



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## Universitätsbibliothek Paderborn

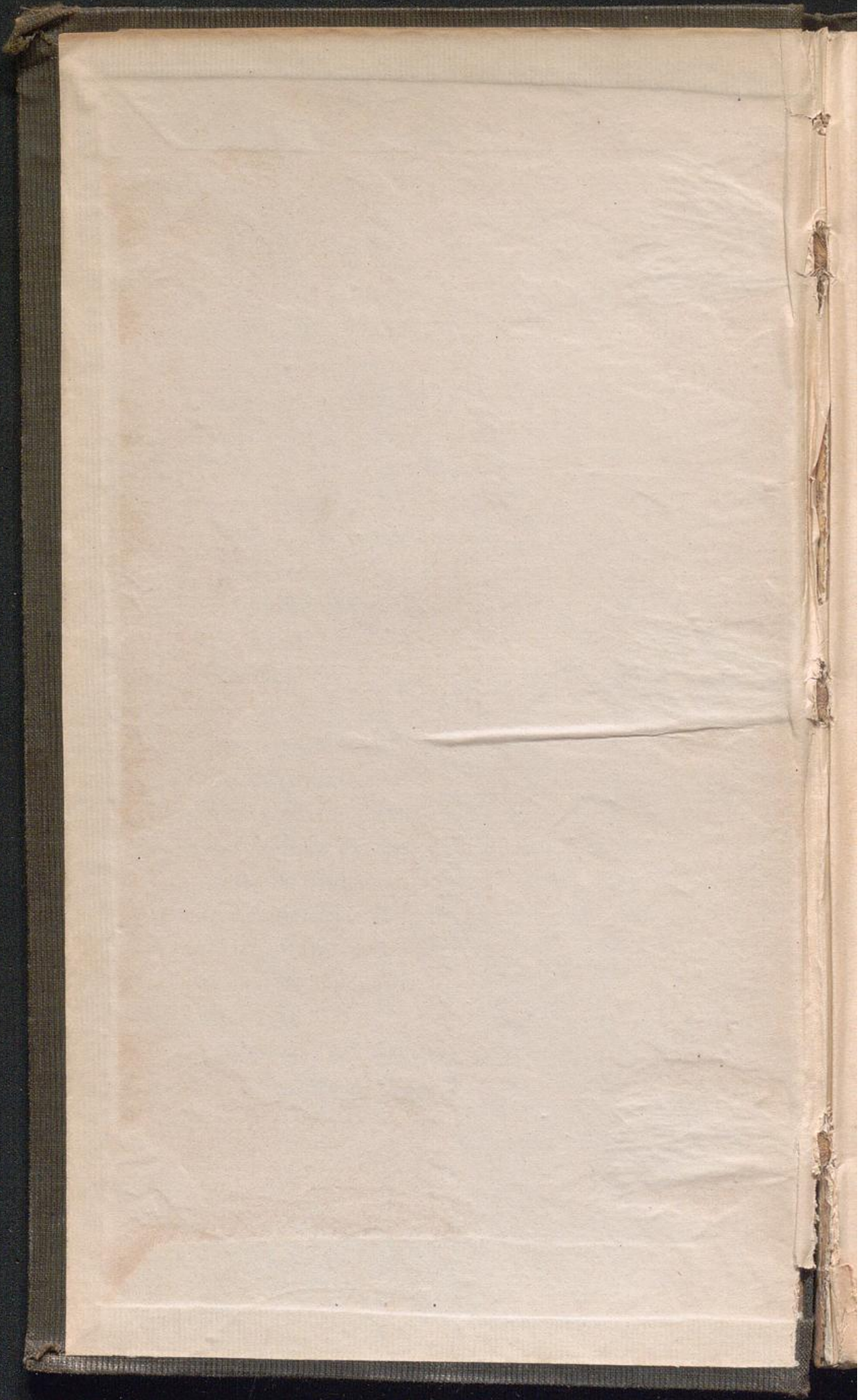
### Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

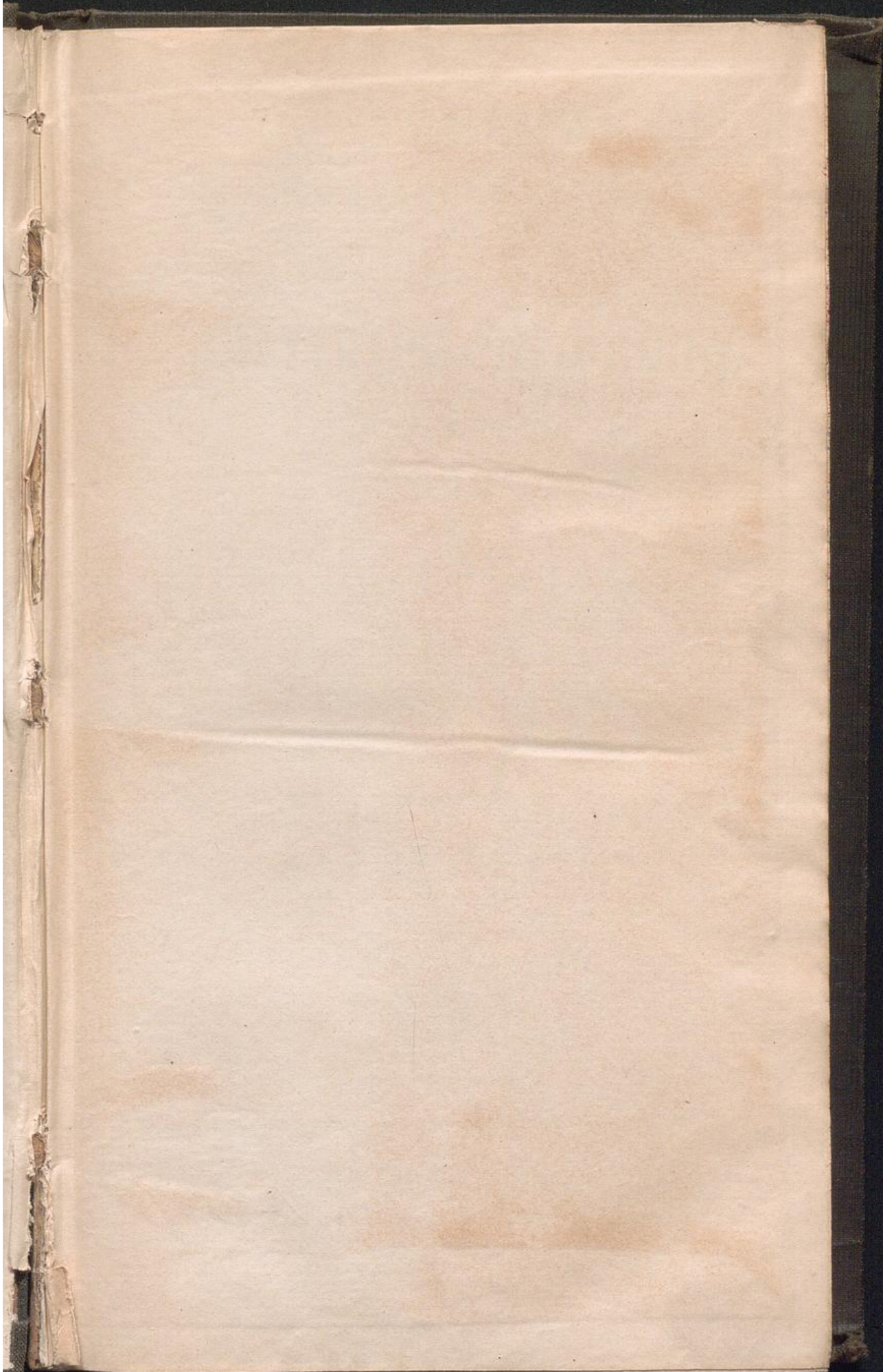
Euler, Leonhard

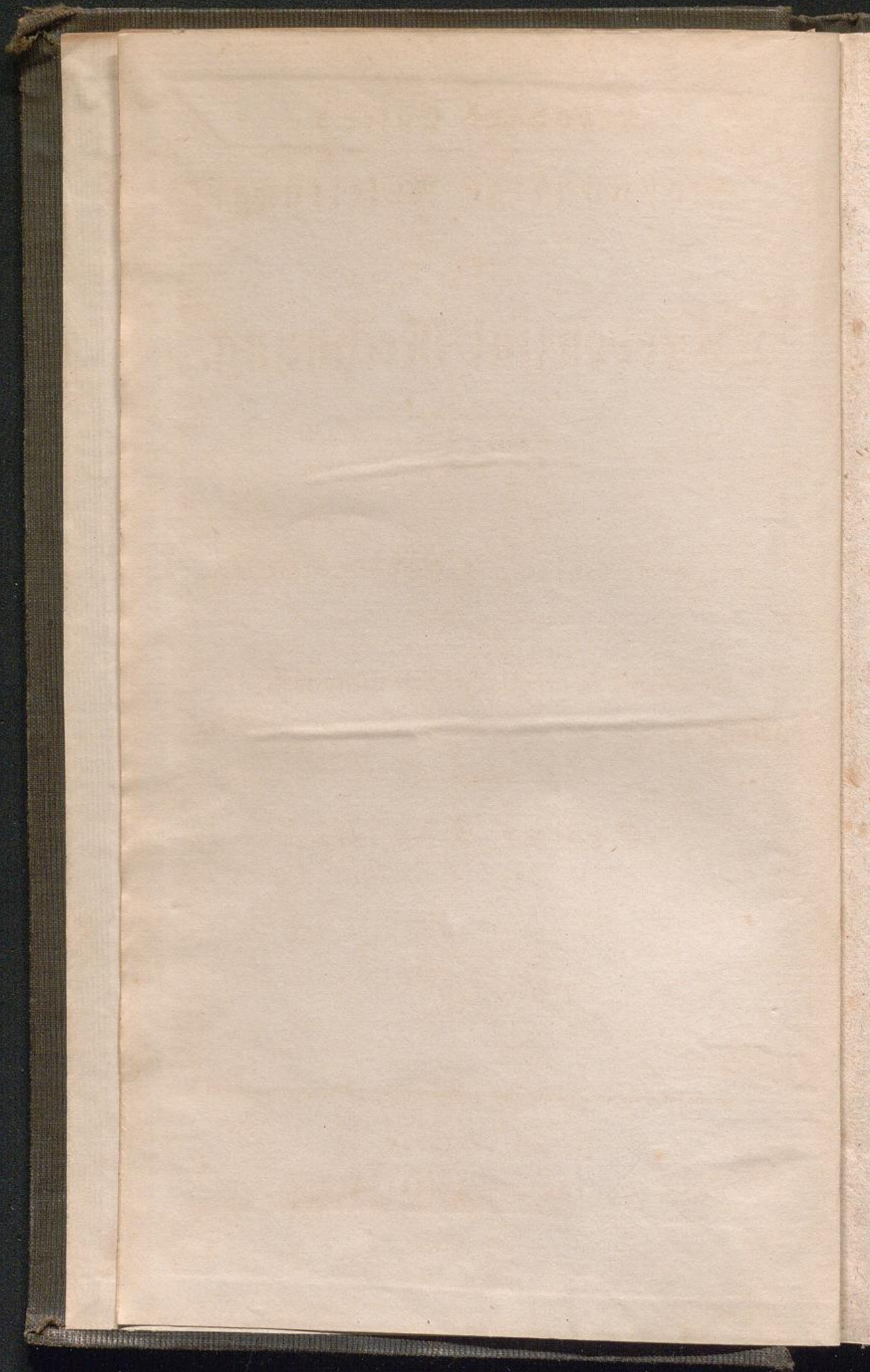
Berlin [u.a.], 1790

[urn:nbn:de:hbz:466:1-52886](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-52886)









Leonhard Euler's  
Vollständige Anleitung  
zur  
Differenzial-Rechnung.

---

Aus dem Lateinischen übersetzt  
und  
mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet  
von

Johann Andreas Christian Michelsen,  
Professor der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium.

---

Erster Theil.



---

Berlin und Libau,  
ben Lagarde und Friedrich 1790.



1988 4559 G

06

THU

3217 - 1/2 19

Dem

Hochwohlgebornen Herrn

H e r r n

George Friedrich von Tempelhof

Königl. Preussischem Obrist-Lieutenant,  
Commandeur des ersten Feld-Artillerie-Regiments, Ritter des  
Ordens pour le Mérite, und Mitgliede der Königl. Akademie  
der Wissenschaften zu Berlin.

wie auch

Er. Wohlgebornen

dem

H e r r n

Abraham Gottlieb Kästner

Königl. Großbritann. Hofrathe,  
Professor der Mathem. und Naturl. der Götting. Kön. Gesellsch.  
der Wissensch. der Königl. Churf. Braunsch. Lüneb. Landwirths-  
schaftsgesellsch. der Königl. Schwed. und Preuss. Akad. der Wiss.  
der Erfurtischen Churf. Ges. nützl. Wiss. der bononischen Akad.  
der Wiss. der perusinischen Academiae Augustae, der Oberlausitzi-  
schen Vieniengesellschaft Mitglieder; der Kön. Götting. deutschen  
Ges. Ältesten, Mitglieder der Leipziger deutschen Gesellschaft und  
dasigen Gesellsch. der freyen Künste, der Hallischen naturforsch.  
Gesellsch. der Jenaischen latein. und deutschen Gesellsch. der  
Carlsruher lateinischen Gesellschaft.

Geographische

und

Historische

Atlas

und

Er. Wohlgebornen

dem

H e r r n

I m m a n u e l K a n t

Öeffentlichem ordentlichen Lehrer der Weltweisheit  
auf der Universität zu Königsberg in Preussen, und Mitgliede der  
Königl. Acad. der Wissensch. zu Berlin.

widmet

Diese Uebersetzung

mit

aller

solchen Männern

schuldigen Hochachtung

der

Uebersetzer.



Vorrede  
des  
Uebersetzers.

---

Den Inhalt des Werks, wovon ich hier den Liebhabern der höhern Mathematik den ersten Theil übergebe, findet man hinter der Uebersetzung der Vorrede des Verfassers. Den Werth desselben druckt der für die Mathematik zu früh verstorbene Urheber des Lehrbegriffs der gesammten Mathematik in seinen Mathematischen Abhandlungen, S. 92, eben so kurz als vollkommen passend dadurch aus, daß er es unser vornehmstes classisches Werk von der Differenzial-  
Rechnung nennt; und Hr. Fuß bestimmt ihn in seiner Lobrede auf Hrn. Leonhard Euler, Basel 1786, S. 65. 66 auf folgende Art: „Das vornehmste Verdienst der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung besteht insbesondere in dem Gesichtspunkte, aus dem der Verfasser die Grundsätze  
a 5 der

der Differenzial-Rechnung betrachtet; in dem systematischen Zusammenhange, mit dem sie geordnet sind; in dem darin herrschenden methodischen Vortrage; in der Deutlichkeit, mit der er den Nutzen dieser Rechnung, in Absicht auf die Theorie der unendlichen Reihen und der Lehre der Maxima und Minima, zeigt. Da dieser Theil der Infinitesimal-Rechnung schon von den Erfindern ziemlich zur Vollkommenheit gebracht worden war: so sind darin seine eigene Erfindungen mit denen der ersten Urheber untermischt; aber die Spuren des Genies sind unverkennbar. Auch da, wo der große Geist nicht selbst erfinden kann, bringt er doch die Erfindungen anderer zur Reife, giebt ihren Grundsätzen einen höhern Grad von Simplicität und Evidenz, und leitet neue Schlussfolgen daraus her. Wer verkennet wohl diese Zeichen des Genies in Eulers Werken? Wenn ich auch gleich den methodischen Vortrag und die erforderliche Simplicität hie und da vermisse: so unterschreibe ich doch Hrn. Suß Urtheil gern; und ich hoffe, dadurch einigen Dank zu verdienen, daß ich mein Original in einer so treuen Uebersetzung, als mir nur möglich gewesen, und ohne alle Abkürzungen und Veränderungen liefere, und was ich etwa darüber zu sagen habe, den Anmerkungen und Zusätzen einverleibe, womit ein jeder Theil begleitet werden soll. Auf diese Art bleibt mir aber auch hier bloß von den zum ersten Theile hinzugefügten Anmerkungen und Zusätzen zu reden übrig.

Der Verfasser der Beurtheilung der Erläuterungen über  
Hrn. Karstens mathematische Analysis, und höhere Geo-  
metrie

metrie von Hrn. K o d e, in der Allgemeinen Litteraturzeitung vom Jahr 1789 Nr. 320, sagt in seiner Recension unter andern: „Vollkommen zweckmäßige Erläuterungen über ein solches Buch sollten eigentlich den Mittelweg gehen zwischen diesem und dem mündlichen Vortrage des Lehrers; sie sollten auf das Philosophische der Wissenschaft mehr Rücksicht nehmen; sie sollten nebst der etwa nöthigen Entwicklung und Verbesserung der Rechnungen auch die Schwierigkeiten bey allgemeinen auf besondere Fälle angewandten Methoden heben; paradoxscheinende Sätze erklären; nicht nur den Gebrauch des vorgetragenen, sondern auch die Ordnung bey dem Gebrauch, und die Fälle anzeigen, wo eine Methode der andern vorzuziehen ist; Berechnungen und Vergleichen bey Sätzen lehren, die einen wirklich praktischen Nutzen haben u. dgl.“ Ich finde diese Bemerkungen vorzüglich, und habe sie, so weit es die Natur meines Originals erlaubte, bereits bey den Anmerkungen und Zusätzen zum ersten Theile desselben vor Augen gehabt, und werde vielleicht bey dem folgenden Theile noch mehr Gelegenheit haben, mich darnach zu richten. Allein die Eulerische Anleitung zur Differenzial-Rechnung unterscheidet sich dadurch von der Karstenschen Analysis, daß diese bestimmt ist, bey dem mündlichen Unterrichte zum Grunde gelegt zu werden, dagegen jene wegen ihrer Ausführlichkeit an den meisten Orten gar keines Commentars bedarf. Ich habe daher geglaubt, bey meinen Anmerkungen und Zusätzen, insbesondere zu gegenwärtigem ersten Theile, einen andern Gesichtspunkt nehmen zu müssen. Vorausgesetzt nemlich, was bey einem Werke

Werke dieser Art vorausgesetzt werden muß, Kenntniß und Fertigkeit in der gemeinen, bestimmten und unbestimmten, Mathematik: so befindet sich der Schüler der Differenzialrechnung, wenn er dieselbe nach dem gegenwärtigen classischen Buche zu studiren unternimmt, am Anfange eines freyen Gefildes, wo er, auch ohne Führer, keine Gefahr läuft sich zu verirren, ob er gleich hie und da Wege wahrnimmt, die ihm irregulär scheinen, bisweilen einem Steine ausweichen, oder darüber hinwegschreiten muß, und am Ziele, bey aller Kenntniß der Theile, doch das Ganze noch nicht überblickt. Gäbe es jenseits dieses Gefildes in der Nähe einen Berg, dessen sich schlängelnder Aufweg zwar einige Mühe verursachte, auf dessen Gipfel aber das ganze Gefilde mit allen seinen Schätzen auf einmal dem Auge sich darstellte, so daß man zugleich den Standpunkt und die Wege erblickte, von welchem aus und auf denen man es durchwandern müßte, um nirgends einen Stein des Anstoßes, nirgends einen dunkeln oder gar entstellenden Fleck anzutreffen: was wäre dann die Pflicht dessen, der sich zum Führer anbieten wollte? Sollte es nicht hinlänglich seyn, wenn er erst am Fuße dieses Berges sich mit dem Wanderer vereinigte, ihm voran die Spitze desselben zu ersteigen suchte, und da ihm sagte, was er sähe? Ich bin mir des geringen Maßes meiner Kräfte zu sehr bewußt, als daß ich mich mit einem solchen Führer vergleichen könnte; nur eine Anhöhe erst habe ich erreicht, vom Gipfel jenes Berges bin ich noch weit entfernt. Auch trifft der, der Wege suchen muß, noch nicht unter mehreren schon betretenen wählen kann, nicht gleich

den

den kürzesten und bequemsten, und außerdem mußte ich öfters zurück und nach den Seiten hinblicken. Leicht wird es andern seyn, auf angenehmern Wegen und mit weniger Mühe und in kürzerer Zeit eine größere Höhe zu erreichen; leicht auch, mir anzuzeigen, wo ich gefehlt habe. Sollte ich es aber deswegen für ganz unnütz halten, den Weg, welcher sich mir darbot, so wie ich ihn gegangen bin, also auch mit allen seinen Unvollkommenheiten, vor Augen zu legen? Für ganz unnütz vielleicht nicht, aber doch für weit weniger nützlich, als die bloße Mittheilung des am Ende Gefundenen hätte seyn können? Wohl! auch nach diesem Urtheile will ich mich richten, und also hier die Resultate der in den Anmerkungen und Zusätzen angestellten Untersuchungen hersehen.

So wie die reine Mathematik überhaupt nichts anders ist als reine Vernunftwissenschaft aus der Construction der Begriffe, (Critik der reinen Vernunft, von Immanuel Kant, 2te Aufl. S. 741.): so sind solches auch alle ihre Theile; und da durch das in dieser Definition enthaltene Kennzeichen das Wesen der Mathematik erschöpft wird, und aus demselben der Gegenstand dieser Wissenschaft abgeleitet und bestimmt werden muß: so müssen auch, bey der Festsetzung der Theile der Mathematik, die Constructionen der erste, und der Gegenstand oder die Größe der zweyte Eintheilungsgrund seyn.

Nun sind die Constructionen entweder

I. natürliche, d. h. solche, welche die Größen in ihren unterscheidenden Merkmalen; oder

2. will-

2. willkürliche, d. h. solche, welche die Größen durch gleichartige Größen und durch ihr Verhältniß zu diesen vorstellen. Ferner theilen sich die willkürlichen Constructionen ein
- a. in ganz bestimmte, d. h. in solche, welche Einheit und Verhältniß bestimmt ausdrücken;
  - b. in nicht ganz bestimmte, d. h. in solche, welche entweder die Einheit, oder das Verhältniß unbestimmt lassen. Diese sind wieder
    - α. in Ansehung der Einheit bestimmte, d. h. solche, wobey man sich die Größen als unbestimmte Mengen bestimmter, und in jeder Größe durchaus einander gleicher Einheiten;
    - β. unbestimmte, d. h. solche, wobey man sich die Größen als unbestimmbare, aber bey allen gleich große Mengen, bald gleicher, bald ungleicher Einheiten gedenkt.

Was die Größe betrifft, so ist sie nur in so fern der Gegenstand der Mathematik, in so fern sie construirt werden kann, und dadurch fallen die unendlichen Größen, wenn der Gegenstand der Mathematik festgesetzt werden soll, durchaus und von selbst weg, und es bleiben bloß die endlichen Größen übrig. Diese aber sind entweder continuirliche, oder discrete, und dabey zugleich entweder bestimmte oder unbestimmte. Hierauf beruht die Eintheilung der Mathematik, welche S. 380 steht, und über deren logische Richtigkeit oder Unrichtigkeit nun das Urtheil leicht ist.

Die

Die höhere Mathematik ist also reine Vernunftwissenschaft aus unbestimmten Constructionen. Hieraus fließen folgende Behauptungen.

1. Da die endlichen Größen nicht anders in unbestimmten Constructionen untersucht werden können, als wenn sie veränderliche Größen ohne Einschränkung (S. 379.) sind: so machen eben deswegen diese veränderlichen Größen den Gegenstand der höhern Mathematik aus.
2. Da die Mengen der Einheiten in denen Größen, welche in unbestimmten Constructionen untersucht werden, bey allen gleich groß gedacht werden: so können sich die Untersuchungen der höhern Mathematik auch lediglich auf die Einheiten der veränderlichen Größen, nicht aber auf die Zahlen, welche ihre Menge in jeder Größe ausdrücken, erstrecken. Folglich bleibt
3. der höhern Mathematik nichts weiter möglich, als entweder
  - a. aus gegebenen veränderlichen Größen ihre Einheiten, oder
  - b. aus gegebenen Einheiten veränderlicher Größen diese Größen zu finden.
4. Jeder von diesen beyden Fällen hat aber wieder zwey andere unter sich, indem die Einheiten der veränderlichen Größen entweder bloß unbestimmt aber doch bestimmbar, oder unbestimmbar, mit andern Worten, unbestimmbar, klein seyn können. Folglich theilt sich
5. die

5. die ganze höhere Mathematik zunächst, d. h. ohne auf ihre Anwendungen zu sehen,
- a. in die Lehre von der Erfindung der Einheiten der veränderlichen Größen aus diesen Größen, wozu
    - α. die Lehre von den Differenzen,
    - β. die Differenzial-Rechnung gehört;
  - b. in die Lehre von der Erfindung der veränderlichen Größen aus ihren gegebenen Einheiten, und diese theilt sich
    - α. in die Lehre von den Summen,
    - β. in die Integral-Rechnung.

6. Die Hauptsache in der Lehre von den Differenzen besteht in der deutlichen Darstellung der Differenzen, und die Hauptsache der Differenzial-Rechnung in der deutlichen Darstellung der Differenzialien, wenn die veränderlichen Größen, wozu sie gehören, gegeben sind: so wie das Eigenthümliche der Lehre von den Summen und der Integral-Rechnung, in der Erfindung der veränderlichen Größen aus ihren deutlich ausgedruckten Differenzen oder Differenzialien. Was die Erfindung des Verhältnisses betrifft, welches deutlich ausgedruckte Differenzen oder Differenzialien zu einander haben: so ist dieselbe eben so als die Erfindung des Verhältnisses aus gegebenen Differenzen und Differenzialien gefunden: veränderlicher Größen ein Werk des Gebrauchs der gemeinen und unbestimmten Mathematik.

7. Da

7. Da die Lehre von den Summen die umgekehrte Methode der Differenzen, und die Integral-Rechnung die umgekehrte Methode der Differenzialien ist: so beruhet die Gewisheit der ganzen höhern Mathematik lediglich auf der Gewisheit des Weges, auf welchem man die Differenzen und die Differenzialien findet.

8. Die Regeln der Erfindung der Differenzen und Differenzialien können nur dann den erforderlichen Grad der Gewisheit haben, wenn sie aus dem Begriffe der Lehre von den Differenzen und der Differenzial-Rechnung selbst und unmittelbar fließen; eine Behauptung, woben man sich nur daran zu erinnern braucht, daß die ganze reine Mathematik reine Vernunftwissenschaft seyn muß, und daß die allgemeine Mathematik nicht aus Constructionen, sondern vermittelst Constructionen aus Begriffen schöpft.

9. Da der in den Anmerkungen und Zusätzen eingeschlagene Weg nach diesem Gesichtspunkte gewählt ist: so kann er zwar in Nebendingen noch sehr vieler und großer Verbesserungen fähig seyn. Wenn ich dieses nicht selbst gestehen wollte, so könnte man mich mit Recht einer verblendenden Eigenliebe beschuldigen. Allein daß er im Wesentlichen gleichwohl allen übrigen bisher eingeschlagenen vorzuziehen sey, dies zu behaupten berechtigt mich die Zeit, und die mit äußerster Sorgfalt verbundene Anstrengung, welche er mir gekostet hat.

10. Die Vorstellung von den Differenzialien, bey welcher man sich dieselben, an sich, als verschwindende Größen, oder als  $= 0$  gedenkt, ist bey der Erfindung der Regeln der Differenzial-Rechnung durchaus unndthig, und führt außerdem, man mag sie unmittelbar, wie die meisten, oder mittelbar, wie einige, annehmen und brauchen, zu Dunkelheiten und Schwierigkeiten. Hierdurch fallen zugleich die von einander verschiedenen unendlich großen Größen einer Art weg.

11. Wenn man sich die Differenzialien als unbestimmte, aber gleichwohl nicht als unbestimmbare kleine Theile vorstellt, so verwandelt man dadurch die ganze Differenzial-Rechnung in weiter nichts, als in eine Beynahe-rechnung, wenn man mir anders diesen Ausdruck erlaubt.

12. Wenn man bey der Erfindung der Regeln der Differenzial-Rechnung die Exhaustions-Methode der Alten mit Recht und mit Vortheil brauchen zu können glaubt: so widerspreche ich dieser Behauptung in meinen Anmerkungen und Zusätzen nicht, weil es Eine Seite wenigstens giebt, von welcher betrachtet, ich Unrecht haben würde, und ich an dem gedachten Orte nur gelegentlich darauf komme. Allein wenn diese Sache genauer und nach der Strenge untersucht werden sollte, so zeigte sich vielleicht auch, daß die Exhaustions-Methode lediglich in die Elementar-Mathematik gehöre, und höchstens bey den Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf  
elemen-

elementarische Gegenstände mit Nutzen gebraucht werden könne, ohne doch deswegen dabey nothwendig zu seyn.

Ich lasse es hierbey bewenden, um noch Platz zu einigen andern Anmerkungen zu behalten.

Vielleicht ist es einigen nicht unangenehm, den Beweis der Hauptregel der Differenzial- und Integral-Rechnung hier ebenfalls in größerer Kürze zu lesen, als ich denselben in den Anmerkungen und Zusätzen habe liefern können.

Wenn Größen in unbestimmten Constructionen (S. 378) untersucht, folglich als unbestimmbare, aber allenthalben gleich große Mengen, bald gleicher, bald ungleicher Einheiten gedacht werden sollen: so kann man jede dieser Größen, wenn man den Buchstaben  $\delta$ , und das Zeichen  $\infty$  so gebraucht, als es S. 373. geschehen ist, folglich das Zeichen  $\infty$  nicht eine unendliche, sondern nur eine unveränderliche unbestimmbare große Zahl bedeuten läßt, durch ein Produkt aus der Zahl  $\infty$  und der Einheit der gegebenen Größe ausdrücken. So ist z. B. unter den angeführten Bedingungen  $x = \infty \delta x$ ;  $x^2 = (\infty \delta x)^2 = \infty^2 \delta x^2 = \infty \delta \cdot x^2$ , u. Ferner findet die Möglichkeit, die Einheit einer Größe, deren Construction zu den unbestimmten gehört, deutlich auszudrücken, nur in so fern statt, daß man dabey die Einheit irgend einer gleichartigen Größe in dem gedachten deutlichen Ausdrucke als Einheit braucht, und z. B.  $\delta \cdot x^2$  durch  $\delta x$  und andere Größen bestimmt, S. 292. und 312. Da hierdurch die Bedeu-

tung von  $x$  auf keine Weise eingeschränkt wird, so kann man sich darunter jede bestimmte Größe derjenigen Art, welche  $x$  vorstellt, gedenken, und es haben daher die unbestimmten Constructionen, und folglich auch die ganze höhere Mathematik, die veränderlichen Größen zum Objekte. Es sey also  $x$  eine veränderliche Größe, und die Einheit irgend einer Funktion von  $x$  durch  $\delta x$  deutlich auszudrücken. Da  $x = \infty \delta x$  ist, so läßt sich vermittlest dieser Substitution auch die gegebene Funktion von  $x$  so abändern, daß man allenthalben  $\infty \delta x$  anstatt  $x$  setzt, ohne daß dadurch die Funktion eine andere Bedeutung bekomme. Da ferner  $\delta x = \frac{x}{\infty}$  ist, so kann man auch diesen Werth für  $\delta x$  gebrauchen, wo man es nützlich findet. So lange man indeß bloß dieses thut, erreicht man seinen Zweck, die Einheit der gegebenen Funktion deutlich auszudrücken, nicht. Man setze also  $x = \infty \delta x + \frac{x}{\infty}$ , oder die Anzahl der Einheiten in den gegebenen Größen  $= \infty + 1$ , welches, wenn es allenthalben geschieht, wegen der Erklärung der höhern Mathematik, erlaubt ist. Da man hierdurch statt der vorhergehenden veränderlichen Größen andere zu eben der Art gehörige, und nur bloß darin von ihnen unterschiedene veränderliche Größen bekommt, daß sie eine Einheit mehr enthalten: so ist offenbar, daß man, nach gehöriger Entwicklung und der Subtraction jener von diesen, die gesuchte Einheit finden werde.

Es sey z. B.  $x^2$  gegeben, um  $\delta x^2$  zu suchen, wenn der Punkt zwischen dem Buchstaben  $\delta$  und der Construction  
der

der gegebenen Funktion eben die Bedeutung hat, welche ihm zwischen dem Zeichen des Differenzials und der Construction, wovon das Differenzial gesucht werden soll, beygelegt zu werden pflegt. Alsdenn ist nach dem Vorhergehenden

$$\infty . \delta . x^2 = x^2, \text{ und}$$

$$(\infty + 1) \delta . x = (x + \delta x)^2 = x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$$

folglich

$$\delta . x^2 = 2x\delta x + \delta x^2.$$

Ferner sey  $d . x^n$  zu suchen; so ist auf ähnliche Art

$$\infty . \delta . x^n = x^n$$

$$(\infty + 1) \delta . x^n = (x + \delta x)^n =$$

$$x^n + nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \delta x^3 +$$

ic.

folglich

$$\delta . x^n = nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \delta x^3 +$$

ic.

Oder man kann auch auf folgende Weise verfahren, wobey man aber eigentlich nur andere Bezeichnungen braucht. Soll  $\delta . x^2$  gesucht werden, so ist

$$\infty . \delta . x^2 = x^2 = \infty^2 \delta x^2$$

und

$$(\infty + 1) \delta . x^2 = ((\infty + 1) \delta x)^2 = (\infty^2 + 2\infty + 1) \delta x^2$$

$$= \infty^2 \delta x^2 + 2\infty \delta x^2 + \delta x^2 =$$

$$\infty^2 \delta x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$$

weil  $\infty \delta x = x$  ist. Folglich findet man auch hier

$$\delta . x^2 = 2x\delta x + \delta x^2,$$

b 3

und

und auf ähnliche Art läßt sich das andere Exempel behandeln. Verbindet man hiermit dasjenige, was in den Anmerkungen und Zusätzen S. 321 - 323 steht: so ist dasselbe für den gegenwärtigen Ort und die gegenwärtige Absicht hinreichend. Uebrigens kann  $dx$  sowohl unbestimmte, aber dabey bestimmbare, als unbestimmbare, oder genauer, unbestimmbare kleine Einheiten anzeigen. Im ersten Falle erhält man durch die Verwechslung des Buchstabens  $d$  mit  $\Delta$  deutliche Ausdrücke für die Differenzen, und im andern durch die Verwechslung eben desselben Buchstabens mit dem Zeichen der Differenzialien,  $d$ , deutliche Ausdrücke unbestimmter kleiner Theile. Setzt man darin, wenn man sie auf die letzte Art gesucht hat, mit Beybehaltung des  $dx$ , wenn es bloß mit bestimmten und unbestimmten Größen verbunden ist,  $\frac{x}{\infty}$  für  $dx$ ,  $\frac{x^2}{\infty^2}$  für  $dx^2$  u., wobey denn  $\infty$  eine unbestimmbare große Zahl bedeutet: so fallen die Glieder, welche ohne Nachtheil der mathematischen Strenge weggelassen werden können, und zugleich auch der Grund, warum solches geschehen kann, von selbst in die Augen. So wird

$$d \cdot x^2 = 2x dx + \frac{x^2}{\infty^2} = 2x dx$$

$$d \cdot x^3 = 3x^2 dx + \frac{3x^3}{\infty^3} + \frac{x^3}{\infty} = 3x^2 dx$$

u. s. f.

Weiter bin ich, was die Entwicklung der Regeln der Differenzial-Rechnung betrifft, in den Anmerkungen und  
Zusätzen

Zusätzen zum gegenwärtigen ersten Theile der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung deswegen nicht gegangen, weil das Angeführte für denjenigen, der das Eulerische Werk bey der Erlernung der genannten Wissenschaft zum Grunde legen will, hinreichend seyn kann, um ihn in den Stand zu setzen, ohne Führer weiter fortzugehen. Aber da man in der Differenzial- und Integral-Rechnung so viel von dem Unendlichen zu reden pflegt, daß man fogar beyde Wissenschaften mit dem stolzen Namen der Analysis des Unendlichen belegt, und doch in denselben nichts weniger thut, als das Unendliche aufzulösen: so verdiente auch das sogenannte unendlich Große und unendlich Kleine der Mathematiker, am Ende noch besonders erwogen zu werden. Was ich über den Abschnitt, worin solches geschehen ist, zu sagen habe, ist kürzlich folgendes.

Einmal habe ich darin, wegen mancherley Rücksichten, die ich zu nehmen hatte, nicht wohl vermeiden können, hie und da Excursionen zu machen. Wenn daraus für einen oder den andern eine größere Weitläufigkeit gestossen seyn sollte, als er wünscht, so bitte ich dieselbe nicht meiner Materie zuzuschreiben, sondern mir anzurechnen.

Ferner habe ich mich an einigen Orten auf meine vorhergehenden Schriften berufen müssen, insbesondere auf meine Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra, auf die Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, und auf meine Gedanken über den gegenwärtigen Zustand

der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern. Daß ein Schriftsteller seine eigene Schriften citirt, ist eine Sache die keiner Entschuldigung bedarf, er müßte denn dieselbe durch die Art, wie er es thut, nothwendig machen. Allein verschiedenes, was ich aus meinen Schriften voraussetze, gehört mit zu dem, von einigen meiner Recensenten für problematisch, desgleichen für überflüssig, und insbesondere für Anfänger zu schwer erklärten. Was heißt problematisch? Auch das, was aus richtigen Begriffen nach ausgemachten Regeln gefolgert werden kann, und beim Gebrauche unter andern auch dadurch sich bewährt, daß es, sonst unwiderleglichen Schwierigkeiten selbst die Quelle verstopft? Es kann etwas diese Beschaffenheit haben, wenn es gleich, vielleicht wegen Unvollkommenheit der Darstellung, nicht jedem darin erscheint. Ferner giebt es Werkzeuge, die mehr kosten, als Eins von den Dingen, welche man das durch zu Stande bringt, die aber derjenige nicht entbehren kann, der die Kunst treibt, zu welcher es gehört. Soll man deswegen Grundbegriffe und Grundlehren nicht in möglichster Genauigkeit und Vollständigkeit vortragen, weil dazu von Seiten des Schülers eine größere Aufmerksamkeit nothig ist, als man ihm zutraut, und etwas mehr Zeit erfordert wird, als wenn man ihn nur oberflächlich damit bekannt machte? Wer stimmt nicht darin mit mir überein, daß ein Weg, der anfänglich rauh ist, aber bald darauf eben wird, und dann durch reizende Fluren geht, dem vorzuziehen sey, der kurze Zeit ergötzt, aber zu unersteiglichen Klippen führt?

Wer

Wer nicht darin, daß gut angewandte Zeit edlere und reichlichere Zinsen trage, als sicher angelegtes Geld? und daß ein Jüngling keine Zeit besser anlege als die, welche er zur Uebung des Auges seines Geistes anwendet? Doch es haben mich die meisten von denen, welche meine für Anfänger in der Mathematik geschriebenen Bücher beurtheilt haben, durch eben so ehrenden als gütigen Beifall ermuntert, und es ist daher meine Pflicht, lieber allen Tadel bloß zu meiner Belehrung zu nutzen. Von der Nothwendigkeit und Richtigkeit der Neuerungen also überzeugt, welche ich in der Mathematik theils schon gemacht, theils nur erst vorgeschlagen habe, wozu kann der Tadel, insbesondere von einem Kästner, Klügel, und einigen andern, mir dem Namen nach unbekannt, aber gewiß sehr einsichtsvollen Mathematikern, mich bewegen? Anzunehmen, dünkt mich, daß ich noch nicht tief genug eingedrungen sey; daß ich nicht immer bloß auf meinen Gegenstand gesehen, sondern öfters zu ängstlich auf diejenigen, für welche ich schrieb, Rücksicht genommen; insbesondere aber, daß ich bey der Mittheilung meiner, nicht sowohl neuen, sondern nur genauer entwickelten und allgemeiner gemachten Theorien, einen höhern Grad der Deutlichkeit, Leichtigkeit und Kürze zu erreichen aufs sorgfältigste mich bestreben müsse. Männern, wie die vorhin genannten, dankt man am besten durch die That, und so will auch ich ihnen meinen Dank bringen. Deswegen habe ich bereits meine Theorie von der allgemeinen Multiplication und Division, ohne gleichwohl irgend eine von meinen Behauptungen darin zurück zu nehmen, so umgearbeitet, daß ich mich nun auch

nicht einmal im Ausdrucke, von dem Gewöhnlichen zu ersetzen scheine, und im Stande bin, dieselbe ersten Anfängern, in kürzerer Zeit und mit weniger Anstrengung von ihrer Seite bezubringen, als sonst der gewöhnlichen Multiplication und Division der Buchstabenrechnung mit Bereitwilligkeit eingeräumt zu werden pflegt. Ich werde dieselbe nächstens in meinen Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik, wovon, vom April dieses Jahres an, monatlich ein Stück erscheinen wird, zur öffentlichen Prüfung vorlegen, und auf ähnliche Art mit dem Uebrigen verfahren. Jetzt wage ich eine Bitte, und setze sie zugleich mit ihren Gründen her.

