Reihe für den Werth $m = 20$ schon in der Tabelle steht, so kann man sich dadurch die Findung der Reihe für den Werth $m = \infty$ erleichtern. Denn da die Reihe n^{*20*} aus der Entwickelung dieses Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots(1-x^{20})}$$

die Reihe $n^{*\infty*}$ aber aus der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots(1-x^\infty)}$$

entspringt: so ist offenbar, daß man die erste Reihe erhält, wenn man die letztere durch

$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})(1-x^{26})$ &c.

oder durch

$1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - $ &c.
$+ x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + $ &c.
$- x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - $ &c.
$+ x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + $ &c.

multiplicirt. Hiernach wird

$n^{*20*} = n^{*\infty*} - (n-21)^{*\infty*} - (n-22)^{*\infty*} - (n-23)^{*\infty*} -$ &c.
$+ (n-43)^{*\infty*} + (n-44)^{*\infty*} + 2(n-45)^{*\infty*} + 2(n-46)^{*\infty*} +$ &c.
$- (n-66)^{*\infty*} - (n-67)^{*\infty*} - 2(n-68)^{*\infty*} - 3(n-69)^{*\infty*} -$ &c.
$+ (n-90)^{*\infty*} + (n-91)^{*\infty*} + 2(n-92)^{*\infty*} + 3(n-93)^{*\infty*} +$ &c.

&c.

Die Coefficienten dieser Reihen sind die Glieder der oben für die Theilung der Zahlen in 2, 3, 4, 5, 6, &c. Theile gefundenen Reihen.

5. Bedeutet $f(n-21)^{*\infty*}$ die Summe aller Glieder der Reihe $n^{*\infty*}$ bis und mit zu dem Gliede $(n-21)^{*\infty*}$, und überhaupt $fp^{*\infty*}$ die Summe aller Glieder eben dieser Reihe bis und mit dem Gliede $p^{*\infty*}$: so wird

$n^{*20*} = n^{*\infty*} - f(n-21)^{*\infty*} + f(n-43)^{*\infty*} + f(n-45)^{*\infty*} + f(n-47)^{*\infty*} +$ &c.
$- f(n-66)^{*\infty*} - f(n-68)^{*\infty*} - f(n-69)^{*\infty*} - f(n-70)^{*\infty*} -$ &c.

†

$$+ f(n-90)^{*\infty *} + f(n-92)^{*\infty *} +$$
$$f(n-93)^{*\infty *} + 2f(n-94)^{*\infty *} + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

und es ist folglich

$$n^{*\infty *} = n^{*20*} + f(n-21)^{*\infty *} - f(n-43)^{*\infty *} -$$
$$f(n-45)^{*\infty *} - \text{ꝛc.}$$
$$+ f(n-66)^{*\infty *} + f(n-68)^{*\infty *} +$$
$$f(n-69)^{*\infty *} + \text{ꝛc.}$$
$$- f(n-90)^{*\infty *} - f(n-92)^{*\infty *} -$$
$$f(n-93)^{*\infty *} - \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Vermittelst dieser Formel läßt sich die Reihe $n^{*\infty *}$, wenn n keine zu große Zahl ist, aus der Reihe n^{*20*} leicht berechnen.

D. Anwendung der Lehre von der Theilung der Zahlen auf einen besondern Fall.

1. Die Frage: Auf wie viel Arten kann eine gegebene Zahl N mit einer gegebenen Anzahl n gemeiner Würfel geworfen werden? ist gleichbedeutend mit dieser: Auf wie viel Arten kann die Zahl N in n Theile getheilt werden, wenn diese Theile 1, 2, 3, 4, 5, 6 seyn, und dabey nicht bloß auf die Theile an und für sich, sondern auch auf ihre Ordnung gesehen werden soll? und man findet also die Antwort darauf, wenn man

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$
$$=$$
$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \ldots + x^{6n}$$

setzt, und die Werthe von A, B, C, D, ꝛc. sucht. Denn ist ein Glied dieser Reihe Mx^N, so zeigt der Coefficient M an, auf wie viel Arten die Zahl N in n Theile getheilt werden kann, so daß diese Theile 1, 2, 3, 4, 5, 6 seyn, und

also auch, auf wie viel Arten die Zahl N mit n Würfeln geworfen werden kann.