Meine Neigung zur Mathematik rührt ursprünglich daher, weil ich sie immer als die vollkommenste unter allen Wissenschaften hatte rühmen hören, und Euclides, dessen Elemente ich bey der Erlernung der Geometrie zum Grunde legte, diesen Lobspruch mir immer mehr bewährte. Die Anfangsgründe der Analyse machte ich mir aus des Hrn. Obrist-Lieutenants von Tempelhof Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen bekannt, angereizt durch ein öffentliches Urtheil des verstorbenen Hrn. Geh. R. von Segner über diese Schrift: Der Herr Verfasser ist in meine Fußstapfen getreten, aber er hat mich übertroffen. Daß ich des Hrn. Hofrath Kästners Schriften wegen des darin verborgenen reichen Schazes mathematischer Kenntnisse, in so großer Präcision und Schärfe dargelegt, stets als jedem Mathematiker unentbehrlich betrachtet habe, brauche ich kaum

faum

kaum zu berühren. Meine Lage gab mir früh Gelegenheit, meine wenigen mathematischen Kenntnisse bey dem Unterrichte studirender Jünglinge zu gebrauchen, und seit zwanzig Jahren ist fast kein Tag verfloßen, an welchem ich diese Gelegenheit nicht gehabt hätte. Dieser Umstände wegen, und insbesondere, weil ich durch die Schriften des Hrn. Obristen-Lieutenants von Tempelhof auf die wahre Quelle in der allgemeinen Mathematik aufmerksam gemacht war, und die Euclideanische Methode durch das Studium der Elemente des Euclides vorher schon, wenigstens empfinden gelernt hatte, war es sehr natürlich, daß ich längst, in Rücksicht auf die Methode, bald hier bald da, und je länger desto mehr, Unvollkommenheiten in der Mathematik wahrnahm; und vieles, was ich anfänglich nur für Schein hielt, der von der Eingeschränktheit meiner Einsichten herrührte, zeigte sich mir in einem sehr hellen Lichte, als ich nach der Erscheinung der Critik der reinen Vernunft von Hrn. Kant, durch die Entwicklung der darin vorkommenden Definition der Mathematik, und also auf einem ganz andern Wege, zu eben den Resultaten gelangte. Gern gestehe ich es, daß ich mich, so oft ich an diese Definition denke, (und bey dem Anblick einer Eiche, die durch ihre Größe und Stärke zur Bewunderung zwingt, drängt sich die Vorstellung von der Eichel, aus der sie entsprang, unwillkürlich hervor) des Gedankens nicht erwehren kann: es werde ihrem Urheber, den Moses Mendelssohn der alles zermalmenden nannte, die Nachwelt den Namen des tief gründenden geben. Von Zeit zu Zeit habe ich meine Meinungen, wenn ich dazu bey meinen schriftstellerischen

schen

schen Arbeiten Gelegenheit fand, öffentlich geäußert, und das meiste, obgleich viel weniger als ich hätte sagen können, in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik zur Prüfung vorgelegt. Meine Absicht und mein Wunsch dabey ist weit mehr gewesen, mir dadurch Gelegenheit zur Belehrung von Kennern zu verschaffen, als Ruhm zu erwerben, wozu vorzüglichere Talente gehören, als ich fühle. Eine günstige Witterung hat mich auf diese Art in den Stand gesetzt, einen Boden, der in Ansehung der Fruchtbarkeit höchstens zu den mittlern gehört, wenigstens so zuzubereiten, daß er den Namen eines undankbaren Landes nicht verdiene. Hr. Kant legte zum allgemeinen Gebrauch ein Samenkorn hin. Ich habe es aufgenommen, einem bearbeiteten Boden anvertraut, dasselbe gepflegt, die Pflanze, welche daraus hervorsproß, gewartet, bis sie Ansatz zu Blüthen zeigte. Was rückständig ist, erfordert geschicktere Gärtner, und belohnende Ehre soll es mir seyn, wenn sie mich nicht unfähig halten, unter ihrer Aufsicht und Leitung meine bisherige Arbeit fortzusetzen. Und an wen könnte hierbey meine Bitte sich wenden, als an eben die Männer, deren Namen ich bereits mit aller Dankbarkeit eines Schülers genannt habe, den Hrn. Obrist-Lieutenant von Tempelhof, den Hrn. Hofrath Kästner, und den Hrn. Professor Kant, das heißt, an Deutschlands erste Mathematiker und größten Philosophen. Noch fehlt der Mathematik in Ansehung der Methode und von ihrer philosophischen Seite betrachtet, bey aller ihrer übrigen unläugbaren großen Vollkommenheit, viel, ob sie gleich den Namen der vollkommensten Wissenschaft, selbst

selbst der bloßen Möglichkeit nach, nicht verdienen würde, wenn sich dieses Viele nicht auch auf weniges zurückführen ließe. Die gewöhnlichen Erklärungen der Mathematik reichen noch nicht einmal hin, den Gegenstand dieser Wissenschaft so zu bestimmen, daß man ihn in jedem Falle deutlich unterscheiden könnte. Die Eintheilungen ferner, welche man daraus nach logischen Regeln ableiten kann, sind größtentheils so unvollkommen, so unvollständig und verworren, daß ihnen nichts weniger als der Name logischer Eintheilungen zukommt. Was die Sätze der Mathematik betrifft, so giebt es darunter eine große Menge, deren Gewißheit nur scheinbar, oder höchstens hypothetische Gewißheit ist; und das natürlich, weil man ihre Beweise aus unrichten entweder, oder aus unlautern Quellen schöpfte. Insbesondere aber erscheint die Mathematik zu oft in einem Gewande, welches ihr ihre vornehmsten und wichtigsten Reize raubt; noch gewährt sie insbesondere den formellen Nutzen, den man in so reichem Maasse von ihr erhalten kann, nur selten; noch hält sie die Schätze der Erkenntniß von der Art, wie unser Geist bey seinen Operationen verfährt, größtentheils verschlossen. Man betrachte Hrn. Kants Definition der Mathematik als Samenkorn, vertraue es einem fruchtbaren Boden an, und pflanze es. Was für eine genaue Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik, was für eine vollkommene Eintheilung spricht daraus hervor! Man entwickle diese Erklärung, und versuche, ob das ganze Gebäude der Mathematik nicht durchaus einer solchen, und vielleicht noch größern Festigkeit fähig sey, als die Elemente vom Euclid-

des

des haben? Man überlege den außerordentlichen Grad von Leichtigkeit, den die Mathematik auf diese Art, und zwar in Verbindung mit einer größern Gründlichkeit und Vollständigkeit, erreichen kann. Und dann, was allerdings noch wichtiger, aber mit dem Vorhergehenden auf das genaueste verbunden ist, so ist bekannt, daß Plato urtheilte: Das Studium der Mathematik reinige und belebe das Organ der Seele, was durch die gewöhnlichen Beschäftigungen des Lebens verfinstert und unterdrückt werde. Aber dieser Vortheil ist uns in einem um eben so viel höhern Grade möglich, als der Umfang der Mathematik jetzt größer ist, als zur Zeit Platos. Endlich eröffnet sie dem Philosophen und dem Lehrer unverstehbare, noch nicht genug besuchte Quellen der wichtigsten Wahrheiten: selbst dem Moralisten bietet sie Beispiele dar, an welchen er, wie mit den Augen, wahrnehmen kann, unter was für Umständen sogar die deutlichsten, festesten Grundsätze nichts wider die Gewalt der Sinne vermögen, und wenn auf der andern Seite jeder noch so lebhaft sinnliche Eindruck gleichsam von der Oberfläche abgleitet. Wäre es möglich, aus der unübersehbaren Menge der Materialien, welche die Mathematik in ihrem jetzigen Zustande dazu enthält, ein Lehrgebäude aufzuführen, welches durch seine Simplizität bloß das Auge des Kenners reizte; dessen Theile zwar jedem Blicke sichtbar wären, aber, in Ansehung ihrer Verbindung unter einander und ihrer Zweckmäßigkeit, nur erst beim Gebrauch erkannt werden könnten, dabey erst in immer hellern und anziehendern Lichte sich zeigten: ein Lehrgebäude, dessen Gebrauch jedem von dem

Augens

Augenblicke an frey stände und leicht wäre, sobald derselbe für ihn Bedürfniß würde, und welches, bey sorgfältiger Benutzung, alle vorhin gerühmte Vortheile gewähren könnte: sollte ein Versuch dasselbe wirklich zu errichten der Mühe unwerth, sollte er tadelswürdig seyn, wenn man dabey bloß dem Ziele sich näherte, es nicht ganz errichte? dürfte man nicht mit Cicero denken: *Prima sequentem honestum est in secundis tertisque consistere?* Zwanzig volle Jahre habe ich mich zu einem solchen Versuche vorbereitet, so daß ich in der ersten Hälfte lediglich durch die Lagen, in welchen ich mich befand, angetrieben und geleitet wurde, die dazu erforderlichen Wege zu gehen, und in der andern erst anfing mein Ziel wahrzunehmen. Aber auch von dieser Periode verfloß ein Theil, wo ich es nur in der Ferne und dunkel erblickte, und mehr als einmal bin ich im Begriffe gewesen, Wege zu erwählen, welche mich gänzlich davon abgeführt haben würden. Immer wieder zu demselben hingeleitet, ist nun seit mehreren Jahren mein ganzes Streben allein nach ihm gerichtet gewesen, und ich würde, so wie bisher, nur in der Stille gesucht haben, mich ihm immer mehr und mehr zu nähern, wenn mir nicht die Größe und Wichtigkeit der Sache Belehrung und Leitung von Kennern unentbehrlich machte. Die Mathematik ist die erste unter den Wissenschaften, welche sich mit den Formen, das heißt, mit demjenigen beschäftigen, woben unser Geist der wirklichen Dinge und der Hülfe der Erfahrung nicht bedarf; und wenn sich also der gründliche Gelehrte dadurch unterscheidet, daß er vermittelst der Kenntniß von den Formen die Natur wirklicher

cher

cher Gegenstände in reellen Begriffen untersucht: so gehört das Studium der ganzen Mathematik zu den allerersten Vorbereitungsstudien zur gründlichen Gelehrsamkeit. Uebershaupt genommen, giebt man dieses zu, und hat es längst und oft gesagt. Aber man hält dabey das Studium der Mathematik für schwerer, als es ist, wenn es mit möglich größter Gründlichkeit getrieben werden soll (und doch ist möglich größte Gründlichkeit, so paradox auch diese Behauptung klingen mag, gerade das sicherste Mittel, die Mathematik selbst Kindern angenehm und leicht zu machen) glaubt deswegen, daß es erst für die spätern Jahre gehöre, und befürchtet wohl gar, wie Hr. Rehberg im Januar der Berlinischen Monatschrift vom Jahr 1789, von der frühen Betreibung desselben schädliche Folgen. Darf ich ein Urtheil wagen, an dessen Richtigkeit schon die Vorstellung der Natur der Mathematik und die Beschaffenheit des von ihrem Studium zu erwartenden formellen Nutzens mich nicht zweifeln läßt, worin ich aber auch durch andere hier nicht her gehörige Gründe bestärkt worden bin: so ist es möglich

das Studium der Mathematik so einzurichten, daß diejenigen, welche die Fähigkeiten besitzen, die zur Erlernung der Wissenschaften überhaupt erfordert zu werden pflegen, in dem Zeitraume von ihrem zehnten bis zum sechszehnten Jahre, bey zwey Stunden wöchentlich dem Unterrichte, und so viel zu eigenen Arbeiten bestimmt, als auf zwey Stunden Unterweisung in andern Wissenschaften Niemanden zu viel scheinen, dasselbe so weit vollenden können, als nöthig ist, um entweder, wenn  
 sie

rt  
en  
v  
st  
a  
ß  
ch  
ig  
if  
es  
b  
is  
is  
a  
w  
is  
n  
b  
es  
es  
n  
n  
t,  
is  
it  
n  
e

sie sich ganz der theoretischen, reinen und angewandten Mathematik widmen wollen, weiter keines Führers zu bedürfen, oder, wenn sie sich andern Wissenschaften bestimmen, daraus am Ende des gedachten Zeitraums bereits alle ihnen nöthige Denkfertigkeiten gezogen zu haben, oder endlich, wenn die praktische Anwendung der mathematischen Wissenschaften ihr Ziel ist, auch dazu vollkommen vorbereitet zu seyn.

Die Regeln, welche das Verfahren des Lehrers hierbei bestimmen, sind der Zahl nach so wenige, daß sie, vollständig hingesezt, noch keine Octavseite füllen würden, und, dem Wortverstande nach, so leicht, daß sie jedem, der ihre Kraft und Umfang nicht aus Erfahrung kennt, den Namen der Regeln gar nicht zu verdienen scheinen müssen. Wer das, was Seneca im Anfange des vier und neunzigsten seiner Briefe von der Moral-Philosophie behauptet, als wahr empfunden hat, und dabey die Regeln, wornach ein Lehrer bey der Unterweisung sein Verhalten einrichten muß, als einen Theil der Moral-Philosophie betrachtet, der wird durch leichte Modification jener allgemeinen Behauptung, was ich hier sagen könnte, von selbst finden, welches auch nöthig ist, wenn man es wirklich kennen gelernt haben will. Also bloß ein Gleichniß für diejenigen, welchen obige Forderung zu groß dünkt. Durch Maschinen ist selbst ein Kind im Stande, Lasten zu bewegen, welche, ohne Gebrauch eines Werkzeugs, Männerkraft nicht von der Stelle bringt. In der Mathematik ist vieles möglich, was bey dem ersten Anblick jede Kraft zu übersteigen scheint; aber die Mathematik bietet auch jedem,

Eulers Differenz. Rechn. I. Th. c der

der sie wahrnehmen und brauchen will, die Maschinen dar, welche dazu erfordert werden.

Auf diese Art also denke ich, durch die im Anfange dieser Excursion beschriebenen Umstände geleitet, und nachdem ich die meisten meiner Behauptungen Jahrelang mannigfaltigen Prüfungen unterworfen habe, von der Mathematik, und insbesondere von dem, was, in Ansehung ihrer, auf Schulen und Gymnasien geschehen könnte und sollte. Wagte ich mich aus meiner Sphäre, redete ich von dem, was andere, vorzüglich in höhern Posten, thun sollten, und spräche ich früher, ehe ich fest überzeugt seyn könnte, daß nicht eine erwärmte, noch weniger eine erhigte, Einbildungskraft mich verführe: so wußte ich, was ich zu erwarten hätte: Vorwurf der Ruhmredigkeit, und bitterm Tadel. Allein ins zwölfte Jahr öffentlicher Schullehrer, also so lange, daß ich, wo ich nicht irre, nach Luthers Meinung, nach gerade unter die Märterer mich rechnen könnte, (ob ich gleich gern gestehe, daß ich bis jetzt das Angenehme des Schullebens je länger desto mehr, und das Unangenehme nur dann empfunden habe, wenn ein schwacher oder kränklicher Körper mich außer Stand setzte, meine Arbeiten ganz so wie ich es wünschte zu verrichten,) darf ich unstreitig gütige Beurtheilung hoffen, wenn ich Ein Mal ausführlich sage, was mir scheint, und dabey in meiner Sphäre bleibe. „Handeln ist besser als reden.“ Doch mit der Einschränkung, daß man kein Bedenken tragen darf, das letzte zu thun, wenn man dadurch hoffen kann, in Ansehung des ersten weiter zu kommen? Ich habe

Ich habe Jahre nöthig gehabt, um die, sowohl in Ansehung der Mathematik selbst, als auch in Ansehung ihres Vortrags auf Schulen, geäußerten, allerdings großen Forderungen zuerst an sich nicht für übertrieben zu halten; und dann sind wieder Jahre nöthig gewesen, ehe ich von mir glauben konnte, ich werde vielleicht selbst einst im Stande seyn, ihnen ein Gesnüge zu leisten. Noch bin ichs nicht, dies gestehe ich frey, aber ich werde mich dem beschriebenen Ziele immer mehr und mehr zu nähern suchen, und dieses mit weit stärkern Schritten als bisher zu thun im Stande seyn, wenn Kenner, und insbesondere diejenigen Männer, deren Namen gegenwärtiges Buch zieren, meine Behauptungen Ihrer Prüfung, und mich Ihrer Belehrung nicht unwerth halten. Ich glaube einiges Recht zu haben, an Sie vorzüglich mich zu wenden. Denn theils ist Ihre gütige Herablassung bekannt, und theils kann ich durch Proben belegen, daß jeder Ihrer Winke von mir aufs gewissenhafteste benutzt wird. Um nur einige anzuführen, so habe ich bey meiner Entwicklung der ersten Gründe der Differenzial-Rechnung, die ich gegen jeden Einwurf vertheidigen zu können hoffe, ob gleich, so lange ich sie nicht weiter führe, als hier geschehen ist, manche dagegen möglich scheinen müssen, das wichtigste einem unverwandten Blicke auf ein Urtheil zu danken, welches der Hr. Obrist-Lieutenant von Tempelhof, bey einer mündlichen Unterredung mit mir, gelegentlich äusserte: Der Gebrauch der Grenzen der Verhältnisse bey dem Beweise der Regeln der Differenzial-Rechnung ist unzuweckmäßig, die höhern Potestäten der Differenzialien fallen, wenn niedrigere

da sind, deswegen weg, weil sie überflüssig sind. Der Hr. Hofrath Kästner hat unter allen Recensenten meiner bisherigen für Anfänger geschriebenen Schriften, denselben zuerst und anhaltend den Vorwurf einer zu großen, und in die Länge abschreckenden Weitläufigkeit gemacht. Man vergleiche das, was S. XIII-XXII. dieser Vorrede steht, mit dem in den Anmerkungen und Zusätzen für Schüler der Differenzial-Rechnung geschriebenen; schlicke daraus auf die Art, wie ich jenen Tadel benützt habe, und traue mir zu, daß ich künftig bey dem, was ich für Männer schreibe, die erworbene Fertigkeit nicht unbenützt lassen werde. Was endlich Hrn. Kant betrifft, so verweise ich auf das, was ich von dessen Definition der Mathematik gesagt habe. Daß ich aber den gegenwärtigen Gegenstand an diesen Ort gezogen, hat folgende Ursachen. Einmal glaubte ich, die Namen solcher Männer, welche die Nachwelt zu den Classikern zählen wird, keiner Uebersetzung als der eines classischen Werks vorsetzen zu dürfen. Zum andern war es mir, nach meinen Grundsätzen, so gern ich es sonst schon früher gethan hätte, nicht eher erlaubt, ohne alle Zurückhaltung zu reden, ehe ich nicht überzeugt war, daß ich auf meinem Wege keine unübersteigliche Hindernisse antreffen würde. Zuvor mußte ich daher, um bloß dies anzuführen, weil es das wichtigste ist, nach Versuchen mich im Stande wissen, die ersten Gründe der Differenzial- und Integral-Rechnung, wenn es verlangt würde, selbst demjenigen abzufragen, der außer der Elementar-Geometrie und den allerersten Anfangsgründen der Buchstabenrechnung in der Mathematik nichts weiß. Uebrigens

ist

ist nunmehr der Plan zu meinen künftigen Beschäftigungen in Ansehung der Mathematik auf meine ganze Lebenszeit entworfen; ein Lehrgebäude der Mathematik, wie es Lehrer an Schulen und Gymnasien brauchen, werde ich unter dem Titel: *Euclid's Elemente*, für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik bearbeitet und fortgesetzt; und die Erläuterungen, welche ihnen dabey nützlich seyn können, in meinen Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik zu liefern versuchen: das Uebrige daraus dann, wenn ich es ausgeübt haben werde.

Ehe ich schließe, muß ich noch einem Einwurfe begegnen, welcher durch die Behauptung S. xxix, xxx. veranlaßt werden kann; es sey ein vollständiges Lehrgebäude der Mathematik möglich, welches eben dieselbe, und vielleicht noch eine größere Festigkeit habe, als *Euclid's Elemente*. Meine Entwicklung, oder vielmehr mein Beweis der Hauptregel der Differenzial-Rechnung, sagt man vielleicht, bestätige diese Behauptung nicht, indem dadurch bloß gezeigt werde, daß wir in Rücksicht unserer, nicht aber, daß wir an sich ein Recht haben, die so genannten unvollständigen Differenzialien statt der vollständigen zu brauchen. Ich antworte darauf dreyerley. Zuvörderst läßt sich noch fragen, ob sich mein Beweis wirklich nicht weiter erstrecke? Aber zugegeben, daß er so eingeschränkt sey, so reicht zweytens das Augensichters weiter als die Füße Kraft zum Gehen haben; und wenn ich ein Ziel nicht erreichen kann, so wird es ein anderer vermögen. Endlich ist vielleicht drittens, um allen

Anstoß in dieser Sache aus dem Wege zu räumen, nichts weiter nöthig, als auf dem betretenen Wege noch einen Schritt weiter vorwärts zu thun. Darf ich nemlich mit Hrn d'Alembert, in der Encyclopédie méthodique, in dem Artikel, Différentiel, annehmen, daß sich die Regeln der Differenzial-Rechnung auf folgende drey zurückführen lassen:

$$d(x + y + z) = dx + dy + dz$$

$$d \cdot xy = ydx + xdy$$

und

$$d \cdot x^n = nx^{n-1}dx,$$

so ist klar, daß es hier beym Beweise hauptsächlich auf die beyden letzten ankomme. Angenommen also, daß  $d^n$  und  $d^{n+1}$  zwey unmittelbar auf einander folgende Elemente der veränderlichen Größen, vor welchen sie stehen, anzeigen, und auf ähnliche Art  $d^n$  und  $d^{n+1}$  zwey unmittelbar auf einander folgende Bestandtheile der veränderlichen Größen, mit deren Construction sie verbunden sind, andeuten: so ist zwar, ohne Ausnahme und ohne Bedingung,

$$\delta^0 \cdot xy = xy - (x - \delta x)(y - \delta y) = y\delta x + x\delta y - \delta x\delta y$$

und

$$\delta^1 \cdot xy = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy = y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y$$

so wie auch

$$\delta^0 \cdot x^n$$

$$\delta^0 . x^n = n x^{n-1} \delta x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \delta x^3 - \text{rc.}$$

und

$$\delta^1 . x^n = n x^{n-1} \delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \delta x^3 + \text{rc.}$$

Allein wenn wir deswegen glauben wollten, es sey auch ohne Ausnahme und ohne Bedingung,

$$d^0 . xy = y dx + x dy - dx dy$$

$$d^1 . xy = y dx + x dy + dx dy$$

desgleichen

$$d^0 . x^n = n x^{n-1} dx - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \text{rc.}$$

$$d^1 . x^n = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \text{rc.}$$

so begiengen wir keinen geringern Fehler als den, daß wir den Schein für die wahre Beschaffenheit nähmen. So lange man zwey unmittelbar auf einander folgende Bestandtheile irgend einer veränderlichen Größe noch so ausdrücken muß, daß sich zwischen beyden ein von beyden verschiedener, zwischen ihnen liegender, Bestandtheil denken läßt: so lange hat man es, und dieses nach dem Begriffe der unbestimmten und der unbestimmbar kleinen Theile, nur mit unbestimmten, aber nicht mit unbestimmbaren Theilen oder Ele-

menten zu thun. Der einzige uns übrige Weg, einen allgemeinen, völlig genauen, Ausdruck für die Elemente zu finden, ist der, daß man aus zweyen vollständigen Ausdrücken unmittelbar auf einander folgender unbestimmt kleiner Bestandtheile das Mittel suche. Bedeuten daher die römischen Zahlen oberhalb neben dem Buchstaben  $d$ , daß die zweyte Hälfte folgender Gleichungen nicht unbestimmbare, sondern nur unbestimmt kleine Bestandtheile darstelle, und wird dabey der Buchstabe  $d$  ohne diese römische Zahlen wie gewöhnlich als das Zeichen der Elemente oder der Differentialien betrachtet: so ist, absolut und völlig genau:

$$d . xy = \frac{d^0 . xy + d^1 xy}{2} = ydx + xdy$$

und

$$d . x^n = \frac{d^0 . x^n + d^1 x^n}{2} = nx^{n-1}dx.$$

Wollte man hiergegen einwenden, daß auf diese Art zwar

$$d . xy = ydx + xdy$$

und

$$d . x^2 = 2xdx$$

gefunden würde, daß sich aber nach eben der Regel

$$d . xyz = zydx + zx dy + xydz + dzdxdy$$

$$d . x^3 = 3x^2dx + dx^3; d . x^4 = 4x^3dx + 4xdx^3$$

ic.

ergebe: so wäre dieser Einwurf mir unter allen sonst noch möglichen der angenehmste. Denn einmal stehen die Sätze  
welche

welche man zur Begräumung dieses Einwurfs nöthig hat, ganz vollständig und deutlich, in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, S. 68 f. §. 98: 102, und es träfe daher derselbe mich um so weniger, da ich ausserdem, ein Jahr darauf, in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik, insbesondere S. 181 f. gezeigt habe, in was für Schwierigkeiten die gewöhnliche Theorie von den Zeichen  $+$  und  $-$ , wegen ihrer Unvollständigkeit, selbst schon bey den Anwendungen der Buchstabenrechnung auf die Elementar-Geometrie, führe. Ferner erhielt ich dadurch Gelegenheit, an eine Behauptung zu erinnern, die ich im Jahr 1784, kurz nach der Bekanntmachung der Preisaufgabe der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften, eine genaue Theorie des Unendlichen zu liefern, aber freylich in einem Buche geäußert habe, was den Bellettristen ein Anstoß, und den Critikern ein Vergerniß geworden ist, in meiner Uebersetzung von Horazens Dichtkunst; nemlich: Man werde das Verlangte schwerlich in der höhern Mathematik zu leisten im Stande seyn, ohne zuvor etwas ähnliches in der gemeinen gethan zu haben. Endlich bekäme ich dadurch ein Recht, mich gegen den Vorwurf zu vertheidigen, als überhäufe ich die Mathematik mit problematischen Behauptungen, und brauche Unterscheidungen, welche die Erlernung derselben erschweren, und am Ende nur dazu dienen, zu verhüten, daß man durch jene problematische Sätze nicht verführt werde. Noch thue ich dies nicht, am wenigsten hier, sondern sage nur, daß ich mir einer Absicht bewußt bin, die etwas weiter geht, und daß ich die

Mathematik nicht zu erschweren sondern leichter zu machen wünsche und strebe, ob ich gleich nicht dafür kann, daß ich in Ansehung der Leichtigkeit wie Hr. Kästner denke, (Geometrische Abhandlungen, erste Sammlung,) denn es hat mich mein Vater von Kindheit an gewöhnt, auf wirkliche Muster zu sehen. Also; was drücken diejenigen Differenzialien, welche man bisher fälschlich für unvollständig gehalten hat, eigentlich aus? Das Differenzial einer Linie dasjenige, was sich zwischen zweyen Punkten in ihr denken läßt, wenn man dieselben so nahe neben einander annimmt, daß sie nicht näher gedacht werden können, ohne zusammen zu fallen; das Differenzial einer Fläche dasjenige, was sich auf ähnliche Art und unter ähnlichen Umständen zwischen zweyen Linien in ihr, und das Differenzial eines Körpers dasjenige, was sich eben so zwischen zweyen Gläschen in ihm denken läßt. Ueberhaupt aber ist das Differenzial jeder veränderlichen Größe dasjenige, was sich zwischen zweyen so nahe einander liegenden Werthen derselben denken läßt, daß man diese Werthe einander nicht näher bringen kann, ohne dadurch beyde Werthe in einen Einzigen zu verwandeln; und wenn dieses der Begriff ist, den man, nach der Meinung der Erfinder der Differenzial- und Integral-Rechnung, mit dem Worte Differenzial verknüpfen muß: so haben und brauchen wir, nicht unvollständige, sondern die vollständigsten und genauesten Ausdrücke dafür. Also ist das Differenzial einer Linie kein Punkt, das Differenzial einer Fläche keine Linie, das Differenzial eines Körpers keine Fläche, überhaupt kein Differenzial irgend einer verän-

veränderlichen Größe eine Null; und eben so wenig bloß eine unbestimmt kleine Größe, oder etwas, was man auf dem Wege der Exhaustions-Methode finden könnte. Aber wenn man die Gründe der Differenzialien, genau und frey von allem Widerspruche, einsehen zu lernen, deswegen sich nicht ernstlich vorsezen kann, weil man dazu kein Bedürfniß fühlt, und bloß durch Befolgung der, von andern mitgetheilten, Regeln der Differenzial-Rechnung des Nutzens dieses Calculs theilhaftig werden will: so gleicht die Mathematik darin der Religion, daß sie die schädlichen Folgen theoretischer Irrthümer nur denen zu empfinden giebt, deren Pflicht es war, nach deutlichen Einsichten zu streben, weil sie nicht bloß handeln, sondern auch andere lehren sollten; daß sie die Fehler der verzeihlich Irrenden auf Wegen unschädlich macht, die dem flach Urtheilenden Verirrungen auf ihrer Seite zu seyn scheinen; daß sie aber auch denen, welche ihr bloß um der Vortheile willen, nicht wegen ihrer Vortreflichkeit und aus Neigung dienen, nur die Schätze gewähret, die sie ihren wahren Verehrern bloß als Zugabe bestimmt. Daher läßt es sich erklären, wie es möglich gewesen, in der Differenzial-Rechnung so viele wahre Lehrsätze aus einer widersprechenden Behauptung zu ziehen; daher ist begreiflich, wie sich sogar manche gerade in diesen widersprechenden Behauptungen vorzüglich haben gefallen können; daher soll es am allerwenigsten mich befremden, wenn ich durch das Bisherige nicht jedermann überzeuge.

Und vielleicht habe ich, mir selbst unbemerkt, hier oder da einen Fehltritt begangen, der dieses als eine ganz  
natürliche

natürliche Folge bey demjenigen nach sich ziehen muß, welcher ihn wahrnimmt. Ich weiß aus Erfahrung, wie leicht man sich, oft da am ersten täuscht, wo man es am wenigsten glaubt. Es hat tiefen Eindruck auf mich gemacht, daß sogar ein Euler bey der Widerlegung der Newtonschen Theorie des Lichts auf eben die Klippe stieß, welche zu vermeiden er des Des Cartes Hypothese verfeinerte. Man belehre mich; meine etwanigen Fähigkeiten kann ich nicht vergrößern, sondern nur üben, aber eine freye Brust jeder Belehrung darzubieten, das steht in meiner Gewalt, das halte ich für Pflicht, und werde es thun.

Den zweyten Theil der Eulerischen Differenzial-Rechnung werde ich in zweyen Abtheilungen, jede so wie diesen ersten Theil, mit Anmerkungen und Zusätzen, liefern; die erste, wenn nicht ganz unerwartete Hindernisse eintreten, Michaelis dieses, und die andere Ostern künftigen Jahres. Läßt sich alsdann mein Hr. Verleger dazu bereitwillig finden, so erscheint die Messe darauf ein dritter Theil, welcher die Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie und eine vollständige Geschichte dieses Theils der höhern Mathematik enthalten soll. Berlin, den 12ten März 1790.





## Vorrede

des

V e r f a s s e r s.

---

**E**s ist schwer, die Differenzial-Rechnung und die Analysis des Unendlichen \*) , wovon jene ein Theil ist, denen zu erklären,

\*) So üblich diese Benennung ist, so ungeschicklich oder unpassend ist sie auch. Die Gründe davon habe ich schon gelegentlich angeführt. Der Buchhändler, welchem ich gegenwärtige Uebersetzung vor meinem jetzigen Hrn. Verleger anbot, äußerte sich so: Eine Differenzial-Rechnung in Verlag zu nehmen, sey er zwar nicht abgeneigt, aber zu einer Analysis des Unendlichen könne er sich nicht verstehen, weil dergleichen nur für wenige gehöre. Daß er das Wort Differenzial-Rechnung eben so wenig als die Benennung Analysis des Unendlichen verstand, ist ohne mein Erinnern klar; aber in gleichem Falle sind in diesem Stücke mit ihm die Schüler der höhern Mathematik im Anfange, daher es denn auch kein Wunder ist, wenn so mancher  
bloß

klären, die darin noch gar keine Kenntniß besitzen \*), und man kann deswegen hier nicht füglich, so wie in andern Wissenschaften, von der Erklärung ausgehen \*\*). Zwar irrite man, wenn man behaupten wollte, die Differenzialrechnung und die Analysis des Unendlichen ließen sich gar nicht definiren; allein da dazu mehrere Begriffe erfordert werden, die nicht bloß im gemeinen Leben, sondern selbst in der Analysis des Endlichen ungebräuchlich sind, und erst in

der

bloß durch den Namen, weil er ihn etymologisch nimmt, abgeschreckt wird. Daß Wörter den Münzen ähnlich sind, ist freylich wahr, aber noch ist mir kein Fall bekannt, wo diejenigen, die das Münzrecht auszuüben befugt sind, Gold mit dem Stempel des Kupfergeldes hätten prägen lassen.

\*) Also wären die Mathematiker in Ansehung des wichtigsten Theils ihrer Wissenschaft in dem Falle, in welchem sich diejenigen befinden, die wegen der Undeutlichkeit ihrer Vorstellungen die Objekte derselben bloß herbeyführen und zeigen können?

\*\*) Dies hieße mit andern Worten: Die Differenzialrechnung läßt sich nicht scientifisch behandeln. Aber da die ganze Mathematik reine Vernunftwissenschaft, und die höhere ein Theil der allgemeinen Mathematik ist: so gilt Ciceros bekannter Ausspruch hier mehr als sonst irgendwo: *Quaecumque a ratione suscipitur de aliqua re institutio, debet a definitione proficisci, ut intelligatur, quid sit id, de quo disputetur.* Nach Hrn. Garvens Uebersetzung: Mit Recht soll jede methodisch angestellte Untersuchung, von der Erklärung des Gegenstandes anfangen, um den Leser bestimmt wissen zu lassen, was eigentlich untersucht werden soll.

der Differenzial-Rechnung erworben werden müssen \*): so bleibt die gedachte Definition so lange unverständlich, bis man die Gründe des Differenzial-Calculs deutlich gefaßt hat. Es hat also zuvörderst dieser Calcul die veränderlichen Größen zum Gegenstande \*\*). Denn obgleich jede Größe ohne Ende vermehrt oder vermindert werden kann \*\*\*): so betrachtet man doch, wenn man einzelne oder vielmehr speciell Fälle untersucht, einige Größen so, daß man sich dieselben als unveränderlich, und andere dagegen als aller Grade der Vermehrung und Verminderung fähig gedenkt. Jene pflegt man beständige, diese veränderliche Größen zu nennen; eine Unterscheidung, welche nicht sowohl in der Natur der Sache, als vielmehr in den Bedingungen ihren Grund hat, unter welchen man eine Aufgabe auflöset. Um dieselbe

\*) Größen die kleiner sind als jede Größe, welche sich angeben läßt, kommen schon in der Elementar-Mathematik vor, und Fälle, wo man nicht aus Constructionen, sondern vermittelst Constructionen aus Begriffen schöpft, sind in der gemeinen Mathematik nicht seltner als in der höhern. Es ist daher auch alles, was auf obigen Grund gebauet wird, ungegründet.

\*\*) Nicht die veränderlichen Größen jeder Art, sondern nur die veränderlichen Größen ohne Einschränkung, S. 373, und auch diese nicht überhaupt, sondern nur, wenn man sich dieselben als unbestimmbare Mengen von Elementen gedenkt; oder man muß Differenzial-Rechnung und Lehre von den Differenzen, und vielleicht gar unbestimmte und höhere Mathematik nicht von einander unterscheiden.

\*\*\*) S. S. 307.

dieselbe durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es werde eine Bombe geworfen. Hier kommen verschiedene Größen in Betrachtung. Zuerst die Menge des Pulvers; dann die Richtung des Mörsers; drittens die Weite des Wurfs; viertens die dazu erforderliche Zeit: und wenn Versuche mit verschiedenen Mörsern gemacht werden, außerdem noch die Länge derselben und die Schwere der Bomben. Diese beyden letzten Dinge wollen wir indeß bey Seite setzen, um den Fall nicht zu sehr zu verwickeln. Ändert man also, bey stets gleicher Menge des Pulvers die Richtung des Mörsers, und will man die zugehörige Weite des Wurfs nebst der Zeit finden: so hat man in der Menge des Pulvers, oder der gegebenen Kraft, eine beständige, in den übrigen Dingen aber veränderliche Größen, wenn die Aufgabe allgemein aufgelöst werden soll. Sollte bey unveränderter Richtung des Mörsers die Menge des Pulvers verschiedentlich angenommen, und die dabey entstehenden Wirkungen untersucht werden: so wäre die Richtung eine beständige, und die Menge des Pulvers, die Weite und Dauer des Wurfs veränderliche Größen. Es gehöret daher die Größen, nach Verschiedenheit der Umstände, bald zu den beständigen, bald zu den veränderlichen; und außerdem erhellet aus diesem Beyspiele, worauf es bey der Untersuchung der veränderlichen Größen vorzüglich ankomme, nemlich, die Abhängigkeit einer veränderlichen Größe von andern veränderlichen Größen zu bestimmen. Bleibt nemlich, im ersten Falle, die Menge des Pulvers unverändert dieselbe, so ändert sich die Weite und die Dauer des Wurfs, mit der Richtung des Mörsers,

Mörfers, und es sind folglich die Weite und die Dauer des Wurfs veränderliche Größen, die von der Richtung des Mörsers abhängen, und sich mit derselben ändern: im andern Falle hingegen hangen sie von der Menge des Pulvers ab. Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der andern zu bewirken: so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch andere bestimmt werden kann, unter sich begreift\*). Wenn also  $x$  eine veränderliche Größe bedeutet, so heißen alle Größen, welche auf irgend eine Art von  $x$  abhängen, oder dadurch bestimmt werden, Funktionen von  $x$ : z. B. das Quadrat  $xx$ , und jede Potenz von  $x$ , so wie

\*) Vielleicht ist Hr. Prof. Pfaff in Helmstädt durch diese Stelle zu der Behauptung veranlaßt worden, womit er sein Programm: *De peculiari differentialia investigandi ratione, ex theoria functionum deducta*, Helmstädt, 1788, anfängt. Ich sage vielleicht; denn so weit ich Hrn. Pfaff kenne, gehört er zu denen, welche dergleichen eben so leicht aus sich selbst schöpfen, als von andern nehmen. Wenn meine obigen Behauptungen von den der Mathematik noch immer anklebenden Mängeln übertrieben scheinen, der findet in diesem Programm auf der vierten Seite folgende Worte: *Nec proflus inepte judicaveris, quod hactenus condere licuit Analyseos systema, esse veluti compagem fragmentorum.*

wie auch alle daraus auf irgend eine Art zusammengesetzte, ja selbst die transcendenten, und also überhaupt alle Größen, welche auf die Art von  $x$  abhängen, daß jede Veränderung dieser  $x$  eine Veränderung in ihnen nach sich zieht. Dieses vorausgesetzt entsteht die Frage: Was für eine Veränderung die Funktionen von  $x$  erfahren, d. h. um was für Größen dieselben vermehrt oder vermindert werden, wenn  $x$  um eine gegebene Größe vermehrt oder vermindert wird? In den einfachern Fällen hat die Beantwortung derselben keine Schwierigkeit. Denn wird  $x$  um die Größe  $\omega$  vermehrt, so bekommt das Quadrat  $xx$  den Zuwachs  $2x\omega + \omega\omega$ , und es verhält sich daher der Zuwachs von  $x$  zum Zuwachse von  $xx$ , wie  $\omega$  zu  $2x\omega + \omega\omega$ , d. h. wie  $1$  zu  $2x + \omega$ , und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen. Es ist aber die Untersuchung des Verhältnisses dieser Incremente nicht nur an sich von der größten Wichtigkeit, sondern es beruht darauf auch die ganze Analysis des Unendlichen. Um dieses deutlicher zu machen, so haben wir gesehen, daß sich der Zuwachs, den  $xx$  bekommt, wenn  $x$  um  $\omega$  vermehrt wird, zu dem Incremente von  $x$  verhalte, wie  $2x + \omega$  zu  $1$ . Hieraus erhellet, daß sich das Verhältniß  $2x + \omega : 1$  dem Verhältnisse  $2x : 1$  desto mehr nähert, je kleiner  $\omega$  angenommen wird, daß aber nicht eher  $2x + \omega : 1 = 2x : 1$  sey, bevor nicht  $\omega = 0$  geworden \*). Ferner ist klar, daß der Zuwachs von  $xx$ , ob

\*) Wer könnte hierwider das Mindeste einwenden? Aber nun die Folge? Wenn A und B in Ansehung ihres Vermögens in einem solchen Verhältnisse zu einander stehen, daß B anfänglich  $x^2$  hatte,

er gleich, wenn der Zuwachs von  $x$  in Null übergeht, mit demselben verschwindet, dennoch zu ihm das Verhältniß  $2x:1$  hat, und was hier von dem Quadrate gesagt worden ist, das

D 2

läßt

hatte, als A bloß  $x$  besaß, und beyde darauf dieses Capital auf die Art vermehrt haben, daß einmal keiner das seinige vergrößerte, ohne daß es der andere nicht auch gethan hätte, und zweyten jeder zu dem, was er hatte, stets so vielmal  $\omega$  legte, als er bereits  $x$  besaß: so stehen allerdings die Incremente des Vermögens von beyden, diese Incremente mögen groß oder klein seyn, in dem Verhältnisse  $2x\omega + \omega\omega : \omega$  oder  $2x + \omega : 1$ . Aber nun angetommen, daß die Quelle der Einnahmen beyder versiegen, daß weder A noch B das Mindeste mehr einnehmen, und daß nun die Frage aufgeworfen werde: Wie sich in diesem Falle und von diesem Zeitpunkte an die Incremente des Vermögens von A und B verhalten? Der schlichte Verstand antwortet: Dann fallen die Incremente, also auch das Verhältniß zwischen ihnen, und folglich sogar die Frage weg. Eben das sagen die Mathematiker, so lange sie keine Mittel brauchen, welche den schlichten Verstand in Schlummer wiegen, nur mit andern Worten. Freylich könnte man, wenn es nicht Euler gethan hätte, mit einigem Schein behaupten, es sey Stolz und Begierde, Mißse zu bedecken, wenn man anstatt der Redensart: es findet gar kein Verhältniß statt; die Worte braucht: es kann jedes Verhältniß angenommen werden. Allein warum sollten nicht auch die Mathematiker bisweilen uneigentlich, oder bedingter Weise reden, ohne jedesmal die aus dem Zusammenhange leicht sich ergebende Bedingung ausdrücklich beizufügen? Aber das ist ausgemacht, daß die Mathematik, wenn man sie zwingt, Constructionen zu gebrauchen, welche deutliche und

genau

läßt sich auf alle übrige Funktionen von  $x$  ausdehnen, als deren verschwindende \*) Incremente, oder diejenigen, welche sie bekommen, wenn  $x$  um einen verschwindenden Zuwachs ver-

genau bestimmte Begriffe nur verworren und mangelhaft ausdrücken, und dabey gleichwohl Resultate von ihr erwartet, in welchen man, selbst durch einen flüchtigen Blick, auch dasjenige wahrzunehmen im Stande sey, was sie wegen des Fehlers der gedachten Constructionen unmöglich zeigen können: es ist ausgemacht, sage ich, daß die Mathematik alsdenn *n'embarasse pas seulement l'Infini*, wie in den Zusätzen, S. 353. vor der Correctur anstatt *n'embrasse pas seulement l'Infini* gesetzt worden war. Das übrige in der folgenden Anmerkung.

\*) Was heißt *incrementum evanesceus*? Wenn nicht Euler S. 77. des Originals gesagt hätte: *Si quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla*; so würde ich *incrementum evanesceus* durch *Increment* übersetzen, welches im Begriff ist zu verschwinden. Auf diese Art entfernte ich mich eben nicht vom Lateinischen, und hätte gleichwohl den Begriff des Differenzials gerade so, als ich ihn S. XLII f. gegeben habe, und wie er seyn muß, um, wenn es verlangt wird, aus dem Begriffe des Differenzials, mit Hülfe der gemeinen und unbestimmten Mathematik, die ganze Differenzial- und Integral-Rechnung zu entwickeln. Allein wollte ich behaupten, daß Euler den Ausdruck *incrementum evanesceus* so habe verstanden wissen wollen: so könnte ich außer der angeführten Stelle auch alle diejenigen nicht erklären, in welchen er von verschiedenen unendlich großen Größen spricht, und mein ganzes Bestreben wäre vielleicht weiter nichts, als

Bemerk

vermehrt wird, zu diesem Zuwachse ein gewisses und bestimm-  
bares Verhältniß haben. Und auf diese Art sind wir zu der  
Definition des Differenzial-Calculs gelangt, welcher nichts

d 3

anders

Bemühung, aus einem vollkommenen Gemälde Schatten weg-  
zubringen, ohne welchen dasselbe kein vollkommenes, und noch  
weniger ein natürliches Gemälde seyn würde. Euler war Archi-  
tect genug, um selbst schwache Balken zu einem starken Gerüste  
zu verbinden, aber nachahmen dürfen wir ihn in diesem Stücke  
nicht, weil wir seinen Blick und seine Kenntnisse nicht besitzen.  
Warum hätte ich also Bedenken tragen sollen, da, wo es um  
der Nachahmer willen nöthig war, zu sagen: Euler habe  
schwache Balken gebraucht? da ich nicht einmal dem daraus  
zusammengesetzten Gerüste, und noch vielweniger dem von ihm  
aufgeführten herrlichen Gebäude, seine Festigkeit abspreche.  
Oder soll ich von Mathematikern befürchten, sie werden Hin-  
weisen nach einer Feder auf dem Kleide eines verdienstvollen  
Mannes für Angriff auf seinen Ruhm ansehen? denn alles,  
was ich in den Eulerschen Schriften bis jetzt getadelt habe, ist,  
zusammengenommen, gegen das viele, über allen Tadel erho-  
bene, was wir von diesem Analysten erster Größe besitzen, doch  
in der That so wenig, daß mein Tadel nichts anders als Hin-  
weisen nach einer Feder auf dem Kleide genannt werden kann.  
Zwar haben in einem andern Falle drey Männer mich belehrt,  
daß außer der Mathematik dergleichen Verwechslungen bis-  
weilen sogar zu dem Gewöhnlichen gehören; und einer darunter  
hat sich dabey so genommen, daß ich, wenn ich ein Gleichniß  
brauchen sollte, warlich kein anderes wüßte, als das von einem  
Hunde, der, um seinen Herrn zu beschützen, schon bellt, wenn  
jemand nach demselben hinweist: dagegen bey der Strafe,  
welche

andere ist, als die Methode, das Verhältniß der verschwindenden Incremente zu bestimmen, welche die Funktionen veränderlicher Größen bekommen, wenn die veränderliche Größe, wovon sie Funktionen sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt worden. Daß diese Erklärung die Natur des Differenzial-Calculs ausdrücke, ja sogar erschöpfe, wird jeder einsehen, der in diesem Theile der höhern Mathematik kein gänzlicher Fremdling ist. Es beschäftigt sich also die Differenzial-Rechnung nicht sowohl mit diesen Incrementen selbst, denn diese sind Nullen; sondern vielmehr mit der Erforschung des Verhältnisses, welches sie zu einander haben: und da sich diese Verhältnisse durch endliche Größen ausdrücken lassen, so muß man auch eigentlich sagen, daß die Differenzial-Rechnung endliche Größen zum Gegenstande habe. Denn obgleich die Regeln derselben gewöhnlich so vorgetragen werden, als ob man dabey die Bestimmung der verschwindenden Incremente zur Absicht habe:

welche die beyden andern wegen meiner *καταβασεως εις αλλη γειρα* über mich zu verhängen geruht haben, mir doch wenigstens übrig blieb, Horazens Urtheil anzuwenden:

— — Etto — — — —

— — — — — censorque moyeret

Appius, ingenuo si non essem patre natus?

*Vel merito; quoniam in propria non pelle quiessem.*

Indeß der Erfolg sey, welcher er wolle, so sind mir bittere Arzneyen allemal lieber als süßliche, und ich nehme sie bereitwillig selbst von dem Arzte an, den ich wegen seiner Einsichten hochschätze, und wegen seiner niedrigen Denkart verachte.

habe: so schließt man doch aus ihnen, an sich genommen, nie, sondern allemal aus ihren Verhältnissen zu einander \*).

D 4

Auf

\*) Ich habe in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik irgendwo gesagt: Es sey zur Erfüllung der von mir gemachten Forderungen nicht nöthig, neue Sätze und Methoden zu erfinden, sondern nur das bereits erfundene Gute allgemeiner und stärker zu benutzen. Euler nennt in der gegenwärtigen Stelle die Differenzialien *incrementa evanescentia*. Man nehme das Beywort *evanescentia* in der Bedeutung, die ihm, ob es gleich ein Participium der gegenwärtigen Zeit ist, beygelegt werden kann, und halte sich daran: so steht man an der Quelle der wahren und leichtesten Regeln der Differenzialrechnung. Ferner sagt er: *hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus*. Was ist das anders, als Befreytung der Behauptung des M. de l'Hopital: *L'Analyse des infiniment petits pénétre jusques dans l'infini même; — on peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini?* Man behalte auch dieses unverrückt vor Augen, so fallen sicher alle Schwierigkeiten der Differenzialrechnung, die nicht aus der gemeinen und unbestimmten Mathematik entspringen, durchaus weg. Endlich sagt Euler, daß die Bestimmung der Differenzialien nicht die eigentliche oder nicht Hauptabsicht der Differenzialrechnung sey. Nun kann nicht geleugnet werden, daß die Differenzialrechnung im Anfange doch nichts anders thue, als die Differenzialien der Funktionen veränderlicher Größen durch die Differenzialien dieser Größen und durch gegebene beständige und veränderliche Größen bestimmen. Oder soll dies nicht Bestimmung der Differenzialien seyn, weil darin die Differenzialien der gegebenen veränderlichen Größen enthalten sind?

|| Auf ähnliche Art verhält es sich mit der Integral-Rechnung, welche man füglich durch die Methode erklärt, aus dem Verhältnisse

sind? Dann müßte man auch behaupten, daß alle unsere Bestimmungen aller endlichen, selbst der bestimmtesten beständigen Größen keine Bestimmungen derselben wären, weil doch in jeder der Begriff der Einheit zu den bloß klaren Begriffen gehöre. Ferner läßt sich zeigen, daß es nur Schein sey, wenn man sagt, die Hauptabsicht der Differenzial-Rechnung bestehe in der Erforschung der Verhältnisse der Differenzialien, oder vielmehr, man findet dieses sehr bald und von selbst, wenn man die Bestätigung jener Behauptung in dem Eulerischen Werke sucht. Die ganze Differenzial-Rechnung beschäftigt sich nemlich darin, entweder mit der Bestimmung oder der Erfindung deutlicher Ausdrücke der Differenzialien, oder sie erforscht die allgemeinen Beziehungen, in welchen die Differenzialien mit ihren veränderlichen Größen stehen; alles übrige ist Anwendung derselben. Endlich enthält das gegenwärtige Werk vom fünften Capitel an eine so vortreffliche Auseinandersetzung des Gebrauchs der Hauptregeln der Differenzial-Rechnung bey der Bestimmung der Differenzialien der einzelnen Arten der veränderlichen Größen, und eine so meisterhafte Entwicklung der Kennzeichen der möglichen und der imaginären Differenzialien, so wie auch das Meiste von dem, was zur Bestimmung des Umfangs des durch Differenzialien gegebenen nöthig ist: daß man dasselbe nicht anders als classisch nennen kann. Es war also die angeführte Behauptung kein unverdientes, oder aus Nebenabsichten geheuchelttes Compliment; denn was ich hier an einem Beispiele gezeigt habe, könnte ich eben so leicht durch mehrere darthun. Allein eben so wenig wünschte ich, daß öfterer gesagt würde, es sey das Meiste von dem, was ich

hältnisse der verschwindenden Incremente die Funktionen zu finden, von welchen sie dergleichen Incremente sind.

D 5

Um

ich empfehle, vielleicht schon geleistet, und wo ich ziemlich allgemein angenommenes Verfahren tadele, sey ich vielleicht im Grunde damit eins, nur in Vorstellungsart und Ausdrückungen unterschieden. Ich will mich daher der gegenwärtigen Gelegenheit bedienen, um mich auch über die Endabsicht meiner Forderungen zu erklären. Da also, wo es nöthig ist, dunkle, unvollständige und einseitige Begriffe aus dem Wege zu räumen, und deutliche, vollständige und allgemeinere an deren Stelle zu setzen; desgleichen, nachdem man dieses gethan, die auf jene Begriffe gebauten Theorien, wo sie es bedürfen, von ihren Fehlern, sie mögen Namen haben wie sie wollen, zu befreien, und wo es angeht, zu erweitern und fortzuführen; scheint mir freylich auch in der Mathematik noch immer eine Sache zu seyn, worin viel zurück gelassen worden ist. Allein mein Wunsch geht weiter. Das Studium der Mathematik kann die edelsten Dinge für den Geist des Menschen, Wahrheit und Gewisheit, früh dem Jünglinge zum dringenden Bedürfnisse machen; es kann die Anlagen, womit ihn der Schöpfer begabt hat, früh zu Fertigkeiten erheben, durch deren Gebrauch er dieses Bedürfnis, und zwar so zu befriedigen im Stande ist, daß er dadurch zu neuer Thätigkeit gereizt wird; es kann ihn früh mit den Wegen bekannt machen, welche er überall gehen muß, wenn er sich wahre, d. h. durch eigenen Gebrauch seiner Denkräfte erworbene, Kenntnisse auf die Art verschaffen will, daß ihm selbst die dabey nöthige Anstrengung eine Quelle des Vergnügens werde. Wenn nur diejenige Speise dem Körper Nahrung wird, welche der Magen verdauen kann: so ist nach der Milch, welche die Natur durch die

die

Um aber diese Verhältnisse desto leichter zu erkennen, und durch brauchbare Zeichen vorzustellen, hat man für die verschwin-

die Sinne einflößt, die Mathematik die erste wirkliche Nahrung des jugendlichen Geistes, weil er, gut geführt, darin vom Anfang an nichts zu lernen braucht, was er nicht ganz lernen könnte. Wenn wir bey Kindern erst alle Theile ihres Körpers zu der erforderlichen Größe und Stärke gelangen lassen, ehe wir einzelnen Gliedern besondere Fertigkeiten zu geben suchen: warum sollten wir nicht, wenn wir sie einzelnen Wissenschaften bestimmen, zuvor alle ihre Seelenkräfte zu der eben so nothwendigen Stärke erheben? Bey dem Körper leitet uns die Natur, bey der Seele sollen wir, durch Vernunft geleitet, selbsthätig uns beweisen. Eine erhabene Bestimmung! aber ist es nicht auch Pflicht, bey der Größe und Wichtigkeit derselben vorzüglich das Mittel zu brauchen, wodurch wir am allerersten und sichersten ihr ein Genüge zu leisten vermögen? Was außer dem Schulkreise liegt, das Wort Schule in der Bedeutung genommen, in welcher Schulen und Academien einander entgegengesetzt werden, betrachte ich auch als außershalb meiner Sphäre liegend. Aber eben auf und für Schulen ist in der Mathematik bisher nur das Wenigste und Geringsste gethan; höchstens hat man sie theilweise benutzt, um das Organ der Seele zu reinigen und zu beleben, und sollte sie da hierzu allein und ganz zu benutzen suchen. Entwürfe von einem Menschen meiner Art taugen nichts, sobald zu ihrer Erfüllung Unterstützung von andern und ermunternde Belohnungen nöthig sind. Zur Erfüllung meines Wunsches ist jene nicht erforderlich, und diese überflüssig. Verzeiht man es mir, daß ich gelegentlich so viel von einer Sache rede, die mir, da sie mit meiner Pflicht zusammenhängt, im höchsten Grade wichtig

tig

schwindenden Incremente, ob sie gleich Nullen sind, dennoch besondere Zeichen erwählt, bey welchen es leicht ist, denselben auch unterscheidende Namen bezulegen. Man nennt sie also Differenzialien, und außerdem, weil sie gar keine Größe haben, unendlich kleine Größen, so daß man sich das bey immer etwas gedenken muß, was  $= 0$  oder nichts ist. Wenn daher der Größe  $x$  das Increment  $\omega$  gegeben, und  $x$  also in  $x + \omega$  verwandelt wird: so geht das Quadrat  $x^2$  in  $x^2 + 2x\omega + \omega\omega$  über, und bekommt folglich das Increment  $2x\omega + \omega\omega$ . Es verhält sich demnach das Increment von  $x$ , oder  $\omega$ , zu dem Incremente von  $x^2$ , oder  $2x\omega + \omega\omega$ , wie 1 zu  $2x + \omega$ ; und dieses Verhältniß wird nicht anders dem

Verf

fig ist; betrachten mich die Eblen, an die ich mich in dieser Angelegenheit wenden kann, nicht als einen Menschen, den die Sucht sich zu zeigen leitet;

— — — quod vitium procul abfore chartis  
Atque animo prius, ut si quid promittere de me,  
Possum aliud, vere promitto;

würdigen sie vielmehr meine Gedanken ihrer einsichtsvollen Prüfung; belehren sie mich; ertheilen sie mir Winke und gütigen Rath; und vor allen Dingen fristet dabey der Erhalter aller Dinge mein Leben: so hoffe ich, daß zur Befriedigung meines Wunsches bald nichts weiter mehr erfordert werden soll, als ein Lehrer, der durch eigenen Gebrauch seiner Denkräfte in dem, was er lehren soll, deutliche Kenntnisse sich erworben hat, und das bey ein Herz besitzt, welches die Wichtigkeit des Berufs eines Jugendlehrers fühlt; und so kränkend wird man doch nicht von dem Schulstande denken, daß man dergleichen Lehrer unter die Seltenheiten rechnete?

Verhältnisse  $1 : 2x$  gleich, als wenn  $\omega$  verschwindet. Wird also  $\omega = 0$ , so ist das Verhältniß der verschwindenden Incremente, welches allein in der Differenzial-Rechnung betrachtet wird, allerdings dem Verhältniß  $1 : 2x$  gleich; und umgekehrt würde dieses Verhältniß der Wahrheit nicht gemäß seyn, wosfern nicht das Increment  $\omega$  verschwände, und gänzlich nichts würde. Wenn daher dieses durch  $\omega$  angezeigte Nichts als das Increment der Größe  $x$  betrachtet wird, so ist das Increment des Quadrats  $x^2 = 2x\omega$ , weil sich jenes zu diesem wie  $1$  zu  $2x$  verhält, und also auch das Increment des Quadrats  $= 0$ ; woraus erhellet, daß das Verhältniß verschwindender Incremente, ihres Verschwindens ohnerachtet, ein bestimmtes Verhältniß sey \*). Nun bezeichnet man

das

\*) Daß Euler bey der Aufführung seines schönen Gebäudes der Differenzial-Rechnung ein Gerüste brauchte, welches er aus schwachen Balken künstlich zusammensetzte, und davon auch hier eine Probe giebt; das darf man, wie schon gesagt, ihm nicht zum Vorwurfe machen, das Gebäude, welches er aufführen wollte, steht da. Wenn ferner die Gebäude der Wissenschaften unsern Wohngebäuden auch darin gleichen, daß man nach ihrer Vollendung das Gerüste niederreißen, und die Materialien derselben, wenn sie zu nichts weiter brauchbar wären, verbrennen könnte: so sähe jeder von selbst, was man zu sagen und zu thun berechtiget wäre. Aber wenn man in dem Gebäude einer Wissenschaft wohnen will, so muß es unser eigen seyn; und da man es seiner Natur nach nicht von andern kaufen kann, sondern dasselbe nach einem Risse, welchen man von ähnlichen, wirklich dastehenden Gebäuden genommen hat,

hat,

das Nichts, welches hier durch  $\infty$  ausgedrückt worden ist, in der Differenzial-Rechnung durch  $dx$ , und nennt es das Diffe-

hat, selbst gründen, aufführen und vollenden muß: so ist bekannt, daß eine Copie nicht gut seyn kann, wenn das Original fehlerhaft ist, und daß Palläste Gerüste nöthig machen, die mehr kosten als Hütten, worin ein Arbeiter zur Miethe wohnt. Und was ich hier Gerüste genennt habe, kann, von einer andern Seite betrachtet, mit eben dem Rechte, Fundament genennt werden. Eulers Differenzial-Rechnung ist ein schönes, ein vortrefliches Gebäude; dies sage und wiederhole ich mit vollkommener Ueberzeugung. Auch das Non plus ultra? Das mögen diejenigen behaupten, welche das, Inventis addere facile est, nicht auf sich angewandt wissen, oder ihre Hände in den Schooß legen wollen. Wessen Haus einen Riß bekommt, der sucht die Ursache im Fundamente. Wenn das seinige nicht geräumig, nicht hoch und nicht bequem genug ist, reißt lieber das alte nieder, und bauet auf tiefer gelegtem, festerem Grunde ein neues, mehrerer Etagen fähiges Gebäude auf, als daß er jenes erhöhte, um das aufgesetzte wegen der Schwäche des Grundes bald wieder abnehmen zu müssen. Solten auch in den Wissenschaften die Kinder dieser Welt klüger seyn, als die Kinder des Lichts? In der Länge und Breite verhindern uns die Besitzungen unserer Nachbarn, uns nach Gefallen auszudehnen; wie hoch wir bauen wollen, dabey kommt es außer der Art, wie wir bauen, freylich auch darauf mit an, wie hoch die Gebäude unserer Nachbarn sind, aber in gerader Linie brauchen wir gleichwohl nicht mit ihnen zu bleiben. Die Höhe, zu welcher das Gebäude der Differenzial-Rechnung aufgeführt werden kann, hängt allerdings von der ab, welche die übrigen Theile der Mathematik erreicht haben:

allein

Differenzial von  $x$ , so daß daher das Differenzial von  $x^2 = 2x dx$  wird. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß das  
Diffe-

allein was hindert uns, wenn diese noch nicht hoch genug sind, neue Etagen aufzusetzen? Hr. Prof. Bürja redet in seinem Selbstlernenden Algebristen im zehnten Hauptstücke von logarithmischen Proportionen und Progressionen? Vielleicht läßt sich mehr als bisher damit anfangen, wenn man die Regeln einer Differenzial-Rechnung darauf anwendet, welche aus einer eben so vollkommenen Erklärung der Differenzial-Rechnung ausführlich abgeleitet worden, als Hrn. Kants Definition der Mathematik? Kurz! ich räume gern ein, daß es Maxima gebe; aber ich behaupte auch, daß wir dieselben zwar in Gedanken, aber in der Wirklichkeit nie erreichen; und bin dabei überzeugt, daß unwichtig scheinende Dinge große Folgen haben können, so wie auch, daß wir keine Früchte erndten werden, wenn wir die Bäume, welche sie tragen sollen, nicht im Samen oder in Ablegern pflanzen. Deswegen sage ich also hier, alles kurz zusammen zu fassen, noch einmal: daß die hier zusammengedrückte Theorie der Differenzialien voller Fehlschlüsse sey; daß alle übrige philosophische Entwicklungen der Hauptregeln des Differenzial-Calculs, der Richtigkeit dieser Regeln selbst unbeschadet, ihr in Ansehung des Fehlerhaften nicht weit nachstehen; daß es aber nicht nur für die leichtere Erlernung, sondern selbst für die Erweiterung der Differenzial-Rechnung und zwar sowohl ihrer selbst als ihrer Anwendungen, eine Sache von der äußersten Wichtigkeit sey, eine vollkommen genaue Theorie derselben zu haben; und daß diese Theorie auf keinem andern Wege möglich sey,  
als

Differenzial von  $x^3 = 3x^2 dx$ , und überhaupt das Differenzial von  $x^n = nx^{n-1} dx$  sey. Ueberhaupt mögen Funktionen gegeben seyn, von was für Art man wolle, so lehrt die Differenzial-Rechnung, wie ihre Differenzialien gefunden werden, nur muß man dabey beständig vor Augen haben, daß man daraus, weil sie im strengen Verstande Null sind, nichts weiter ableite, als das Verhältniß derselben zu einander, welches man allerdings im Stande ist, durch endliche Größen anzugeben. Wenn aber die Principien des Differenzial-Calculs auf diese Art festgesetzt werden, und sie allein ist der Vernunft gemäß: so fallen alle Vorwürfe, welche man diesem Theile der höhern Mathematik gemacht hat, von selbst weg; und dagegen behielten sie ihre ganze Stärke, wenn die Differenzialien der unendlich kleinen Größen nicht im strengen Verstande  $= 0$  wären. Es haben aber mehrere von denen, welche die Differenzial-Rechnung vorgetragen haben, geglaubt, man müsse die Differenzialien von nichts unterscheiden,

als wenn man dieselbe aus einer wirklichen Definition der Differenzial-Rechnung, ohne die Exhaustions-Methode dabey zu gebrauchen, ableitet. Was ich in dieser Rücksicht in den Anmerkungen und Zusätzen, und in meiner Vorrede gethan habe, bitte ich indeß für nichts weiter als für Vorbereitung zu einem Versuche anzusehen, welchen ich den Kennern nächstens vorlegen werde. Vielleicht dient das zum voraus zu einiger Empfehlung, daß ich, wenn mein Versuch mir nicht mislingen sollte, am Ende würde darthun können, daß ich bloß die Grundvorstellung, von welcher Newton bey der Erfindung der Differenzial-Rechnung ausgieng, entwickelt hätte,

scheiden, und unendlich kleine Größen annehmen, die nicht Null, sondern nur kleiner wären, als jede Größe, welche sich angeben läßt \*). Hiergegen kann man mit Recht einwenden, daß sich alsdann die Differenzial-Rechnung von der geometrischen Schärfe entferne, und daß ihre Resultate, wegen der Vernachlässigung dieser unendlich kleinen Größen mit Recht verdächtig wären, weil durch die Vernachlässigung, nicht einzelner, sondern vieler, ja selbst unzähliger solcher Größen ein enormer Fehler entstehen könne \*\*). Es ist vergebliche Mühe \*\*\*), wenn man diesem Einwurfe die Beispiele

\*) Wider diese Größen überhaupt ist nichts einzuwenden, wofern man nicht selbst die Hauptsätze der Elementar-Mathematik umstoßen will.

\*\*) Sobald richtig ist, was ich S. xxxvi - xl behauptet habe, fällt dieser Einwurf gänzlich über den Haufen. Allein das sehe ich auch voraus, daß ich davon alle diejenigen nicht überzeugen werde, die dasselbe mit der gewöhnlichen, verworrenen Theorie der positiven und negativen Größen beurtheilen, und z. B. glauben, daß, allgemein und ohne Einschränkung, nicht nur das Quadrat positiv sey, dessen beyde Seiten positiv sind, sondern auch das, welches beyde Seiten negativ hat. Aber eine Frage, (die ich mir zwar zu beantworten weiß, aber auch deswegen nicht hersehe, um ihre Antwort erst zu lernen): Ist  $\mp a : -b = \mp b : -d$ , vorausgesetzt, daß absolute genommen,  $d = \frac{b^2}{a}$  sey, eine stetige Proportion? und wenn sie es ist, welches ist, vollständig ausgedrückt, das mittlere Glied,  $-b$  oder  $\mp b$ ?

\*\*\*) Wenigstens ist es sehr unmathematisch gehandelt.

spiele entgegensezt, wo man durch die Differenzial-Rechnung eben die Resultate findet, welche die Elementar-Geometrie giebt. Denn wenn die unendlich kleinen Größen, welche man in der Differenzial-Rechnung wegläßt, nicht  $= 0$  sind, so muß nothwendig ein Fehler, und ein desto größerer Fehler entstehen, je mehrere solcher Größen weggelassen worden sind; und geschieht das nicht, so wäre es viel wahrscheinlicher, daß man den begangenen Fehler durch einen entgegensehenden verbessert hätte, als daß die befolgten Regeln nicht mangelhaft wären. Da aber dergleichen Verbesserung durch einen neuen Fehler nicht statt findet, so beweiset solches unwidersprechlich, was ich behaupte, nemlich: es seyen die weggelassenen Größen, schlechterdings und absolut genommen, Null, und es finde zwischen dem unendlich Kleinen in der Differenzial-Rechnung und dem absoluten Nichts kein Unterschied statt \*). Eben so wenig erreicht man seinen Zweck,

\*) Wenn bloß auf die Art bewiesen werden soll, daß die Differenzialien Nullen seyen, wie es fast scheint, als halte man es (exceptis excipiendis) bey den wichtigsten Gegenständen der allgemeinen und insbesondere der höhern Mathematik für hinlänglich: so kann selbst auf dem Wege, den ich S. xxxvii f. gegangen bin, ein neuer Beweis dafür gefunden werden, der vielleicht vor andern noch den Vorzug eines tiefer versteckten Fehlers hat. Doch es wird wichtiger seyn, die Frage aufzuwerfen und zu beantworten:

Ob der sogenannte *rigor geometricus* die höchste Stufe der in der Mathematik möglichen Strenge und Schärfe sey?

Eulers Differenz. Rechn. I. Th.

e

Da

Zweck, wenn man die unendlich kleinen Größen auf die Art beschreibt, daß man sie sich wie Staubkörner, in Vergleichung mit

Da Euler, bald nach dem Gebrauche dieser Benennung, der Elementar-Geometrie gedenkt, und man Euclid's Elemente immer als Muster in Ansehung der Methode empfiehlt, welches sie auch in der Elementar-Geometrie größtentheils, und wenigstens mehr als irgend ein anderes Buch verdienen: so irre ich doch wohl nicht, wenn ich unter dem rigore geometrico die Strenge und Schärfe verstehe, welche in der Elementar-Geometrie erreicht werden kann? Also angenommen, daß ich nicht irre, so beweiset die Elementar-Geometrie ihre Sätze allemal an individuellen Constructionen, und sagt dann oder setzt voraus: auf diese Art könne man in jedem dem betrachteten ähnlichen Falle verfahren. So bekommen wir freylich allgemeine, aber doch immer nur specielle, nicht generelle Kenntnisse; wir werden überzeugt, und schauen an, ja ich will zugeben, daß wir gewiß sind. Allein, ob nun diese Gewißheit, Gewißheit im höchsten Verstande sey, oder nur so eine Art von Gewißheit, wie das Kind hat, dem sein Vater das Verhalten eines sinnlichen Objectes unter gewissen Umständen in einem einzelnen Falle gezeigt, und dann hinzugefügt hat: eben so ist bey allen Dingen, die diesem gleich sind, wenn du eben das mit ihnen thust; insbesondere, wenn der Vater ihm Beschaffenheiten gezeigt hat, die unveränderlich sind? will ich deswegen nicht entscheiden, weil ich nicht Lust habe, mich in Streit einzulassen. Im gemeinen Leben indeß pflegen wir zu Kennen, was wir gesehen haben, sagen ferner, wir seyen überzeugt, wenn wir Gründe angeben können, und gewiß, wenn diese Gründe unwidersprechlich sind, weil sie aus der Natur der Sache hergenommen sind, und durch Versuche bewährt werden können. Wie, wenn es in der Mathematik eine ähnliche

mit einem großen Berge, oder selbst der ganzen Erde, gedenken müsse. Denn ob man gleich bey der Bestimmung

e 2

der

Ähnliche Stufenfolge gäbe? Wenn die Elementar-Mathematik zeigte, die allgemeine, bestimmte und unbestimmte, Mathematik bewiese, und die höhere unwidersprechlich darthäte? *Ἀποδείξεις* und *demonstratio* wurden von den Griechen und Römern von geometrischen Beweisen gebraucht, ich weiß nicht, ob nicht, wenn gleich in tropischer Bedeutung, doch in der, welcher der eigentlichen am nächsten liegt? Doch ich will einen Schritt näher treten. Die Elementar-Mathematik betrachtet die Größen unmittelbar in natürlichen Constructionen, die allgemeine untersucht dieselben vermittelst willkührlicher Constructionen in Begriffen. Es verhalten sich also die Elementar Kenntnisse in der Mathematik zu den allgemeinen, wie sonst die sinnlichen zu den vernünftigen. Ferner sind die Größen-Begriffe, welche in der bestimmten Mathematik untersucht werden, weniger allgemein als die in der unbestimmten, und diejenigen, in welchen die höhere Mathematik die Größen betrachtet, transcendent. Soll also die Gewisheit, welche wir in der Elementar-Mathematik erreichen können, die höchste Stufe der menschlichen Gewisheit seyn; so hat man auch ein Recht zu sagen: die Sinne dringen tiefer in die Natur der Dinge als die Vernunft; so braucht man kein Bedenken zu tragen, alle diejenigen, die sich den Wissenschaften widmen, Ehoren, und die Philosophen unter ihnen das zu nennen, wofür die Stoiker den Unwissenden hielten. So wie wir glauben, daß die Ausdrücke für die Differenzialien beschaffen seyn müssen, wenn sie vollständig seyn sollen, sind sie keine Ausdrücke für Differenzialien im wahren Verstande; sondern gerade das ist in ihnen zu viel, was die meisten daraus bloß deswegem weglassen, weil sie nichts damit anzufangen

gen

der Größe der Erde, selbst eine beträchtliche Menge von Staubkörnern, als etwas nicht zu achtendes ansehen kann; so leidet doch die geometrische Schärfe nicht den geringsten Fehler, und der Vorwurf bliebe wichtig, wofern er die geringste Kraft behielte. Auch ist es schwer zu sagen, was man von der Unterscheidung der Differenzialien von Null für Vortheile habe? \*) Allein es scheint, man befürchte, daß dadurch die Vergleichung der Differenzialien unmöglich werde, weil zwischen absoluten Nichtsen dergleichen nicht angestellt werden könne. Man glaubt also, den Differenzialien einige Größe lassen zu müssen, sieht sich aber dabey gezwungen, dieselbe so klein anzunehmen, daß die Differenzialien dabey mit eben so vielem Rechte, als wenn sie Nullen wären, weggelassen werden können. Bey dem allen getraut man sich in-

deß

gen wissen. Auf diese Art läßt sich also die Differenzialrechnung nicht einmal durch unsere Kurzsichtigkeit und falsche Behandlung zwingen, andere als vollkommen wahre und genaue Sätze zu liefern; und sollte nicht allenfalls dieses statt aller Beweise dienen können, daß die Differenzialrechnung den höchsten Grad der Gewißheit habe und gewähre?

\*) Um der Schüler der Differenzialrechnung willen, welche diese Stelle lesen, will ich einige hersehen. Zuvörderst fällt dadurch das Anstößige weg, was nicht unbemerkt bleiben kann: daß zwey Nullen bald jedes, bald nur ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben können. Zum andern werden durch einen richtigen Begriff von den Differenzialien alle Regeln der Differenzial- und Integralrechnung gewisser, indem man dabey die Richtigkeit derselben a priori einsehen kann. Drittens wird der Grund und die Art der Anwendung der gedachten Regeln dabey viel klarer, u. s. f. Daß man durch die Eulerische Theorie dem Spötter Gelegenheit gebe, zu sagen: die Mathematiker schaffen aus dem Endlichen und Nichts, nicht bloß das Unendliche, sondern sogar das Unendliche vom Unendlichen; will ich nicht weiter berühren.

Def nicht, denselben eine gewisse und bestimmte, wenn auch unerreichbare Größe benzulegen, weil sich die Vergleichung bey einer zwey und drey mal kleinern Größe ebenfalls anstellen lassen und eben dieselben Resultate geben würde. Hieraus erhellet, daß die Größe der Differenzialien zur Untersuchung ihres Verhältnisses nichts beyträgt, und daß diese selbst dann noch möglich bleibt, wenn sie gänzlich verschwinden \*). Hingegen ist aus dem Obigen offenbar, daß die

e 3

Verz

\*) Wie groß ein Differenzial sey? kann allenfalls unbestimmt bleiben, indess ist solches nicht nöthig. Ich hoffe zu einer andern Zeit zu beweisen, daß die Differenzialien aller reellen veränderlichen Größen, nicht bloß Größen seyen, die kleiner gedacht werden müssen, als jede anzugebende Größe, sondern daß man ein Recht habe, dieselben Elemente im strengsten Verstande zu nennen. Daß man vergleichen nie auf dem Wege der Division erhalte, ist wahr; allein daraus folgt weiter nichts, als daß man sie nicht auf diesem Wege suchen müsse, und das ist ganz meine Meinung. Ja ich habe nichts dawider, wenn man fordern will, daß, so wie das Wort, unendlich, aus der ganzen Mathematik verwiesen, also die Benennung, unbestimmbar, bey dem Beweise der Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung, schlechterdings nicht gebraucht werden müsse. Mir scheint nemlich dieses eine höchst billige Forderung zu seyn, und thut man sie an mich, so will ich mich darnach bey dem gedachten Versuche richten. Dann wird sich auch deutlich darthun lassen, daß die mathematische Schärfe in der Differenzial und Integral-Rechnung den höchsten Grad erreiche; und wenn man dabey die Leichtigkeit bedenken will, mit welcher die höhere Mathematik Sätze erfindet und beweiset, und dazu die Nothwendigkeit und ausgedehnte Brauchbarkeit derselben setzt: so wird man reichen Stoff zu einer Lobrede haben; aber auch nicht ohne Unwillen gegen alle diejenigen bleiben, welche diese herrliche Wissenschaft durch den Nebel, worin sie dieselbe hüllten, einem großen Theile selbst von denjenigen unerreichbar machten, welchen sie doch nach ihrem eigenen Urtheile unentbehrlich war.

Vergleichung, welche die Differenzial-Rechnung anstellt, gar nicht einmal statt finden könne, wenn die gedachten Incremente nicht gänzlich verschwinden. Denn das Increment von  $x$ , welches wir überhaupt durch  $\omega$  angezeigt haben, hat zu dem Incremente des Quadrats  $xx$ , nemlich  $2x\omega + \omega\omega$  das Verhältniß  $1$  zu  $2x + \omega$ , und dieses Verhältniß ist allemal von dem  $1$  zu  $2x$  unterschieden, so lange nicht  $\omega = 0$  ist; dagegen, sobald  $\omega = 0$  wird, in voller Schärfe  $1 : 2x + \omega = 1 : 2x$  ist. Nun ist es leicht, sich davon zu überzeugen, daß man sich dem Verhältnisse  $1 : 2x$  desto mehr nähert, je kleiner  $\omega$  angenommen wird, und es ist daher nicht bloß erlaubt, sondern der Natur der Sache vollkommen angemessen, die Incremente erst als endlich zu betrachten, und in den Figuren, welche man etwa zur Erläuterung brauchen will, endlich darzustellen, und dann dieselben immer kleiner und kleiner werden zu lassen; wo man finden wird, daß sich ihr Verhältniß immer mehr und mehr einer gewissen Grenze nähert, die es aber nicht eher als bey der Verschwindung der Incremente erreicht. Diese Grenze, welche gleichsam \*) das letzte Verhältniß der gedachten Incremente ist, macht eigentlich den Gegenstand der Differenzial-Rechnung aus; und der hat eigentlich den Grund zu dieser Wissenschaft gelegt, der zuerst auf den Gedanken gerieth, diese letzten Verhältnisse zu untersuchen \*).  
Unter

\*) Also ist der eigentliche Gegenstand der Differenzial-Rechnung etwas, was nur gleichsam das ist, was es seyn soll?

\*\*) Hiernach hätte derjenige das vorher wankende Gebäude der Differenzial-Rechnung unerschütterlich befestiget, der dasselbe auf dem Grunde der letzten Verhältnisse aufgeführt hätte. Dies hat bekannter Maßen mehr als andere Hr. L'Huilier in seiner Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs gethan.

Untersuchung finden wir schon bey den ältesten Mathematikern, welchen man daher auch nicht alle Kenntniß in der Analysis des Unendlichen absprechen kann. Nach und nach bekam diese Wissenschaft Wachsthum, und sie hat sich nicht plöglich oder auf einmal zu der Größe emporgeschwungen, in welcher wir sie jetzt erblicken; obgleich immer noch mehr in ihr zu entdecken, als bereits wirklich gefunden ist. Denn da sich der Differenzial-Calcul über alle Arten der Funktionen verbreitet, sie mögen so zusammengesetzt seyn, als sie irgend wollen, so konnte die Methode, die verschwindenden Elemente aller Funktionen unter einander zu vergleichen, nicht auf einmal entdeckt werden, sondern man sah sich gezwungen, die zusammengesetzten Funktionen nach und nach zu untersuchen \*). Was nemlich die rationalen Funktionen betrifft, so

e. 4.

kannte

gethan. Ich setze aus der Vorrede folgende S. 6. stehende Worte her: Je me propose donc comme but principal, de montrer avec la rigueur et la clarté requises par mes Juges: Que, la methode des anciens, connue sous le nom de Methode d'Exhaustion, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs; sans que cependant cette réduction entraîne après elle des longueurs et des difficultés propres à rebuter des les premiers pas ceux qui veulent entrer dans la carrière des Mathematiques sublimes.

- \*) Ein bereits gebrauchtes Gleichniß noch einmal anzuwenden, so kann man freylich bey jedem Gebäude nur nach und nach die Etagen aufsetzen, allein, will man, so läßt sich gleichwohl, selbst bey einem königlichen Pallaste, zuvor der ganze Grund legen, ehe man über der Erde zu bauen anfängt. Man sagt: jedes Gleichniß hinke; das gegenwärtige wäre falsch angewandt, wenn man bloß sagen wollte: in der Mathematik könne etwas ähnliches geschehen, denn da sollte es eigentlich so seyn. Der Grund liegt darin, weil sowohl die Mathematik überhaupt, als jeder ihrer Theile so aus der Definition desselben entwickelt seyn sollte, als ein

Kannte man das letzte Verhältniß ihrer verschwindenden Inkremente schon lange vor Newton und Leibniz, so daß die Differenzial-Rechnung, in so fern sie die rationalen Funktionen zum Gegenstande hat, schon geraume Zeit vor ihrer Periode erfunden worden ist. Dagegen leidet es keinen Zweifel, daß wir denjenigen Theil des Differenzial-Calculus, welcher sich mit den irrationalen Funktionen beschäftigt, dem unsterblichen Newton verdanken, und der Binomische Lehrsatz war es vorzüglich, wodurch er der Differenzial-Rechnung diese glückliche Erweiterung verschaffte. Leibniz sind wir nicht weniger verpflichtet. Er brachte nemlich diesen Calcul, den man bis dahin bloß als einen besondern Kunstgriff betrachtet hatte, in die Form einer Wissenschaft, bildete aus den Regeln derselben ein System, und stellte dasselbe in einem hellen Lichte dar \*). Hierdurch bekam man die schätzbarsten Hülfsmittel, denselben zu erweitern, und das Fehlende, aus gewissen Principien abgeleitet, hinzu zu fügen. Bald darauf wurden durch die Bemühung Leibnizens, und der von ihm dazu ermunterten Bernouillier die transcendenten Funktionen in das Gebiet der Differenzial-Rechnung aufgenommen, welches bisher noch nicht geschehen war, und nun auch ein fester Grund zur Integral-Rechnung gelegt, auf welchem die folgenden Architecten das angefangene Gebäude immer mehr erweiterten und aufführten. Es hatte  
aber

ein fruchtbarer Boden aus den empfangenen Kernen Bäume hervortreibt, welche durch ihre Früchte der Nachwelt nützen. Uebrigens spare ich den Commentar zu diesem historischen Theile der Eulerischen Vorrede bis zu dem versprochenen dritten Theile.

\*) Eine genaue Auseinandersetzung dieser Behauptung, und darauf gegründete Bestimmung der Verdienste Leibnizens um die Differenzial-Rechnung scheint mir von großer Wichtigkeit zu seyn, aber dabey in eine vollständige Geschichte der höhern Mathematik zu gehören.



crement dieser Funktion mit andern verglichen wird, ein zweytes Differenzial und gelangt ferner auf ähnlichem Wege zu dem dritten und den folgenden, so daß man sich im Grunde immer mit endlichen Größen beschäftigt, und bloß der Bequemlichkeit wegen die Differenzialien mit besondern Zeichen bezeichnet. Beym ersten Anblick wird diese Beschreibung der Analysis des Unendlichen den meisten flach und unfruchtbar scheinen, obgleich die geheimnißvolle Sprache von unendlich kleinen Größen in der That nicht das mindeste voraus hat. Allein wenn wir die Verhältnisse der verschwindenden Incremente der Funktionen genau kennen, so ist diese Kenntniß nicht nur an sich häufig von der größten Wichtigkeit, sondern auch bey einer Menge schwerer Untersuchungen so unentbehrlich, daß man ohne sie seinen Zweck gar nicht zu erreichen vermag. Sollte z. B. der Weg einer geworfenen Bombe bestimmt, und dabey auf den Widerstand der Luft Rücksicht genommen werden: so erschwert das die Auflösung dieser Aufgabe sehr, daß sowohl die Richtung des Weges, welchen die Bombe nimmt, als auch die Geschwindigkeit der Bombe, von welcher der Widerstand der Luft abhängt, jeden Augenblick sich verändern. Allein diese Veränderlichkeit wird desto geringer, je kleiner die Zeit angenommen wird; und wenn man dieselbe ganz verschwinden läßt, so können wir die Wirkungen des Widerstandes, weil nun alle Ungleichheit in der Richtung des Weges und der Geschwindigkeit wegfällt, nach den Regeln von der Bewegung genau bestimmen, und die einem Augenblicke zugehörige Veränderung der Bewegung angeben. Kennt man aber diese augenblickliche Veränderungen, oder vielmehr, da sie eigentlich keine Bewegungen sind, ihr wechselseitiges Verhältniß: so hat man schon viel gewonnen, und bedarf nur noch der Hülfe der Integralrechnung, um daraus die Veränderung der Bewegung durch einen

einen

einen endlichen Raum zu finden \*). Doch ich halte es für überflüssig, den Nutzen der Differenzial- und Integral-Rechnung an mehreren Beispielen zu zeigen, da bereits ausgemacht ist, daß wir bey allen Untersuchungen, wo es mit auf Bewegungen fester oder flüssiger Körper ankommt, nicht nur ohne die Hülfe der Analysis des Unendlichen keine genaue Resultate finden können, sondern auch, daß wir dazu diese Wissenschaft noch nicht einmal vervollkommenet genug besitzen. Es erstreckt sich nemlich der Nutzen dieser höhern Analyse auf alle Theile der Mathematik, so daß man das, was man ohne sie bisher hat entwickeln können, fast für nichts zu halten hat.

Ich habe mir daher vorgenommen, im gegenwärtigen Werke die ganze Differenzial-Rechnung aus wahren Principien abzuleiten, und so ausführlich abzuhandeln, daß ich von dem bis jetzt darin erfundenen nichts übergienge. Ich habe dasselbe in zwey Theile getheilt. In dem ersten beweise ich zuvörderst die Hauptregel der Differenzial-Rechnung, und zeige dann, wie man von allen Arten der Funktionen, sowohl einer als mehrerer veränderlicher Größen, nicht nur die ersten, sondern auch die Differenzialien aller übrigen Ordnungen findet. In dem andern beschäftige ich mich mit den Anwendungen dieses Calculs theils in der Analysis des Endlichen, theils in der Lehre von den Reihen, und setze dabei vorzüglich die Lehre vom Größten und Kleinsten (de Maximis et Minimis) auseinander. Von seinem Nutzen in der Geometrie aber rede ich nicht, weil man darüber Werke genug hat, da sogar die ersten Principien der Differenzial-Rechnung aus der

Geometrie

\*) Der Artilleriste wird hier verschiedene Dinge vermissen, die bey wirklichen Fällen allerdings mit in Betrachtung gezogen werden müssen, wenn man sich nicht wundern will, wenn angestellte Versuche den Resultaten der Theorie nicht ganz entsprechen.

Geometrie hergenommen\*) und dieselbe auf diese Wissenschaft, gleich nach ihrer ersten Entwicklung, mit der größten Sorgfalt

\*) Hieran hat man Unrecht gethan, weil das Transcendente nicht unmittelbar vom Sinnlichen genommen werden kann; man hätte sich durch die Geometrie bloß auf die Differentialien führen, und dann die wahren Principien derselben am rechten Orte ansuchen, und nun erst genau und vollständig entwickeln sollen. Die Gegenstände der Elementar-Mathematik sind die mathematische Sinnenwelt; in der allgemeinen, bestimmten und unbestimmten Mathematik wandert man in den Regionen der Abstraction und des Gedenkbaren; in der höhern weidet man seinen Blick in den Sphären des Transcendenten. Die Mathematik kann bey dem grenzenlosen Raume, den wir zuerst in einer toren Anschauung wahrnehmen, anfangen, und bey Elementen, im strengsten Sinne genommen, aufhören; so lange sie das nicht thut, und zwar in der Ordnung, daß jeder folgende Schritt dem, der den vorhergehenden mit Festigkeit gethan hat, eben so leicht als jeder vorhergehende ist, so lange ist sie, was auch unsere Kenntnisse darin immer für einen Umfang haben mögen, ein Geschenk des Zufalls, nicht unser Werk, kein durch eigenes Streben erworbenes Eigenthum. Wie kann sie es werden? Irdische Bedürfnisse zwangen die Menschen die Reime der Mathematik früher, als die, irgend einer andern Wissenschaft, zu sammeln und zu pflegen. Das war Veranlassung dessen, der alles mit Vater-Gebinnung so ordnete, daß wir im Schweize des Angesichts unser Brod essen sollten, aber nicht länger, als bis wir wieder zu Erde würden; oder wenn man lieber Worte eines Dichters liest, Veranlassung dessen, der

— — — curis aciens mortalia corda

Non torpere gravi passus sua regna veterno. Virg.

Man ziehe die Geschichte dieser Wissen-  
schaft zu Rathe, und frage sie: Welche Ursachen die Mathematik ihre wichtigsten Erweiterungen und Bervollkommnungen, insbesondere was für Ursachen sie die Vorzüge verdanke, wodurch sie sich über alle übrige Disciplinen erhebt? Man wird finden, daß es das edlere Bedürfnis war,

falt angewandt worden sind. Das gegenwärtige Werk hält sich durchaus innerhalb der Grenzen der reinen Analyse, so daß

war, die Bestimmung zu erfüllen, welche Ovid so schön in folgender Stelle beschreibt:

Pronaque cum spectent animalia cetera terram

Os homini sublime dedit (opifex rerum): coelumque tueri

Iussit, et erectos ad sidera tollere vultus.

wird finden, daß der Mensch durch die Erfüllung dieser erhabenen Bestimmung zugleich seine irdischen Bedürfnisse veredeln, und nach ihrer Veredlung auf würdigen Wegen befriedigen lernte. Also ist die Mathematik eine Wissenschaft, zu welcher uns der Schöpfer selbst durch die Natur geleitet, und zu den ersten Entdeckungen darin, durch weise Anordnungen, gezwungen hat. Dies sey der erste Sporn, sie unserer ganzen Aufmerksamkeit werth zu achten. Aber nun betrachte man auch die übrigen Geschenke, welche die gütige Hand des Vaters der Menschen so reichlich um uns hergelegt hat, und lerne bey denen, welche wir ganz kennen, die Art, mit welcher er schenkt. Wo ist etwas, was wir nicht bloß betrachten, sondern brauchen sollen, in einer solchen Vollkommenheit von ihm uns gegeben, daß unsere Wirksamkeit ruhen, und allein die Begierde zu genießen sich thätig beweisen dürfte? Aber auch darauf schränkt sich sein Vaterwille nicht ein, daß wir aus dargegebenem Stoffe nach seinem Muster schaffen sollen; es giebt noch ein erhabeneres Glück, zu dessen Genuße er uns bestimmt hat: unabhängig von dem, was außer uns ist, aus uns selbst Kenntniß zu schöpfen, in unserer Seele zu lesen die Schrift, die er ihr, mit unauslöschlichen aber leserlichen Buchstaben, wenn der Staub abgewischt ist, eingrub; in uns selbst zu entdecken die Quelle der Wahrheit, in deren Anblicke wir nach dem Tode Seligkeit schmecken, und hier Ueberzeugung einer ewigen Fortdauer finden sollen. Ob Raum und Zeit reine Anschauungen im strengen Verstande seyen oder nicht? läßt der Mathematiker unentschieden, denn er hasset Streits genug, daß sie Anschauungen sind, die er, bey gebildeten Seelenkräften, unabhängig

daß ich auch nicht einmal eine einzige Figur zur Erläuterung nöthig gehabt habe.

abhängig von aller Erfahrung entwickeln, und dann zu seinen Kenntnissen, auch Ungebildete aber Wißbegierige, ohne sich auf Erfahrungen zu berufen, hinleiten kann. So weit uns reine Vernunftwissenschaft zu erlangen möglich ist, können wir sie lediglich, durch und in einer vervollkommeneten Mathematik und Philosophie, d. h. durch und in einer solchen Mathematik und Philosophie erlangen, wovon die Quellen in uns selbst liegen; und darum sind diese Wissenschaften auch allein die Mittel, wodurch wir die uns hier mögliche Vorbereitung zu jener erhabenen Bestimmung vollenden können. Auch den Anfang zur Erreichung dieser Bestimmung können wir hier machen: durch herzu-  
liche Annehmung und Befolgung der Religion, davon Jesus uns die Elemente gegeben hat; deren vollkommne Kenntniß und Ausübung uns bereinst den Zustand einer vollkommenen, ewig dauernden, und ewig wachsenden Glückseligkeit verschaffen soll; und die, damit Gott auch für die Unmündigen sorgte, in den Vorschriften: Liebe deinen Nächsten als dich selbst; und: Was du nicht willst, das dir die Leute thun sollen, das thue ihnen auch nicht; mehr Weisheit des Lebens lehrt, als Chryscippus und Crantor. Dies lehre uns, nicht zu glauben, daß wir bereits auf der höchsten Stufe stehen; dies reize unsere Strebbarkeit, selbst bey der Unmöglichkeit das Ziel ganz zu erreichen, doch redlich demselben entgegen zu eilen. Endlich sey die unerreichbare Simplicität und Leichtigkeit der über alle menschliche Wissenschaften erhabenen göttlichen Religion Jesu, nach der Art, wie wir uns ihr nähern, der Probiertestein, auf welchem wir dasjenige untersuchen, was wir geleistet haben. Es ist angenehm, die Wahrheit erblicken, auch wenn wir dazu Werkzeuge gebrauchen, die nur wir besitzen, und andern bloß leihen können; aber es ist Freude, wenn wir das, was wir mit Entzücken sehen, auch eben so leicht jedem, der es sehen will, vor Augen zu legen im Stande sind. Und wenn alles, was den Namen, reine Vernunftwissenschaft, mit Recht trägt, bey aller seiner Wichtigkeit und Vortreflichkeit doch am Ende bloß Mittel ist, das Organ  
unserer

unserer Seele zu reinigen, zu beleben, und zu stärken; wenn alle reine Kenntnisse eigentlich nur unsere Führerinnen bey dem Streben nach reeller Wahrheit seyn sollen: Was helfen Maschinen, zu deren Gebräuche neue Maschinen erfordert werden? Was sollen Wegweiser, die selbst eines Führers bedürfen? Insbesondere sey denen, welchen die erste Anleitung der Jugend zu den reinen Vernunftwissenschaften anvertraut ist, stets das vor Augen, daß sie die Erfüllung ihres wichtigen Berufs lediglich nach dem Grade der Aufmerksamkeit, den ihre Schüler beweisen, nach der Anstrengung, welche sie mit Vergnügen übernehmen, nach der Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher sie das Wahrgenommene fassen, nach den Proben der Wißbegierde, welche sie durch Fragen und Einwürfe geben, und endlich darnach beurtheilen müssen, ob sich ihre Schüler des Erlernten um sein selbst willen freuen. Es ist wahr, daß dieses strenge Regeln sind, aber sie sind nicht zu streng für den Jugendlærer in den Wissenschaften, von welchen ich rede. Ich gebe es zu, daß zu ihrer Erfüllung nöthig sey, daß man an seiner Berufsarbeit selbst Vergnügen finde; aber welcher Lehrer der Jugend kann das nicht, wenn er sie mit Adlichkeit thut? Es gehört dazu Nachdenken und Uebung, und Vergessen seiner selbst über dem Ziele, nach welchem man hinstrebt; aber man kann dabey schon als Mann die Wahrheit des Ciceronianischen Ausspruchs erfahren: *Quid jucundius, quid dulcius feneçtute, stipata studiis juventutis?* Man muß dabey oft auf Ruhm Verzicht thun, aber man darf hoffen, einst Gelegenheit zur Erinnerung an die Worte zu geben: *Serit arbores posteritati profuturas.*



Inhalt

---

## Inhalt des ersten Theils.

Erstes Capitel.	
Von den Differenzen. . . . .	Seite 3
Zweytes Capitel.	
Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen. . . . .	39
Drittes Capitel.	
Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen. . . . .	71
Viertes Capitel.	
Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen. . . . .	101
Fünftes Capitel.	
Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe. . . . .	127
Sechstes Capitel.	
Vor der Differenziation der transcendenten Funktionen. . . . .	153
Siebentes Capitel.	
Von der Differenziation der Funktionen zweyer oder mehres rer veränderlichen Größen. . . . .	180
Achstes Capitel.	
Von der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln. . . . .	207
Neuntes Capitel.	
Von den Differenzial-Gleichungen. . . . .	244
Anmerkungen und Zusätze. . . . .	281

---

Voll.