2. Wenn man einige leichte Sätze aus der Differential-Rechnung zu Hülfe nehmen darf, so kann man die Werthe von A, B, C, D, &c. auf folgende Art finden. Man setze

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n$$
$$= V =$$
$$x^n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{&c.})$$

und $\frac{V}{x^n} = Z$. Alsdann ist nicht nur

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

sondern auch

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 + \text{&c.}}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{&c.}}$$

und folglich, wenn man diese beyden Bestimmungen einander gleich setzt, und mit den Nennern überzwerg multiplicirt,

$$\begin{array}{lllllll}
nx + nAx^2 + & nBx^3 + & nCx^4 + & nDx^5 + & nEx^6 + & \\
+ 2n & + 2nA & + 2nB & + 2nC & + 2nD & + \\
& + 3n & + 3nA & + 3nB & + 3nC & + \text{&c.} \\
& & + 4n & + 4nA & + 4nB & + \\
& & & + 5n & + 5nA & +
\end{array}$$
$$=$$
$$\begin{array}{lllllll}
Ax + 2Bx^2 + & 3Cx^3 + & 4Dx^4 + & 5Ex^5 + & 6Fx^6 + & \\
+ A & + 2B & + 3C & + 4D & + 5E & + \\
& + A & + 2B & + 3C & + 4D & + \\
& & + A & + 2B & + 3C & + \text{&c.} \\
& & & + A & + 2B & + \\
& & & & + A & +
\end{array}$$

Hieraus aber fließen folgende Bestimmungen:

A

$A = n$
$2B = (n-1)A + 2n$
$3C = (n-2)B + (2n-1)A + 3n$
$4D = (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n$
$5E = (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n$
$6F = (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A$
$7G = (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B$
$8H = (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)E + (4n-4)D + (5n-3)C$
&c.

so daß also jeder Coefficient durch die fünf vorhergehenden bestimmt wird.

3. Wenn man von jeder dieser Gleichungen die unmittelbar vorhergehende abzieht, so wird

$A = n$
$2B = nA + n$
$3C = nB + nA + n$
$4D = nC + nB + nA + n$
$5E = nD + nC + nB + nA + n$
$6F = nE + nD + nC + nB + nA + 5n$
$7G = nF + nE + nD + nC + nB - (5n-1)A$
$8H = nG + nF + nE + nD + nC - (5n-2)B$
&c.

und nimmt man nochmals die Differenzen, so erhält man

$2B = (n+1)A$; $3C = (n+2)B$; $4D = (n+3)C$;
$5E = (n+4)D$; $6F = (n+5)E - 6n$;
$7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n$
$8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A$
$9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B$
$10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C$
&c.

4. Es ist also

für zwey Würfel	für drey Würfel
$A = 2$	3
$2B = 3A$	4 A
$3C = 4B$	5 B
$4D = 5C$	6 C
$5E = 6D$	7 D
$6F = 7E - 12$	8 E — 18
$7G = 8F - 11A + 10$	9 F — 17 A + 15
$8H = 9G - 10B + 9A$	10 G — 16 B + 14 A
$9I = 10H - 9C + 8B$	11 H — 15 C + 13 B
$10K = 11I - 8D + 7C$	12 I — 14 D + 12 C
$11L = 12K - 7E + 6D$	13 K — 13 E + 11 D
$12M = 13L - 6F + 5E$	14 L — 12 F + 10 E

2c.

5. Druckt man die Menge der Fälle, da N mit n Würfeln geworfen werden kann, durch $[N]^{*n*}$ aus, so daß $[n]^{*n*} = 1$; $[n+1]^{*n*} = A$; $[n+2]^{*n*} = B$; $[n+3]^{*n*} = C$; .. . . . . $[n+9]^{*n*} = I$; $[n+10]^{*n*} = K$ wird: so ist

$$10[n+10]^{*n*} = (n+9)[n+9]^{*n*} - (6n-4)[n+4]^{*n*} + (5n-3)[n-3]^{*n*}$$

und überhaupt

$$\lambda[n+\lambda]^{*n*} = (n+\lambda-1)[n+\lambda-1]^{*n*} - (6n+6-\lambda)[n+\lambda-6]^{*n*} + (5n+7-\lambda)[n+\lambda-7]^{*n*}$$

Setzt man also $n+\lambda = N$, und folglich $\lambda = N-n$, so wird

$$[N]^{*n*} = \frac{(N-1)[N-1]^{*n*} - (7n+6-N)[N-6]^{*n*} + (6n+7-N)[N-7]^{*n*}}{N-n}$$

wo indeß zu bemerken ist, daß $[P]^{*n*} = 0$ gesetzt werden muß, wenn P kleiner als n ist.