Vollständige Anleitung  
zur  
Differenzial-Rechnung.

---

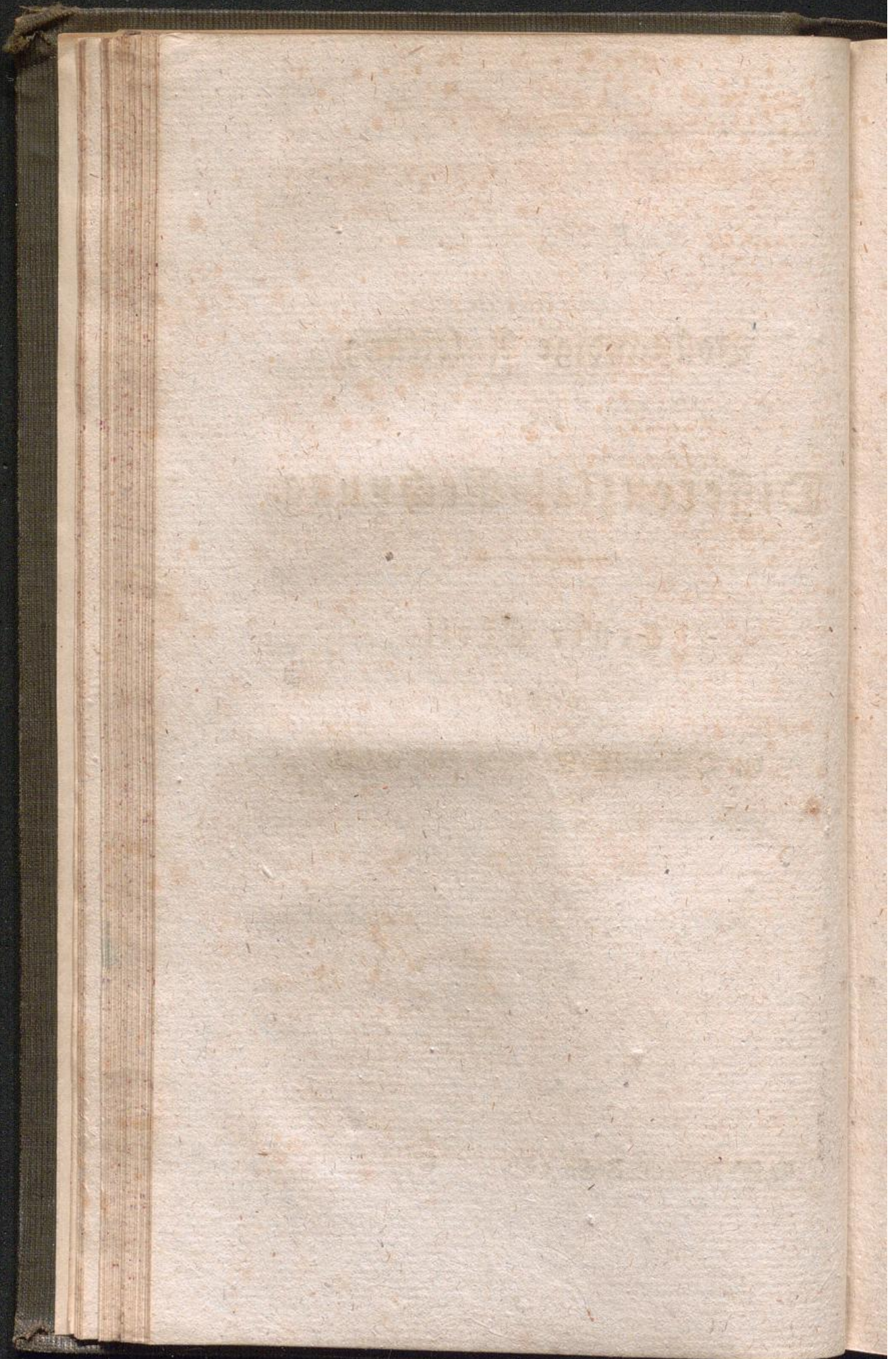
Erster Theil

welcher

die Differenzial-Rechnung selbst enthält.

Eulers Differenz, Rechn. I. Th.

II





## Erstes Capitel.

### Von den Differenzen.

#### §. 1.

Aus dem, was ich in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Größen und ihren Funktionen gesagt habe, erhellet, daß alle Funktionen einer veränderlichen Größe eine Veränderung leiden, wenn diese Größe wirklich verändert wird. Wenn z. B. die veränderliche Größe  $x$  den Zuwachs  $\omega$  bekommt, und also  $x + \omega$  für  $x$  gesetzt wird: so erhalten alle Funktionen von  $x$ , dergleichen  $xx$ ;  $x^3$ ;  $\frac{a+x}{xx+aa}$ , sind, andere Werthe. Es geht nemlich  $xx$  in  $xx + 2x\omega + \omega\omega$ ;  $x^3$  in  $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$ ; und  $\frac{a+x}{aa+xx}$  in  $\frac{a+x+\omega}{aa+xx+2x\omega+\omega\omega}$  über. Dergleichen Veränderung erfolgt also allezeit, wosfern nicht etwa die Funktion bloß die Form einer Funktion hat, in der That aber eine beständige Größe ist, wie  $x^0$ : denn in diesem Falle bleibt die Funktion unverändert, man mag die Größe  $x$  verändern wie man will.

#### §. 2.

Da dieses hinlänglich aus einander gesetzt worden ist, so wollen wir uns zur Betrachtung derjenigen Eigenschaften der

Funktionen wenden, auf welchen die gesammte Analysis des Unendlichen beruht. Es sey also  $y$  irgend eine Funktion der veränderlichen Größe  $x$ , und für  $x$  setze man nach und nach die Werthe,  $x$ ;  $x + \omega$ ;  $x + 2\omega$ ;  $x + 3\omega$ ;  $x + 4\omega$ ;  $\text{rc.}$  Ferner bedeute  $y^I$  den Werth, welchen die Funktion  $y$  bekommt, wenn darin  $x + \omega$  für  $x$  gesetzt wird; auf eine ähnliche Art stelle  $y^{II}$  den Werth von  $y$ , wenn  $x + 2\omega$  anstatt  $x$ , und eben so  $y^{III}$ ;  $y^{IV}$ ;  $y^V$ ;  $\text{rc.}$  die Werthe von  $y$  vor, wenn  $x + 3\omega$ ;  $x + 4\omega$ ;  $x + 5\omega$ ;  $\text{rc.}$  an die Stelle von  $x$  gesetzt wird, so daß sich die verschiedenen Werthe von  $x$  und  $y$  auf folgende Art auf einander beziehen:

$$\begin{array}{l} x; x + \omega; x + 2\omega; x + 3\omega; x + 4\omega; x + 5\omega; \text{rc.} \\ y; y^I; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^V; \text{rc.} \end{array}$$

## §. 3.

So wie die arithmetische Reihe  $x$ ;  $x + \omega$ ;  $x + 2\omega$ ;  $\text{rc.}$  ohne Ende fortgesetzt werden kann, so läuft auch die aus  $y$  entspringende Reihe  $y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ; ohne Ende fort, und die Beschaffenheit derselben hängt von der Natur der Funktion  $y$  ab. Ist z. B.  $y = x$ ; oder  $y = ax + b$ ; so ist auch die Reihe  $y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $\text{rc.}$  eine arithmetische Reihe: ist aber  $y = \frac{a}{bx + c}$ , so entsteht daher eine harmonische, so wie, wenn  $y = a^x$  ist, eine geometrische Reihe. Ja es läßt sich keine Reihe gedenken, die nicht auf diese Art aus einer gewissen Funktion von  $x$  abgeleitet werden könnte. Man nennt aber eine solche Funktion von  $x$ , in Ansehung der Reihe, welche aus ihr entsteht, das allgemeine Glied dieser Reihe; und so wie eine jede nach einem bestimmten Gesetze formirte Reihe ein allgemeines Glied hat, so läßt sich dies  
selbe

selbe auch umgekehrt aus einer gewissen Funktion von  $x$  ableiten. Dieses pflegt in der Lehre von den Reihen ausführlich auseinander gesetzt zu werden.

## §. 4.

Hier richten wir aber unsere Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Differenzen, wodurch sich die Glieder der Reihe  $y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $x$ . von einander unterscheiden; und damit wir dieselben nach der Natur der Differenzialien einrichten, so wollen wir sie auf die Art bezeichnen, daß

$y^I - y = \Delta y$ ;  $y^{II} - y^I = \Delta y^I$ ;  $y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}$ ;  $x$ . sey. Es zeigt also  $\Delta y$  den Zuwachs an, den die Funktion  $y$  bekommt, wenn man darin  $x + \omega$  anstatt  $x$  setzt, und  $\omega$  bedeutet hier jede nach Belieben angenommene Zahl. In der Lehre von den Reihen pflegt zwar  $\omega = 1$  gesetzt zu werden; allein zu unserer gegenwärtigen Absicht ist es besser, demselben einen allgemeinen Werth beizulegen, den man nach Gefallen vergrößern oder vermindern kann. Man pflegt auch diesen Zuwachs  $\Delta y$  der Funktion  $y$  die Differenz derselben zu nennen, um welche der folgende Werth  $y^I$  den ersten  $y$  übertrifft, und man sieht denselben stets als einen Zuwachs an, ob er gleich oft eine wirkliche Verminderung hervorbringt. Dies erkennt man denn an dem negativen Werthe desselben.

## §. 5.

Da  $y^{II}$  aus  $y$  entsteht, wenn man  $x + 2\omega$  für  $x$  setzt, so ist offenbar, daß man eben denselben Werth erhält, wenn man erst  $x + \omega$  anstatt  $x$ , und dann nochmals  $x + \omega$  für  $x$  setzt. Es entsteht daher  $y^{II}$  aus  $y^I$ , wenn man darin  $x + \omega$  für  $x$  setzt; so daß  $\Delta y^I$  der Zuwachs wird,

den  $y^I$  bekommt, wenn man darin  $x + \omega$  anstatt  $x$  setzt, und es heißt deswegen auch auf eine ähnliche Art  $\Delta y^I$  die Differenz von  $y^I$ . Aus eben dem Grunde ist  $\Delta y^{II}$  die Differenz von  $y^{II}$ , oder der Zuwachs, den  $y^{II}$  bekommt, wenn man darin  $x + \omega$  für  $x$  setzt, und  $\Delta y^{III}$  die Differenz oder der Zuwachs von  $y^{III}$ , und so ferner. Auf diese Art erhält man aus der Reihe der Werthe von  $y$ , welche  $y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $\text{rc.}$  sind, die Reihe der Differenzen  $\Delta y$ ;  $\Delta y^I$ ;  $\Delta y^{II}$ ;  $\text{rc.}$  wenn man von jedem Gliede derselben das vorhergehende abzieht.

## §. 6.

Hat man die Reihe der Differenzen gefunden, so erhält man, wenn man abermals die Differenzen sucht, indem man jede Differenz der Reihe von der folgenden abzieht, Differenzen von Differenzen. Diese pflegte man mit dem Namen, zweyte Differenzen, zu belegen, und auf die Art zu bezeichnen, daß

$$\begin{aligned}\Delta\Delta y &= \Delta y^I - \Delta y \\ \Delta\Delta y^I &= \Delta y^{II} - \Delta y^I \\ \Delta\Delta y^{II} &= \Delta y^{III} - \Delta y^{II} \\ \Delta\Delta y^{III} &= \Delta y^{IV} - \Delta y^{III} \\ &\text{rc.}\end{aligned}$$

ist. Es wird also  $\Delta\Delta y$  die zweyte Differenz von  $y$ ;  $\Delta\Delta y^I$  die zweyte Differenz von  $y^I$  u. s. f. genannt. Auf eine ähnliche Art findet man aus den zweyten Differenzen, wenn man aufs neue ihre Differenzen sucht, die dritten Differenzen, die man auf diese Art schreibt,  $\Delta^3 y$ ;  $\Delta^3 y^I$ ;  $\text{rc.}$ ; aus diesen

diesen ferner die vierten Differenzen  $\Delta^4 y$ ;  $\Delta^4 y^I$ ;  $\text{ic.}$   
und so immer weiter, so weit man will.

§. 7.

Wir wollen diese verschiedenen Arten von Differenzen  
in eine Tabelle bringen, damit der Zusammenhang derselben  
desto deutlicher in die Augen falle.

Arithmetische Progression.

$x$ ;  $x + \omega$ ;  $x + 2\omega$ ;  $x + 3\omega$ ;  $x + 4\omega$ ;  $x + 5\omega$ ;  $\text{ic.}$

Werthe der Funktion.

$y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $y^{IV}$ ;  $y^V$ ;  $\text{ic.}$

Erste Differenzen.

$\Delta y$ ;  $\Delta y^I$ ;  $\Delta y^{II}$ ;  $\Delta y^{III}$ ;  $\Delta y^{IV}$ ;  $\text{ic.}$

Zweyte Differenzen.

$\Delta\Delta y$ ;  $\Delta\Delta y^I$ ;  $\Delta\Delta y^{II}$ ;  $\Delta\Delta y^{III}$ ;  $\text{ic.}$

Dritte Differenzen.

$\Delta^3 y$ ;  $\Delta^3 y^I$ ;  $\Delta^3 y^{II}$ ;  $\text{ic.}$

Vierte Differenzen.

$\Delta^4 y$ ;  $\Delta^4 y^I$ ;  $\text{ic.}$

Fünfte Differenzen.

$\Delta^5 y$ ;  $\text{ic.}$

$\text{ic.}$

Eine jede von diesen Differenzen entsteht aus den vorherge-  
henden, indem man jede derselben von der folgenden abzieht.

Da man nun die Werthe  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $y^{IV}$ ;  $\text{ic.}$  jedes-  
mal durch die bekannten Zusammensetzungs-Arten der Grö-  
ßen leicht finden kann, so kann man auch allezeit, was auch

für eine Funktion von  $x$  für  $y$  gesetzt werden mag, daraus ohne Mühe die einzelnen Reihen der Differenzen erhalten.

## §. 8.

Es sey  $y = x$ ; so wird  $y^I = x^I = x + \omega$ ;  $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$ ; u. s. f. Nimmt man also die Differenzen, so wird  $\Delta x = \omega$ ;  $\Delta x^I = \omega$ ;  $\Delta x^{II} = \omega$ ; u. c., und es sind daher die ersten Differenzen von  $x$  insgesamt beständige Größen, und die zweyten Differenzen so wie auch die dritten und alle folgende  $= 0$ . Da  $\Delta x = \omega$  ist, so kann man das Zeichen  $\Delta x$  mit Vortheil für den Buchstaben  $\omega$  setzen. Wenn also die auf einander folgenden Werthe  $x$ ;  $x^I$ ;  $x^{II}$ ;  $x^{III}$ ; u. c. einer veränderlichen Größe  $x$  in einer arithmetischen Progression stehen: so sind ihre Differenzen  $\Delta x$ ;  $\Delta x^I$ ;  $\Delta x^{II}$ ; u. c. beständige Größen und einander gleich; und folglich  $\Delta \Delta x = 0$ ;  $\Delta^3 x = 0$ ;  $\Delta^4 x = 0$ ; u. s. f.

## §. 9.

Wir haben hier für die Werthe, die  $x$  nach und nach beygelegt werden, eine arithmetische Progression angenommen, so daß die ersten Differenzen dieser Werthe beständig sind, und die zweyten Differenzen, so wie auch alle folgenden, verschwinden. Dies hängt nun zwar von unserer Willkühr ab, indem wir eben so gut jede andere Progression hätten annehmen können; allein es hat gleichwohl der Gebrauch der arithmetischen Progression vor jeder andern einen sehr großen Vorzug. Denn außerdem, daß sie unter allen die einfachste und leichteste ist, so läßt sie auch, und darauf kommt es hier vorzüglich an, alle nur mögliche Werthe, die  $x$  erhalten kann, zu. Denn legt man  $\omega$  sowohl die positiven als die negativen Werthe bey, so enthält die Reihe der Werthe

Werthe

Werthe von  $x$  alle reelle Werthe, die anstatt  $x$  gesetzt werden können; wollte man aber eine geometrische Reihe zum Grunde legen, so würde man auf keine Weise zu den negativen Werthen gelangen. Aus dieser Ursache läßt sich die Veränderlichkeit der Funktionen  $y$  aus solchen Werthen von  $x$ , die eine arithmetische Progression ausmachen, am besten beurtheilen.

§. 10.

So wie  $\Delta y = y^I - y$  ist, so lassen sich auch die folgenden Differenzen aus den Gliedern der ersten Reihe  $y; y^I; y^{II}; y^{III}; \text{rc.}$  bestimmen. Denn da

$$\Delta y^I = y^{II} - y^I$$

ist; so ist

$$\Delta \Delta y = y^{II} - 2y^I + y$$

und

$$\Delta \Delta y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$$

und folglich

$$\Delta^3 y = \Delta \Delta y^I - \Delta \Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^I + y$$

und

$$\Delta^5 y = y^V - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^I - y$$

u. s. f.

Die Zahl: Coefficienten dieser Formeln richten sich nach eben dem Gesetze, welches man bey den Potestäten des Binomiums wahrnimmt. So wie also die erste Differenz aus zwey Gliedern der Reihe  $y; y^I; y^{II}; y^{III}; \text{rc.}$  bestimmt wird: so wird die zweyte aus drey, die dritte aus vier Gliedern, und eben so alle übrigen auf eine ähnliche Art gefunden. Kennt man aber die Differenzen von  $y$  von einer

Jeden Ordnung, so lassen sich auch die Differenzen jeder Ordnung von  $y^1$ ;  $y^2$ ;  $z$ . finden.

## §. 11.

Ist daher irgend eine Funktion  $y$  gegeben, so kann man alle ihre Differenzen, die erste sowohl als die folgenden, insofern sie sich auf die Differenz  $\omega$  beziehen, um welche die Werthe von  $x$  unterschieden sind, finden. Auch hat man dazu nicht nöthig, die Reihe der Werthe von  $y$  weiter fortzusetzen. Denn so wie man die erste Differenz  $\Delta y$  findet, wenn man in  $y$  für  $x$  den Werth  $x + \omega$  setzt, und von dem gefundenen Werthe  $y^1$  die Funktion  $y$  abzieht: so erhält man die zweyte Differenz  $\Delta\Delta y$  wenn man in der ersten Differenz  $\Delta y$  den Werth  $x + \omega$  für  $x$  setzt, um  $\Delta y^1$  zu bekommen, und darauf  $\Delta y$  von  $\Delta y^1$  abzieht. Auf eine ähnliche Art gelangt man zur dritten Differenz  $\Delta^3 y$ , wenn man die Differenz der zweyten Differenz  $\Delta\Delta y$  sucht, indem man diese von dem Werthe abzieht, welchen sie bekommt, wenn man  $x + \omega$  für  $x$  setzt; und eben so findet man ferner die vierte Differenz  $\Delta^4 y$  aus der dritten, u. s. f. Ist man daher nur im Stande die erste Differenz einer jeden Funktion zu erforschen, so kann man auch die zweyte, die dritte und alle folgende Differenzen finden; indem die zweyte Differenz nichts anders, als die erste Differenz von  $\Delta y$ , so wie die dritte nichts anders als die erste Differenz von  $\Delta\Delta y$  ist; und die übrigen Differenzen sich insgesamt auf eine ähnliche Art bestimmen lassen.

## §. 12.

Wenn die Funktion  $y$  aus zwey oder mehreren Theilen zusammengesetzt und z. B.  $y = p + q + r + z$ . ist: so wird,  
weil

weil  $y^I = p^I + q^I + r^I + z.$  ist,  $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \Delta z.$  und eben so  $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r + \Delta\Delta z.$ ; und hierdurch wird die Erfindung der Differenzen, wenn die Funktion aus Theilen besteht, nicht wenig erleichtert. Ist aber die Funktion  $y$  ein Produkt aus zweien andern Funktionen  $p$  und  $q$ , oder  $y = pq$ ; so wird  $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$ , weil  $y^I = p^I q^I$ ;  $p^I = p + \Delta p$ ;  $q^I = q + \Delta q$ ; und also  $p^I q^I = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q$  ist. Ist daher  $p$  eine beständige Größe  $= a$ , so ist, weil  $\Delta a = 0$  ist, die erste Differenz der Funktion  $y = aq$  diese,  $\Delta y = a\Delta q$ , und auf eine ähnliche Art wird die zweite Differenz  $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$ , die dritte  $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$ , u. s. f.

§. 13.

Da eine jede ganze rationale Funktion ein Aggregat verschiedener Potestäten von  $x$  ist: so ist man im Stande, alle Differenzen der ganzen rationalen Funktionen zu finden, wofern man nur die Differenzen der Potestäten zu finden weiß. Aus dieser Ursach wollen wir die Differenzen der Potestäten einer veränderlichen Größe  $x$  in folgenden Exempeln zu erforschen suchen.

Da  $x^0 = 1$  ist, so ist  $\Delta x^0 = 0$ ; indem  $x^0$  nicht verändert wird, wenn man gleich  $x + \omega$  für  $x$  setzt.

Ferner haben wir gesehen, daß  $\Delta x = \omega$  und  $\Delta\Delta x = 0$  ist; und so verschwinden zugleich die Differenzen aller folgenden Ordnungen. Da dies bekannt ist, so wollen wir von der zweyten Potestät anfangen.

Erstes

## Erstes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät  $x^2$  zu finden.

Da hier  $y = x^2$  ist, so ist  $y^1 = (x + \omega)^2$ ; und folglich  $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$ , und dies ist die erste Differenz. Da ferner  $\omega$  eine beständige Größe ist, so ist  $\Delta\Delta y = 2\omega\omega$ , und  $\Delta^3 y = 0$ ;  $\Delta^4 y = 0$ ;  $\text{ic.}$

## Zweytes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät  $x^3$  zu finden.

Man setze  $y = x^3$ , so wird, weil alsdann  $y^1 = (x + \omega)^3$  ist,

$$\Delta y = 3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3$$

und dies ist die erste Differenz. Da ferner

$$\Delta xx = 2\omega x + \omega\omega$$

ist, so wird

$$\Delta \cdot 3\omega xx = 6\omega\omega x + 3\omega^3$$

und

$$\Delta \cdot 3\omega^2 x = 3\omega^3; \text{ und } \Delta \cdot \omega^3 = 0.$$

Zieht man nun das Gefundene zusammen, so wird

$$\Delta\Delta y = 6\omega^2 x + 6\omega^3; \text{ und } \Delta^3 y = 6\omega^3;$$

die übrigen Differenzen aber verschwinden.

## Drittes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät  $x^4$  zu finden.

Setzt man  $y = x^4$ , so wird, weil alsdann  $y^1 = (x + \omega)^4$  ist,

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4;$$

und

und dies ist die erste Differenz. Dann ist aber aus dem Vorhergehenden

$$\Delta \cdot 4\omega x^3 = 12\omega^2 x^2 + 12\omega^3 x + 4\omega^4$$

$$\Delta \cdot 6\omega^2 x^2 = \dots + 12\omega^3 x + 6\omega^4$$

$$\Delta \cdot 4\omega^3 x = \dots + 4\omega^4$$

$$\Delta \cdot \omega^3 = \dots + 0.$$

Vereinigt man dieses, so findet man die zweite Differenz

$$\Delta\Delta y = 12\omega^2 x^2 + 24\omega^3 x + 14\omega^4.$$

Weil nun ferner

$$\Delta \cdot 12\omega^2 x^2 = 24\omega^3 x + 12\omega^4$$

$$\Delta \cdot 24\omega^3 x = \dots + 24\omega^4$$

$$\Delta \cdot 14\omega^3 = \dots + 0$$

ist, so erhält man für die dritte Differenz

$$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$$

und endlich für die vierte

$$\Delta^4 y = 24\omega^4.$$

Da diese vierte Differenz beständig ist, so verschwinden alle folgende.

Viertes Exempel.

Die Differenzen aller Ordnungen von der Potestät  $x^n$  zu finden.

Man setze  $y = x^n$ ; und da dann  $y^I = (x + \omega)^n$ ;  $y^{II} = (x + 2\omega)^n$ ;  $y^{III} = (x + 3\omega)^n$ ;  $\text{ic.}$  ist, so erhält man durch die Entwicklung der Potestäten:

$$y = x^n$$

$$y^I = x^n + \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 x^{n-2} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$y^{II}$

$$y^{II} = x^n + \frac{n}{1} 2 \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 4 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 8 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$$y^{III} = x^n + \frac{n}{1} 3 \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 9 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 27 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$$y^{IV} = x^n + \frac{n}{1} 4 \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 16 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 64 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

Nimmt man daher die Differenzen, so wird

$$\Delta y = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$$\Delta y^I = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 3 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 7 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 5 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 19 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1} \omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 7 \omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 37 \omega^3 x^{n-3} + \text{ic.}$$

Nimmt man abermals die Differenzen, so wird

$$\Delta \Delta y$$

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 14\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

$$\Delta\Delta y^r = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 50\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

$$\Delta\Delta y^{rr} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 110\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

Setzt man die Subtraction weiter fort, so wird

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

$$\Delta^3 y^r = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 60\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

und hieraus ferner

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \text{ic.}$$

§. 14.

Damit das Gesetz, nach welchem diese Differenzen der Potestät  $x^n$  fortgehen, desto deutlicher erkannt werden möge, so wollen wir der Kürze wegen

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

D

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

u. s. f.

setzen. Ferner wollen wir folgende Tabelle machen, die zur Erfindung der einzelnen Differenzen dienen soll.

y		1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	10.
$\Delta y$		0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	10.
$\Delta^2 y$		0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	126;	254;	10.
$\Delta^3 y$		0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	1806;	5796;	10.
$\Delta^4 y$		0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824;	10.
$\Delta^5 y$		0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000;	10.
$\Delta^6 y$		0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520;	10.
$\Delta^7 y$		0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120;	10.

Man findet aber eine jede Zahl dieser Tabelle, wenn man die vorhergehende Zahl eben derselben Reihe zu der darüber stehenden Zahl addirt, und die Summe durch den Anzeiger des vorne stehenden Zeichens  $\Delta$  multiplicirt. So findet man in der Reihe, welche zu der Differenz  $\Delta^5 y$  gehört, das Glied 16800, wenn man das vorhergehende 1800 zu dem darüber stehenden 1560 addirt, und die Summe 3360 durch 5 multiplicirt.

## §. 15.

Hat man diese Tabelle verfertigt, so verhalten sich die Differenzen der Potestät  $x^n = y$  auf folgende Art:

$$\Delta y = A \omega x^{n-1} + B \omega^2 x^{n-2} + C \omega^3 x^{n-3} + D \omega^4 x^{n-4} + 10.$$

$$\Delta^2 y = 2B \omega^2 x^{n-2} + 6C \omega^3 x^{n-3} + 14D \omega^4 x^{n-4} + 10.$$

$$\Delta^3 y = 6C \omega^3 x^{n-3} + 36D \omega^4 x^{n-4} + 150E \omega^5 x^{n-5} + 10.$$

$$\Delta^4 y = 24D \omega^4 x^{n-4} + 240E \omega^5 x^{n-5} + 1560F \omega^6 x^{n-6} + 10.$$

Uebers

Ueberhaupt aber wird die Differenz der Potestät  $x^n$  von der Ordnung  $m$ , oder  $\Delta^m y$  auf folgende Art ausgedruckt.

Es sey

$$I = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1} I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2} K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3} L;$$

u. s. f.

Ferner sey

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^m + \text{ic.}$$

$$\beta = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1} m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m+1} + \text{ic.}$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1} m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-2)^{m+2} + \text{ic.}$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist

$$\Delta^m y = \alpha I \omega^m x^{n-m} + \beta K \omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L \omega^{m+2} x^{n-m-2} + \text{ic.}$$

Der Grund von diesem Ausdrucke läßt sich aus der Art, wie die verschiedenen Differenzen aus den Werthen  $y$ ;  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ; ic. gefunden werden, leicht herleiten.

## §. 16.

Hieraus erhellet, daß man, wenn der Exponent  $n$  eine ganze positive Zahl ist, endlich auf beständige Differenzen kommen muß, und daß alle darauf folgende  $= 0$  sind. So ist

$$\Delta \cdot x = \omega$$

$$\Delta^2 \cdot x^2 = 2\omega^2$$

$$\Delta^3 \cdot x^3 = 6\omega^3$$

$$\Delta^4 \cdot x^4 = 24\omega^4, \text{ und endlich}$$

$$\Delta^n \cdot x^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \omega^n$$

Es kann daher eine jede ganze rationale Funktion endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Es hat nemlich jede Funktion von  $x$  vom ersten Grade, oder  $ax + b$ , schon die erste Differenz beständig. Bey einer Funktion vom zweiten Grade hingegen, oder  $axx + bx + c$  ist die zweite Differenz beständig; bey einer Funktion vom dritten Grade ist es die dritte; bey einer vom vierten Grade die vierte, u. s. f.

## §. 17.

Es erstreckt sich aber die Art, wie wir die Differenzen der Potestät  $x^n$  gefunden haben, noch weiter, und läßt sich auch auf die Potestäten anwenden, bey welchen der Exponent  $n$  eine negative Zahl, oder ein Bruch, oder selbst eine Irrational-Zahl ist. Damit dieses deutlicher werde, wollen wir bloß die ersten Differenzen der vornehmsten von diesen Potestäten hersehen, weil das Gesetz der zweyten und der folgenden Differenzen nicht so leicht in die Augen fällt. Es ist also

$$\Delta \cdot x = \omega$$

$$\Delta \cdot x^2 = 2\omega x + \omega^2$$

$$\Delta \cdot x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$

$$\Delta \cdot x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4$$

Auf

Auf eine ähnliche Art aber ist auch

$$\Delta \cdot x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \text{rc.}$$

rc.

Ferner ist auf gleiche Weise

$$\Delta \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{rc.}$$

$$\Delta \cdot x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \text{rc.}$$

§. 18.

Es erhellet hieraus, daß diese Differenzen, wenn der Exponent von  $x$  keine ganze Zahl ist, ohne Ende fortlaufen, oder aus einer ganz unbegrenzten Anzahl von Gliedern bestehen. Es lassen sich aber dieselben gleichwohl auch durch endliche Ausdrücke darstellen. Denn da, wenn man

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ setzt, } y^r = \frac{1}{x+\omega} \text{ wird, so ist } \Delta \cdot x^{-1} =$$

$$\Delta \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}. \text{ Wenn man daher den Bruch } \frac{1}{x+\omega}$$

B 2

in

in eine Reihe verwandelt, so bekommt man den obigen Ausdruck. Auf eine ähnliche Art ist

$$\Delta \cdot x^{-2} = \Delta \cdot \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

und für die Irrational-Größen

$$\Delta \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \text{ und } \Delta \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Verwandelt man diese Ausdrücke auf die gewöhnliche Art in Reihen, so erhält man dadurch die vorhergehenden Bestimmungen.

§. 19.

Auf diese Art kann man aber auch die Differenzen der gebrochenen und irrationalen Funktionen finden. Soll z. B.

die erste Differenz der gebrochenen Funktion  $\frac{1}{aa+xx}$  gefunden

werden, so setze man  $y = \frac{1}{aa+xx}$ ; und weil nun  $y^2 =$

$$\frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} \text{ ist, so ist } \Delta y = \Delta \cdot \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega}$$

$$- \frac{1}{aa+xx} : \text{ ein Ausdruck, der ebenfalls in eine unendliche}$$

Reihe verwandelt werden kann.

Man setze nemlich

$$aa+xx = P; \text{ und } 2\omega x+\omega\omega = Q$$

so ist

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \dots$$

und

$$\Delta y = - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \dots$$

Setzt

Setzt man also für P und Q ihre Werthe, so ist:

$$\Delta y = \Delta \cdot \frac{I}{aa + xx} = -\frac{2\omega x - \omega\omega}{(aa + xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa + xx)^3} - \frac{8\omega^3 x^3 - 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x - \omega^6}{(aa + xx)^4} + \text{rc.}$$

und ordnet man die Glieder nach den Potestäten von  $\omega$ , so wird

$$\Delta \cdot \frac{I}{aa + xx} = -\frac{2\omega x}{(aa + xx)^2} + \frac{\omega^2(xx - aa)}{(aa + xx)^3} - \frac{4\omega^3(x^3 - aax)}{(aa + xx)^4} + \text{rc.}$$

§. 20.

Durch ähnliche unendliche Reihen ist man auch im Stande, die Differenzen der irrationalen Funktionen auszudrücken.

Es sey die Funktion

$$y = \sqrt{aa + xx}$$

gegeben. Da nun

$$y^2 = \sqrt{aa + xx + 2\omega x + \omega\omega}$$

ist, so setze man auch hier

$$aa + xx = P; \text{ und } 2\omega x + \omega\omega = Q.$$

Alsdann ist

$$\Delta y = \sqrt{P+Q} - \sqrt{P} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{Q^2}{8P\sqrt{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt{P}} - \text{rc.}$$

Hieraus wird

$$\Delta y = \Delta \cdot \sqrt{aa + xx} = \frac{2\omega x + \omega\omega}{2\sqrt{aa + xx}} - \frac{4\omega^2 x^2 - 4\omega^3 x - \omega^4}{8(aa + xx)\sqrt{aa + xx}} + \text{rc.}$$

oder

$$\Delta y = \frac{\omega x}{\sqrt{aa + xx}} + \frac{aa\omega^2}{2(aa + xx)\sqrt{aa + xx}} - \frac{aa\omega^3 x}{2(aa + xx)^2\sqrt{aa + xx}} + \text{rc.}$$

§ 3.

Hier:

Hieraus ziehen wir daher den Schluß, daß die Differenz einer jeden Funktion von  $x$ , die wir  $y$  nennen wollen, auf folgende allgemeine Art ausgedruckt werden könne, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{rc.}$$

und  $P, Q, R, S$  &c. gewisse Funktionen von  $x$  sind, die für einen jeden Fall aus der Funktion  $y$  hergeleitet werden können.

## §. 21.

Es sind selbst von dieser Form die transcendenten Funktionen nicht ausgeschlossen, wie aus folgenden Exempeln erhellen wird.

## Erstes Exempel.

Die erste Differenz des hyperbolischen Logarithmen von  $x$  zu finden.

Es sey  $y = 1x$ , und da alsdann  $y^r = 1(x + \omega)$  ist, so wird

$$\Delta y = y^r - y = 1(x + \omega) - 1x = 1\left(1 + \frac{\omega}{x}\right)$$

Von dergleichen Logarithmen aber wissen wir [aus dem 7ten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen] wie dieselben in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Thun wir nun solches, so ist

$$\Delta y = \Delta . 1x = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4\omega^4} + \text{rc.}$$

## Zweytes Exempel.

Die erste Differenz der Exponential-Größe  $a^x$  zu finden,

Setzt man  $y = a^x$ , so wird  $y^r = a^{x+\omega} = a^x \cdot a^\omega$ . Nun ist aber oben [Einleit. in d. Anal. des Unendl. I. B. §. 125.] gezeigt worden, daß

$a^\omega$

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega 1 a}{1} + \frac{\omega^2 (1a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (1a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

ist, und gebraucht man diesen Werth, so wird

$$\Delta. a^x = y' - y = \Delta y = \frac{a^x \omega 1 a}{1} + \frac{a^x \omega^2 (1a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^x \omega^3 (1a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Drittes Exempel.

Die Differenz des Sinus eines Bogens  $x$  zu finden, wenn der Halbmesser des Kreises  $= 1$  ist.

Es sey  $\sin. x = y$ , und folglich  $y' = \sin. (x + \omega)$ ; also

$$\Delta y = y' - y = \sin. (x + \omega) - \sin. x,$$

Nun ist aber

$$\sin. (x + \omega) = \cos. \omega \cdot \sin. x + \sin. \omega \cdot \cos. x$$

und, durch unendliche Reihen bestimmt, [nach Einl. in die Anal. des Unendl. I. B. §. 134.]

$$\cos. \omega = 1 - \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\omega^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

und

$$\sin. \omega = \omega - \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\omega^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

Gebraucht man diese Reihen, so wird

$$\Delta. \sin. x = \omega \cdot \cos. x - \frac{\omega^2}{2} \sin. x - \frac{\omega^3}{6} \cos. x + \frac{\omega^4}{24} \sin. x + \frac{\omega^5}{120} \cos. x - \dots$$

Viertes Exempel.

In einem Kreise, dessen Halbmesser  $= 1$  ist; die Differenz des Cosinus des Bogens  $x$  zu finden.

Es sey  $y = \cos. x$ , so ist, weil  $y' = \cos. (x + \omega)$  ist,

$$y' = \cos. \omega \cdot \cos. x - \sin. \omega \cdot \sin. x$$

und

$$\Delta y = \cos. \omega \cdot \cos. x - \sin. \omega \cdot \sin. x - \cos. x.$$

Gebraucht man nun wieder die vorher angeführten Reihen, so wird

$$\Delta \cdot \text{cof.} x = -\omega \cdot \text{sin.} x - \frac{\omega^2}{2} \cdot \text{cof.} x + \frac{\omega^3}{6} \cdot \text{sin.} x + \frac{\omega^4}{24} \cdot \text{cof.} x - \frac{\omega^5}{120} \cdot \text{sin.} x - \text{rc.}$$

§. 22.

Da also die erste Differenz einer jeden Funktion  $y$  von  $x$ , es mag nun dieselbe zu den algebraischen oder zu den transcendenten Funktionen gehören, eine solche Form hat, daß

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{rc.}$$

ist: so ist leicht einzusehen, daß, wenn man in der Aufsuchung der Differenzen fortgeht, die zweite Differenz von  $y$  diese Form:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + S\omega^5 + \text{rc.}$$

die dritte folgende

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + S\omega^6 + \text{rc.}$$

u. s. w.

haben werde. Hierbey ist aber zu bemerken, daß die Buchstaben  $P, Q, R, S, \text{rc.}$  keine bestimmte Werthe anzeigen, und daß überdies ein und derselbe Buchstabe bey verschiedenen Differenzen nicht gerade eben dieselbe Funktion von  $x$  bedeutet. Es sind bloß deswegen dieselben Buchstaben bey den verschiedenen Differenzen genommen worden, damit es nicht an einer hinlänglichen Anzahl verschiedener Buchstaben fehlen mögte.

Uebrigens sind diese Formen der Differenzen wohl zu merken, weil sie in der Analysis des Unendlichen den größten Nutzen gewähren.

§. 23.

§. 23.

Da ich also die Art und Weise erklärt habe, die erste Differenz einer jeden Funktion und aus derselben dann auch die Differenzen der folgenden Ordnungen zu finden, indem dieselben aus den auf einander folgenden Werthen der Funktion  $y$ , nemlich  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $y^{IV}$ ;  $\text{rc.}$  erhalten werden können: so sind wir nunmehr auch im Stande, aus den Differenzen von  $y$  von jeder Ordnung jene verschiedenen Werthe von  $y$  zu finden. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} y^I &= y + \Delta y \\ y^{II} &= y + 2\Delta y + \Delta\Delta y \\ y^{III} &= y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y \\ y^{IV} &= y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y \\ &\text{rc.} \end{aligned}$$

wo die Zahl-Coefficienten wiederum [wie §. 10.] aus der Entwicklung eines Binomiums entspringen. So wie daher  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ;  $\text{rc.}$  Werthe von  $y$  sind, die entstehen, wenn man anstatt  $x$  nach und nach die Werthe  $x + \omega$ ;  $x + 2\omega$ ;  $x + 3\omega$ ;  $\text{rc.}$  setzt, so läßt sich der Werth von  $y^{(n)}$ , der hervorgebracht wird, wenn man  $x + n\omega$  für  $x$  setzt, sogleich angeben. Es ist nemlich derselbe:

$$y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \text{rc.}$$

Hiernach lassen sich selbst die Werthe von  $y$  angeben, wenn  $n$  eine negative Zahl ist. Wird z. B.  $x - \omega$  für  $x$  gesetzt, so geht  $y$  in diesen Ausdruck über:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{rc.}$$

nimmt man aber  $x - 2\omega$  für  $x$ , so erhält man für die Funktion  $y$ :

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{rc.}$$

## §. 24.

Nun wollen wir kürzlich die umgekehrte Methode betrachten, wodurch man aus der gegebenen Differenz einer Funktion diese Funktion findet. Da dieses indeß viel schwerer ist, und öfters selbst den Gebrauch der Analysis des Unendlichen nothwendig macht: so wollen wir nur einige leichter Fälle erwägen. Zuvörderst also kann man, wenn man die Differenz einer Funktion gefunden hat, und nun wieder diese Differenz gegeben ist, dadurch, daß man rückwärts geht, aus dieser Differenz die Funktion, woraus sie entstanden ist, finden. So ist, wenn man die Funktion finden soll, deren Differenz  $a \circ$  ist, da man weiß, daß die Funktion  $a x + b$  die Differenz  $a \circ$  hat, die Antwort leicht, nemlich, daß die gesuchte Funktion  $a x + b$  sey. Hier findet man also eine beständige Größe, welche sich in der Differenz nicht befand, und welche also von unserer Willkühr abhängt. Wenn aber die Differenz einer Funktion  $P = Q$  ist, so ist auch die Differenz der Funktion  $P + A$ , (wo  $A$  jede beständige Größe bedeutet)  $= Q$ . Wenn also die Differenz  $Q$  gegeben ist, so ist die Funktion, aus welcher sie gefunden wird,  $P + A$ , und es hat daher dieselbe keinen bestimmten Werth, da  $A$  willkührlich genommen werden kann.

## §. 25.

Die gesuchte Funktion, deren Differenz gegeben ist, wollen wir Summe nennen; denn dieser Name ist sehr schicklich, theils, weil die Summe der Differenz entgegensteht, theils, weil die gesuchte Funktion in der That die Summe aller vor der Differenz vorhergehenden Werthe ist. So wie nemlich  $y' = y + \Delta y$ , und  $y'' = y + \Delta y + \Delta y'$  ist: so ist auch, (wenn man die Werthe von  $y$  rückwärts fortsetzt, und denjenigen, der zu dem Werthe  $x - \circ$  gehört, durch

durch  $y_I$ ; so wie den vorhergehenden durch  $y_{II}$ ; und die weiter vorhergehenden  $y_{III}$ ;  $y_{IV}$ ;  $y_V$ ; zc. bezeichnet, und darauf die rückwärts fortgehende Reihe mit ihren Differenzen,

$$y_V; y_{IV}; y_{III}; y_{II}; y_I; \text{r}$$

und

$$\Delta y_V; \Delta y_{IV}; \Delta y_{III}; \Delta y_{II}; \Delta y_I$$

formirt,)  $y = \Delta y_I + y_I$ ; und da  $y_I = \Delta y_{II} + y_{II}$ ; und  $y_{II} = \Delta y_{III} + y_{III}$  zc. ist, so ist ferner

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V + \text{r.}$$

oder es ist die Funktion  $y$ , deren Differenz  $\Delta y$  ist, die Summe aller der Werthe, die vor der Differenz  $\Delta y$  vorhergehen, und welche entstehen, wenn man für  $x$  die vorhergehenden Werthe  $x - \omega$ ;  $x - 2\omega$ ;  $x - 3\omega$ ; zc. setzt.

§. 26.

So wie wir nun die Differenz zu bezeichnen das Zeichen  $\Delta$  gebraucht haben: so wollen wir uns zur Bezeichnung der Summe des Zeichens  $\Sigma$  bedienen. Ist nemlich die Differenz einer Funktion  $y = z$ , so ist  $z = \Delta y$ ; und wenn  $y$  gegeben ist, so wissen wir, wie  $z$  gefunden wird. Wenn aber die Differenz  $z$  gegeben ist, und ihre Summe  $y$  gefunden werden soll, so wird  $y = \Sigma z$ ; und man findet  $y = \Sigma z$  aus der Gleichung  $z = \Delta y$ , indem man den entgegenstehenden Weg nimmt. Wegen der angeführten Gründe muß man indeß eine beständige Größe dazu setzen, so daß die Gleichung  $z = \Delta y$ , wenn umgekehrt wird,  $y = \Sigma z + C$  giebt. Da ferner die Größe  $ay$  die Differenz  $a \Delta y = az$  hat, so ist  $\Sigma az = ay$ , wosern  $a$  eine beständige Größe ist. Da also  $\Delta x = \omega$  ist, so ist  $\Sigma \omega = x + C$ , und  $\Sigma ax = ax + C$ ; und weil

weil  $\omega$  eine beständige Größe ist,  $\Sigma \omega^2 = \omega x + C$ ;  $\Sigma \omega^3 = \omega^2 x + C$ ; und so ferner.

§. 28.

Wenn wir daher die oben gefundenen Differenzen der Potestäten von  $x$  umkehren, so wird

$$\Sigma \omega = x; \text{ und also } \Sigma I = \frac{x}{\omega}.$$

Ferner haben wir

$$\Sigma(2\omega x + \omega^2) = x^2$$

und daher

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Dann ist

$$\Sigma(3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

oder

$$3\omega \Sigma xx + 3\omega^2 \Sigma x + \omega^3 \Sigma I = x^3$$

folglich

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \Sigma x - \frac{\omega^2}{3} \Sigma I$$

oder

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2} \Sigma x^2 - \omega^2 \Sigma x - \frac{\omega^3}{4} \Sigma I$$

und setzt man darin für  $\Sigma x^2$ ,  $\Sigma x$  und  $\Sigma I$  die dafür gefundenen Werthe, so wird

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Da ferner

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega \Sigma x^3 - 2\omega^2 \Sigma x^2 - \omega^3 \Sigma x - \frac{\omega^4}{5} \Sigma I$$

ist,

ist, so findet man, wenn man wieder die bereits gefundenen Werthe gebraucht,

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

Auf eine ähnliche Art kann man weiter fortgehen, und dann findet man

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

und

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{8}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x;$$

indef wird weiter unten ein leichterer Weg, diese Ausdrücke zu finden, vorkommen.

§. 28.

Wenn also die gegebene Differenz eine ganze rationale Funktion von  $x$  ist, so kann man ihre Summe (oder die Funktion, wovon sie die Differenz ist) aus diesen Formeln ohne Mühe finden. Da nemlich die Differenz aus mehreren Potestäten von  $x$  bestehen wird, so suche man die Summe eines jeden Gliedes, und vereinige darauf das Gefundene zu einem Aggregate.

Erstes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz =  $axx + bx + c$  ist.

Man suche die Summe der einzelnen Glieder nach den vorhin gefundenen Formeln. Dadurch findet man

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

$$\Sigma bx = \dots \dots \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

$$\Sigma c = \dots \dots \dots \frac{cx}{\omega}$$

Dann

Dann vereinige man diese Summen, wodurch denn

$$\Sigma(axx \dagger bx \dagger c) = \frac{a}{3\omega} x^3 - \frac{a\omega - b}{2\omega} x^2 \dagger \frac{a\omega^2 - 3b\omega \dagger 6c}{6\omega} x \dagger C$$

wird, und dies ist die Funktion, deren Differenz  $axx \dagger bx \dagger c$  ist

### Zweytes Exempel.

Man soll die Funktion finden, deren Differenz  $x^4 - 2\omega^2 xx \dagger \omega^4$  ist.

Verfährt man hier auf eine ähnliche Art, so wird

$$\begin{aligned} \Sigma x^4 &= \frac{1}{5\omega} x^5 - \frac{1}{2} x^4 \dagger \frac{1}{3} \omega x^3 - \frac{1}{30} \omega x^3 \\ - \Sigma 2\omega^2 x^2 &= \dots - \frac{2\omega}{3} x^3 \dagger \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3} x \\ \dagger \Sigma \omega^4 &= \dots \dots \dots \omega^3 x \end{aligned}$$

und die gesuchte Funktion ist daher

$$\frac{1}{5\omega} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} \omega x^3 \dagger \omega^2 x^2 \dagger \frac{19}{30} \omega^3 x \dagger C.$$

Denn setzt man darin  $x \dagger \omega$  für  $x$  und zieht man von dem dadurch gefundenen Ausdrucke jenen Ausdruck ab, so bleibt die gegebene Differenz  $x^4 - 2\omega^2 x^2 \dagger \omega^4$  übrig.

§. 29.

Wenn man die Summen, die wir für die Potestäten von  $x$  gefunden haben, mit Aufmerksamkeit betrachtet, so nimmt man zwar in den ersten, zweyten und dritten Gliedern derselben bald das Gesetz wahr, nach welchem sie fortschreiten: allein bey den folgenden Gliedern ist dieses Gesetz nicht so deutlich, daß man daraus die Summe der allgemeinen Potestät  $x^n$  sollte schließen können. In der Folge aber wird bewiesen werden, daß

$\Sigma x^n$

$$\Sigma x^n =$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n\omega}{2 \cdot 3} x^{n-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-3} \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^{n-5} \\ & - \frac{3}{10} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-6)\omega^7}{2 \cdot 3 \dots 8 \cdot 9} x^{n-7} \\ & + \frac{5}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-8)\omega^9}{2 \cdot 3 \dots 10 \cdot 11} x^{n-9} \\ & - \frac{691}{210} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-10)\omega^{11}}{2 \cdot 3 \dots 12 \cdot 13} x^{n-11} \\ & + \frac{35}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-12)\omega^{13}}{2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 15} x^{n-13} \\ & - \frac{3617}{30} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-14)\omega^{15}}{2 \cdot 3 \dots 16 \cdot 17} x^{n-15} \\ & + \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-16)\omega^{17}}{2 \cdot 3 \dots 18 \cdot 19} x^{n-17} \\ & - \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-18)\omega^{19}}{2 \cdot 3 \dots 20 \cdot 21} x^{n-19} \\ & + \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-20)\omega^{21}}{2 \cdot 3 \dots 22 \cdot 23} x^{n-21} \\ & - \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-22)\omega^{23}}{2 \cdot 3 \dots 24 \cdot 25} x^{n-23} \\ & + \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-24)\omega^{25}}{2 \cdot 3 \dots 26 \cdot 27} x^{n-25} \\ & - \frac{23749461029}{30} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-26)\omega^{27}}{2 \cdot 3 \dots 28 \cdot 29} x^{n-27} \\ & + \frac{8615841276005}{462} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-28)\omega^{29}}{2 \cdot 3 \dots 30 \cdot 31} x^{n-29} \end{aligned}$$

κ. † C.

Deu

Bei dieser Progression sind die Coefficienten, die aus bloßen Zahlen bestehen, das wichtigste; allein die Art, wie man sie findet, kann hier noch nicht gelehret werden.

## §. 30.

Das aber fällt in die Augen, daß dieser Ausdruck der Summe, wenn  $n$  keine ganze positive Zahl ist, ohne Ende fortlaufen muß, und daß alsdann die Summe durch keine endliche Form dargestellt werden kann. Uebrigens bemerke man, daß nicht alle Potestäten von  $x$ , die niedriger sind als die gegebene  $x^n$ , vorkommen. Es fehlen nemlich die Glieder  $x^{n-2}$ ,  $x^{n-4}$ ,  $x^{n-6}$ ,  $x^{n-8}$ ,  $\text{rc.}$  weil ihre Coefficienten  $= 0$  sind, obgleich der Coefficient des zweyten Gliedes des  $x^n$  diesem Gesetze nicht folgt, sondern  $= -\frac{1}{2}$  ist. Es können also die Summen der Potestäten, deren Exponenten negative oder gebrochene Zahlen sind, vermittelst dieses Ausdrucks in der gewöhnlichen unendlichen Form dargestellt werden, den Fall ausgenommen, wenn  $n = -1$  ist, weil alsdenn das Glied  $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ , weil  $n+1=0$  wird, unendlich ist. Setzt man z. B.  $n = -2$ , so wird

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^3}{5x^5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\omega}{7x^7} \\ + \frac{3}{10} \cdot \frac{\omega^7}{9x^9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210} \cdot \frac{\omega^{11}}{13x^{13}} - \frac{35}{2} \cdot \frac{\omega^{13}}{15x^{15}} \\ + \frac{3617}{30} \cdot \frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \text{rc.} \end{aligned}$$

## §. 31.

Wenn also die gegebene Differenz irgend eine Potestät von  $x$  ist, so kann man hiernach beständig die Summe derselben

selben angeben, oder die Funktion, wovon sie eine Differenz ist, darstellen. Wenn aber die gegebene Differenz eine andere Form hat, so daß man sie nicht in Potestäten von  $x$ , als in Theile, zerfallen kann: so ist es häufig sehr schwer, und oft unmöglich, ihre Summe zu finden, es sey denn daß man wüßte, daß sie aus einer gewissen Funktion entstanden sey. Aus dieser Ursache ist es sehr nützlich, von so vielen Funktionen als möglich die Differenzen zu suchen und sich dieselben zu merken, um, wenn künftig eine solche Differenz vorkommen sollte, die Summe derselben, oder die Funktion, woraus sie entstanden, sogleich angeben zu können. Es wird indeß die Betrachtung des Unendlichen mehrere Regeln an die Hand geben, wodurch die Erfindung der Summen ungemein erleichtert wird.

## §. 32.

Wenn aber die gegebene Differenz aus einfachen Faktoren besteht, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so kann man die gesuchte Summe auf eine leichtere Art finden. Sollte z. B. die Differenz der Funktion  $(x + \omega)(x + 2\omega)$  gefunden werden: so würde diese Funktion, wenn man darin  $x + \omega$  für  $x$  setzte, in diese  $(x + 2\omega)(x + 3\omega)$  übergehen, und ihre Differenz also  $2\omega(x + 2\omega)$  seyn. Wird also umgekehrt die Differenz  $2\omega(x + 2\omega)$  gegeben, so ist ihre Summe  $(x + \omega)(x + 2\omega)$  und daraus

$$\Sigma(x + 2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + \omega)(x + 2\omega).$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn die Funktion  $(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega)$  gegeben ist, da dieselbe die Differenz  $2\omega(x + (n + 1)\omega)$  hat,

$$\Sigma(x + (n + 1)\omega) = \frac{1}{2\omega}(x + n\omega)(x + (n + 1)\omega).$$

Eulers Differenz. Rechn. 1. Th.      E      und

und

$$\Sigma (x + n\omega) = \frac{1}{2\omega} (x + (n-1)\omega) (x + n\omega).$$

§. 33.

Wenn die Funktion aus mehreren Faktoren besteht, so  
Daß

$$y = (x + (n-1)\omega) (x + n\omega) (x + (n+1)\omega)$$

ist, so wird, da alsdenn

$$y' = (x + n\omega) (x + (n+1)\omega) (x + (n+2)\omega)$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = 3\omega (x + n\omega) (x + (n+1)\omega)$$

und also

$$\Sigma (x + n\omega) (x + (n+1)\omega) = \frac{1}{3\omega} (x + (n-1)\omega) (x + n\omega) (x + (n+1)\omega).$$

Auf eben die Art findet man

$$\Sigma (x + n\omega) (x + (n+1)\omega) (x + (n+2)\omega) = \frac{1}{4\omega} (x + (n-1)\omega) + (x + n\omega) (x + (n+1)\omega) (x + (n+2)\omega);$$

und hieraus fällt die Regel zur Erfindung der Summen, wenn die Differenz aus mehreren Faktoren von dieser Art besteht, von selbst in die Augen. Ob nun gleich diese Differenzen ganze rationale Funktionen sind, so werden doch ihre Summen auf dem jetzt beschriebenen Wege leichter als nach der vorhergehenden Methode gefunden.

§. 34.

Hierdurch ist nun auch der Weg zur Erfindung der Summen der gebrochenen Differenzen gebahnt. Denn ist der Bruch

$$y = \frac{1}{x + n\omega}$$

gegeben

gegeben, so wird, weil

$$y^1 = \frac{1}{x + (n+1)\omega}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{1}{x + (n+1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega} = \frac{-\omega}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + n\omega}$$

Es sey ferner

$$y = \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}$$

so wird, weil

$$y^1 = \frac{1}{(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

ist, die Differenz

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

und folglich

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)} = \frac{-1}{2\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)}$$

Auf eine ähnliche Art ist ferner

$$\Sigma \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)(x + (n+3)\omega)} = \frac{-1}{3\omega} \cdot \frac{1}{(x + n\omega)(x + (n+1)\omega)(x + (n+2)\omega)}$$

§. 35.

Dieser Art die Summe zu finden ist deswegen wohl zu merken, weil man die Summen von dergleichen Differenzen

zen auf dem vorhin beschriebenen Wege nicht erhält. Hat aber die Differenz außerdem auch einen Zähler, oder stehen die Faktoren des Nenners nicht in einer arithmetischen Progression, so ist der sicherste Weg die Summen zu erforschen der, daß man die gegebene Differenz in ihre einfachen Brüche auflöst. Denn ob man gleich nicht jeden für sich summiren kann, so kann man doch, wenn man immer zwey und zwey mit einander verbindet, die Summe so ofte finden, als solches möglich ist. Es kommt dabey nemlich nur darauf an, ob man die Summe vermittelst dieser Formel

$$\sum \frac{1}{(x + (n + 1)\omega)} - \sum \frac{1}{x + n\omega} = \frac{1}{x + n\omega}$$

zu finden im Stande ist. Denn ist man gleich von diesen beyden Summen keine für sich zu finden im Stande, so kann man doch ihre Differenz angeben.

## §. 36.

In diesen Fällen kommt es also vorzüglich auf die Auflösung eines jeden Bruchs in seine einfachen Brüche an, wozu in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen eine ausführliche Anweisung gegeben worden ist. Jetzt wollen wir an einigen Beyspielen zeigen, wie man vermittelst derselben die Summen findet.

## Erstes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3x + 2\omega}{x(x + \omega)(x + 2\omega)} \text{ ist,}$$

Man löse diese Differenz in ihre einfachen Brüche auf, welche sind

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{x + \omega} - \frac{2}{\omega} \cdot \frac{1}{x + 2\omega}.$$

Da

Da nun nach der vorhergehenden Formel

$$\sum \frac{1}{x + n\omega} = \sum \frac{1}{x + (n+1)\omega} - \frac{1}{x + n\omega}$$

ist, so wird

$$\sum \frac{1}{x} = \sum \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x}$$

Es ist daher die gesuchte Summe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \sum \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \sum \frac{1}{x + \omega} - \frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x + 2\omega} &= \frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x + \omega} - \\ &\frac{2}{\omega} \sum \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{\omega x} \end{aligned}$$

Da aber

$$\sum \frac{1}{x + \omega} = \sum \frac{1}{x + 2\omega} - \frac{1}{x + \omega}$$

ist, so wird die gesuchte Summe

$$-\frac{1}{\omega x} - \frac{2}{\omega(x + \omega)} = \frac{-3x - \omega}{\omega x(x + \omega)}$$

### Zweytes Exempel.

Man soll die Summe finden, deren Differenz

$$\frac{3\omega}{x(x + 3\omega)} \text{ ist.}$$

Setzt man diese Differenz = z, so ist z =  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3\omega}$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum z &= \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{x + 3\omega} = \sum \frac{1}{x + \omega} - \sum \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x} \\ &= \sum \frac{1}{x + 2\omega} - \sum \frac{1}{x + 3\omega} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega} \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \omega} - \frac{1}{x + 2\omega} \end{aligned}$$

⊖ 3

und

und dies ist die gesuchte Summe. So oft sich also auf diese Art die summirenden Zeichen  $\Sigma$  endlich einander aufheben, so oft lassen sich die Summen der gegebenen Differenzen finden; wenn aber diese Vernichtung nicht erhalten werden kann, so ist dies ein Zeichen, daß man die Summe nicht zu finden im Stande ist.





## Zweytes Capitel.

Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

§. 37.

Daß die Natur der Reihen durch die Differenzen am deutlichsten vor Augen gelegt werden könne, ist selbst aus den ersten Anfangs-Gründen bekannt. Die vornehmste Eigenschaft der arithmetischen Progression, welche unter allen Reihen zuerst betrachtet zu werden pflegt, ist die, daß ihre ersten Differenzen einander gleich, und folglich die zweyten Differenzen, so wie auch alle übrigen Nullen sind. Dann giebt es Reihen, deren zweyte Differenzen erst einander gleich werden, und die man deswegen sehr bequem mit dem Namen der Reihen der zweyten Ordnung beleet, so wie man die arithmetischen Reihen Reihen der ersten Ordnung nennt. Reihen der dritten Ordnung sind demnach solche, deren dritte Differenzen beständig sind, und zu der vierten und den folgenden Ordnungen rechnet man diejenigen, die erst die vierte oder eine von den folgenden Differenzen beständig haben.

§. 38.

In dieser Eintheilung sind unendlich viele Arten von Reihen begriffen, und gleichwohl gehören nicht alle Arten der Reihen darunter. Es giebt nemlich unendlich viel Reihen,

hen, bey denen man, wenn man die Differenzen aufsucht, nie auf beständige Differenzen kommt. Hieher gehdren aufer unzahligen andern die geometrischen Progressionen, die nie beständige Differenzen geben, wie man an folgendem Beyspiele sehen kann:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

Denn da die Reihen der Differenzen jeder Ordnung der gegebenen Reihe gleich werden, so läßt sich gar keine Gleichheit der Differenzen gedenken. Man muß daher mehrere Classen von Reihen annehmen, und eine davon enthält die Reihen, die endlich auf beständige Differenzen reducirt werden, als Gattungen unter sich. Diese Classe nun ist die, welche wir in dem gegenwärtigen Capitel genauer untersuchen wollen.

§. 39.

Es werden aber zur Erkennung der Natur der Reihen vorzüglich zwey Stücke erfordert, das allgemeine Glied und die Summe oder das summirende Glied. Das allgemeine Glied ist ein unbestimmter Ausdruck, welcher jedes Glied der Reihe unter sich begreift, und folglich eine solche Function der veränderlichen Größe  $x$ , daß man daraus, wenn man  $x = 1$  setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man  $x = 2$  setzt, das zweite Glied der Reihe, wenn man  $x = 3$  setzt, das dritte Glied der Reihe, wenn man  $x = 4$  setzt, das vierte Glied der Reihe u. s. w. erhält. Kennt man also das allgemeine Glied, so kann man jedes Glied der Reihe finden, ohne dabey auf das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe auf einander folgen, zu sehen. Setzt man

j. D.

z. B.  $x = 1000$ , so findet man sogleich das tausendste Glied.  
So ist von dieser Reihe

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ꝛc.

das allgemeine Glied  $= 2xx - x$ . Denn setzt man darin  
 $x = 1$ , so erhält man daraus das erste Glied 1; setzt man  
 $x = 2$ , so bekommt man das zweite Glied 6; setzt man  
 $x = 3$ , so gelangt man zu dem dritten Gliede 15; u. s. f.  
Hieraus erhellet, daß das hundertste Glied dieser Reihe, wo  
man also  $x = 100$  nehmen muß  $= 2 \cdot 10000 - 100 = 19900$   
seyn werde.

§. 40.

Anzeiger oder Exponenten heißen bey jeder Reihe die  
Zahlen, welche anzeigen, das wievielte Glied ein jedes Glied  
in der Ordnung ist. So ist der Anzeiger des ersten Gliedes  
des 1, des zweiten 2, des dritten 3, u. s. f. Daher pflegt  
man die Anzeiger über die einzelnen Glieder der Reihe zu  
schreiben, wie hier

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ꝛc.

Glieder.

A, B, C, D, E, F, G, H, I, ꝛc.

So sieht man gleich, daß G das siebente Glied der Reihe  
ist, weil es den Anzeiger 7 hat. Hiernach ist das allgemei-  
ne Glied nichts anders als dasjenige Glied der Reihe, des-  
sen Anzeiger oder Exponent die unbestimmte Zahl  $x$  ist.  
Zuvörderst wollen wir nun zeigen, wie man von jeder Reihe,  
deren erste oder zweite oder irgend welche von den folgenden  
Differenzen beständig sind, das allgemeine Glied finden  
könne; und dann zur Erforschung der Summe fortgehen.

## §. 41.

Wir wollen von der ersten Ordnung anfangen, welche die arithmetischen Progressionen enthält, deren erste Differenzen beständig sind. Es sey also  $a$  das erste Glied der Reihe, und  $b$  das erste Glied der Reihe der Differenzen, welchem alle folgende Glieder gleich sind. Hiernach wird die Reihe also beschaffen seyn

Anzeiger,

1, 2, 3, 4, 5, 6,  $\dots$ 

Glieder,

 $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, a + 5b, \dots$ 

Differenzen,

 $b, b, b, b, b, \dots$ 

Man sieht hier bey dem ersten Anblicke, daß das Glied, dessen Anzeiger  $= x$  ist,  $a + (x - 1)b$ , und also das allgemeine Glied  $= bx + a - b$  seyn wird; und es ist daher das allgemeine Glied aus den ersten Gliedern theils der Reihe selbst, theils der Reihe der Differenzen zusammengesetzt. Wenn man aber das zweite Glied der Reihe  $a + b = a^1$  setzt, so wird, weil alsdenn  $b = a^1 - a$  ist, das allgemeine Glied  $= (a^1 - a)x + 2a - a^1 = a^1(x - 1) - a(x - 2)$ . Kennt man daher das erste und zweite Glied einer arithmetischen Progression, so kann man daraus das allgemeine Glied formiren.

## §. 42.

Es sey nunmehr das erste Glied der Reihe der zwenten Ordnung  $= a$ ; das erste Glied der Reihe der ersten Differenzen  $= b$ , und das erste Glied der Reihe der zwenten Differenzen  $= c$ . Bey diesen Annahmen wird die Reihe nebst ihren Differenzen folgende Gestalt haben:

Anzei

Anzeiger,

1, 2, 3, 4, 5, 6,  $\infty$ .

Glieder,

$a$ ;  $a+b$ ;  $a+2b+c$ ;  $a+3b+3c$ ;  $a+4b+6c$ ;  $a+5b+10c$ ;  $\infty$ .

Erste Differenzen,

$b$ ;  $b+c$ ;  $b+2c$ ;  $b+3c$ ;  $b+4c$ ;  $\infty$ .

Zweyte Differenzen,

$c$ ,  $c$ ,  $c$ ,  $c$ ,  $\infty$ .

Hier lehrt der Anblick, daß das Glied, welches den Anzeiger

$x$  hat,  $= a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c$  ist, und dieses

ist das allgemeine Glied der gegebenen Reihe. Setzt man aber das zweyte Glied dieser Reihe  $= a^1$ , und das dritte  $= a^2$ ; so wird, (weil  $b = a^1 - a$ ; und  $c = a^2 - 2a^1 + a$  ist, wie aus der Natur der Differenzen [§. 10.] erhellet,) das allgemeine Glied:

$$a + (x-1)(a^1 - a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} (a^2 - 2a^1 + a)$$

und dieses läßt sich auf diese Form

$$\frac{a^2(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - \frac{2a^1(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2} + \frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

oder auf diese

$$\frac{a^2}{2} (x-1)(x-2) - \frac{2a^1}{2} (x-1)(x-3) + \frac{a}{2} (x-2)(x-3)$$

oder endlich auf diese bringen

$$\frac{1}{2} (x-1)(x-2)(x-3) \left( \frac{a^2}{x-3} - \frac{2a^1}{x-2} + \frac{a}{x-1} \right)$$

und es wird also das allgemeine Glied aus dreyen Gliedern der Reihe bestimmt.

§. 43.

Es sey  $a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \text{ic.}$  eine Reihe der dritten Ordnung; ihre ersten Differenzen  $b, b^I, b^{II}, b^{III}, \text{ic.}$  ihre zweyten Differenzen  $c, c^I, c^{II}, c^{III}, \text{ic.}$  und ihre vierten Differenzen  $d, d, d, \text{ic.}$  weil diese beständig sind.

Anzeiger.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ic.

Glieder.

 $a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \text{ic.}$ 

Erste Differenzen.

 $b, b^I, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, \text{ic.}$ 

Zweyte Differenzen.

 $c, c^I, c^{II}, c^{III}, \text{ic.}$ 

Dritte Differenzen.

 $d, d, d, \text{ic.}$ 

Da  $a^I = a + b$ ;  $a^{II} = a + 2b + c$ ;  $a^{III} = a + 3b + 3c + d$ ;  $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$ ; ic. ist: so ist das allgemeine Glied, oder dasjenige, dessen Anzeiger  $x$  ist

$$a + \frac{(x-1)}{1}b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d$$

und auf diese Art wird das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt. Da aber

$b = a^I - a$ ;  $c = a^{II} - 2a^I + a$ ;  $d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^I - a$  ist: so erhält man durch die Substitution dieser Werthe für das allgemeine Glied den Ausdruck

$$a^{III} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3a^{II} \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 3a^I \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

welcher auch auf folgende Form reducirt werden kann:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left( \frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^I}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right)$$

§. 44.

§. 44.

Es seyen endlich allgemein für die Reihen aller Ordnungen

die Anzeiger

1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.

die Glieder

a, a<sup>i</sup>, a<sup>ii</sup>, a<sup>iii</sup>, a<sup>iv</sup>, a<sup>v</sup>, ꝛc.

die ersten Differenzen

b, b<sup>i</sup>, b<sup>ii</sup>, b<sup>iii</sup>, b<sup>iv</sup>, ꝛc.

die zweyten Differenzen

c, c<sup>i</sup>, c<sup>ii</sup>, c<sup>iii</sup>, ꝛc.

die dritten Differenzen

d, d<sup>i</sup>, d<sup>ii</sup>, ꝛc.

die vierten Differenzen

e, e<sup>i</sup>, ꝛc.

die fünften Differenzen

f, ꝛc.

so wird das allgemeine Glied aus dem ersten Gliede der Reihe, und aus den ersten Gliedern der Reihen der Differenzen b, c, d, e, f, ꝛc. auf diese Art ausgedruckt

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \text{ꝛc.}$$

bis man auf beständige Differenzen kommt. Wenn man also nie auf beständige Differenzen kommt, so ist dieses ein Kennzeichen, daß das allgemeine Glied nicht anders als durch einen unendlichen Ausdruck dargestellt werden kann.

§. 45.

Da die Differenzen aus den Gliedern der gegebenen Reihe formirt werden, so erhält man, wenn man die Werthe derselben substituirt, das allgemeine Glied auf eine solche Art ausgedruckt, als wir es bey den Reihen der ersten, zweyten und dritten Ordnung gehabt haben. Es ist nemlich das allgemeine Glied für die Reihen der vierten Ordnung

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\dagger \left( \frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} \dagger \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^I}{x-2} \dagger \frac{a}{x-1} \right)$$

und hieraus läßt sich das Gesetz, nach welchem die allgemeinen Glieder der Reihen der folgenden Ordnungen zusammengesetzt werden müssen, leicht abnehmen. Es erhellet aber hieraus, daß das allgemeine Glied für jede Ordnung eine ganze rationale Funktion von  $x$  ist, worin die höchste Dimension von  $x$  mit der Ordnung, zu welcher die Reihe gehdrt, übereinstimmt. So ist das allgemeine Glied einer Reihe der ersten Ordnung eine Funktion vom ersten Grade, das allgemeine Glied einer Reihe der zweyten Ordnung eine Funktion vom zweyten Grade und so ferner.

§. 46.

Die Differenzen aber entspringen, wie wir vorhin gesehen haben, aus den Gliedern der Reihe auf die Art, daß

$$b = a^I - a$$

$$b_I = a^{II} - a_I$$

$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$

u.

$$c = a^{II} - 2a^I \dagger a$$

$$c_I = a^{III} - 2a^{II} \dagger a_I$$

$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} \dagger a^{II}$$

u.

d

$$\begin{aligned} d &= a^{III} - 3a^{II} + 3a^I - a \\ d^I &= a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^I \\ d^{II} &= a^V - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Ist. Da also in den Reihen der ersten Ordnung alle Werthe von  $c = 0$  sind, so ist

$a^{II} = 2a^I - a$ ;  $a^{III} = 2a^{II} - a^I$ ;  $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$ ; ꝛc. woraus erhellet, daß diese Reihen auch zu den wiederkehrenden Reihen gehören, deren Beziehungs-Scale 2, — 1 ist. Da ferner in den Reihen der zweyten Ordnung alle Werthe von  $d = 0$  sind, so ist

$a^{III} = 3a^{II} - 3a^I + a$ ;  $a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^I$ ; ꝛc. und es sind daher auch diese Reihen wiederkehrende Reihen, deren Beziehungs-Scale 3, — 3, + 1 ist. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß alle Reihen dieser Classe, sie mögen zu einer Ordnung gehören, zu welcher sie wollen, zugleich wiederkehrende Reihen sind, und zwar auf die Art, daß ihre Beziehungs-Scale aus den Coefficienten der Potestät des Binomiums besteht, welche um einen Grad höher ist, als die Ordnung, zu welcher die Reihe gehört.

§. 47.

Da aber für die Reihen der ersten Ordnung auch alle Werthe von  $d$  und  $e$ , so wie auch aller folgenden Differenzen  $= 0$  sind, so ist auch in diesen Reihen

$$\begin{aligned} a^{III} &= 3a^{II} - 3a^I + a \\ a^{IV} &= 3a^{III} - 3a^{II} + a^I \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a^{IV} &= 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^I - a \\ a^V &= 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^I \\ &\text{+ ꝛc.} \end{aligned}$$

Es gehören daher auch in dieser Rücksicht diese Reihen zu den wiederkehrenden, und zwar auf unendlich viele Arten, da die Beziehungs-Scale

$$3, -3, \dagger 1; 4, -6, \dagger 4, -1; 5, -10, \dagger 10, -5, \dagger 1; \\ \text{ic.}$$

seyn kann. Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich, daß eine jede Reihe der Classe, mit deren Untersuchung wir uns jetzt beschäftigen, auf unzählige Arten eine wiederkehrende Reihe ist; indem die Beziehungs-Scale

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \dagger \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ \dagger \text{ic.}$$

ist, wenn nur  $n$  eine ganze und eine größere Zahl bedeutet, als diejenige, welche die Ordnung der Reihe anzeigt. Es kann daher diese Reihe auch aus der Entwicklung eines Bruchs erhalten werden, dessen Nenner  $(1-y)^n$  ist, wie wir solches in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen bei der Betrachtung der wiederkehrenden Reihen ausführlich gezeigt haben.

## §. 48.

So wie wir gesehen haben, daß die allgemeinen Glieder aller Reihen dieser Classe ganze rationale Funktionen von  $x$  sind: so läßt sich auch umgekehrt zeigen, daß alle Reihen, deren allgemeine Glieder dergleichen Funktionen von  $x$  sind, zu dieser Classe gehören, und endlich auf beständige Differenzen gebracht werden. Ist das allgemeine Glied eine Funktion vom ersten Grade,  $ax + b$  so hat die daraus entspringende Reihe, weil sie eine Reihe der ersten Ordnung oder eine arithmetische Progression ist, die ersten Differenzen beständig. Ist hingegen das allgemeine Glied eine Funktion vom zweyten Grade,  $axx + bx + c$ ; so gehört die Reihe,

Reihe, die daraus entspringt, wenn man darin nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, *ic.* für  $x$  setzt, zu den Reihet der zweiten Ordnung, deren zweite Differenzen beständig sind. Auf eine ähnliche Art giebt das allgemeine Glied vom dritten Grade  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  eine Reihe der dritten Ordnung und so ferner.

§. 49.

Man kann nemlich aus dem allgemeinen Gliede nicht bloß alle Glieder der Reihe selbst, sondern auch die Reihet der Differenzen, der ersten sowohl als der folgenden finden. Denn so wie man das erste Glied der Reihe der Differenzen erhält, wenn man das erste Glied der Reihe von dem zweyten abzieht, und das zweyte, wenn man das zweyte Glied der Reihe von dem dritten subtrahirt: so findet man auch das Glied in der Reihe der Differenzen, dessen Anzeiger  $x$  ist, wenn man das Glied der Reihe, welches den Anzeiger  $x$  hat, von dem folgenden, dessen Anzeiger  $x + 1$  ist, abzieht. Wenn man also in dem allgemeinen Gliede  $x + 1$  anstatt  $x$  setzt, und das allgemeine Glied von diesem Werthe subtrahirt: so bleibt das allgemeine Glied der Reihe der Differenzen übrig. Ist daher  $X$  das allgemeine Glied der Reihe, so ist seine Differenz  $\Delta X$  welche man auf die im vorhergehenden Capitel beschriebene Art findet, wenn man  $\omega = 1$  setzt, das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen; und auf eine ähnliche Art wird  $\Delta\Delta X$  das allgemeine Glied der Reihe der zweyten Differenzen,  $\Delta^3 X$  das allgemeine Glied der Reihe der dritten Differenzen, und so weiter.

§. 50.

Wenn aber das allgemeine Glied  $X$  eine ganze rationale Funktion von  $x$  ist, so daß darin die höchste Potestät von  $x$  den Exponenten  $n$  hat: so ist nach dem vorhergehenden Capitel

Eulers Differenz. Rechn. I. Th.

D

pitel

pitel die Differenz  $\Delta X$  eine Funktion von einem um 1 niedrigeren Grade, oder vom Grade  $n-1$ . Ferner ist  $\Delta\Delta X$  eine Funktion vom Grade  $n-2$ ;  $\Delta^3 X$  eine Funktion vom Grade  $n-3$ ; u. s. f. Wenn daher  $X$  eine Funktion vom ersten Grade, wie  $ax + b$  ist: so ist seine Differenz  $\Delta X$  eine beständige Größe  $= b$ ; und da dieselbe das allgemeine Glied der Reihe der ersten Differenzen ist, so erhellet, daß die Reihe, deren allgemeines Glied  $X$  eine Funktion vom ersten Grade ist, zu den arithmetischen Reihen oder zur ersten Ordnung gehört. Auf eine ähnliche Art gehört die Reihe, deren allgemeines Glied  $X$  eine Funktion vom zweyten Grade ist, weil  $\Delta\Delta X$  eine beständige Größe wird, und also die zweyten Differenzen beständig sind, zu den Reihen der zweyten Ordnung; und überhaupt jede Reihe, die aus einem allgemeinen Gliede  $X$  entspringt, zu der Ordnung, deren Exponent dem höchsten Exponenten des allgemeinen Gliedes gleich ist.

## §. 51.

Aus diesem Grunde haben die Reihen der Potestäten der natürlichen Zahlen beständige Differenzen, wie aus folgender Tabelle erhellet.

## Erste Potestäten.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

## Erste Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10.

## Zweyte Potestäten.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 100.

## Erste Differenzen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

## Zweyte Differenzen.

2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 10.

Dritte

Dritte Potestäten.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, ꝛc.

Erste Differenzen.

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

12, 18, 24, 30, 36, 42, ꝛc.

Dritte Differenzen.

6, 6, 6, 6, 6, ꝛc.

Vierte Potestäten.

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, ꝛc.

Erste Differenzen.

15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, ꝛc.

Zweyte Differenzen.

50, 110, 194, 302, 434, 590, ꝛc.

Dritte Differenzen.

60, 84, 108, 132, 158, ꝛc.

Vierte Differenzen.

24, 24, 24, 24, ꝛc.

Was wir also in dem vorhergehenden Capitel von der Erfindung der Differenzen einer jeden Ordnung gesagt haben, das dient hier zur Erfindung der allgemeinen Glieder für alle Differenzen, die aus den Reihen entspringen.

§. 52.

Wenn das allgemeine Glied irgend einer Reihe bekannt ist, so kann man vermittelst desselben nicht bloß alle Glieder dieser Reihe finden, sondern auch die Reihe rückwärts fortsetzen, und die Glieder, deren Exponenten negative Zahlen sind, darstellen, indem man für  $x$  negative Zahlen setzt. Ist

z. B. das allgemeine Glied  $\frac{x^x + 3^x}{2}$ , so erhält man, wenn man für  $x$  sowohl die negativen als die positiven Anzeiger setzt, folgende Reihe:

Anzeiger.

1 2c. -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2c.

Reihe.

1 2c. +5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, 2c.

Erste Differenzen.

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2c.

Zweyte Differenzen.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2c.

Da also das allgemeine Glied aus den Differenzen formirt wird, so kann auch jede Reihe aus den Differenzen rückwärts fortgesetzt werden; und wenn die Differenzen endlich beständige Größen werden, so kann solches in bestimmten Gliedern, ist dieses aber nicht, durch unendliche Ausdrücke geschehen. Ja man kann aus dem allgemeinen Gliede selbst die Glieder finden, deren Anzeiger gebrochene Zahlen sind, worin die Interpolation der Reihen besteht.

§. 53.

Nach diesen Betrachtungen über das allgemeine Glied der Reihen wollen wir zur Untersuchung der Summe oder des summirenden Gliedes der Reihen aller Ordnungen fortgehen. Es ist aber das summirende Glied einer Reihe, eine Funktion von  $x$ , welche der Summe so vieler Glieder gleich ist, als die Zahl  $x$  Einheiten enthält. Demnach besteht die Natur des summirenden Gliedes darin, daß man daraus, wenn man  $x = 1$  setzt, das erste Glied der Reihe, wenn man  $x = 2$  setzt, die Summe der beyden ersten Glieder der Reihe,

Reihe, wenn man  $x = 3$  setzt, die Summe der drey ersten Glieder der Reihe u. s. f. erhält. Wenn man daher aus der gegebenen Reihe auf die Art eine neue Reihe formirt, daß das erste Glied von dieser dem ersten Gliede von jener, das zweyte Glied von dieser der Summe der beyden ersten Glieder von jener, das dritte Glied von dieser der Summe der drey ersten Glieder von jener gleich ist, u. s. f.: so wird diese neue Reihe die summirende Reihe von jener genannt, und das allgemeine Glied dieser summirenden Reihe ist das summirende Glied der gegebenen Reihe. Es kommt also bey der Erfindung des summirenden Gliedes auf die Erfindung eines allgemeinen Gliedes an.

§. 54.

Es sey also die Reihe

$$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \text{ꝛc.}$$

gegeben, und die summirende Reihe derselben sey

$$A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V, \text{ꝛc.}$$

Als denn ist nach der eben erklärten Beschaffenheit dieser Reihe

$$A = a$$

$$A^I = a + a^I$$

$$A^{II} = a + a^I + a^{II}$$

$$A^{III} = a + a^I + a^{II} + a^{III}$$

$$A^{IV} = a + a^I + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$

ꝛc.

Folglich sind die Differenzen der summirenden Reihe

$$A^I - A = a^I; A^{II} - A^I = a^{II}; A^{III} - A^{II} = a^{III}; \text{ꝛc.}$$

und also die gegebene Reihe, nachdem man das erste Glied davon weggenommen hat, die Reihe der ersten Differenzen der summirenden Reihe. Setzt man daher der summirenden Reihe das Glied  $= 0$  vor, so daß man

o, A, A<sup>I</sup>, A<sup>II</sup>, A<sup>III</sup>, A<sup>IV</sup>, A<sup>V</sup>, ic.  
erhält, so ist die Reihe der ersten Differenzen von dieser Reihe  
die gegebene Reihe

a, a<sup>I</sup>, a<sup>II</sup>, a<sup>III</sup>, a<sup>IV</sup>, a<sup>V</sup>, ic.  
selbst.

## §. 55.

Es sind daher die ersten Differenzen der gegebenen Reihe die zwenten Differenzen der summirenden Reihe, die zwenten Differenzen der gegebenen Reihe die dritten Differenzen der summirenden Reihe, die dritten Differenzen der gegebenen Reihe die vierten Differenzen der summirenden Reihe u. s. f. Wenn daher die gegebene Reihe endlich beständige Differenzen hat, so wird die summirende Reihe ebenfalls dergleichen haben, und also eine Reihe von eben der Art, aber um eine Ordnung höher seyn. Von dergleichen Reihen kann daher auch das summirende Glied allezeit durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden. Denn das allgemeine Glied der Reihe

o, A, A<sup>I</sup>, A<sup>II</sup>, A<sup>III</sup>, A<sup>IV</sup>, A<sup>V</sup>, ic.  
oder dasjenige, dessen Anzeiger x ist, giebt die Summe von x - 1 Gliedern der Reihe a, a<sup>I</sup>, a<sup>II</sup>, a<sup>III</sup>, a<sup>IV</sup>, ic. und wenn man darin x + 1 für x setzt, so bekommt man die Summe von x Gliedern, und der gefundene Ausdruck ist daher das summirende Glied.

## §. 56.

Es sey also von der gegebenen Reihe

a, a<sup>I</sup>, a<sup>II</sup>, a<sup>III</sup>, a<sup>IV</sup>, a<sup>V</sup>, a<sup>VI</sup>, ic.

die Reihe der ersten Differenzen

b, b<sup>I</sup>, b<sup>II</sup>, b<sup>III</sup>, b<sup>IV</sup>, b<sup>V</sup>, b<sup>VI</sup>, ic.

die Reihe der zwenten Differenzen

c, c<sup>I</sup>, c<sup>II</sup>, c<sup>III</sup>, c<sup>IV</sup>, c<sup>V</sup>, c<sup>VI</sup>, ic.

die

die Reihe der dritten Differenzen

$d, d^I, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V, d^{VI}, \text{ꝛc.}$

und so ferner, bis man auf beständige Differenzen kommt. Dann formire man die summirende Reihe, welche sich, da sie das Glied  $o$  anstatt des ersten Gliedes hat, mit ihren Differenzen auf folgende Art verhalten wird:

Anzeiger.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{ꝛc.}$

Summirende Reihe.

$o, A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V, \text{ꝛc.}$

Gegebene Reihe.

$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, a^{VI}, \text{ꝛc.}$

Erste Differenzen.

$b, b^I, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^V, b^{VI}, \text{ꝛc.}$

Zweyte Differenzen.

$c, c^I, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^V, c^{VI}, \text{ꝛc.}$

Dritte Differenzen.

$d, d^I, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^V, d^{VI}, \text{ꝛc.}$

Dieses vorausgeschickt, so ist das allgemeine Glied der summirenden Reihe, oder dasjenige Glied, dessen Anzeiger  $x$  ist,

$$o + (x-1)a + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}b + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c + \text{ꝛc.}$$

und dasselbe giebt zugleich die Summe von  $x-1$  Gliedern der gegebenen Reihe,  $a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \text{ꝛc.}$

§. 57.

Wenn man also in dieser Summe  $x + 1$  für  $x$  setzt, so bekommt man das summirende Glied der gegebenen Reihe, welches die Summe von  $x$  Gliedern in sich begreift,

$D 4$

$= x a$

$$= xa + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \text{ic.}$$

Wenn man daher den Buchstaben b, c, d, e, die ihnen begelegten Werthe läßt, so hat

die Reihe

$$a, a^I, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^V, \text{ic.}$$

das allgemeine Glied

$$a + (x-1)b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \text{ic.}$$

und das summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \text{ic.}$$

Hat man also auf die beschriebene Art von einer Reihe irgend einer Ordnung das allgemeine Glied gefunden, so läßt sich daraus das summirende Glied mit leichter Mühe ableiten, indem dasselbe aus eben den Differenzen besteht.

### §. 58.

Diese Art, das summirende Glied aus den Differenzen der Reihe zu finden, ist vorzüglich bei den Reihen brauchbar, wobey man endlich zu beständigen Differenzen gelangt; denn in den übrigen Fällen läßt sich kein endlicher Ausdruck finden. Wenn man aber das, was wir von der Natur des summirenden Gliedes gesagt haben, genauer erwägt, so bietet sich ein anderer Weg dar, das summirende Glied unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede zu erhalten, der sich viel weiter erstreckt, und in vielen Fällen zu endlichen

chen

chen Ausdrücken führt, wo man auf dem vorhergehenden Wege zu unendlichen gelangt. Es sey nemlich die allgemeine Reihe

$$a, b, c, d, e, f, \text{z.}$$

gegeben, und das allgemeine Glied derselben, oder dasjenige, dessen Anzeiger  $x$  ist, sey  $= X$ , das summirende Glied hingegen  $= S$ . Da also  $S$  die Summe so vieler Glieder vom Anfang an bedeutet, als  $x$  Einheiten hat, so wird die Summe von  $x - 1$  Gliedern  $= S - X$ , und also  $X$  die Differenz des Ausdrucks  $S - X$ , weil es übrig bleibt, wenn man den Ausdruck  $S - X$  von dem folgenden  $S$  abzieht.

§. 59.