6.

6. Kennt man den Werth der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. für irgend eine Anzahl von Würfeln, so läßt sich daraus der Werth eben dieser Buchstaben für die um eins vermehrte Anzahl von Würfeln auf folgende Art bestimmen. Es sey

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \text{ꝛc.}, \text{ und}$$

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1} = x^{n+1} + \mathfrak{A}x^{n+2} + \mathfrak{B}x^{n+3} + \mathfrak{C}x^{n+4} + \mathfrak{D}x^{n+5} + \text{ꝛc.}$$

so ist, weil dieser letzte Ausdruck dem Produkte aus dem ersten in $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ gleich ist

$\mathfrak{A} = A+1$	und	
$\mathfrak{B} = B+A+1$	folglich	$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}+B$
$\mathfrak{C} = C+B+A+1$		$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}+C$
$\mathfrak{D} = D+C+B+A+1$		$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}+D$
$\mathfrak{E} = E+D+C+B+A+1$		$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}+E$
$\mathfrak{F} = F+E+D+C+B+A$		$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}+F-1$
$\mathfrak{G} = G+F+E+D+C+B$		$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}+G-A$

ꝛc.

7. Die letzte Gleichung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}+G-A$ kann man auch auf diese Art ausdrucken:

$$[n+8]^{*n+1*} = [n+7]^{*n+1*} + [n+7]^{*n*} - [n+1]^{*n*}$$

Allgemein ist also

$$[n+1+\lambda]^{*n+1*} = [n+\lambda]^{*n+1*} + [n+\lambda]^{*n*} - [n+\lambda-6]^{*n*}$$

oder

$$[N+1]^{*n+1*} = [N]^{*n+1*} + [N]^{*n*} - [N-6]^{*n*}$$

wenn man $n+\lambda = N$ setzt. Es ist aber hierbey allemal $[N-6]^{*n*} = 0$, wenn $N-6$ kleiner als N ist. Aus dieser letzten Formel erhellet, daß die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. allemal ganze Zahlen sind.

8. Will man jeden der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. an und für sich bestimmen, so ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

und also, wenn V die Absatz 2 ihm beygelegte Bedeutung behält,

$$V = \frac{x^n(1-x^6)^n}{(1-x)^n} = (1-x^6)^n \times \frac{x^n}{(1-x)^n} =$$

$$(1 - nx^6 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{12} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{18} + \text{&c.}) \times$$

$$(x^n + nx^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^{n+2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n+3} + \text{&c.})$$

Hieraus wird, wenn man dies Produkt entwickelt, die Glieder desselben mit der Reihe $x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \text{&c.}$ vergleicht, und für A, B, C, D, &c. die Absatz 5 stehenden Bezeichnungen braucht

$$[n]^{*n*} = 1$$

$$[n+1]^{*n*} = n$$

$$[n+2]^{*n*} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$[n+3]^{*n*} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$[n+4]^{*n*} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$[n+5]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1 \cdot 2 \ldots 5}$$

$$[n+6]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+5)}{1 \cdot 2 \ldots 6} - n$$

$$[n+7]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+6)}{1 \cdot 2 \ldots 7} - nn$$

$$[n+8]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+7)}{1 \cdot 2 \ldots 8} - \frac{nn(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$[n+9]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+8)}{1 \cdot 2 \ldots 9} - \frac{nn(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

[n

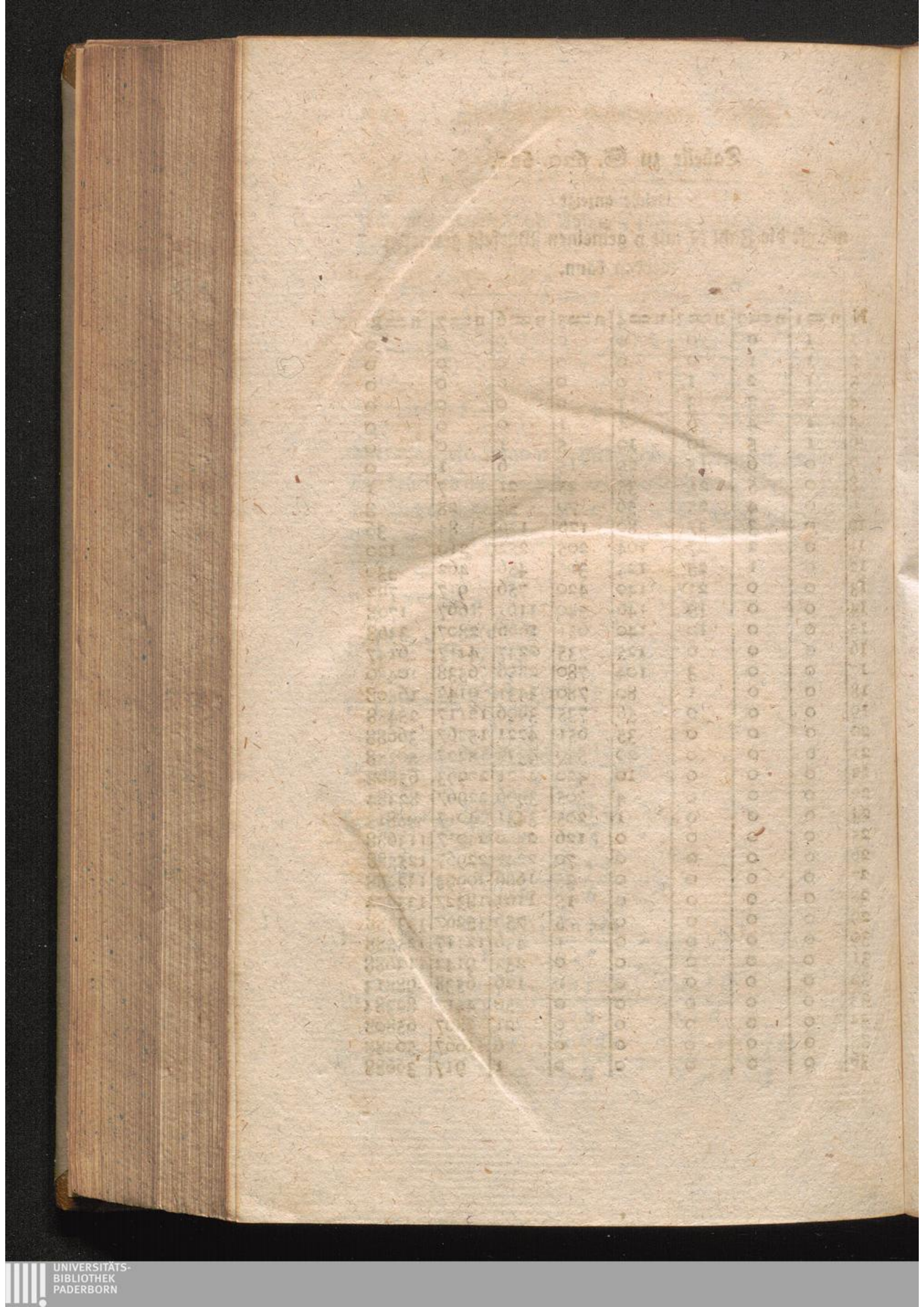
Tabelle zu S. 620. 621.

welche anzeigt

wie oft die Zahl N mit n gemeinen Würfeln geworfen werden kann.

N	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



$$[n+10]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+9)}{1.2\ldots.10} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+3)}{1.2\ldots.4}$$

$$[n+11]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+10)}{1.2\ldots.11} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+4)}{1.2\ldots.5}$$

$$[n+12]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+11)}{1.2\ldots.12} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+5)}{1.2\ldots.6}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

$$[n+13]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+12)}{1.2\ldots.13} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+6)}{1.2\ldots.7}$$

$$+ \frac{n.n(n-1)}{1.2}$$

&c.

und überhaupt

$$[n+\lambda]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-1)}{1.2\ldots.\lambda} - \frac{n}{1}.\frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-7)}{1.2\ldots.(\lambda-6)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+\lambda-13)}{1.2.3.4\ldots.(\lambda-12)}$$

$$- \frac{n.n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda-19)}{1.2.3\ldots.(\lambda-18)}$$

+ &c.