Da also  $X = \Delta (S - X)$ , auf die Art genommen, ist, wie wir in dem vorhergehenden Capitel gezeigt haben, bloß mit dem Unterschiede, daß die dort vorkommende beständige Größe  $w$  hier  $= 1$  sey; so ist, wenn wir rückwärts die Summe nehmen,  $\Sigma X = S - X$ , und also das gesuchte summirende Glied

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Es muß folglich die Summe der Funktion  $X$  auf die vorhin erklärte Art gesucht, und zu derselben das allgemeine Glied  $X$  addirt werden, wo denn das Aggregat das summirende Glied giebt. Da aber die zu nehmenden Summen eine beständige Größe in sich schließen, so muß man dieselbe nach dem gegenwärtigen Falle einrichten. Es ist aber offenbar, daß die Summe, so oft man  $x = 0$  setzt, in welchem Falle also gar keine Glieder zu summiren sind, allezeit auch selbst  $= 0$  werden muß, und man muß daher die beständige Größe daraus zu bestimmen suchen, daß für  $x = 0$  auch  $S = 0$  wird. Setzt man daher in der Gleichung  $S = \Sigma X + X + C$  sowohl  $S = 0$ , als  $x = 0$ , so findet man den Werth von  $C$ .

## §. 60.

Da also das ganze gegenwärtige Geschäfte auf die oben erklärte Summirung der Funktionen ankommt: so wollen wir dadurch, daß wir  $\omega = 1$  setzen, von daher die nöthigen Summen entlehnen. Zuvörderst ist also für die Potestäten von  $x$

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$\Sigma x^6 = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

und dazu setze man noch die Summe der allgemeinen Potestät  $x^n$  §. 29, indem man darin allenthalben 1 für  $\omega$  schreibt. Vermittelt diese Formeln lassen sich also die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von  $x$  sind, sehr leicht finden.

## §. 61.

Es bedeute  $S. X$  das summirende Glied der Reihe, deren allgemeines Glied  $= X$  ist, so ist, wie wir gesehen haben,

$$S. X = \Sigma X + X + C$$

wosern  $C$  auf die Art angenommen wird, daß das summirende Glied  $S. X$  verschwindet, wenn man  $x = 0$  setzt.

Hieraus

Hieraus wollen wir nun die summirenden Glieder der Reihen der Potestäten, oder der Reihen, die in dieser Form  $x^n$  begriffen sind, ausdrücken. Setzt man also

$$S. x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots + x^n$$

so wird

$$\begin{aligned}
 S. x^n &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2 \cdot 3} x^{n-1} - \frac{1}{6} \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-3} \\
 &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^{n-5} \\
 &- \frac{3}{10} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-6)}{2 \cdot 3 \dots 8 \cdot 9} x^{n-7} \\
 &+ \frac{5}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-8)}{2 \cdot 3 \dots 10 \cdot 11} x^{n-9} \\
 &- \frac{691}{210} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-10)}{2 \cdot 3 \dots 12 \cdot 13} x^{n-11} \\
 &+ \frac{35}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-12)}{2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 15} x^{n-13} \\
 &- \frac{3617}{30} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-14)}{2 \cdot 3 \dots 16 \cdot 17} x^{n-15} \\
 &+ \frac{43867}{42} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-16)}{2 \cdot 3 \dots 18 \cdot 19} x^{n-17} \\
 &- \frac{1222277}{110} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-18)}{2 \cdot 3 \dots 20 \cdot 21} x^{n-19} \\
 &+ \frac{854513}{6} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-20)}{2 \cdot 3 \dots 22 \cdot 23} x^{n-21} \\
 &- \frac{1181820455}{546} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-22)}{2 \cdot 3 \dots 24 \cdot 25} x^{n-23} \\
 &+ \frac{76977927}{2} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-24)}{2 \cdot 3 \dots 26 \cdot 27} x^{n-25}
 \end{aligned}$$

10.

## §. 62.

Hieraus ergeben sich die Summen für die verschiedenen Werthe von  $n$  auf folgende Art:

$$S. x^0 = x$$

$$S. x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$S. x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$S. x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$S. x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$S. x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$S. x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

$$S. x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$$

$$S. x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$S. x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2$$

$$S. x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$$

S.  $x^{11}$

$$S. x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 \\ - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$$

$$S. x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 \\ - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$$

$$S. x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{1}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{160}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 \\ - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 - \frac{691}{420}x^2$$

$$S. x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 \\ - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{9}x^5 - \frac{691}{9}x^3 + \frac{7}{6}x$$

$$S. x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} \\ - \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2$$

$$S. x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} \\ - \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x \\ \text{ꝛc.}$$

Man kann diese Formeln aus der allgemeinen Formel bis zur neun und zwanzigsten Potentiat fortsetzen, und man könnte noch weiter fortgehen, wenn die Zahl Coefficienten weiter bekannt wären.

§. 63.

Uebrigens läßt sich bey diesen Formeln ein gewisses Gesetz bemerken, vermittelst dessen man jede derselben aus der vorher-

vorhergehenden leicht finden kann, das letzte Glied allein ausgenommen, wenn es die erste Potestät von  $x$  enthält; denn alsdenn kommt in der folgenden Summe ein neues Glied hinzu. Dies aber bey Seite gelassen, so ist, wenn

$$S. x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \epsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \dots$$

ist, die folgende Summe

$$S. x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1} \beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n} \gamma x^n - \frac{n+1}{n-2} \delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4} \epsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6} \zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8} \eta x^{n-8} - \dots$$

Wenn also  $n$  eine gerade Zahl ist, so erhält man hiernach das folgende Glied; wenn  $n$  aber eine ungerade Zahl ist, so fehlt in der folgenden Summe das letzte Glied, dessen Form  $\pm \phi x$  ist. Indes kann man dasselbe ohne andere Hülfsmittel auf folgende Art finden. Da sich, wenn man  $x=1$  setzt, die Summe eines einzigen Gliedes, (d. h. das erste Glied selbst, welches  $=1$  ist) ergeben muß: so setze man in allen schon gefundenen Gliedern  $x=1$ , und die Summe selbst auch  $=1$ . Ist dies geschehen, so kann man den Werth von  $\phi$  entwickeln, und alsdenn weiter fortgehen. Auf diese Art hätten alle jene Summen gefunden werden können. Da z. B.

$$S. x^5 = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} x^4 - \frac{1}{12} x^2$$

ist, so ist

$$S. x^6 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} x^7 + \frac{6}{6} \cdot \frac{1}{2} x^6 + \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{12} x^5 - \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{12} x^3 + \phi x$$

oder

$$S. x^6 = \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{6} x^3 + \phi x.$$

Nun

Nun setze man  $x=1$  so wird

$$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi$$

und also

$$\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

wie wir es aus der allgemeinen Formel gefunden haben.

§. 64.

Vermittelt dieser summirenden Formeln lassen sich nun die summirenden Glieder aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von  $x$  sind, finden, und zwar viel leichter und schneller als nach der vorhergehenden Methode durch die Differenzen.

### Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, u.

deren allgemeines Glied

$$\frac{3xx + x}{2}$$

ist, zu finden.

Da das allgemeine Glied aus zwey Theilen besteht, so suche man das summirende Glied für einen jeden Theil aus den obigen Formeln,

$$S. \frac{3}{2}xx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

$$S. \frac{1}{2}x = \dots + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}x$$

Hierdurch erhält man

$$S. \frac{3xx + x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$$

welches das gesuchte summirende Glied ist. Setzt man z. B.  $x=5$ , so wird  $\frac{1}{2} \cdot 6^2 = 90$  die Summe der fünf ersten Glieder

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

Zwey:

## Zweytes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe

1, 27, 125, 343, 729, 1331, &amp;c.

welche die Würfel der ungeraden Zahlen enthält,  
zu finden.

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$= (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1,$$

und man erhält demnach das summirende Glied aus folgenden Theilen

$$+ 8.S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

$$- 12.S.x^2 = \dots - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$+ 6.S.x = \dots + 3x^2 + 3x$$

$$- 1.S.x^0 = \dots - x$$

Es ist also das gesuchte summirende Glied

$$= 2x^4 - x^2 = xx(2xx - 1).$$

Setzt man z. B.  $x = 6$ , so wird  $36.71 = 2556$  die Summe von sechs Gliedern der gegebenen Reihe  $= 1 + 27 + 125 + 343 + 1331 = 2556$ .

## §. 65.

Wenn das allgemeine Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, so kann man das summirende Glied leichter durch das finden, was § 32 u. f. gelehret worden ist. Denn da, wenn man  $\omega = 1$  setzt,

$$\Sigma(x+n) = \frac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

und

$$\Sigma(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&amp;c.

ist: so erhält man, wenn man zu diesen Summen die allgemeinen Glieder selbst addirt, und außerdem eine beständige Größe

Größe dazu setzt, die für  $x=0$  das summirende Glied ebenfalls in Null verwandelt, folgende summirende Glieder:

$$S.(x+n) = \frac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1) = \frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

und

$$S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

und so ferner.

Ist also  $n=0$ , oder  $n=-1$ , so ist in diesen Summen auch die beständige Größe  $=0$ .

§. 66.

Das summirende Glied der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, *rc.*, deren allgemeines Glied  $x$  ist, ist also  $=\frac{1}{2}x(x+1)$ , und die summirende Reihe folglich diese: 1, 3, 6, 10, 15, *rc.* Von dieser Reihe hingegen ist das summirende Glied  $=\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ , und die summirende Reihe folgende:

1, 4, 10, 20, 35, *rc.* Diese Reihe hat wieder das summirende Glied  $=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ , und dieses ist das allgemeine Glied der Reihe, 1, 5, 15, 35, 70, *rc.*, deren summirendes Glied  $=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$  ist. Da man

von diesen Reihen allenthalben den wichtigsten Gebrauch machen kann, so sind sie vor andern wohl zu merken. Man nimmt nemlich aus ihnen die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums, und wie weit sich der Gebrauch von diesen erstreckt, weiß jeder, der sich damit nur einigermaßen abgegeben hat.

## §. 67.

Hieraus findet man auch die summirenden Glieder, die wir vorhin aus den Differenzen ableiteten, leicht. Denn da wir daselbst für das allgemeine Glied folgende Form gefunden haben:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \text{rc.}$$

so erhalten wir, wenn wir die summirenden Glieder aller Theile einzeln suchen, und sie darauf zu einem Aggregate vereinigen, das summirende Glied, welches zu diesem allgemeinen Gliede gehört. Da also

$$S. 1 = x$$

$$S. (x-1) = \frac{1}{2} x(x-1)$$

$$S. (x-1)(x-2) = \frac{1}{3} x(x-1)(x-2)$$

$$S. (x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{4} x(x-1)(x-2)(x-3)$$

rc.

Ist, so ist das gesuchte summirende Glied

$$xa + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d$$

+ rc.

und diese Form stimmt ganz mit der überein, welche wir oben [§. 37.] aus den Differenzen erhielten.

## §. 68.

Ferner kann diese Art die summirenden Glieder zu finden auch auf Brüche angewandt werden. Da wir nemlich oben §. 34. gesehen haben, daß für  $n = 1$

$$\sum \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n}$$

Ist, so wird

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1 \cdot \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Qu

Auf eine ähnliche Art erhalten wir, wenn wir zu den oben gefundenen Summen die allgemeynen Glieder selbst addiren, oder, welches einerley ist, in diesen Ausdrücken  $x+1$  für  $x$  setzen

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

und

$$S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} \\ + \frac{1}{3} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

und diese Formeln lassen sich nach Belieben leicht fortsetzen.

§. 69.

Da  $S. \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$  ist, so ist auch

$$S. \frac{1}{x+n} - S. \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n+1}$$

Ob also gleich keines von diesen beyden summirenden Gliedern besonders dargestellt werden kann, so ist doch ihr Unterschied bekannt, und man kann darnach in vielen Fällen die Summen der Reihen mit hinlänglicher Leichtigkeit finden. Dies geschiehet nemlich alsdann wenn das allgemeine Glied ein Bruch ist, dessen Nenner in einfache Factoren aufgelöst werden kann. Wenn dieses statt findet, so löse man den ganzen Bruch in seine Partial-Brüche auf, und dann wird man nach dem gegenwärtigen Satze leicht beurtheilen, ob das summirende Glied dargestellt werden könne, oder nicht?

## Erstes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots$$

Deren allgemeines Glied  $= \frac{2}{xx+x}$  ist, zu finden.Durch die Auflösung erhält man aus dem gegebenen  
allgemeinen Gliede die Partial-Brüche  $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$ . Demnachist das summirende Glied  $= 2S. \frac{1}{x} - 2S. \frac{1}{x+1}$ , undfolglich nach dem vorhergehenden Satze  $= 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$ ,Ist z. B.  $x=4$ , so ist  $\frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ .

## Zwenthes Exempel.

Das summirende Glied der Reihe:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{45} + \frac{1}{77} + \frac{1}{117} + \dots$$

Deren allgemeines Glied  $= \frac{1}{4xx+4x-3}$  ist, zu finden.Da der Nenner des allgemeinen Gliedes die Faktoren  
 $2x-1$ , und  $2x+3$  hat, so läßt er sich in folgende Theile  
auflösen:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

Nun ist aber

$$S. \frac{1}{x-\frac{1}{2}} = S. \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + 2 - \frac{1}{x+\frac{3}{2}}$$

und

$$S. \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = S. \frac{1}{x + \frac{3}{2}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{x + \frac{5}{2}}$$

folglich

$$S. \frac{1}{x - \frac{1}{2}} - S. \frac{1}{x + \frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{x + \frac{3}{2}}$$

und hiervon giebt der achte Theil das gesuchte summirende Glied, nemlich

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8x+4} - \frac{1}{8x+12} = \frac{x}{4x+2} + \frac{x}{3(4x+6)} = \frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}$$

§. 70.

Da die figurirten Zahlen, welche die Coefficienten des zu einer Potestät erhobenen Binomiums geben, vorzüglich gemerkt zu werden verdienen: so wollen wir die Summen der Reihen auffuchen, deren Zähler = 1, die Nenner aber die figurirten Zahlen sind, und solches ist nach §. 68 leicht. Es haben also die Reihen

deren allgemeines Glied ist

das summirende Glied

$\frac{1 \cdot 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
ic.	ic.

und hieraus fällt das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortgehen, sehr bald in die Augen. Das summirende Glied,

§ 3

welches

welches zu dem allgemeinen Gliede  $\frac{1}{x}$  gehöret, kann aber hieraus nicht geschlossen werden, weil man nicht im Stande ist, solches durch einen endlichen Ausdruck darzustellen.

## § 71.

Da das summirende Glied die Summe so vieler Glieder giebt, als der Anzeiger  $x$  Einheiten enthält: so ist offenbar, daß man die Summen dieser Reihen, ohne Ende fortgesetzt, erhalten wird, wenn man den Anzeiger  $x$  unendlich groß annimmt. In diesem Falle verschwinden aber die letzten Glieder der gefundenen Ausdrücke, weil die Nenner unendlich groß werden, und es haben also die betrachteten Reihen endliche Summen. Diese sind:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \infty = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \infty = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \infty = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \infty = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \infty = \frac{6}{5}$$

$\infty$ .

Es können also alle ohne Ende fortlaufende Reihen, deren summirende Glieder bekannt sind, wenn man  $x = \infty$  setzt, summirt werden, vorausgesetzt, daß die Summen endlich sind; und dies findet statt, wenn  $x$  in dem summirenden Gliede eben so viel Dimensionen im Nenner als im Zähler hat.

Drit



### Drittes Capitel.

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

§. 72.

Da eine jede Größe, so groß sie auch immer seyn mag, doch noch weiter vermehrt werden kann, und nichts uns verhindert, zu einer jeden gegebenen Größe eine andere von eben der Art hinzu zu setzen: so läßt sich auch eine jede Größe ohne Ende vermehren, und kann nie so groß werden, daß sie weiter keines Zuwachses fähig wäre. Es giebt daher auch keine so große Größe, daß man nicht eine noch größere sollte denken können, und es ist daher eine außer allem Zweifel gesetzte Behauptung, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne. Denn wollte jemand solches leugnen, so müßte er eine Grenze annehmen, über welche hinaus die Größe nicht kommen könnte, und also eine Größe zugeben, zu welcher nichts weiter hinzugesügt werden könnte. Allein dies ist ungereimt und dem Begriffe der Größe zuwider, und man muß daher eingestehen, daß eine jede Größe immer fort ohne Ende, das heißt, ins Unendliche vermehrt werden könne.

§. 73.

Bei den einzelnen Arten der Größen fällt dies noch deutlicher in die Augen. So wird wohl Niemand behaupten, daß die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10.

§ 4

irgendwo

irgendwo so begrenzt sey, daß man sie nicht weiter fortsetzen könne. Denn es giebt keine Zahl, zu der sich nicht noch die Einheit setzen, und aus welcher sich also nicht eine folgende größere Zahl machen ließe; es geht daher die Reihe der natürlichen Zahlen ohne Ende fort, und man kommt nie zu einer größten Zahl in dem Verstande, daß eine größere unmöglich wäre. Auf eine ähnliche Art kann eine gerade Linie nie so weit fortgezogen werden, daß man außer Stande seyn sollte, sie noch weiter zu verlängern. Es erhellet hieraus, daß man sowohl die Zahlen ins Unendliche vermehren, als die Linien ins Unendliche verlängern kann. Und da dies Arten der Größen sind, so ist daraus zugleich klar, daß es, so groß man auch eine Größe annehmen mag, doch immer eine noch größere Größe gebe, daß sich, wenn man diese annimmt, vom neuen eine größere Größe gedenken lasse, und daß man auf diese Art ohne Ende immer weiter fortgehen, und also jede Größe ins Unendliche vermehren könne.

## §. 74.

So offenbar dieses ist, und es ist es in einem so hohen Grade, daß man es ohne Widerspruch mit sich selbst nicht leugnen kann: so haben doch viele von denen, welche die Theorie des Unendlichen vorzutragen unternommen haben, dieselbe so verdunkelt, und mit so vielen Schwierigkeiten und selbst Widersprüchen überhäuft, daß ihnen gar kein Weg übrig blieb, um aus diesem Labyrinth zu kommen. Daraus, daß die Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, haben einige geschlossen, daß es in der That eine unendliche Größe gebe, und dieselbe so beschrieben, daß sie gar keines Zuwachses weiter fähig sey. Dadurch aber stoßen sie den Begriff der Größe über den Haufen, weil sie eine solche Größe annehmen, die nicht weiter soll vermehrt werden können.

können. Außerdem sind aber die, die unendliche Größen annehmen, auch mit sich selbst im Widerspruche; denn dadurch, daß sie dem Wachsen der Größe eine gewisse Grenze setzen, leugnen sie zugleich, daß eine Größe ohne Ende vermehrt werden könne. Sie leugnen also auch, daß eine Größe ins Unendliche vermehrt werden könne; denn beyde Redensarten bedeuten einerley; und sie heben daher, indem sie eine unendliche Größe annehmen, dieselbe zugleich wieder auf. Denn wenn eine Größe nicht ohne Ende oder ins Unendliche vermehrt werden kann, so ist es unmöglich, daß es eine unendliche Größe gebe.

§. 75.

Daraus also, daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden kann, fließet selbst, daß es keine unendliche Größe giebt. Denn eine Größe, die immer fort vermehrt wird, wird nicht eher unendlich, ehe sie nicht ohne Ende gewachsen ist; was aber ohne Ende geschehen muß, das kann man nicht als schon geschehen betrachten. Indesß kann man gleichwohl eine solche Größe, zu welcher man durch ohne Ende fortgesetzte Hinzufügung eines Zuwachses gelangt, nicht nur durch ein gewisses Zeichen bezeichnen, und sie auf diese Art auf die gehörige Weise in die Rechnung einführen, wie bald ausführlicher gezeigt werden soll; sondern es lassen sich auch aus der Welt Fälle anführen, wo eine unendliche Zahl statt zu finden scheint. Denn wenn die Materie unendlich theilbar ist, wie mehrere Philosophen behauptet haben, so ist ja die Anzahl der Theile, woraus eine jede gegebene Quantität von Materie besteht, in der That eine unendliche Zahl; weil die Materie, wenn man diese Zahl endlich annehmen wollte, nicht unendlich theilbar wäre. Auf eine ähnliche Art könnte die Zahl der Körper, die das Universum ausmachen,

wenn das Universum selbst unendlich wäre, wie verschiedene behauptet haben, ebenfalls keine endliche Zahl seyn, und wir würden also auch darin eine unendliche Zahl haben.

## §. 76.

So sehr dies auch mit einander zu streiten scheint, so fallen doch bey genauer Erwägung desselben alle Schwierigkeiten weg. Wenn nemlich jemand behauptet, daß die Materie ins Unendliche theilbar sey, so leugnet er, daß man bey einer fortgesetzten Theilung der Materie endlich auf so kleine Theile komme, daß man dieselben nicht weiter sollte theilen können; es hat daher die Materie keine untheilbare Theile, da sich jeder von den Theilen, auf welche man durch eine fortgesetzte Theilung kommt, noch immer weiter theilen läßt. Wer also in diesem Falle sagt, daß die Anzahl der Theile unendlich sey, der gedenkt sich dabey die letzten Theile, die nicht weiter theilbar sind: und da man zu dergleichen nie gelangt, und es also dergleichen gar nicht giebt, so unternimmt er diese Theile, die gar nicht sind, zu zählen. Denn kann die Materie immer fort ohne Ende weiter getheilt werden, so hat sie gar keine untheilbare oder einfache Theile, und es ist daher nichts da, was man zählen könnte. Wer daher die unendliche Theilbarkeit der Materie behauptet, der leugnet dadurch zugleich, daß die Materie aus einfachen Theilen bestehe.

## §. 77.

Wenn man aber, indem man von den Theilen eines Körpers oder der Materie spricht, nicht die letzten oder einfachen Theile, dergleichen es gar nicht giebt, sondern diejenigen versteht, welche durch eine wirkliche Theilung hervorgebracht worden sind: dann kann bey der Annehmung der

Hypo-

Hypothese von der unendlichen Theilbarkeit der Materie, ein jedes noch so kleines Stück der Materie nicht nur in mehrere Theile getheilt, sondern es kann selbst keine so große Zahl angegeben werden, daß man nicht aus diesem Stücke eine noch größere Anzahl von Theilen sollte erhalten können. Die Zahl der Theile, die ein jeder Körper enthält, und zwar nicht die Zahl der letzten, sondern solcher Theile, die selbst noch weiter theilbar sind, ist daher alsdenn größer als jede Zahl, die sich angeben läßt. Auf eine ähnliche Art ist die Zahl der Körper, welche das Universum ausmachen, wenn das Universum unendlich ist, eine größere Zahl als jede, die sich angeben läßt, und da eine solche Zahl keine endliche Zahl seyn kann, so folgt, daß eine unendliche Zahl und eine Zahl die größer ist als jede die sich angeben läßt, gleichbedeutende Benennungen sind.

§. 78.

Wer daher auf diese Art die unendliche Theilbarkeit der Materie betrachtet, der verwickelt sich in keine von den Schwierigkeiten, die man gewöhnlich bey dieser Meynung findet, und ist nichts zu behaupten gezwungen, was einen Widerspruch enthielte. Dagegen verfallen die, welche die unendliche Theilbarkeit der Materien leugnen, in so große Schwierigkeiten, daß es ihnen unmöglich wird, sich aus denselben herauszuwickeln. Sie sind nemlich gezwungen zu behaupten, daß ein jeder Körper nicht weiter als bis auf eine gewisse Anzahl in Theile zerlegt werden könne, und daß, sobald man bis zu dieser Anzahl gekommen ist, alle weitere Theilung aufhöre. Die Theile, bey welchen dieses statt findet, nennen einige Atomen, andere Monaden, und noch andere einfache Dinge. Der Grund ferner, warum die letzten Theile nicht weiter theilbar seyn sollen, kann zwiefach seyn;

seyn; es können nemlich diese Theile entweder gar keine Ausdehnung haben, oder sie können zwar ausgedehnt, aber dabey so hart und so beschaffen seyn, daß keine Kraft hinreichet, sie zu zertheilen. Was nun aber auch die Vertheidiger jener Meinung für einen Grund gebrauchen mögen, so sehen sie sich gleichwohl mit den größten Schwierigkeiten umgeben.

## §. 79.

Denn sollen die letzten Theile der Körper gar keine Ausdehnung, und folglich auch gar keine Theile haben, so ist das zwar ein Begriff, bey welchem sie mit dem vollkommensten Rechte zu den einfachen Dingen gerechnet werden: allein dagegen läßt sich auf keine Art und Weise gedenken, wie die Körper aus dergleichen Theilen sollen bestehen können. Denn wir wollen einmal annehmen, daß ein Cubik-Fuß von Materie aus tausend solchen einfachen Dinge bestehe, und daß derselbe wirklich in tausend Theile getheilt sey. Wären nun die Theile einander gleich, so würde jeder ein Cubik-Zoll, wären sie aber ungleich, so würden einige größer und andere kleiner seyn. Es würde also ein Cubik-Zoll ein einfaches Ding seyn, und so entstünde der offenbarste Widerspruch; oder man müßte sagen wollen, daß in einem Cubik-Zolle nicht mehr als ein einfaches Ding sich befinde, und daß der übrige Raum leer sey; allein auf diese Art stiele die Stetigkeit der Körper weg, zu geschweigen, daß jene Philosophen den leeren Raum ganz aus der Welt verbannen. Sollte man hiergegen einwenden, daß die Zahl der einfachen Dinge, die einen Cubik-Fuß von Materie ausmachten, viel größer als tausend sey; so würde man dadurch nicht das Geringste gewinnen: denn die Schwierigkeit, welche man bey der Zahl tausend antrifft, findet sich auch bey jeder andern

dern noch so großen Zahl. Dies konnte dem Scharfsinne Leibnizens, des Erfinders der Monaden, nicht verborgen bleiben, als er die Materie an und für sich genommen unendlich theilbar annahm. Er behauptet daher auch, daß man nicht eher zu den Monaden komme, als bis der Körper wirklich unendlich getheilt worden sey. Dadurch aber hebt er die Existenz der einfachen Dinge, woraus die Körper bestehen sollen, gänzlich auf. Denn diejenigen, die die Zusammensetzung der Körper aus einfachen Dingen leugnen, und diejenigen, welche die unendliche Theilbarkeit der Körper annehmen, sind in ihren Meinungen durchaus nicht von einander verschieden.

§. 80.

Eben so sehr ist man auch mit sich selbst im Widerspruche, wenn man zwar die Ausdehnung der letzten Theile der Körper zugiebt, aber dabei behauptet, daß sie wegen ihrer vollkommenen Härte nicht in Theile getheilt werden können. Denn sobald man den letzten Theilen der Körper Ausdehnung zugesteht, so behauptet man auch, daß sie aus Theilen zusammengesetzt sind; denn ob diese Theile wirklich von einander getrennt werden können oder nicht? daran ist wenig gelegen; ob man gleich keinen Grund anzugeben im Stande ist, woher jene vollkommene Härte komme. Es scheinen indeß diejenigen, die die unendliche Theilbarkeit der Materie leugnen, diese letztere Schwierigkeit hinlänglich empfunden zu haben, weil sie sich vorzüglich an den vorhergehenden Begriff der letzten Theile halten: und sie wissen sich nicht zu helfen, als durch einige unbedeutende metaphysische Distinktionen, die denn meistens darauf hinauslaufen, daß man den auf mathematische Grundsätze gebauten Folgerungen nicht zu viel einräumen, und bey einfachen Dingen nicht messen

messen wollen müsse. Aber sie sollten nur erst beweisen, daß diese ihre letzten Theile, davon jeder Körper eine bestimmte Anzahl enthalten soll, keine Ausdehnung haben.

## §. 81.

Weil sie also keinen Ausgang aus diesem Labyrinth finden, und die ihnen gemachten Einwürfe nicht auf die erforderliche Art widerlegen können, so nehmen sie ihre Zuflucht zu Distinktionen, und sagen, daß diese Einwürfe ihren Grund in der sinnlichen Vorstellung und in der Einbildungskraft haben, daß aber bey dergleichen Gegenständen bloß der reine Verstand urtheilen müsse, und daß die Sinnen und alle auf sinnliche Vorstellungen gebaute Schlüsse nicht selten trügen. Also soll der reine Verstand die Möglichkeit davon erkennen können, daß der tausendste Theil eines Cubik Fußes von Materie gar keine Ausdehnung habe, und eben dies der Einbildungskraft unmöglich scheinen? Daß die Sinne trügen, ist zwar oft der Fall; allein den Mathematikern sollte man diesen Vorwurf am allerwenigsten machen. Denn die Mathematik ist es ja vorzüglich, die uns vor den Täuschungen der Sinne verwahrt, und uns lehrt, daß die sinnlichen Gegenstände ganz anders beschaffen sind, als sie uns erscheinen; ihr danken wir ja die sichersten Vorschriften, deren Befolgung uns wider alle Täuschung der Sinne schützt. Anstatt also durch dergleichen Antworten ihre Behauptungen zu befestigen, machen sie sie nur noch mehr verdächtig.

## §. 82.

Doch um zu unserm Endzwecke zurück zu kommen, so sind, wenn auch jemand das Daseyn einer unendlichen Zahl in der Welt leugnen wollte, doch in der theoretischen Mathematik solche Fragen sehr häufig, auf welche nicht anders als  
mit

mit Annehmung einer unendlichen Zahl geantwortet werden kann. Würde z. B. die Summe aller Zahlen, die diese Reihe,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{rc.}$  ausmachen, verlangt, so kann denn doch diese Summe, da jene Zahlen ohne Ende fortgehen, und beständig wachsen, auf keine Weise eine endliche Zahl seyn, und daraus folgt ihre unendliche Größe nothwendig. Wenn daher eine Größe so groß ist, daß sie größer ist als jede gegebene endliche Größe, so kann sie keine andere als eine unendliche Größe seyn. Um dergleichen Größen anzudeuten bedienen sich die Mathematiker des Zeichens  $\infty$ , und zeigen also dadurch eine Größe an, die größer ist als jede endliche Größe, oder größer als jede Größe, die sich angeben läßt. So kann man z. B., da man die Parabel durch eine unendlich lange Ellipse erklären kann, mit Recht behaupten, daß die Ape der Parabel eine unendliche gerade Linie sey.

§. 83.

Es wird aber die Lehre vom Unendlichen durch die Auseinandersetzung des unendlich Kleinen in der Mathematik deutlicher werden. Das leidet keinen Zweifel, daß eine jede Größe so weit vermindert werden kann, daß sie gänzlich verschwindet und zu nichts wird. Eine unendlich kleine Größe aber ist nichts anders als eine verschwindende Größe, und folglich in der That  $= 0$ . Diese Erklärung des unendlich Kleinen stimmt auch mit der überein, wenn man darunter Größen versteht, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt. Denn wenn eine Größe kleiner ist als jede Größe, die sich angeben läßt, so muß sie nothwendig  $= 0$  seyn; weil sich, wenn sie es nicht wäre, eine andere ihr gleiche Größe angeben ließe, welches wider die Voraussetzung streitet. Wir beantworten daher die Frage, was eine unendlich kleine

Kleine Größe in der Mathematik sey, auf die Art, daß wir sagen, sie sey in der That  $= 0$ ; und dieser Begriff enthält keins von den großen Geheimnissen, welche man gemeinlich in ihm findet, und wodurch man sich verleiten läßt, wider die ganze Rechnung des unendlich Kleinen einen Verdacht zu fassen. Sollten indeß einige Zweifel statt finden, so werden solche in der Folge, wenn wir diese Rechnung vortragen werden, gänzlich gehoben werden.

## §. 84.

Da wir also gezeigt haben, daß eine unendlich kleine Größe wirklich Null ist, so müssen wir vor allen Dingen dem Einwurfe begegnen, warum wir die unendlich kleinen Größen nicht beständig mit dem Zeichen  $0$  bezeichnen, sondern dazu besondere Zeichen gebrauchen. Denn da alle Nullen einander gleich sind, so scheint es überflüssig, daß man sich zu ihrer Bezeichnung verschiedener Zeichen bedient. Allein obgleich jede zwey Nullen einander gleich sind, so daß sich zwischen ihnen gar keine Differenz findet: so giebt es doch zwey Arten der Vergleichung der Größen, wovon die eine die arithmetische und die andere die geometrische ist. Bey jener sehen wir auf die Differenz, bey dieser auf den Quotienten, der aus der Vergleichung der Größen entspringt; und obgleich das arithmetische Verhältniß zwischen jeden zweyen Nullen gleich ist, so ist es deswegen doch das geometrische nicht. Man sieht dies sehr deutlich an dieser geometrischen Proportion,  $2 : 1 = 0 : 0$ , worin das vierte Glied eben sowohl  $0$  ist als das dritte. Aber wegen der Natur der Proportion muß, da das erste Glied doppelt so groß ist als das zweyte, das dritte Glied auch doppelt so groß seyn als das vierte.

## §. 85.

§. 85.

Dies ist auch selbst aus der gemeinen Arithmetik einleuchtend. Denn da, wie jeder weiß, die Null, mit irgend einer Zahl multiplicirt, wieder Null giebt, oder  $n \cdot 0 = 0$ , und also  $n : 1 = 0 : 0$  ist: so fällt daraus in die Augen, daß zwei Nullen, ob sie gleich, arithmetisch betrachtet, in dem Verhältnisse der Gleichheit stehen, dennoch jedes geometrische Verhältniß gegen einander haben. Da also die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, so bedient man sich, um diese Verschiedenheit anzuzeigen, mit Recht verschiedener Zeichen, zumal, wenn man das geometrische Verhältniß, welches zwischen ihnen statt findet, untersuchen soll. In der Infinitesimal Rechnung aber thut man nichts anders, als daß man sich mit der Untersuchung des geometrischen Verhältnisses zwischen verschiedenen unendlich kleinen Größen beschäftigt, und dabey würde man in die größte Verwirrung gerathen, wofern man nicht diese unendlich kleinen Größen mit verschiedenen Zeichen bezeichnete.

§. 86.

Wenn man also, so wie solches in der Analysis des Unendlichen üblich ist, durch  $dx$  eine unendlich kleine Größe bezeichnet, so ist allerdings sowohl  $dx = 0$ , als  $a dx = 0$ , wo  $a$  jede endliche Größe bedeutet. Daß ungeachtet aber ist das geometrische Verhältniß  $a dx : dx$  ein endliches Verhältniß, nemlich  $a : 1$ , und es dürfen daher die beyden unendlich kleinen Größen  $dx$  und  $a dx$ , obgleich beyde  $= 0$  sind, nicht mit einander verwechselt werden, wenn es auf die Untersuchung ihres Verhältnisses ankommt. Auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn verschiedene unendlich kleine  $dx$  und  $dy$  vorkommen. Denn wenn gleich beyde  $= 0$  sind, so ist doch ihr Verhältniß nicht bekannt; und in

Eulers Differenz. Rechn. I. Th. § des

der Bestimmung des Verhältnisses zwischen jeden zweyen solchen unendlich kleinen Größen besteht das ganze Geschäft der Differenzial-Rechnung. So gering übrigens der Nutzen von dergleichen Vergleichen bey dem ersten Anblick zu seyn scheint, so groß ist er gleichwohl, und man lernt ihn von Tage zu Tage noch immer mehr einsehen.

## §. 87.

Da also das unendlich Kleine in der That Nichts ist, so fällt in die Augen, daß eine endliche Größe durch die Hinzufügung oder Wegnehmung einer unendlich kleinen Größe zu oder von ihr weder vermehrt noch vermindert werde. Ist also  $a$  eine endliche, und  $dx$  eine unendlich kleine Größe, so ist sowohl  $a + dx$  als  $a - dx$ , und überhaupt  $a \pm ndx = a$ ; denn das Verhältniß zwischen  $a \pm ndx$  und  $a$  ist ein Verhältniß der Gleichheit, man mag dasselbe arithmetisch oder geometrisch untersuchen. Von dem arithmetischen Verhältnisse ist solches offenbar; denn da  $ndx = 0$  ist, so ist  $a \pm ndx - a = 0$ : was aber das geometrische Verhältniß betrifft, so erhellet solches daher, weil  $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$  ist.

Hieraus folgt die durchgängig angenommene Regel, daß die unendlich kleinen Größen gegen die endlichen Größen verschwinden, und also in Ansehung dieser weggelassen werden können. Hierdurch fällt der Vorwurf, als ob sich die Analysis des Unendlichen von der geometrischen Schärfe entferne, von selbst über den Haufen, da man nichts wegläßt, als was in der That Nichts ist. Man kann daher mit Recht behaupten, daß in diesem Theile der höhern Mathematik die größte geometrische Schärfe, so wie man sie in den Schriften der Alten findet, beobachtet werde.

## §. 88.

§. 88.

Da die unendlich kleine Größe  $dx$  in der That  $= 0$  ist, so muß auch ihr Quadrat  $dx^2$ , ihr Cubus  $dx^3$ , und jede andere Potestät mit einem positiven Exponenten  $= 0$  seyn, und also auch ebenfalls gegen eine endliche Größe verschwinden. Aber es verschwindet auch die unendlich kleine Größe  $dx^2$  selbst gegen  $dx$ , denn es stehen  $dx \pm dx^2$  und  $dx$  in einem Verhältnisse der Gleichheit, man mag sie arithmetisch oder geometrisch mit einander vergleichen. Wegen des Ersten findet kein Zweifel statt; was aber das letztere anbetrißt, so ist  $dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$ . Auf eine ähnliche Art ist  $dx \pm dx^3 = dx$ , und überhaupt  $dx \pm dx^{n+1} = dx$ , wofern  $n$  eine positive Zahl ist; denn es ist das geometrische Verhältniß  $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$ , und also, weil  $dx^n = 0$  ist, ein Verhältniß der Gleichheit. Wenn man daher, wie solches bey den Potestäten geschiehet,  $dx$  ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung,  $dx^2$  ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung,  $dx^3$  ein unendlich Kleines von der dritten Ordnung, u. s. w. nennt, so fällt in die Augen, daß die unendlich kleinen Größen von den höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung verschwinden.

§. 89.

Auf eine ähnliche Art zeigt man, daß die unendlich kleinen Größen der dritten und der höhern Ordnungen gegen die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung, und überhaupt die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen einer niedern Ordnung verschwinden. Ist z. B.  $m$  eine kleinere Zahl als  $n$ , so ist  $a dx^m \mp b dx^n = a dx^m$ , weil  $dx^n$  gegen  $dx^m$ , wie

wir gezeigt haben, verschwindet. Dies findet auch bey den gebrochenen Exponenten statt; es verschwindet z. B.  $dx$  gegen  $\sqrt{dx}$  oder  $dx^{\frac{1}{2}}$ , und es ist  $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$ . Wenn aber der Exponent von  $dx$  eine 0 ist, so wird  $dx^0 = 1$ , obgleich  $dx = 0$  ist; und es wird folglich  $dx^n$ , da es  $= 1$  wird, wenn  $n = 0$  ist, aus einer endlichen Größe auf einmal eine unendlich kleine Größe, sobald sein Exponent  $n$  größer als nichts wird. Es giebt daher eine unendliche Menge von Ordnungen der unendlich kleinen Größen, und man muß dieselben, ungeachtet jede  $= 0$  ist, doch wohl von einander unterscheiden, wenn man die wechselseitige Beziehung derselben unter einander, welche man durch das geometrische Verhältniß ausdrückt, untersuchen will.

## §. 90.

Nachdem wir den Begriff des unendlich Kleinen festgesetzt haben, so ist es nunmehr leichter, die Natur des Unendlichen oder des unendlich Großen zu bestimmen. Es ist bekannt, daß der Werth des Bruchs  $\frac{1}{z}$  desto größer wird, je mehr der Nenner  $z$  vermindert wird; und daher muß der Werth des Bruchs  $\frac{1}{z}$ , wenn  $z$  unendlich klein oder kleiner wird als jede Größe, die sich angeben läßt, nothwendiger Weise unendlich groß, oder größer als jede Größe werden, die man anzugeben im Stande ist. Wenn also die Einheit oder irgend eine andere endliche Größe durch eine unendlich kleine Größe oder 0 dividirt wird, so ist der Quotient unendlich groß oder eine unendliche Größe. Da also das Zeichen  $\infty$  eine unendlich große Größe bedeutet, so hat man daher die Gleichung,  $\frac{a}{dx} = \infty$ , deren Richtigkeit auch daraus

aus erhellt, weil man durch die Umkehrung  $\frac{a}{\infty} = dx = 0$  erhält. Denn je größer man den Nenner  $z$  des Bruchs  $\frac{a}{z}$  annimmt, desto kleiner wird der Werth des Bruchs, und wenn daher  $z$  eine unendlich große Größe oder  $z = \infty$  wird, so muß nothwendig der Werth des Bruchs  $\frac{a}{\infty}$  unendlich klein werden.

§. 91.

Wer diese Schlüsse nicht gelten lassen wollte, der würde sich in die größten Schwierigkeiten verwickeln, und alle noch so festen Gründe der Analyse über den Haufen stoßen. Denn wollte man dem Bruche  $\frac{a}{0}$  einen endlichen Werth, z. B.  $b$  belegen, so würde man, durch die Multiplication beyder Größen durch  $0$ ,  $a = 0 \cdot b$  erhalten, und es würde also eine endliche Größe  $b$  mit  $0$  multiplicirt, eine endliche Größe  $a$  geben, welches unmöglich ist. Noch weniger kann  $b$  als der Werth des Bruchs  $\frac{a}{0} = 0$  seyn, denn wie wäre es möglich, daß  $0$  mit  $0$  multiplicirt, eine endliche Größe  $a$  gäbe? Auf ähnliche Ungereimtheiten verfällt man, wenn man behauptet, daß  $\frac{a}{\infty}$  nicht  $= 0$  sey; denn alsdenn muß man auch zugeben, daß  $\frac{a}{\infty}$  einer endlichen Größe  $b$  gleich sey. Da aber aus der Gleichung  $\frac{a}{\infty} = b$  ganz richtig diese folgt:  $\infty = \frac{a}{b}$ ; so müßte der Werth des Bruchs  $\frac{a}{b}$ , dessen

Zähler und Nenner endliche Größen sind, unendlich groß seyn, und dies ist eben so ungereimt. Auch kann man die Werthe der Brüche  $\frac{a}{0}$  und  $\frac{a}{\infty}$  nicht als imaginäre Größen annehmen, weil der Werth eines Bruchs dessen Zähler eine endliche, der Nenner aber eine imaginäre Größe ist, weder unendlich groß noch unendlich klein seyn kann.

## §. 92.

Es läßt sich also die unendlich große Größe, worauf wir durch diese Betrachtung gekommen sind, und welche allein in der Analysis des Unendlichen statt findet, am allerbequemsten auf die Art erklären, daß man sagt, die unendlich große Größe sey der Quotient, der aus der Division einer endlichen Größe durch eine unendlich kleine Größe entspringt. Umgekehrt wird daher auch eine unendlich kleine Größe ein Quotient aus endlichen Größen durch eine unendlich große Größe dividirt. Da sich also geometrisch die unendlich kleine Größe zur endlichen verhält, wie die endliche Größe zur unendlich großen: so muß die endliche Größe eben so unendlichmal größer seyn als die unendlich kleine, wie die unendliche Größe unendlichmal größer ist als die endliche. An dergleichen Redensarten muß man sich nicht stoßen, wie viele thun, denn sie beruhen auf den festesten Gründen. Ja es scheint aus der Gleichung  $\frac{a}{0} = \infty$  selbst möglich, daß Nichts durch eine unendlich große Größe multiplicirt, ein endliches Produkt gebe, welches allerdings auffallend seyn müßte, wenn man nicht durch eine ganz richtige Folgerung darauf käme.

## §. 93.

Da die unendlich kleinen Größen, nach dem geometrischen Verhältnisse verschieden sind, so muß auch un-  
ter

ter den unendlich großen Größen ein ähnlicher Unterschied statt finden, und es ist derselbe hier noch größer, da die unendlich großen Größen nicht bloß geometrisch, sondern auch arithmetisch betrachtet, sich von einander unterscheiden. Denn setzt man die unendliche Größe, die aus der Division der endlichen Größe  $a$  durch die unendlich kleine Größe  $dx$  entspringt,  $= A$ ; so daß  $\frac{a}{dx} = A$  ist:

so wird auch  $\frac{2a}{dx} = 2A$ , und  $\frac{na}{dx} = nA$ : und da nun auch

$nA$  eine unendliche Größe ist, so folgt, daß zwischen den unendlichen Größen ein jedes Verhältniß statt finden kann. Wenn also eine unendliche Größe durch eine endliche Größe multiplicirt oder dividirt wird, so ist auch das Produkt oder der Quotient eine unendliche Größe. Auch läßt sich von den unendlichen Größen nicht leugnen, daß sie noch weiter vermehrt werden können. Wenn aber das geometrische Verhältniß, welches zwischen zwey unendlichen Größen statt findet, kein Verhältniß der Gleichheit ist, so fällt in die Augen, daß das arithmetische Verhältniß derselben noch weniger ein Verhältniß der Gleichheit seyn wird, es ist vielmehr ihre Differenz allezeit unendlich groß.