9. Wenn anstatt gemeiner Würfel andere genommen werden, deren Seiten mit den Zahlen 1, 2, 3 . . . . . m bezeichnet sind, so wird

$[N+1]^{*n+1*} = [N]^{*n+1*} + [N]^{*n*} - [N-m]^{*n*}$, oder

$[N+1]^{*n*} = [N]^{*n*} + [N]^{*n-1*} - [N-m]^{*n-1*}$, od.

$[n+\lambda]^{*n*} = [n+\lambda-1]^{*n*} + [n+\lambda-1]^{*n-1*} -$
$[n+\lambda-m-1]^{*n-1*}$

wenn man $N+1 = n+\lambda$ jetzt; desgleichen

$\lambda[n+\lambda]^{*n*} = (n+\lambda-1)[n+\lambda-1]^{*n*} - (mn+m-\lambda)$
$[n+\lambda-m]^{*n*} + (mn-n+m+1-\lambda)[n+\lambda-m-1]^{*n*}$

endlich

[n

$$[n+\lambda]^{*n*} = \frac{n(n+1)..(n+\lambda-1)}{1.2....\lambda} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1).(n+\lambda-m-1)}{1.2...(\lambda-m)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n+1)....(n+\lambda-2m-1)}{1.2.....(\lambda-2m)}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n(n+1)...(n+\lambda-3m-1)}{1.2.....(\lambda-3m)}$$
$$+ \text{ ꝛc.}$$

Man vergleiche hiermit die Formeln Absatz 5 und Absatz 8. Es ist aber dabey $[n]^{*n*}=1$; $[N]^{*n*}=0$, wenn N kleiner als n oder größer als nm, und endlich $[N]^{*n*}=1$, wenn $N=mn$ ist.

10. Wenn die Würfel von einander verschieden sind, so läßt sich die Menge der Arten, auf welche man damit jede Zahl werfen kann, auf einem dem bisherigen ähnlichen Wege finden. Hätte z. B. der eine 6, der andere 8, und der dritte 12 Seiten, so würde es dabey auf die Entwickelung des Produkts

$$(x+x^2+x^3...x^6)(x+x^2...x^8)(x+x^2...x^{12})=V$$

ankommen. Entwickelte man das Quadrat oder den Cubus der Reihe:

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+x^{28}+x^{36}+\text{ ꝛc.}$$

so könnte man daraus erkennen, welche Zahlen Summen zweyer oder dreyer Trigonal-Zahlen sind, u. s. w. Uebrigens sind die gegenwärtigen Zusätze aus Eulers Abhandlung de partitione numerorum im dritten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1750 und 1751, und der Untersuchung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas im vierzehnten Bande der gedachten Commentarien vom Jahr 1759 genommen.

XVII.

Zusätze zum siebenzehnten Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von dem Nutzen der wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen.

1. Vorläufig, Anzeige des Gegenstandes der Untersuchung in dem gegenwärtigen Capitel, seine Wichtigkeit, und die Art und Weise, wie er behandelt werden soll, §. 332.

2. Methode, die wiederkehrenden Reihen zur Erfindung der Wurzeln der Gleichungen zu benutzen, §. 333—343.

a. wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung insgesammt reell und einander ungleich sind, §. 333—355.

α. zuvörderst einige hier nöthige Betrachtungen über die wiederkehrenden Reihen und die allgemeinen Glieder derselben, §. 333—336.

β. wie man die durch die vorhergehenden Betrachtungen gefundenen Eigenschaften der wiederkehrenden Reihen zur Erfindung der Wurzeln der Gleichungen brauchen kann, §. 337—345.

aa. allgemeine Anleitung hierzu, §. 337, 338.

bb. Verhaltungs-Regeln für einige besondere Fälle, §. 339—345.

αα. wenn die größten Wurzeln der gegebenen Gleichung nur wenig von einander unterschieden sind, §. 339, 340.

ββ. wenn eine Wurzel, die bereits näherungsweise gefunden worden, noch genauer gefunden werden soll, §. 341.

γγ. wenn die Gleichung zwey gleiche, einander entgegengesetzte, Wurzeln hat, §. 342.

cc. einige Regeln zur schnellern und sichern Entdeckung der gesuchten Wurzel, §. 343 — 345.

b. wenn zwey oder mehrere von den Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich sind, §. 346, 347.

α. wenn zwey Wurzeln gleich sind, §. 346.

β. wenn drey Wurzeln gleich sind, §. 347.

c. wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln enthält, §. 348 — 353.

α. wenn das Produkt aus je zwey imaginären Wurzeln, die einen reellen Faktor geben, nicht größer ist, als das Quadrat der größten Wurzel, §. 348, 349.

β. wenn dieses Produkt dem Quadrate der größten Wurzel gleich, oder noch größer ist als dasselbe, §. 349-352.

γ. wenn die gegebene Gleichung mehrere trinomische Faktoren hat, §. 353.

3. Zum Schlusse wird noch

a. §. 354 die Methode beschrieben, wenn sich eine wiederkehrende Reihe einer geometrischen Progression nähert, aus dem Gesetze der Progression zu erkennen, von was für einer Gleichung der Quotient, den man durch die Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende erhält, die Wurzel seyn werde; und

b. §. 355. von der Anwendung der bisherigen Methode die Wurzeln zu finden bey unbegrenzten Gleichungen geredet.

XVIII.

Zusätze zum achtzehnten Capitel.

Inhalt dieses Capitels.

Von den continuirlichen Brüchen.

1. Vorläufig, Anzeige des Gegenstandes der Untersuchung im gegenwärtigen Capitel, §. 356.
2. Betrachtung der continuirlichen Brüche selbst, §. 357 bis 382.
   a. Begriff von einem continuirlichen Bruche, §. 357.
   b. Verwandlung der continuirlichen Brüche in gewöhnliche Brüche, § 358 — 362.
   c. Verwandlung der continuirlichen Brüche in Reihen mit abwechselnden Gliedern, §. 363, 364.
   d. Verwandlung der Reihen mit abwechselnden Gliedern in continuirliche Brüche, §. 365 — 373, und zwar
      α. dieser Reihen überhaupt, §. 365 — 369.
         αα wenn ihre Glieder ganze Zahlen sind, §. 365 bis 368.
         ββ. wenn alle Glieder Brüche sind, §. 369.
      β. solcher Reihen, die in continuirlichen Faktoren fortgehen, §. 370.
      γ. solcher Reihen, die überdem noch mit einer geometrischen Reihe verbunden sind, §. 371 — 373.
   e. Von der Erforschung des wahren Werths der continuirlichen Brüche, §. 374 — 380, und zwar

α. der continuirlichen Brüche überhaupt, §. 374, 375.

β. solcher, worin immer eben dieselben Nenner wiederkehren §. 376 — 380; wobey zugleich gezeigt wird, wie man die continuirlichen Brüche zur Extraction der Quadratwurzel und bey der Auflösung der quadratischen Gleichungen gebrauchen kann.

f. Gebrauch der continuirlichen Brüche in der Arithmetik, §. 381. 382.

α. Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in continuirliche, §. 381.

β. Verwandlung der Brüche in andere sich ihnen nähernde und durch kleinere Zahlen ausgedruckte, §. 382.

Die Erweiterungen, die dieses Capitel aus den Eulerschen Abhandlungen: De fractionibus continuis; De fractionibus continuis observationes; und De formatione fractionum continuarum in den Sammlungen der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1744, 1750 und 1779 erhalten könnte, muß ich wegen Mangel an Raum für einen andern Ort aufbehalten.

Verzeichniß einiger Druckfehler.

S. 27 Z. 11 lese man $\sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$ für $\sqrt{(t + u\sqrt{-1}}$,

S. 42 §. 42 Z 1 = = = = $\frac{P}{(p + qz)^n}$ = = = = $\frac{P}{p + qz^n}$

S. 58 Z. 12 = = = = eine rationale Substitution = = die Substitution

S. 68 Z. 5 = = = = vierten = = = dritten

S. 102 Z. 6 = = = = sechsten = = = vierten

S. 113 Z. 3 von unten = = verwickelten = = verwickelter

S. 283 Z. 3 u. 2 v. unten = = von der Form = = von Form

S. 377 Z. 7 von unten = = gleichnamige = = gleichmannige

S. 496 Z. 9 von unten = = $(1 - \omega)^n$ = = $(1 - \omega^n$

Nachricht an den Buchbinder.

Die beyden zu diesem Theile gehörigen Tabellen müssen, so wie es der Titel derselben anzeigt, gebunden, und die auf zweyen halben Bogen befindlichen umgedruckten Blätter statt derer, die mit ihnen gleiche Seitenzahl haben, eingeklebt werden.

P
06

L. Eulers
Analysis
des
Unendlichen

1

THU
3225-1