S. 94.

Ob aber gleich der Begriff des Unendlichen, so wie man ihn in der Mathematik gebraucht, vielen verdächtig scheint, so daß sie denselben aus dieser Ursach auch aus der Analysis des Unendlichen verbannt wissen wollen: so kann man denselben doch selbst in der gemeinen Mathematik nicht einmal entbehren. In der Arithmetik, in der Lehre von den Logarithmen, nimmt man den Logarithmen von der Null negativ und unendlich groß an, und es wird sicher niemanden einfallen,

fallen, diesen Logarithmen einer endlichen Größe oder gar der Null gleich zu setzen. In der Geometrie und Trigonometrie giebt es noch auffallendere Beispiele. Wer könnte z. B. leugnen wollen, daß die Tangente und die Secante eines rechten Winkels unendlich groß sind? und da das Rechteck zwischen der Tangente und Cotangente dem Quadrate des Halbmessers gleich, die Cotangente des rechten Winkels aber  $= 0$  ist: so muß man in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne.

## §. 95.

Da  $\frac{a}{dx}$  eine unendliche Größe  $A$  ist, so ist offenbar, daß diese Größe  $\frac{A}{dx}$  eine unendlichmal größere Größe seyn werde als  $A$ , denn es ist  $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$ , d. h. wie eine endliche Größe zu einer unendlichen. Es giebt also unter den unendlich großen Größen solche Verhältnisse, daß einige unendlichmal größer seyn können als andere. So wird  $\frac{a}{dx^2}$  eine unendlichmal größere Größe als  $\frac{a}{dx}$ ; denn setzt man  $\frac{a}{dx} = A$ , so wird  $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$ . Auf eine ähnliche Art ist  $\frac{a}{dx^3}$  eine unendlichmal größere unendliche Größe als  $\frac{a}{dx^2}$ , und folglich unendlichmal unendlichmal größer als  $\frac{a}{dx}$ . Es giebt also Grade unter den unendlichen Größen, und jede unendliche Größe von einem folgenden Grade ist unendlichmal größer als

als eine von den vorhergehenden; ja wenn die Zahl  $m$  nur größer ist als die Zahl  $n$ , es sey übrigens um so wenig als es wolle, so ist  $\frac{a}{dx^m}$  eine unendlichmal größere Größe als

$$\frac{a}{dx^n}$$

§. 96.

So wie es bey den unendlich kleinen Größen ungleiche geometrische Verhältnisse giebt, obgleich die arithmetischen Verhältnisse insgesamt gleich sind: so können bey den unendlich großen Größen die geometrischen Verhältnisse gleich seyn, obchon die arithmetischen eine noch so große Ungleichheit haben. Wenn nemlich  $a$  und  $b$  endliche Größen bedeuten, so stehen diese beyden unendliche Größen  $\frac{a}{dx} + b$  und

$\frac{a}{dx}$  in einem geometrischen Verhältnisse der Gleichheit, indem der Quotient, den man durch ihre Division erhält,  $= 1 + \frac{bdx}{a} = 1$  wird, weil  $dx = 0$  ist. Vergleicht man aber eben

diese Größen arithmetisch mit einander, so ist, wegen der Differenz  $b$ , ihr Verhältniß ein Verhältniß der Ungleichheit.

Eben so stehet  $\frac{a}{dx^2} + \frac{a}{dx}$  zu  $\frac{a}{dx^2}$  in einem geometrischen

Verhältnisse der Gleichheit, weil der Exponent des Verhältnisses  $= 1 + dx = 1$  ist; allein die Differenz dieser Größen

ist  $\frac{a}{dx}$  und folglich eine unendliche Größe. Wenn man

also auf das geometrische Verhältniß sieht, so verschwinden die unendlich großen Größen der niedrigeren Grade gegen die unendlich großen Größen der höhern Grade.

## §. 97.

Dies von den Graden der unendlich großen Größen vorausgesetzt, so läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt aus einer unendlich großen und einer unendlich kleinen Größe nicht bloß eine endliche Größe, wie schon vorhin angemerkt worden ist, sondern auch eine unendlich große und eine unendlich kleine Größe seyn kann. Wenn z. B. die unendliche Größe  $\frac{a}{dx}$  durch die unendlich kleine Größe  $dx$  multiplicirt wird, so ist das Produkt eine endliche Größe  $= a$ ; wenn aber  $\frac{a}{dx}$  durch  $dx^2$  oder  $dx^3$  oder ein anderes unendlich Kleines von einer höhern Ordnung multiplicirt wird, so ist das Produkt entweder  $adx$ , oder  $adx^2$ , oder  $adx^3$ , u. und also unendlich klein. Auf eben die Art erhellt, daß das Produkt aus der unendlichen Größe  $\frac{a}{dx^2}$  und der unendlich kleinen Größe  $dx$  unendlich groß ist; und überhaupt wird, wenn man  $\frac{a}{dx^n}$  und  $bdx^m$  mit einander multiplicirt, das Produkt  $abdx^{m-n}$  unendlich klein seyn, wenn  $m$  größer ist als  $n$ , und wenn  $m = n$  ist, eine endliche, so wie, wenn  $m$  kleiner als  $n$  ist, eine unendliche Größe werden.

## §. 98.

Die unendlich kleinen Größen sowohl als die unendlich großen kommen in den Reihen der Zahlen sehr häufig vor; und da sie darin mit endlichen Zahlen vermischt sind, so läßt sich daraus mit voller Deutlichkeit erkennen, wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß. Wir wollen zuvörderst die Reihe der natürlichen

chen

den Zahlen betrachten, die, wenn man sie zu gleicher Zeit rückwärts fortsetzt, folgende ist:

$$\infty. - 4 - 3 - 2 - 1, + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \infty.$$

Es geben also die Zahlen, indem sie beständig abnehmen, endlich 0 oder das unendlich Kleine, und werden, wenn man sie weiter fortsetzt, negativ. Man sieht daher hieraus, daß man von den abnehmenden positiven Zahlen durch 0 zu den negativen übergeht. Wenn man aber die Quadrate dieser Zahlen nimmt, so erhält man, weil diese insgesammt positiv werden,

$$\infty. + 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \infty.$$

Es ist folglich hier 0 der Uebergang von den abnehmenden positiven Zahlen zu den wachsenden positiven Zahlen; und wenn man die Zeichen verändert, so wird 0 der Uebergang von den abnehmenden negativen Zahlen zu den wachsenden negativen Zahlen.

§. 99.

Betrachtet man die Reihe, deren allgemeines Glied  $\sqrt{x}$  ist, und welche, auch rückwärts fortgesetzt, folgende ist:

$$\infty. + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \infty.$$

so fällt daraus in die Augen, daß 0 gleichsam als die Grenze angesehen werden könne, durch welche man von den reellen Größen zu den imaginären kommt. Stellt man sich unter jenen Gliedern die Applicaten krummer Linien vor, so erhellet, daß dieselben, wenn sie positiv gewesen sind und so weit abnehmen, daß sie endlich verschwinden, bey nunmehriger weiterer Fortsetzung entweder negativ oder wieder positiv oder auch imaginär werden. Eben das geschieht, wenn die Applicaten zuerst negativ gewesen sind. Denn setzt man sie nach dem Verschwinden weiter fort, so werden sie ebenfalls entweder positiv oder negativ oder imaginär. Hiervon enthält die Lehre von

von den krummen Linien, welche wir im zweyten Buche der Einleitung in die Analysis des Unendlichen abgehandelt haben, mehrere Beyspiele.

§. 100.

Auf eben die Art trifft man in den Reihen öfters unendlich große Glieder an, z. B. in der harmonischen Reihe, deren allgemeines Glied  $\frac{1}{x}$  ist, wo zu dem Anzeiger  $x = 0$

das unendlich große Glied  $\frac{1}{0}$  gehört, und die ganze Reihe folgende ist:

$$\text{z. } \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{z.}$$

Sieht man daher von der Rechten gegen die Linke zu, so wachsen die Glieder, so daß  $\frac{1}{0}$  unendlich groß ist, aber so

balb die Glieder über diese Grenze kommen, so werden sie negativ und nehmen ab. Hiernach kann man also die unendlich große Größe als eine Grenze betrachten, jenseits welcher die positiven Zahlen negativ werden, und umgekehrt. Dies hat einige verleitet, zu behaupten, daß die negativen Zahlen als Zahlen, die größer seyn als das Unendliche, betrachtet werden könnten, weil die beständig wachsenden Glieder dieser Reihe, nachdem sie das Unendliche erreicht haben, negativ werden. Aber wenn man die Reihe nimmt, deren allgemeines Glied  $\frac{1}{xx}$  ist, so werden die Glieder derselben

nach dem Uebergange durchs Unendliche wieder positiv

$$\text{z. } \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{z.}$$

und davon wird doch wohl Niemand behaupten wollen, daß sie größer sind als das Unendliche.

§. 101.



und laufen dieselben ohne Ende, das heißt ins Unendliche fort, so ist's außer allem Zweifel, daß die Summe aller dieser Glieder größer als jede Zahl, die sich angeben läßt, und eben deswegen unendlich seyn muß. Dies bestätigt auch der Ursprung dieser Reihe, indem sie aus der Entwicklung dieses Bruchs

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

entsteht, wenn man  $x = 1$  setzt. Es ist demnach

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

und die Summe  $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$  dem Unendlichen.

§. 103.

Ob indeß gleich hier kein Zweifel entstehen kann, da eine und dieselbe endliche Zahl unendlichmal genommen, nothwendig in eine unendliche übergehen muß: so scheint doch der Ursprung aus der allgemeinen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

auf sehr wichtige Schwierigkeiten zu führen. Denn setzt man für  $x$  nach und nach die Zahlen 1, 2, 3  $\dots$  so erhält man folgende Reihen

$$A.. 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \frac{1}{1-1} = \text{dem Unendl.}$$

$$B.. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$C.. 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

$$D.. 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + \dots = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$$

$\dots$

Da

Da nun in der Reihe B außer dem ersten Gliede alle Glieder größer sind als in der Reihe A, so sollte auch die Summe der Reihe B nothwendig größer seyn als die Summe der Reihe A; allein die Rechnung giebt die Summe der Reihe A unendlich groß, und die Summe der Reihe B negativ, d. h. kleiner als nichts an, und das läßt sich nicht zusammen denken. Noch viel weniger läßt es sich mit den gewöhnlichen Vorstellungen vereinigen, daß die Summe dieser und aller folgenden Reihen negativ seyn soll, da doch alle Glieder positiv sind.

§. 104.

Aus diesem Grunde hat vielen die schon angeführte Meinung wahrscheinlich geschienen, daß man die negativen Größen bisweilen als Größen betrachten könne, die gleichsam größer als das Unendliche oder noch mehr als unendlich wären; und da man auch durch fortgesetzte Verminderung der Zahlen über 0 hinaus zu negativen Zahlen kommt, so haben sie einen Unterschied zwischen negativen Zahlen von dieser Form  $-1, -2, -3, \text{rc.}$  und zwischen negativen Zahlen dieser Art,  $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-2}, \frac{+3}{-3}, \text{rc.}$  gemacht: jene sollten ihrem Vorgeben nach kleiner als nichts, diese aber größer als das Unendliche seyn. Allein auf diesem Wege wird die Schwierigkeit nicht gehoben, welche sich bey der folgenden Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{rc.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

findet. Es entspringen nemlich aus dieser allgemeinen Reihe die besondern Reihen

$$A \dots 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{rc.} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{dem Unendl.}$$

$$B \dots 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{rc.} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

wo außer den ersten Gliedern alle Glieder der Reihe B größer  
fer

ser sind als die Glieder in der Reihe A. Wie aber die Summe der Reihe A unendlich, und die Summe der Reihe B der Einheit oder ihrem ersten Gliede soll gleich seyn können? Das läßt sich aus jener Annahme auf keine Weise erklären.

§. 105.

Und wollte man leugnen, daß  $\frac{1}{-1} = \frac{+1}{-1}$ , und  $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$

sey, so würde der ganze Grund der Analyse bey aller seiner Festigkeit dahin sinken, und es kann daher die vorhin angeführte Erklärung auf keine Weise angenommen werden. Wir sehen uns vielmehr genöthiget zu behaupten, daß die Summen, welche jene allgemeine Formeln an die Hand geben, keine wahre Summen sind. Denn da diese Reihen aus einer fortgesetzten Division entspringen, indem der Rest immer wieder von neuem getheilt wird, und der Rest immer mehr wächst, je weiter man fortgeht: so sind wir nie berechtigt, diesen Rest wegzulassen, am allerwenigsten den letzten Rest, d. h. denjenigen, welcher, nachdem man zum unendlichen Male getheilt hat, übrig bleibt, weil derselbe unendlich groß ist. Da aber hierauf bey den obigen Reihen nicht gesehen worden ist, indem man den Rest gar nicht geachtet hat, so ist es kein Wunder, daß man bey dem Summiren auf Ungereimtheiten verfallen ist. Und diese Antwort ist eben so durchaus der Wahrheit gemäß, als sie aus der Entstehungsart der Reihen selbst hergenommen ist, und räumt also allen Zweifel aus dem Wege.

§. 106.

Damit dies noch deutlicher werde, so wollen wir die Entwicklung des Bruchs  $\frac{1}{1-x}$  in den ersten bloß endlichen Gliedern betrachten. Es wird also

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

ic.

Wer also die Summe dieser endlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3$$

$= \frac{1}{1-x}$  setzt, der irrt sich um  $\frac{x^4}{1-x}$ ; und wer behauptet,

daß die Summe dieser Reihe,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1000}$$

$= \frac{1}{1-x}$  sey, der irrt sich um die Größe  $\frac{x^{1001}}{1-x}$ , und

diese Zahl würde, wenn  $x$  größer als die Einheit wäre, eine außerordentliche Größe haben.

§. 107.

Hieraus erhellet, daß der, welcher die Summe eben dieser Reihe, bis ins Unendliche fortgesetzt, oder die Summe von

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^\infty$$

$= \frac{1}{1-x}$  setzt, die wahre Summe um  $\frac{x^\infty + 1}{1-x}$  zu klein

angiebt, und wenn nun  $x$  größer als 1 ist, so ist dies allerdings ein unendlich großer Unterschied. Zugleich erhellet hieraus, warum die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ic.}$$

in der That  $= \frac{1}{1-x}$  ist, wenn  $x$  einen Bruch, der kleiner

Eulers Differenz, Rechn. I, Th.

⊗

als

als die Einheit ist, bedeutet. Es wird nemlich alsdann der Fehler  $\frac{x^\infty + 1}{1-x}$  unendlich klein oder Null, und braucht daher nicht in Anschlag gebracht zu werden. So ist, wenn man  $x = \frac{1}{2}$  setzt, in der That

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{rc.} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

und aus eben dem Grunde wird die wahre Summe der übrigen Reihen, wenn  $x$  einen Bruch bedeutet, auf eine ähnliche Art gefunden.

## §. 108.

Diese Antwort paßt auch auf die Summen solcher divergirenden Reihen, in welchen die Zeichen  $+$  und  $-$  abwechseln, und welche man gewöhnlich aus eben der Formel ableitet, indem man für  $x$  negative Zahlen setzt. Denn da

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{rc.}$$

ist, so wird, wenn man den letzten Rest wegläßt,

$$A \dots 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{rc.} = \frac{1}{2}$$

$$B \dots 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{rc.} = \frac{1}{3}$$

$$C \dots 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{rc.} = \frac{1}{4}$$

rc.

Es fällt aber in die Augen, daß die Summe der zweiten Reihe B deswegen nicht  $= \frac{1}{3}$  seyn kann, weil sich die Aggregate desto mehr von  $\frac{1}{3}$  entfernen, je mehrere Glieder man wirklich mit einander vereiniget. Denn es muß die Summe einer Reihe eine Grenze seyn, der man desto näher kommt, je mehrere Glieder man wirklich zusammen addirt.

## §. 109.

Hieraus haben einige geschlossen, daß die Reihen, welche man divergirende nennt, gar keine beständige Summe haben,

ben, weil man sich bey der wirklichen Vereinigung ihrer Glieder keiner Grenze nähert, die man für die Summe einer solchen Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, halten könnte. Diese Meinung ist auch der Wahrheit vollkommen angemessen, da die sogenannten Summen wegen der Auslassung der letzten Reste nach dem vorhergehenden ganz falsch sind. Gleichwohl bleibt dagegen der Einwurf übrig, daß eben diese Summen, bey aller ihrer Abweichung von der Wahrheit doch nie in einen Irrthum führen; daß man sich vielmehr durch ihre Annahme in den Stand gesetzt sieht, eine Menge der wichtigsten Sätze zu finden, auf welche man ohne jene Summen gar nicht würde kommen können. Wären aber diese Summen falsch, so könnten sie uns nicht beständig zu wahren Sätzen leiten, sondern sie müßten uns vielmehr, da sie sich nicht um etwas unbedeutendes, sondern selbst um das Unendliche von der Wahrheit entfernen, auch in die größten Irrthümer stürzen. Da also dies nicht geschieht, so bleibt uns noch der schwerste Knoten zu lösen übrig.

§. 110.

Meiner Meinung nach liegt die ganze Schwierigkeit in dem Worte Summe. Denn wenn man das Wort, Summe der Reihe, in dem gewöhnlichen Verstande nimmt, wo man darunter das Aggregat aller ihrer wirklich vereinigten Glieder versteht: so ist es ausgemacht, daß man nur die Summen derer Reihen wirklich darstellen kann, die convergiren, und den Werth der Reihe einem gewissen beständigen Werthe desto mehr nähern, je mehrere Glieder wirklich zusammen genommen werden. Dagegen haben die divergirenden Reihen, deren Glieder nicht abnehmen, es mögen nun darin die Zeichen + und — mit einander abwechseln oder nicht, gar keine beständige Summen, wenn man dies Wort in dem

angeführten Verstande nimmt. Wenn aber in den vorhin erwähnten Fällen gleichwohl aus diesen irrigen Summen etwas wahres hergeleitet wird, so geschiehet solches nicht, weil der endliche Ausdruck z. B.  $\frac{1}{1-x}$  die Summe der Reihe  $1 + x + x^2 + x^3 + \text{rc.}$  ist, sondern nur in so fern, als jener Ausdruck, wenn man ihn entwickelt, diese Reihe giebt. Auf diese Art könnte man dabey des Ausdrucks, Summe ganz überhoben seyn.

## §. III.

Wir werden also diese Schwierigkeiten und anscheinenden Widersprüche gänzlich vermeiden, wenn wir dem Worte Summe eine andere Bedeutung geben, als es gewöhnlich zu haben pflegt. Wir wollen also den Ausdruck, aus dessen Entwicklung eine unendliche Reihe entsteht, die Summe dieser Reihe nennen. In diesem Verstande ist also  $\frac{1}{1-x}$  in der That die Summe der Reihe  $1 + x + x^2 + x^3 + \text{rc.}$ , weil diese Reihe aus der Entwicklung jenes Bruchs entsteht, man mag für  $x$  eine Zahl setzen, was für eine man will. Wenn also die Reihe eine convergirende Reihe ist, so stimmt dieser neue Begriff der Summe mit dem gewöhnlichen überein; und was die divergirenden Reihen betrifft, die keine eigentlich sogenannten Summen haben, so vermeidet man bey ihnen, wenn man jene Erklärung zum Grunde legt, alle Schwierigkeiten. Endlich ist man vermittelst derselben im Stande, die Nutzbarkeit der divergirenden Reihen zu behaupten, und sie wider alle Einwürfe zu vertheidigen.



## Viertes Capitel.

Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen.

§. 112.

Wir haben in dem ersten Capitel gesehen, daß der Zuwachs, den eine Funktion von  $x$  erhält, wenn man darin  $x$  um die Größe  $\omega$  wachsen läßt, durch diese Form  $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{ic.}$  ausgedruckt werden kann, es mag nun dieser Ausdruck ein endlicher Ausdruck seyn, oder ohne Ende fortgehen. Wenn man also in der Funktion  $y$ , für  $x$  die Größe  $x + \omega$  setzt, so bekommt sie folgenden Werth:

$$y^1 = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ic.}$$

und zieht man davon den vorhergehenden Werth  $y$  ab, so bleibt die Differenz der Funktion  $y$  übrig, die man also ausdrucken kann,

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{ic.}$$

und da der folgende Werth von  $x$  oder  $x^1 = x + \omega$  ist, so ist die Differenz von  $x$  oder  $\Delta x = \omega$ . Die Buchstaben  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\text{ic.}$  aber bedeuten Funktionen von  $x$ , die von  $y$  abhängen, und deren Erfindung in dem ersten Capitel gelehrt worden ist.

§. 113.

Um was für einen Zuwachs  $\omega$  also auch die veränderliche Größe  $x$  vermehrt werden mag, so ist man gleichwohl

§ 3

jedes

jedesmal im Stande, den Zuwachs zu bestimmen, welchen eine jede Funktion  $y$  von  $x$  dadurch erhält, sobald man die Funktionen  $P, Q, R, S$  u. s. w. für einen jeden Werth von  $y$  bestimmen kann. In dem gegenwärtigen Capitel aber, so wie auch in der ganzen Analysis des Unendlichen, wird der Zuwachs  $\omega$ , um welchen wir die veränderliche Größe  $x$  haben wachsen lassen, unendlich klein, oder als eine verschwindende Größe, oder  $= 0$  angenommen; woher denn offenbar ist, daß auch der Zuwachs oder die Differenz der Funktion  $y$  unendlich klein wird. Da aber bey dieser Voraussetzung die folgenden Glieder des Ausdrucks

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{u. s. w.}$$

gegen die vorhergehenden verschwinden (§. 88. u. f.) so bleibt allein das erste Glied  $P\omega$  übrig, und es ist daher in dem Falle, daß  $\omega$  unendlich klein ist, die Differenz von  $y$  oder  $\Delta y = P\omega$ .

## §. 114.

Es ist daher die Analysis des Unendlichen, welche wir hier abzuhandeln angefangen haben, nichts anders, als ein besonderer Fall der Lehre von den Differenzen, die den Gegenstand des ersten Capitels ausmacht; es werden nemlich darin die Differenzen, die wir oben endlich annahmen, unendlich klein angenommen. Um daher die Analysis des Unendlichen von der Lehre von den Differenzen gehörig abzusondern, wird es gut seyn, daß wir die unendlich kleinen Differenzen sowohl mit besondern Namen belegen, als mit besondern Zeichen andeuten. Wir wollen also die unendlich kleinen Differenzen mit Leibniz'schen Differenzialien nennen; und da wir in dem ersten Capitel die Differenzen in verschiedene Ordnungen eingetheilt haben, so wird daraus ein jeder leicht abnehmen, was das erste, das zweite, das dritte Differenzial u. s. w. sey. Anstatt des Zeichens  $\Delta$  aber,

aber, womit wir die Differenzen bezeichnet haben, wollen wir hier den Buchstaben  $d$  gebrauchen, so daß also  $dy$  das erste Differenzial von  $y$ ;  $ddy$  das zweite Differenzial von  $y$ ;  $d^3y$  das dritte Differenzial von  $y$ , u. s. f. bedeuten soll.

§. 115.

Da wir die unendlich kleinen Differenzen, mit deren Betrachtung wir uns jetzt beschäftigen, Differenzialien nennen, so erhält daher der ganze Calcul, dessen Gegenstand in der Auffuchung und dem Gebrauche der Differenzialien besteht, den Namen der Differenzial-Rechnung. Die englischen Mathematiker, unter welchen zuerst Newton, so wie Leibniz unter den Deutschen, diesen neuen Theil der Analysis erfunden, und zu vervollkommen gesucht hat, bedienen sich sowohl anderer Namen als anderer Zeichen. Sie nennen nemlich die unendlich kleinen Differenzen, die bey uns Differenzialien heißen, meistens Fluxionen, bisweilen auch Incremente, und diese Namen sind im Lateinischen allerdings dem Sprachgebrauche gemäßer, und drücken auch die Sache, die sie bezeichnen sollen, ziemlich gut aus. Denn man kann sich die veränderliche Größe, die wachsend immer von einem Werthe zu einem andern fortgeht, sehr wohl gleichsam als eine fließende Größe vorstellen; und es hat daher Newton das Wort Fluxion, welches er anfänglich von der Geschwindigkeit des Wachsthums gebrauchte, auf den unendlich kleinen Zuwachs, den die Größe gleichsam durch ihr Fließen erlangt, übertragen.

§. 116.

Ob es aber gleich thöricht seyn würde, wegen des Gebrauchs dieser Benennungen und ihrer Erklärung mit den Engländern zu streiten, indem wir, wenn auf die Reinigkeit

des lateinischen Ausdrucks und auf seine Bequemlichkeit gesehen würde, doch nachgeben müßten: so hat gleichwohl unsere Bezeichnungsart vor der englischen einen Vorzug. Die Engländer bezeichnen nemlich die Differenzialien oder ihre Fluxionen durch Punkte, welche sie über die Buchstaben schreiben, so daß  $\dot{y}$  die erste,  $\ddot{y}$  die zweyte,  $\overset{\cdot\cdot}{y}$  die dritte Fluxion von  $y$  u. s. f. bedeutet. Nun ist zwar diese Bezeichnungsart willkürlich, und wenn die Anzahl der Punkte klein ist, so daß man sie leicht überzählen kann, auch nicht zu tadeln; allein wenn viel Punkte gesetzt werden müssen, so entstehen daraus die größten Unbequemlichkeiten. Es ist z. B. sehr unbequem das zehnte Differenzial oder die zehnte Fluxion auf diese Art  $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{y}$  zu bezeichnen, da man hingegen unsere Art  $d^{10}y$  mit einem Blicke übersieht. Es kommen aber Fälle vor, wo noch höhere Ordnungen der Differenzialien anzuzeigen sind, und zur Bezeichnung der Differenzialien von einer unbestimmten Ordnung ist die englische Art ganz untauglich.

## §. 117.

Wir wollen also sowohl unsere Zeichen als unsere Namen gebrauchen, weil diese bey uns allgemein eingeführt und den mehresten bekannt, jene aber bequemer sind. Inzwischen mußte auch der bey den Engländern üblichen Namen und Zeichen Erwähnung geschehen, damit jeder in den Stand gesetzt würde, die Schriften der Engländer zu lesen. Denn es sind dieselben gar nicht so von ihrer Art eingenommen, daß sie die Schriften, worin unsere Namen und Zeichen vorkommen, gänzlich verwerfen, und des Lesens unwerth halten sollten. Ich habe wenigstens ihre Werke mit der größten Begierde und mit dem größten Nutzen gelesen, und dabey oft wahrgenommen, daß auch sie die Schriften

der

der Lesrigen mit Nutzen gelesen haben. So wünschenswerth daher auch eine allgemeine und immer gleiche Bezeichnung und Benennungs Art wäre, so hält es doch nicht schwer, sich so weit an beyde zu gewöhnen, als es zur Lesung der Schriften, in welchen eine andere Art herrscht, erforderlich ist.

§. 118.

Da wir also bisher den Buchstaben  $\omega$  zur Bezeichnung der Differenz oder des Zuwachses, um welchen man sich vorstellte, daß die veränderliche Größe  $x$  vermehrt werde, gebraucht haben,  $\omega$  aber nunmehr unendlich klein angenommen wird: so ist  $\omega$  das Differenzial von  $x$ , und also nach der eingeführten Bezeichnungsart  $\omega = dx$ , und  $dx$  also die unendlich kleine Differenz, um welche man sich vorstellt, daß  $x$  wachse. Auf eine ähnliche Art wird das Differenzial von  $y$  durch  $dy$  ausgedruckt; und wenn  $y$  eine Funktion von  $x$  ist, so bezeichnet das Differenzial  $dy$  den Zuwachs, den die Funktion  $y$  erfährt, wenn  $x$  in  $x + dx$  übergeht. Setzt man daher in der Funktion  $y$  allenthalben  $x + dx$  für  $x$ , und bezeichnet man den auf diese Art entspringenden Werth durch  $y'$ , so wird  $dy = y' - y$ , und man findet hiernach das Differenzial einer jeden Funktion. Doch muß man dies nur von dem ersten Differenziale oder von dem Differenziale der ersten Ordnung verstehen, denn von den übrigen wird erst nachher geredet werden.

§. 119.

Man hat sich daher wohl zu merken, daß der Buchstabe  $d$  hier keine Größe bedeutet, sondern bloß als ein Zeichen gebraucht wird, um die Benennung Differenzial auszudrucken, eben so wie in der Lehre von den Logarithmen der Buchstaben  $l$  als ein Zeichen des Logarithmen, und in

der Algebra das Zeichen  $\sqrt{\quad}$  zur Bezeichnung der Wurzel gebraucht wird. Es bedeutet daher  $dy$  nicht, so wie sonst in der Analysis gewöhnlich ist, ein Produkt aus einer Größe  $d$  in die Größe  $y$ , sondern man muß es durch das Differenzial von  $y$  aussprechen. Eben so bedeutet in dem Ausdrucke  $d^2y$  weder die 2 einen Exponenten, noch  $d^2$  eine Potestät von  $d$ , sondern man braucht diesen Ausdruck bloß, um das zweite Differenzial kurz und passend auszudrücken. Wegen dieses Gebrauchs des Buchstabens  $d$  in der Differenzial-Rechnung muß man daher denselben in Rechnungen, wo mehrere Größen vorkommen, um Verwirrung zu vermeiden, nie zur Bezeichnung einer von diesen Größen anwenden, eben so wie man in den Rechnungen mit Logarithmen den Buchstaben  $l$  nicht zu gebrauchen pflegt. Es wäre indeß zu wünschen, daß die Buchstaben  $d$  und  $l$  eine etwas veränderte Gestalt bekommen mögten, damit man sie nicht mit den Buchstaben des Alphabets, wodurch man die Größen bezeichnet, verwechseln könnte; auf eine ähnliche Art meine ich, wie man den Buchstaben  $r$ , wodurch man anfänglich das Wort Wurzel ausdrückte, in das Zeichen  $\sqrt{\quad}$  umgeändert hat.

## §. 120.

Da wir gesehen haben, daß das erste Differenzial von  $y$ , wenn  $y$  irgend eine Funktion von  $x$  ist, diese Form  $P \cdot dx$  bekommt, so wird, weil  $dx = dx$  ist,  $dy = P \cdot dx$ . Was nemlich auch  $y$  für eine Funktion von  $x$  ist, so wird sein Differenzial  $dy$  doch immer durch eine gewisse Funktion von  $x$ , die wir hier durch  $P$  bezeichnen, mit  $dx$  multiplicirt, ausgedrückt. Ob also gleich die Differenziale von  $x$  und  $y$  in der That unendlich kleine Größen und der Null gleich sind; so haben sie doch ein endliches Verhältniß zu einander, indem  $dx : dy = 1 : P$  ist. Hat man daher die Funktion  $P$

gefun

gefunden, so kennt man das Verhältniß zwischen den Differenzialien  $dx$  und  $dy$ . Da also das Geschäfte der Differenzial-Rechnung in der Erfindung der Differenzialien besteht, so sind es nicht sowohl die Differenzialien selbst, welche darin untersucht werden, sondern vielmehr das geometrische Verhältniß, welches sie zu einander haben. Denn die Differenzialien selbst könnte man, da sie insgesamt der Null gleich sind, leicht finden.

§. 121.

Es lassen sich also die Differenzialien weit leichter finden, als die Differenzen. Denn um die Differenz  $\Delta y$  zu finden, um welche die Funktion  $y$  wächst, wenn die veränderliche Größe  $x$  den Zuwachs  $\omega$  bekommt, ist es nicht genug, daß man die Funktion  $P$  kennt, sondern man muß auch außerdem die Funktionen  $Q, R, S, \text{rc.}$ , die in der Bestimmung der Differenz  $\Delta y$

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{rc.}$$

vorkommen, wissen; zur Erfindung des Differenzials von  $y$  aber ist es genug  $P$  zu kennen. Es läßt sich daher auch aus der bekannten Differenz einer Funktion von  $x$  das Differenzial derselben leicht finden; allein aus dem Differenziale einer Funktion ist man nicht gleich im Stande, die Differenz derselben herzuleiten. Indes wird doch in der Folge gezeigt werden, wie man aus den bekannten Differenzialien aller Ordnungen jede Differenz einer jeden Funktion finden kann. Uebrigens erhellet hieraus, daß das erste Differenzial  $dy = P dx$  das erste Glied der Differenz, nemlich  $P\omega$  giebt.

§. 122.

Wenn also der Zuwachs  $\omega$ , um welchen man die veränderliche Größe sich vermehren läßt, sehr klein ist, so daß in  
dem

dem Ausdrücke  $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \text{rc.}$  die Glieder  $Q\omega^2$  und  $R\omega^3$  und noch vielmehr die übrigen Glieder so klein werden, daß sie in solchen Rechnungen, wo es nicht auf die größte Schärfe ankommt, gegen  $P\omega$  weggelassen werden können: so findet man aus dem bekannten Differentiale  $Pdx$  die Differenz beynahе. Es ist nemlich alsdann dieselbe  $= P\omega$ ; und hieraus läßt sich in vielen praktischen Anwendungen ein beträchtlicher Nutzen ziehen. Es ist dies aber auch der Grund gewesen, warum verschiedene die Differentzialien als unendlich kleine Incremente betrachtet und behauptet haben, daß sie nicht eigentliche Nullen wären, sondern nur unbestimmt klein gedacht zu werden brauchten. Das hat denn andern Gelegenheit gegeben, die Analysis des Unendlichen zu beschuldigen, daß sie nicht die wahren, sondern nur beynahе wahren Größen finden lehre; und dieser Vorwurf würde allerdings einige Stärke haben, wenn wir nicht die unendlich kleinen Größen als eigentliche Nullen betrachteten.

## S. 123.

Diesem Einwurfe zu begegnen, vergleichen diejenigen, die die unendlich kleinen Größen noch von den Nullen unterscheiden, die Differentzialien mit den kleinsten Sandkörnern im Gegensatz gegen die ganze Erde, wobei gewiß Niemand beschuldigt werden würde, daß er die Größe derselben falsch angegeben habe, wenn er um nicht mehr als ein solches Sandkorn sich geirrt hätte. Sie nehmen also zwischen dem Endlichen und dem unendlich Kleinen ein eben solches Verhältniß an, als sich zwischen der ganzen Erde und dem kleinsten Sandkorne findet; und wenn jemanden dieses Verhältniß noch nicht groß genug scheint, so vermehren sie solches tausendfältig und drüber, so daß das Kleine gar nicht mehr merkbar bleibt. Indes sehen sie sich dabey doch genöthiget zu

zu gestehen, daß dadurch etwas von der geometrischen Schärfe verloren gehe; wiewohl sie, um sich dagegen zu verwahren, ihre Zuflucht zu solchen Beyspielen nehmen, wo man die Auflösung sowohl mittelst der Geometrie als durch die Analysis des Unendlichen finden kann, und da aus der Uebereinstimmung beyder Resultate auf die Güte der letzten Methode schließen. Auf der einen Seite aber reicht dies nicht hin, weil man auch öfters durch irrige Methoden auf Wahrheit kommen kann; auf der andern Seite fließt daraus, weil dies hier nicht der Fall ist, eigentlich das, daß die in der Rechnung aus der Acht gelassenen Größen nicht bloß bis zur Unbemerksbarkeit klein, sondern eigentlich nichts sind, so wie wir es angenommen haben. Wir thun daher der geometrischen Schärfe nicht die geringste Gewalt an.

§. 124.

Wir wenden uns zur Erklärung der Natur der Differenzialien der zweyten Ordnung, die aus den im ersten Capitel erklärten zweyten Differenzen entspringen, wenn man die Größe  $\infty$  unendlich klein  $= dx$  annimmt. Da also die zweyten Differenzen verschwinden, wenn man annimmt, daß die veränderliche Größe um gleiche Incremente wächst, so daß, wenn der zweyte Werth  $x^I = x + dx$  ist, alsdenn die folgenden  $x^{II} = x + 2d$ ;  $x^{III} = x + 3dx$ , u. sind; weil in diesem Falle die ersten Differenzen beständig  $= dx$  sind: so sind auch die zweyten Differenzialien von  $x$ , vder  $d^2x = 0$ , und eben so auch die folgenden  $d^3x = 0$ ;  $d^4x = 0$ ;  $d^5x = 0$ ; u. Hierwider könnte zwar eingewendet werden, daß diese Differenzialien als unendlich kleine Größen schon an und für sich  $= 0$  seyen, und daß man also dieses nicht als eine besondere Eigenschaft der veränderlichen Größe, deren Incremente gleich gedacht werden, zu betrachten habe.

Allein

Allein man muß dieses Verschwinden so verstehen, daß die Differenzialien  $ddx$ ,  $d^3x$ , *rc.* nicht bloß an sich betrachtet, Null seyn, sondern auch in Ansehung der Potestäten von  $dx$ , womit sie sonst verglichen werden könnten, verschwinden sollen.

## §. 125.

Damit man dies desto deutlicher einsehen möge, so erinnere man sich daran, daß die zweyte Differenz einer jeden Funktion von  $x$ , die  $y$  seyn mag, durch diese Form  $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{rc.}$  ausgedruckt werden kann. Wenn man daher  $\omega$  unendlich klein annimmt, so verschwinden die Glieder  $Q\omega^3$ ,  $R\omega^4$ , *rc.*, und setzt man  $\omega = dx$ , so wird das zweyte Differenzial von  $y = Pdx^2$ , wo  $dx^2$  das Quadrat des Differenzials  $dx$  bedeutet. Ob also gleich das zweyte Differenzial von  $y$  oder  $ddy$  an und für sich  $= 0$  ist, so hat es doch zu  $dx^2$ , weil  $ddy = Pdx^2$  ist, das endliche Verhältniß  $P : 1$ ; wenn aber  $y = x$  ist, dann wird  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 0$ , *rc.*, und es verschwindet also in diesem Falle das zweyte Differenzial von  $x$  auch in Ansehung von  $dx^2$  und der höhern Potestäten von  $dx$ . Auf diese Art ist die vorhergehende Behauptung, daß  $ddx = 0$ ,  $d^3x = 0$ , *rc.* sey, zu verstehen.

## §. 126.

Da die zweyte Differenz nichts anders ist, als die Differenz der ersten Differenz: so ist auch das zweyte Differenzial, oder das Differenzio-Differenzial, wie man es auch öfters nennt, nichts anders, als das Differenzial des ersten Differenzials. Da ferner die beständige Größe keinen Zuwachs und keine Verminderung bekommt, und folglich auch keine Differenzen hat, indem diese bloß den veränderlichen Größen

Größen

Größen eigen sind: so sind auch in eben dem Sinne alle Differenzialien der beständigen Größen  $= 0$ , d. h. sie verschwinden insgesamt gegen alle Potestäten von  $dx$ . Da also das Differenzial von  $dx$  oder  $d dx = 0$  ist, so kann man das Differenzial  $dx$  als eine beständige Größe betrachten, und so oft das Differenzial irgend einer Größe beständig genannt wird, so oft muß man sich auch die Incremente dieser Größe gleich gedenken. Wir stellen uns aber hier unter  $x$  eine Größe vor, deren Differenzial beständig ist, und wollen nun die Veränderlichkeit der Funktionen desselben, der seine Differenzialien ausgesetzt sind, untersuchen.

§. 127.

Angenommen also, daß das erste Differenzial von  $y = p dx$  sey, so muß man, um das zweite Differenzial von  $y$  zu finden, von neuem das Differenzial von  $p dx$  suchen. Da nun  $dx$  beständig ist, und nicht verändert wird, wenn man gleich  $x + dx$  für  $x$  setzt, so hat man nur nöthig, das Differenzial der endlichen Größe  $p$  zu erforschen. Es sey also  $dp = q dx$ ; weil wir gesehen haben, daß die Differenzialien aller Funktionen von  $x$  auf diese Form gebracht werden können; und da nun nach dem, was wir von den Differenzen bewiesen haben, das Differenzial von  $np = n q dx$  ist, wenn  $n$  eine beständige Größe bedeutet: so findet man dadurch, daß man  $dx$  für  $n$  setzt, das Differenzial von  $p dx = q dx^2$ . Wenn also  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$  ist, so ist das zweite Differenzial  $d dy = q dx^2$ , und es erhellet auf diese Art, was wir schon vorhin berührt haben, daß das zweite Differenzial von  $y$  zu  $dx^2$  ein endliches Verhältniß hat.

§. 128.

## §. 128.

In dem ersten Capitel haben wir bereits bemerkt, daß die zweyten und folgenden Differenzen nicht bestimmt werden können, wofern man nicht die Werthe, die man nach und nach für  $x$  setzt, so annimmt, daß sie nach einem gewissen Gesetze fortgehen; und da dieses Gesetz willkürlich ist, so haben wir für dieselben eine arithmetische Progression angenommen, weil sie unter allen die leichteste und zugleich die brauchbarste ist. Aus eben dem Grunde kann über die zweyten Differenzialien nichts gewisses festgesetzt werden, wofern nicht die ersten Differenzen, welche man als den Zuwachs der veränderlichen Größe  $x$  betrachtet, nach einem bekannten Gesetze fortgehen, und wir nehmen daher an, daß die ersten Differenzialien von  $x$ , nemlich  $dx$ ,  $dx^I$ ,  $dx^{II}$ , *rc.* insgesamt einander gleich sind, woher denn die zweyten Differenzialien  $ddx = dx^I - dx = 0$ ;  $ddx^I = dx^{II} - dx^I = 0$ ; *rc.* werden. Da also die zweyten und die folgenden Differenzialien von der Ordnung abhängen, welche die Differenzialien der veränderlichen Größe  $x$  unter einander haben, und diese Ordnung willkürlich ist: so muß sich, da die ersten Differenzialien dieser Bedingung nicht unterworfen sind, die Erfindung der zweyten und der folgenden Differenzialien von der Erfindung der ersten Differenzialien auf eine sehr merckliche Art unterscheiden.

## §. 129.

Wenn aber die Werthe, die der veränderlichen Größe  $x$  nach und nach begelegt werden, nemlich  $x$ ,  $x^I$ ,  $x^{II}$ ,  $x^{III}$ ,  $x^{IV}$ , *rc.* nicht in einer arithmetischen Progression stehen, sondern nach irgend einem andern Gesetze fortschreiten: so sind auch die ersten Differenzialien derselben  $dx$ ,  $dx^I$ ,  $dx^{II}$ , *rc.* nicht einander gleich, und also auch nicht  $ddx = 0$ . Daher erhalt

erhalten die zweyten Differenzialien der Funktionen von  $x$ , ohne Einschränkung genommen, eine andere Form. Denn wenn das erste Differenzial einer solchen Funktion  $y = p dx$  ist: so ist es zur Findung des zweyten Differenzials dieser Funktion nicht genug, das Differenzial von  $p$  mit  $dx$  zu multipliciren, sondern man hat außerdem auch auf das Differenzial von  $dx$ , welches  $ddx$  ist, zu sehen. Denn da man das zweyte Differenzial erhält, wenn man  $p dx$  von seinem folgenden Werthe, der durch die Substitution von  $x + dx$  für  $x$ , und  $p + q dx$  für  $p$  entspringt, abzieht: so wird, wenn man den folgenden Werth von  $p$  gleich  $p + q dx$  setzt, der folgende Werth von  $p dx$

$= (p + q dx)(dx + ddx) = p dx + p ddx + q dx^2 + q dx ddx;$   
und zieht man hiervon  $p dx$  ab, so ist das zweyte Differenzial

$ddy = p ddx + q dx^2 + q dx ddx = p ddx + q dx^2,$   
weil  $q dx ddx$  gegen  $p ddx$  verschwindet.

§. 130.

Ob nun aber gleich das Verhältniß der Gleichheit das einfachste und für die Incremente von  $x$  das schicklichste ist; so geschiehet es doch sehr häufig, daß man nicht die Incremente der veränderlichen Größe  $x$ , wovon  $y$  eine Funktion ist, sondern die Incremente irgend einer andern Größe, wovon  $x$  selbst eine gewisse Funktion ist, gleich seyn läßt. Ja es werden oft sogar die ersten Differenzialien solchen Größen einander gleich gesetzt, deren Verhältniß zu  $x$  gänzlich unbekannt ist. In dem ersten Falle hängen die zweyten und folgenden Differenzialien von  $x$  von dem Verhältnisse ab, welches  $x$  zu der Größe hat, deren Incremente man gleich angenommen hat, und müssen daher auf eben die Art bestimmt werden, als wir hier die zweyten Differenzialien von  $y$  aus den

Differenzialien von  $x$  finden gelehret haben. Im letzten Falle aber muß man die zweyten und folgenden Differenzialien von  $x$  als unbekannte Größen betrachten, und an ihrer Stelle die Zeichen  $d^2x$ ,  $d^3x$ ,  $d^4x$ , ic. gebrauchen.

## §. 131.

Da wir indeß die Art und Weise, in den gedachten Fällen die Differenzialien zu finden, unten ausführlich zeigen werden: so wollen wir hier fortfahren, die veränderliche Größe  $x$  als eine gleichförmig wachsende Größe zu betrachten, so daß also ihre ersten Differenzialien  $dx$ ,  $dx^1$ ,  $dx^2$ , ic. insgesammt einander gleich, und die zweyten und folgenden Differenzialien  $= 0$  gesetzt werden müssen. Diese Bedingungen druckt man auch auf die Art aus, daß man sagt: das Differenzial von  $x$  nemlich  $dx$  sey eine beständige Größe. Nun sey  $y$  irgend eine Funktion von  $x$ , und da dieselbe aus  $x$  und beständigen Größen besteht, so werden auch alle ihre ersten, zweyten, dritten, vierten Differenzialien u. s. f. welche durch  $dy$ ,  $ddy$ ,  $d^3y$ ,  $d^4y$ , ic. angezeigt werden, durch  $x$  und  $dx$  ausgedruckt werden können. Setzt man nemlich  $x + dx$  für  $x$  in  $y$ , und zieht darauf von dem gefundenen Werthe den vorhergehenden ab, so bleibt das erste Differenzial  $dy$  übrig; und setzt man nun ferner hierin  $x + dx$  für  $x$ , so bekommt man  $dy^1$  und dann wird  $ddy = dy^1 - dy$ . Auf eine ähnliche Art findet man das dritte Differenzial  $d^3y$  aus  $ddy$ , wenn man daraus, durch die Substitution  $x + dx$  für  $x$ ,  $ddy^1$  macht, und  $ddy^1 - ddy$  sucht, u. s. f. Bey diesen Operationen wird das Differenzial  $dx$  beständig als eine unveränderliche Größe betrachtet, die keines Differenzials fähig ist.

## §. 132.

§. 132.

Aus dem Verhältnisse, woraus die Funktion  $y$  durch  $x$  bestimmte wird, läßt sich sowohl vermittelst der Methode der Differenzen, als auch, und zwar noch viel leichter, durch das, was wir in der Folge sagen werden, der Werth der Funktion  $p$  bestimmen, welche, mit  $dx$  multiplicirt, das erste Differenzial  $dy$  giebt. Setzt man also  $dy = p dx$ , so giebt das Differenzial von  $p dx$  das zweyte Differenzial  $ddy$ ; worher denn, wenn  $dp = q dx$ , da  $dx$  beständig ist,  $ddy = q dx^2$  wird, wie wir bereits gezeigt haben. Geht man daher weiter, und setzt  $dq = r dx$ , so wird, da das Differenzial des zweyten Differenzials das dritte Differenzial giebt,  $d^3y = r dx^3$ , und auf eine ähnliche Art ergibt sich, wenn man das Differenzial von dieser Funktion sucht, und  $dr = s dx$  ist,  $d^4y = s dx^4$  u. s. f. Kann man also nur das erste Differenzial einer Funktion finden, so läßt sich auch das Differenzial einer jeden Ordnung angeben.

§. 133.

Um die Form dieser verschiedenen Differenzialien und die Art und Weise sie zu finden deutlicher vor Augen zu legen, wollen wir dieselben in folgende Tabelle bringen.

Wenn  $y$  irgend eine Funktion von  $x$  ist,

so ist	und setzt man
$dy = p dx$	$dp = q dx$
$ddy = q dx^2$	$dq = r dx$
$d^3y = r dx^3$	$dr = s dx$
$d^4y = s dx^4$	$ds = t dx$
$d^5y = t dx^5$	ic.

Da nun die Funktion  $p$  aus der Funktion  $y$  durch die Differenziation gefunden, und auf eine ähnliche Art  $q$  aus  $p$ ,  
§ 2 r aus

r aus q, s aus r u. s. w. hergeleitet wird: so findet man die Differenzialien aller Ordnungen leicht, wenn das Differenzial  $dx$  als beständig betrachtet wird.

## §. 134.

Da  $p, q, r, s, t, \text{ic.}$  endliche Größen, nemlich Funktionen von  $x$  sind, so hat das erste Differenzial von  $y$  ein endliches Verhältniß zu dem ersten Differenziale von  $x$ , nemlich das Verhältniß  $p : 1$ ; und aus dieser Ursache werden die Differenzialien  $dx$  und  $dy$  homogen genannt. Da ferner  $ddy$  zu  $dx^2$  das endliche Verhältniß  $q : 1$  hat, so sind auch  $ddy$  und  $dx^2$  homogen, und eben so  $d^3y$  und  $dx^3$ , dergleichen  $d^4y$  und  $dx^4$  u. s. f. So wie daher die ersten Differenzialien unter einander homogen sind, so sind es auch die zweyten Differenzialien mit den Quadraten der ersten Differenzialien, die dritten Differenzialien mit den Cubis der ersten Differenzialien u. s. f. Ueberhaupt ist das Differenzial von  $y$  von der Ordnung  $n$ , welches man durch  $d^n y$  bezeichnet, mit  $dx^n$ , d. h. mit der Potestät von  $dx$ , deren Exponent  $n$  ist, homogen.

## §. 135.

Da also gegen  $dx$  alle die Potestäten davon, deren Exponenten größer als die Einheit sind, verschwinden, so werden auch  $dx^2, dx^3, dx^4, \text{ic.}$  gegen  $dy$  verschwinden, und eben das werden die Differenzialien der höhern Ordnungen  $ddy, d^3y, d^4y, \text{ic.}$  thun, die zu jenen Potestäten ein endliches Verhältniß haben. Auf eine ähnliche Art verschwinden auch gegen  $ddy$ , weil es mit  $dx^2$  homogen ist, alle Potestäten von  $dx$ , die höher sind als das Quadrat, nemlich  $dx^3, dx^4, \text{ic.}$  und folglich nicht minder  $d^3y, d^4y, \text{ic.}$  Ferner verschwinden gegen  $d^3y: dx^4, d^4y, dx^5, d^5y, \text{ic.}$  Hieraus läßt sich, wenn Ausdrücke vorkommen, die dergleichen

Differ

Differenzialien enthalten, leicht beurtheilen, ob dieselben homogen sind, oder nicht? Man darf nemlich nur auf die Differenzialien sehen, denn die endlichen Gröſſen kann man aus der Acht lassen, weil sie auf die Homogeneität keinen Einfluß haben, und für die Differenzialien der zweiten und der höhern Ordnungen die denselben homogene Potestäten von  $dx$  setzen. Geben dieselben allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen, so sind die gegebenen Ausdrücke homogen.

§. 136.

Auf diese Art erkennt man, daß die Ausdrücke  $Pddy^2$  und  $Qdyd^3y$  homogen sind. Denn  $ddy^2$  bedeutet das Quadrat von  $ddy$ , und da  $ddy$  homogen ist mit  $dx^2$ , so ist  $ddy^2$  homogen mit  $dx^4$ . Da ferner  $dy$  und  $dx$  so wie auch  $d^3y$  und  $dx^3$  homogen sind, so ist auch das Produkt  $dyd^3y$  mit  $dx^4$  homogen. Es sind also die Ausdrücke  $Pddy^2$  und  $Qdyd^3y$  homogen, und haben folglich ein endliches Verhältniß zu einander. Auf eine ähnliche Art findet man, daß diese Ausdrücke  $\frac{Pd^3y^2}{dxddy}$  und  $\frac{Qd^5y}{dy^2}$  homogen sind. Denn setzt man für  $dy$ ,  $ddy$ ,  $d^3y$  und  $d^5y$  diese ihnen homogene Potestäten von  $dx$ :  $dx$ ,  $dx^2$ ,  $dx^3$  und  $dx^5$ , so erhält man die Ausdrücke  $Pdx^3$  und  $Qdx^3$ , welche allerdings einander homogen sind.

§. 137.

Wenn die gegebenen Ausdrücke nach dieser Reduktion nicht gleiche Potestäten von  $dx$  enthalten, so sind sie nicht homogen, und haben folglich kein endliches Verhältniß zu einander. Es wird also alsdenn der eine unendlichmal größer als der andere seyn, und dieser in Rücksicht auf jenen verschwinden. So haben  $\frac{Pd^3y}{dx^2}$  und  $\frac{Qddy^2}{dy}$  ein unendlich

§ 3

großes

großes Verhältniß zu einander, denn jener Ausdruck läßt sich auf  $Pdx$ , und dieser auf  $Qdx^3$  reduciren, und es verschwindet daher dieser gegen jenen. Kommt daher in der Rechnung ein Aggregat von zwey solchen Ausdrücken  $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$  vor, so kann man den letzten ganz sicher gegen den ersten aus der Rechnung weglassen, und nur den ersten behalten. Es ist nemlich das Verhältniß dieser Ausdrücke

$$\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy} \text{ und } \frac{Pd^3y}{dx^2}$$

ein vollkommenes Verhältniß der Gleichheit, weil der Exponent

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ist, indem } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Auf diese Art können die Differenzial-Ausdrücke öfters ganz außerordentlich zusammengezogen werden.

§. 138.

In der Differenzial-Rechnung wird gelehrt, wie man das erste Differenzial einer jeden gegebenen Größe finden kann; und da die zweyten Differenzialien durch die Differenziation der ersten, die dritten durch die Differenziation der zweyten, und so ferner die folgenden aus den vorhergehenden gefunden werden: so enthält die Differenzial-Rechnung die Methode, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden. Man hat aber von dem Worte Differenzial, womit man die unendlich kleinen Größen bezeichnet, verschiedene andere Wörter hergeleitet und zum Gebrauche aufgenommen. So sagt man Differenzieren, das heißt, das Differenzial finden, und eine Größe wird differenziirt, wenn ihr Differenzial gesucht wird. Unter der Differenziation aber versteht man die Operation, durch welche man die Differenzialien

zalien findet. Man nennt daher die Differenzial Rechnung auch die Methode zu differenziren, weil sie die Art und Weise, die Differenzialien zu finden, lehrt.

§. 139.

So wie man in der Differenzial-Rechnung das Differenzial einer jeden Größe erforscht: so giebt es auch einen Calcul, der die Größe, deren Differenzial gegeben ist, finden lehrt, und dieses ist die Integral-Rechnung. Denn wenn ein Differenzial gegeben ist, so heißt die Größe, wovon es das Differenzial ist, in Rücksicht auf dieses, das Integral. Der Grund dieser Benennung ist darin zu suchen, weil man das Differenzial als einen unendlich kleinen Theil betrachtet, um welchen eine gewisse Größe wächst, und also in Rücksicht auf diesen Theil die gedachte Größe selbst als ein Ganzes (Integrum) ansehen kann. So wie daher  $dy$  das Differenzial von  $y$  ist, so ist  $y$  hinwiederum das Integral von  $dy$ , und so wie  $d^2y$  das Differenzial von  $dy$  ist, so ist wieder  $dy$  das Integral von  $d^2y$ . Auf ähnliche Art ist  $d^3y$  das Integral von  $d^2y$ ,  $d^3y$  das Integral von  $d^4y$  u. s. f., so daß also eine jede Differenziation umgekehrt betrachtet, ein Beispiel einer Integration giebt.

§. 140.

Der Ursprung und die Natur der Integralien läßt sich eben so als der Ursprung und die Natur der Differenzialien aus dem, was im ersten Capitel über die Differenzen gesagt worden ist, aufs deutlichste erklären. Nachdem nemlich gezeigt worden war, wie man die Differenz einer jeden Größe finden kann, so wurde umgekehrt auch gelehrt, wie man aus einer gegebenen Differenz die Größe, die sie zur Differenz hatte, zu finden im Stande ist, und diese Größe erhielt in Rücksicht auf ihre Differenz den Namen der Summe. So

wie also die Differenzen, indem man sie ins unendliche verkleinert, in die Differenzialien übergehen: so verwandeln sich in diesem Falle auch die obigen Summen in Integrale, und man pflegt daher auch öfters die Integrale Summen zu nennen. Die Engländer, welche die Differenzialien Fluxionen nennen, geben den Integralien den Namen der fließenden Größen, und nach ihrer Art zu reden ist, die fließende Größe einer Fluxion finden, eben das, was wir durch, das Integral eines gegebenen Differenzials finden, ausdrücken.

## §. 141.

So wie wir die Differenzialien durch den Buchstaben  $d$  anzeigen, so gebrauchen wir zur Bezeichnung der Integralien den Buchstaben  $\int$ , der also, vor die Differenzial-Größen gesetzt, die Größen anzeigt, wovon sie die Differenzialien sind. Ist z. B. das Differenzial von  $y$  gleich  $p dx$ , oder  $dy = p dx$ , so ist  $y$  das Integral von  $p dx$ , und dieses zeigt man auf die Art an,  $y = \int p dx$ , weil  $y = \int dy$  ist. Das Integral von  $p dx$ , welches durch  $\int p dx$  angezeigt wird, bedeutet also die Größe, deren Differenzial  $p dx$  ist. Auf eine ähnliche Art ist, da  $d dy = q dx^2$ , wenn  $dp = q dx$  das Integral von  $d dy$  kein andres als  $dy = p dx$ , und da  $p = \int q dx$ , so wird  $dy = dx \int q dx$ , und also  $y = \int dx \int q dx$ . Wenn ferner  $d q = r dx$  ist, so wird  $q = \int r dx$  und  $dp = dx \int r dx$ . Wenn man daher den Buchstaben  $\int$  noch weiter fortführt vorzusetzen, so wird  $p = \int dx \int r dx$ , ferner  $dy = dx \int dx \int r dx$ , und  $y = \int dx \int dx \int r dx$ .

## §. 142.

Da das Differenzial  $dy$  eine unendlich kleine Größe, sein Integral aber eine endliche Größe, und auf ähnliche Art das zweite Differenzial  $d dy$  unendlichmal kleiner, als sein Integral  $dy$  ist: so ist offenbar, daß die Differenzialien in

Anse

Ansehung ihrer Integralien verschwinden. Um diese Eigenschaft faßlicher zu machen, theilt man die unendlich kleinen Größen in Ordnungen ein, und rechnet zur ersten Ordnung die ersten Differenzialien  $dy$  und  $dx$ . Zur zweyten Ordnung rechnet man ferner die Differenzialien, welche mit  $dx^2$  homogen sind, oder die Differenzialien der zweyten Ordnung; zur dritten die unendlich kleinen Größen, die mit  $dx^3$  homogen sind, also die Differenzialien der dritten Ordnung, u. s. f. So wie daher die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung gegen die endlichen Größen verschwinden, so verschwinden auch die unendlich kleinen Größen der zweyten Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung, und überhaupt verschwinden die unendlich kleinen Größen jeder höhern Ordnung gegen die unendlich kleinen Größen jeder niedern Ordnung.

§. 143.

So wie also nunmehr das Differenzial einer endlichen Größe ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, und das Differenzial einer unendlich kleinen Größe von der ersten Ordnung ein unendlich Kleines von der zweyten Ordnung, u. s. f. ist: so ist auch umgekehrt das Integral einer unendlich kleinen Größe der ersten Ordnung eine endliche Größe, das Integral einer unendlich kleinen Größe von der zweyten Ordnung ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung u. s. w. Ist daher ein Differenzial von der Ordnung  $n$  gegeben, so ist sein Integral ein unendlich Kleines von der Ordnung  $n-1$ ; und so wie also durch die Differenzialien die Ordnung der unendlich kleinen Größen erhöht wird, so gehet man bey der Integration zu den niedern Ordnungen zurück, bis man zu endlichen Größen kommt. Wenn man die endlichen Größen von neuem integriren wollte, so würde man nach diesem

Gesetze zu unendlich großen Größen, und von diesen durch abermalige Integration zu unendlichmal unendlich großen Größen gelangen, und also auf diesem Wege ähnliche Ordnungen der unendlichen Größen finden, davon jede unendlichmal größer als die vorhergehende wäre.

## §. 144.

Run müssen wir, um aller Zweydeutigkeit vorzubauen, noch etwas von dem eingeführten Gebrauche der Zeichen sagen. Zuvörderst also bezieht sich das Zeichen der Differentiation  $d$  einzig und allein auf den unmittelbar folgenden Buchstaben, und es bedeutet daher  $dx$  nicht das Differential des Produkts  $xy$ , sondern das Differential von  $x$  durch die Größe  $y$  multiplicirt. Man pflegt indeß in solchen Fällen, um die Verwirrung zu vermeiden, die Größe  $y$  vor das Zeichen zu setzen, und  $y dx$  zu schreiben, um das Produkt aus  $y$  in  $dx$  auszudrücken. Wenn indeß  $y$  das Wurzelzeichen  $\sqrt{\quad}$  oder das Zeichen der Logarithmen vor sich hat, so pflegt es gleichwohl nach dem Differentiale gesetzt zu werden. So bedeutet  $dx\sqrt{(aa - xx)}$  das Produkt aus der endlichen Größe  $\sqrt{(aa - xx)}$  in das Differential  $dx$ , und  $dx \log(1 + x)$  das Produkt aus dem Logarithmen von  $1 + x$  in das Differential  $dx$ . Aus eben dem Grunde zeigt  $d dy \sqrt{x}$  das Produkt des zweyten Differentials  $d dy$  in die endliche Größe  $\sqrt{x}$  an.

## §. 145.

Nicht genug, daß der Buchstabe  $d$  bloß zu dem unmittelbar auf ihn folgenden gehört, er darf auch nicht einmal zu dem Exponenten dieses Buchstabens, wenn dergleichen vorkommen, gezogen werden. So bedeutet  $dx^2$  nicht das Differential von  $x^2$ , sondern das Quadrat des Differentials  $dx$ , so daß also der Exponent 2 nicht auf  $x$ , sondern auf  $dx$  gezogen

gezogen werden muß. Man könnte auch  $dx dx$  schreiben, so wie man das Produkt aus den beyden Differenzialien  $dx$  und  $dy$  durch  $dx dy$  ausdrückt, allein jene Art  $dx^2$  ist bequemer und gebräuchlicher. Noch mühsamer würde es seyn, zur Bezeichnung der höhern Potestäten von  $dx$  dieses  $dx$  so oftmals zu wiederholen, und man bezeichnet daher den Cubus von  $dx$  durch  $dx^3$ , und die höhern Potestäten auf eine ähnliche Art. So bedeutet  $d^2 dy^4$  die vierte Dignität des Differentials der zweyten Ordnung  $d^2 dy$ ; und  $d^3 y^2 \sqrt{x}$  das Quadrat des Differenzials der dritten Ordnung von  $y$ , durch  $\sqrt{x}$  multiplicirt. Wenn durch eine rationale Größe  $x$  multiplicirt wird, so wird dieselbe vorgesetzt, wie hier,  $xd^3 y^2$ .

§. 146.

Will man indeß, daß sich der Buchstabe  $d$  auf mehr als auf den unmittelbar folgenden Buchstaben beziehen soll, so muß man solches besonders anzeigen. Man bedient sich in diesem Falle der Parenthese, und schließt darin die Größe ein, deren Differenzial man anzeigen will. So bedeutet  $d(xx + yy)$  das Differenzial der Größe  $xx + yy$ , indeß ist diese Bezeichnungsart noch nicht hinlänglich, wenn man das Differenzial einer Potestät von einer solchen Größe ausdrücken will. Denn wollte man  $d(xx + yy)^2$  schreiben, so würde dieser Ausdruck das Quadrat von  $d(xx + yy)$  bedeuten können. Man kann sich aber in diesem Falle durch den Punkt helfen, so daß  $d.(xx + yy)^2$  das Differenzial von  $(xx + yy)^2$ , hingegen  $d^2(xx + yy)$  ohne Punkt das Quadrat von  $d(xx + yy)$  ausdrücke. Es kann nemlich durch den Punkt sehr bequem angezeigt werden, daß sich der Buchstabe  $d$  auf die ganze Größe nach ihm beziehen soll; und auf diese Art zeigt denn  $d.x dy$  das Differenzial von  $x dy$ ;  $d.^3 x dy \sqrt{(aa + xx)}$  das Differenzial der dritten Ordnung von

von dem Ausdrücke  $x dy \sqrt{(aa + xx)}$  an, welcher ein Produkt aus den endlichen Größen  $x$  und  $\sqrt{(aa + xx)}$  und dem Differentiale  $dy$  ist.

## §. 147.

So wie sich aber das Zeichen der Differentiation  $d$  bloß auf die unmittelbar folgende Größe bezieht, wofern nicht seine Bedeutung durch den zwischen gesetzten Punkt auf den ganzen folgenden Ausdruck ausgedehnt wird: so bezieht sich dagegen das Zeichen der Integration  $\int$  jedesmal auf den ganzen Ausdruck, vor welchem es steht. So bedeutet  $\int y dx (aa + xx)^n$  das Integral oder die Größe, deren Differential  $y dx (aa + xx)^n$ , und der Ausdruck  $\int x dx \int dx \int x$  die Größe, deren Differential  $x dx \int dx \int x$  ist. Wenn man daher das Produkt aus zwey Integralen  $\int y dx$  und  $\int z dx$  ausdrücken will, so ist es nicht gut, solches durch  $\int y dx \int z dx$  zu thun, denn dieser Ausdruck zeigt das Integral von  $y dx \int z dx$  an. Man pflegt daher auch hier durch einen Punkt der Zweideutigkeit vorzubeugen, so daß also  $\int y dx \cdot \int z dx$  das Produkt aus den Integralen  $\int y dx$  und  $\int z dx$  bedeutet.

## §. 148.

Da sich also die Analysis des Unendlichen theils mit der Erfindung der Differentialien, theils mit der Erforschung der Integralien beschäftigt, so wird sie deswegen in zwey Haupttheile getheilt, davon jener die Differential-, dieser die Integral-Rechnung genannt wird. In der Differential-Rechnung wird gelehret, wie man aus jeder Größe ihre Differentialien, in der Integral-Rechnung hingegen, wie man aus gegebenen Differentialien ihre Integrale finden kann, und zugleich wird in beyden der große Nutzen dieser Rechnungen sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gezeigt. Es hat daher auch dieser Theil der Analyse so starke Erweis

Erweiterungen bekommen, daß er nur in weitläufigen Werken ausführlich abgehandelt werden kann. Vorzüglich vermehren sich in der Integral-Rechnung sowohl die neuen Kunstgriffe zu integriren als die Anwendungen derselben zur Auflösung der Aufgaben täglich, so daß daher die neuen Vermehrungen, die immerfort hinzukommen, nie erschöpft, und noch weniger vollkommen beschrieben und erklärt werden können. Ich werde indeß suchen, entweder alle bisher gemachten Entdeckungen mitzutheilen und zu erklären, oder doch die Methoden beybringen, wie man sie finden kann.

§. 149.

Gemeiniglich nimmt man in der Analysis des Unendlichen mehr Theile an, denn man findet sehr häufig außer der Differenzial- und Integral-Rechnung noch den Differenzio-Differenzial-Calcul und die Exponential-Rechnung. In der Differenzio-Differenzial-Rechnung wird die Art und Weise gelehrt, die zweenen und die folgenden höhern Differenzialien zu finden; da ich aber in der Differenzial-Rechnung selbst die Art und Weise, die Differenzialien jeder Ordnung zu finden, lehren werde, so habe ich diese Unterabtheilung nicht nöthig. Was ferner den Exponential-Calcul anbetrißt, wodurch der um die Analysis des Unendlichen unsterblich verdiente Joh. Bernoulli die Methode des Differenzirens und Integrirens auf die Exponential-Größen angewandt hat: so habe ich nicht für nöthig gehalten, daraus einen besondern Theil zu machen, weil ich die Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung für alle Arten der Größen, der algebraischen sowohl als der transcendenten einzurichten beschloffen habe.

§. 150.

Zuvörderst werde ich also im gegenwärtigen Buche die Differenzial-Rechnung abhandeln, und die Art und Weise lehren,

lehren, von allen Gattungen der veränderlichen Größen nicht bloß die ersten, sondern auch die zweyten und die folgenden Differenzialien zu finden. Dabey werde ich zuerst die algebraischen Größen betrachten, sie mögen nun Funktionen einer oder mehrerer veränderlichen Größen seyn, entwickelt oder in Gleichungen gegeben werden. Dann will ich die Regeln von der Erfindung der Differenzialien auch auf die nicht algebraischen Größen anwenden, so weit man dieselben ohne die Integral-Rechnung kennen lernen kann. Dahin gehören die Logarithmen, die Exponential-Größen, ferner die Kreisbogen mit ihren Sinus und Tangenten. Endlich werde ich auch die aus diesen Größen zusammengesetzten vermischten Größen betrachten, und damit den ersten Theil der Differenzial-Rechnung, der die Methode des Differenzirens enthalten soll, beschließen.

§. 151.

Der andere Theil ist zur Erklärung des Gebrauchs bestimmt, der von der Differenzial-Rechnung sowohl in der Analyse als in der höhern Geometrie gemacht werden kann. Die gemeine Algebra zieht daher sehr viele Vortheile, theils zur Erfindung der Wurzeln der Gleichungen, theils zur Behandlung und Summirung der Reihen, theils zur Bestimmung des Größten und Kleinsten, theils zur Bestimmung solcher Ausdrücke, die in gewissen Fällen unbestimmt scheinen u. s. w. Die höhere Geometrie aber hat der Differenzial-Rechnung ihre wichtigste Erweiterung zu verdanken, indem man dadurch die Tangenten der krummen Linien und ihre Krümmung auf eine bewundernswerthe leichte Art bestimmen, und viel andere Aufgaben, die wichtigsten Gegenstände betreffend, auflösen kann. Ob man gleich mit diesen Untersuchungen die weitläufigsten Schriften anfüllen könnte, so will ich doch suchen, alles kurz und deutlich zu erklären.

Fünf



## Fünftes Capitel.

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen einer veränderlichen Größe.

§. 152.

Da das Differenzial der veränderlichen Größe  $x$ ,  $= dx$  ist, so wird  $x$  durch die nächste Veränderung  $x^1 = x + dx$ . Ist daher  $y$  irgend eine Funktion von  $x$ , so geht dieselbe, wenn man darin  $x + dx$  für  $x$  setzt, in  $y^1$  über, und die Differenz  $y^1 - y$  giebt das Differenzial von  $y$ . Wenn man also  $y = x^n$  setzt, so wird

$$y^1 = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^2 + \text{ic.}$$

und folglich

$$dy = y^1 - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^2 + \text{ic.}$$

Allein das zweite und die folgenden Glieder dieses Ausdrucks verschwinden gegen das erste Glied, und es ist daher  $nx^{n-1}dx$  das Differenzial von  $x^n$  oder  $d \cdot x^n = nx^{n-1}dx$ . Wenn also  $a$  eine beständige Zahl oder Größe ist, so ist auch  $d \cdot ax^n = na x^{n-1}dx$ , und man findet daher das Differenzial einer jeden Potestät von  $x$ , wenn man dieselbe mit dem Exponenten multiplicirt, durch  $x$  dividirt, und den Quotienten durch  $dx$  multiplicirt; eine Regel, die sich leicht dem Gedächtnisse einprägen läßt.

§. 153.

## §. 152.

Kennt man das erste Differenzial von  $x^n$ , so findet man darous ohne Mühe das zweyte Differenzial, wenn man nur, so wie wir es hier immer thun, das Differenzial  $dx$  als eine beständige Größe betrachtet. Da nemlich in dem Differenziale  $n x^{n-1} dx$  der Faktor  $n dx$  beständig ist, so muß man das Differenzial von  $x^{n-1}$  suchen, und dies ist  $(n-1)x^{n-2} dx$ . Multiplicirt man dasselbe mit  $n dx$ , so bekommt man das zweyte Differenzial,  $dd. x^n = n(n-1)x^{n-2} dx^2$ . Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man das Differenzial von  $x^{n-2}$ , welches  $(n-2)x^{n-3} dx$  ist, mit  $n(n-1)dx^2$  multiplicirt, das dritte Differenzial

$$d. 3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3} dx^3.$$

Ferner ist das vierte Differenzial

$$d. 4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} dx^4,$$

und das fünfte

$$d. 5x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} dx^5.$$

Hieraus fällt zugleich in die Augen, wie die Form der folgenden Differenzialien beschaffen ist.

## §. 154.

So oft  $n$  eine ganze positive Zahl ist, so oft kommt man auch endlich zu verschwindenden Differenzialien, d. h. die in so fern  $= 0$  sind, daß sie gegen alle Potestäten von  $dx$  verschwinden. Von diesen muß man sich die einfachern Fälle merken.

$$d. x = dx; \quad dd. x = 0; \quad d. 3x = 0; \text{ u.}$$

$$d. x^2 = 2x dx; \quad dd. x^2 = 2dx^2; \quad d. 3x^2 = 0;$$

$$d. 4x^2 = 0; \text{ u.}$$

$$d. x^3 = 3x^2 dx; \quad dd. x^3 = 6x dx^2; \quad d. 3x^3 = 6dx^2;$$

$$d. 4x^3 = 0; \quad d. 5x^3 = 0; \text{ u.}$$

$$d. x^4$$

$$\begin{aligned} d. x^4 &= 4x^3 dx; & dd. x^4 &= 12x^2 dx^2; & d. 3x^4 &= 24x dx^3; \\ d. 4x^4 &= 24dx^4; & d. 5x^4 &= 0; & d. 6x^4 &= 0; & \text{ic.} \\ d. x^5 &= 5x^4 dx; & dd. x^5 &= 20x^3 dx^2; & d. 3x^5 &= 60x^2 dx^3; \\ d. 4x^5 &= 120x dx^4; & d. 5x^5 &= 120dx^5; & d. 6x^5 &= 0; \\ d. 7x^5 &= 0; & \text{ic.} \end{aligned}$$

Man sieht hier, daß das Differenzial von  $x^n$  von der Ordnung  $n$ , wenn  $n$  eine ganze positive Zahl bedeutet, eine beständige Größe, nemlich  $= 1.2.3. \dots . n dx^n$  ist, und daß die Differenzialien aller folgenden Ordnungen  $= 0$  sind.

§. 155.

Wenn  $n$  eine ganze negative Zahl ist, so kann man die Differenzialien von solchen negativen Potestäten von  $x$ , als  $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \text{ic.}$  finden, indem  $\frac{1}{x} = x^{-1}; \frac{1}{x^2} = x^{-2},$

und überhaupt  $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$  ist. Wenn man daher in der vorhergehenden Formel  $n = -m$  setzt, so ist das erste Differenzial von  $\frac{1}{x^m} = \frac{-m dx}{x^{m+1}}$ ; das zweyte  $= \frac{m(m+1) dx^2}{x^{m+2}}$ ; das dritte  $= \frac{-m(m+1)(m+2) dx^3}{x^{m+3}}$ ; &c. Hieraus fließen

folgende einfachere Fälle, die wohl gemerkt zu werden verdienen.

$$\begin{aligned} d. \frac{1}{x} &= \frac{-dx}{x^2}; & dd. \frac{1}{x} &= \frac{2 dx^2}{x^3}; & d^3. \frac{1}{x} &= \frac{-6 dx^3}{x^4}; \\ d. \frac{1}{x^2} &= \frac{-2dx}{x^3}; & dd. \frac{1}{x^2} &= \frac{6 dx^2}{x^4}; & d^3. \frac{1}{x^2} &= \frac{-24 dx^3}{x^5}; \\ d. \frac{1}{x^3} &= \frac{-3dx}{x^4}; & dd. \frac{1}{x^3} &= \frac{12 dx^2}{x^5}; & d^3. \frac{1}{x^3} &= \frac{-60 dx^3}{x^6}; \\ d. \frac{1}{x^4} &= \frac{-4dx}{x^5}; & dd. \frac{1}{x^4} &= \frac{20 dx^2}{x^6}; & d^3. \frac{1}{x^4} &= \frac{-120 dx^3}{x^7}; \\ d. \frac{1}{x^5} &= \frac{-5dx}{x^6}; & dd. \frac{1}{x^5} &= \frac{30 dx^2}{x^7}; & d^3. \frac{1}{x^5} &= \frac{-210 dx^3}{x^8}; \end{aligned}$$

&c.

Eulers Differenz, Rechn. I. Th.

§.

§. 156.

§. 156.

Setzt man ferner für  $n$  gebrochene Zahlen, so erhält man die Differenzialien der Wurzel-Größen. Macht man nemlich  $n = \frac{\mu}{\nu}$ , so ist das erste Differenzial von der For-

mel  $x^{\frac{\mu}{\nu}}$  oder  $\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$

das zweite

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}$$

ic.

Hieraus fließt

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}; \quad d.^3\sqrt{x} = \frac{1.3dx^3}{8x^2\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}; \quad d.^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}};$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}; \quad d.^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}};$$

ic.

Betrachtet man diese Ausdrücke nur mit einiger Aufmerksamkeit, so erwirbt man sich bald eine Fertigkeit, dergleichen Differenzialien auch ohne eine vorläufige Reduktion auf die Potestäten-Form zu finden.

§. 157.

Wenn  $\mu$  nicht 1, sondern eine andere positive, oder negative Zahl ist, so lassen sich die Differenzialien eben so leicht

leicht

leicht angeben. Da aber die zweiten und die folgenden Differenzialien aus den ersten auf eben die Art gefunden werden, als diese aus den Potestäten selbst: so wollen wir hier bloß die einfachern ersten Differenzialien hersehen:

$$d.x\sqrt{x} = \frac{3}{2}dx\sqrt{x}; d.x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}x dx\sqrt{x}; d.x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2 dx\sqrt{x};$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}; d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}; d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}};$$

$$d.\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; d.x\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}dx\sqrt[3]{x}; d.x\sqrt[3]{x^2} = \frac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2};$$

$$d.xx\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}x dx\sqrt[3]{x}; d.xx\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}x dx\sqrt[3]{x^2}; \text{ic.}$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}; d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}; d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}};$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}; d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}; \text{ic.}$$

§. 158.

Hieraus ist man bereits im Stande, die Differenzialien aller ganzen rationalen algebraischen Funktionen zu finden, indem die Glieder dieser Funktionen lauter Potestäten von  $x$  sind, und deren Differenziation bekannt ist. Denn da eine Größe von dieser Form,

$$p + q + r + s + \text{ic.}$$

wenn man darin  $x + dx$  für  $x$  setzt, in folgende,

$$p + dp + q + dq + r + dr + s + ds + \text{ic.}$$

verwandelt wird: so ist das Differenzial derselben =

$$dp + dq + dr + ds + \text{ic.}$$

Kann man also das Differenzial einer jeden von den Größen  $p, q, r, s$ , angeben, so ist auch das Differenzial ihres Aggregats bekannt. Und da das Differenzial des Vielfachen von  $p$  ein Gleich-Vielfaches von  $dp$ , oder  $d.ap = a dp$  ist:

so ist das Differenzial der Größe  $ap + bq + cr = adp + bdq + cdr$ .  
Da endlich die beständigen Größen kein Differenzial haben, so  
ist auch das Differenzial von  $ap + bq + cr + f = adp +$   
 $bdq + cdr$ .

## §. 159.

Da also die Glieder der ganzen rationalen Funktionen  
entweder beständige Größen oder Potestäten von  $x$  sind, so  
lassen sich die Differenzialien dieser Funktionen nach den er-  
theilten Vorschriften leicht finden. So ist

$$d(a + x) = dx; \quad d(a + bx) = bdx;$$

$$d(a + xx) = 2xdx; \quad d(aa - xx) = -2xdx;$$

$$d(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx;$$

$$d(a + bx + cx^2 + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx;$$

$$d(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4) = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx.$$

Und wenn die Exponenten unbestimmt sind, so ist

$$d(1 - x^n) = -nx^{n-1}dx; \quad d(1 + x^m) = mx^{m-1}dx;$$

$$d(a + bx^m + cx^n) = mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx.$$

## §. 160.

Da man also die ganzen rationalen Funktionen nach der  
höchsten Potestät von  $x$  in Grade eintheilt, so ist klar, daß  
die Differenzialien dieser Funktionen, wenn man die gefun-  
denen Differenzialien immer wieder von neuem differenziert,  
und dabey  $ax$  als eine beständige Größe betrachtet, endlich  
selbst beständige Größen werden, und darauf verschwinden.  
So ist das erste Differenzial  $bdx$  der Funktion vom ersten  
Grade  $a + bx$  eine beständige Größe, und das zweyte und  
die folgenden Differenzialien Null. Eben so ist, wenn man  
die Funktion vom zweyten Grade  $a + bx + cxx = y$  setzt,  
 $dy = bdx + 2cxdx$ ;  $ddy = 2cdx^2$ ;  $d^3y = 0$ . Auf  
eine ähnliche Art ist, wenn man die Funktion des dritten  
Grades

Grades  $a + bx + cxx + ex^3 = y$  setzt,  $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx$ ;  $ddy = 2cdx^2 + 6exdx^2$ ;  $d^3y = 6edx^3$ ; und  $d^4y = 0$ . Gehört daher überhaupt eine ganze rationale Funktion zu dem nten Grade, so ist ihr Differenzial von der Ordnung n eine beständige Größe, und die folgenden Differenzialien insgesamt Null.

§. 161.

Auch sind die erteilten Vorschriften hinlänglich, das Differenzial einer Funktion zu finden, wenn unter den Potenzen von  $x$ , woraus die Funktion zusammengesetzt ist, Potenzen mit negativen oder gebrochenen Exponenten vorkommen. Ist daher

I.  $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$ ; so wird

$$dy = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2}. \text{ Ist ferner}$$

II.  $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - ex$ ; so wird

$$dy = \frac{-adx}{2x\sqrt{x}} + \frac{cdx}{2\sqrt{x}} - edx, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}} - \frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}. \text{ Ist}$$

III.  $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{xx}} - \frac{c}{x\sqrt{x}} + \frac{f}{xx}$ ; so wird

$$dy = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt{x}} - \frac{2fdx}{x^3}, \text{ und}$$

$$ddy = \frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}} - \frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt{x}} + \frac{6fdx^2}{x^4}.$$

§. 162.

Ist die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, eine Potestät einer solchen Funktion, deren Differenzial nach dem Bisherigen gefunden werden kann: so reichen die ertheilten Vorschriften ebenfalls zu, um das erste Differenzial derselben zu finden. Denn ist  $p$  irgend eine Funktion von  $x$ , deren Differenzial  $dp$  man kennt, so ist das erste Differenzial der Potestät  $p^n = np^{n-1}dp$ . Hiernach lassen sich folgende Fälle behandeln.

I. Ist  $y = (a + x)^n$ ; so ist  $dy = n(a + x)^{n-1}dx$ .

II. Ist  $y = (aa - xx)^2$ ; so ist  $dy = -4xdx(aa - xx)$ .

III. Ist  $y = \frac{1}{aa + xx}$ , oder  $y = (aa + xx)^{-1}$ , so ist

$$dy = \frac{-2xdx}{(aa + xx)^2}$$

IV. Ist  $y = \sqrt{a + bx + cxx}$ , so ist  $dy = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{a + bx + cxx}}$ .

V. Ist  $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$ , oder  $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$ ; so ist

$$dy = -\frac{\frac{2}{3}x^3dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4 - x^4)}}$$

VI. Ist  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - xx}}$  oder  $y = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}$ ; so ist

$$dy = xdx(1 - xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1 - xx)\sqrt{1 - xx}}$$

VII. Ist  $y = \sqrt[3]{a + \sqrt{bx + x}}$  so ist

$$dy = \frac{dx\sqrt{b} + 2\sqrt{x}dx}{3\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx + x})^2}} = \frac{dx\sqrt{b} + 2dx\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(a + \sqrt{bx + x})^2}}$$

VIII. Ist  $y = \frac{1}{x\sqrt{aa - xx}}$ , so ist, weil  $d\sqrt{aa - xx} =$

$$\frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}}$$

ist,

dy

$$dy = \frac{-dx + xdx : \sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2} =$$

$$\frac{xdx - dx\sqrt{(aa - xx)}}{(x + \sqrt{(aa - xx)})^2 \sqrt{(aa - xx)}} \text{ oder}$$

$$dy = \frac{dx/x - \sqrt{(aa - xx)}^3}{(2xx - aa)^2 \sqrt{(aa - xx)}}$$

IX. Ist  $y = \sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})^3}$ , so setze man

$\frac{1}{\sqrt{x}} = p$  und  $\sqrt[3]{(1 - xx)^2} = q$ . Da auf diese Art

$y = \sqrt[4]{1 - p + q^3}$  wird, so ist

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{(1 - p + q^3)}}$$

Nun ist aber aus dem Vorhergehenden

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \text{ und } dq = \left( \frac{3\sqrt[3]{(1-xx)}}{-4x dx} \right) \frac{-4x dx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}};$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt,

$$dy = \frac{3dx : 2x\sqrt{x} - 4x dx : \sqrt[3]{(1 - xx)}}{4\sqrt[4]{(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - xx)^2})}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man jedesmal anstatt der Glieder, die einigermaßen zusammengesetzt sind, einzelne Buchstaben setzt, die Differenzialien aller dergleichen Funktionen leicht.

§. 163.

Wenn die Größe, deren Differenzial gefunden werden soll, ein Produkt aus zweyen oder mehrern Funktionen von  $x$  ist, deren Differenzialien bekannt sind: so findet man das

Differenzial derselben am bequemsten auf folgende Art. Es seyen  $p$  und  $q$  Funktionen von  $x$ , deren Differenzialien  $dp$  und  $dq$  bekannt sind. Da nun, wenn man  $x + dx$  für  $x$  setzt,  $p$  in  $p + dp$  und  $q$  in  $q + dq$  übergeht, so wird dadurch das Produkt  $pq$  in

$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$   
 verwandelt, und es ist also das Differenzial des Produkts  $pq = pdq + qdp + dpdq$ , oder  $d.pq = pdq + qdp$ , weil das unendlich Kleine von der zweyten Ordnung  $dpdq$  gegen die unendlich Kleinen von der ersten Ordnung  $pdq$  und  $qdp$ , verschwindet. Es besteht also das Differenzial des Produkts  $pq$  aus zwey Gliedern, welche man findet, wenn man einen jeden Faktor mit dem Differenziale des andern Faktors multiplicirt. Hieraus läßt sich ferner die Art, das Differenzial des Produkts  $pqr$ , welches aus drey Faktoren besteht, zu finden, leicht ableiten. Denn setzt man  $qr = z$ , so wird  $pqr = pz$ , und  $d.pqr = pdz + zdp$ . Da aber  $z = qr$  ist, so wird  $dz = qdr + rdq$ , und substituirt man diese Werthe, so findet man

$$d.pqr = pqdr + prdq + qrdp.$$

Auf eine ähnliche Art ist, wenn die zu differenzirende Größe ein Produkt aus vier Faktoren ist,

$$d.pqrs = pqrds + pqsd r + prsdq + qrsdp;$$

und hieraus läßt sich die Differenziation der Produkte, die aus mehrern Faktoren bestehen, sehr leicht erkennen.

I. Ist also  $y = (a + x)(b - x)$  so wird

$$dy = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx;$$

und dieses Differenzial findet man ebenfalls, wenn man die gegebene Größe zuvor entwickelt. Denn es wird alsdann  $y = ab - ax + bx - xx$ , und daraus nach den obigen Regeln  $dy = -adx + bdx - 2xdx$ .

II. Ist

II. Ist  $y = \frac{1}{x} \sqrt{(aa - xx)}$

so setze man  $\frac{1}{x} = p$  und  $\sqrt{(aa - xx)} = q$ .

Weil nun  $dp = \frac{-dx}{xx}$ , und  $dq = \frac{-x dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$  ist, so wird

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{dx}{xx} \sqrt{(aa - xx)};$$

Da man aber durch die Reduktion auf einerley Nenner hierz

aus  $\frac{-xx dx - aad x + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$  erhält,

so ist das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$$

III. Ist  $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$ ;

so setze man  $xx = p$ , und  $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$ .

Da nun  $dp = 2x dx$ , und  $dq = \frac{-2x^3 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$  ist, so wird

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5 dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x dx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{2a^4 x dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

und also das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{2a^4 x dx}{(a^4 + x^4) \sqrt{(a^4 + x^4)}}$$

IV. Ist  $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$ ;

so setze man  $x = p$  und  $\frac{1}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = q$ , wodurch denn  $dp = dx$ ,

und  $dq = \frac{-dx - xdx \cdot \sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2} = \frac{-dx(x + \sqrt{(1 + xx)})}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2 \sqrt{(1 + xx)}}$

$\frac{-dx}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}}$  wird. Hieraus aber findet man

$$pdq + qdp = \frac{-x dx}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}} + \frac{dx}{x+\sqrt{1+xx}} = \frac{dx(\sqrt{1+xx}-x)}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}}$$

und es ist also das gesuchte Differential

$$dy = \frac{dx(\sqrt{1+xx}-x)}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}}, \text{ oder,}$$

wenn man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch  $\sqrt{1+xx}-x$  multiplicirt,

$$dy = \frac{dx(1+2xx-2x\sqrt{1+xx})}{\sqrt{1+xx}} = \frac{dx+2xxdx}{\sqrt{1+xx}} - 2x dx.$$

Eben dieses Differential hätte man auch noch bequemer auf folgende Art finden können. Da  $y = \frac{x}{x+\sqrt{1+xx}}$  ist, so multiplicire man Zähler und Nenner durch  $\sqrt{1+xx}-x$ , wodurch man  $y = x\sqrt{1+xx}-xx = \sqrt{x^2+x^4}-xx$  erhält, und davon ist das Differential nach der vorhergehenden Regel,

$$dy = \frac{xdx + 2x^3 dx}{\sqrt{x^2+x^4}} - 2x dx = \frac{dx + 2xx dx}{\sqrt{1+xx}} - 2x dx.$$

V. Ist  $y = (a+x)(b-x)(x-c)$  so ist

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Ist  $y = x(aa+xx)\sqrt{aa-xx}$  so findet man, weil dies Produkt aus drey Factoren besteht,

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{aa-xx} + 2xx dx \sqrt{aa-xx} - \frac{xx dx (aa+xx)}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dx(aa^2+aa xx - 4x^4)}{\sqrt{aa-xx}}.$$

## §. 164.

Ob nun gleich hierbey auch Brüche in den Faktoren enthalten seyn können, so ist es doch bequemer die Brüche nach einer besondern Regel zu differenziren. Es sey also das Differenzial des Bruchs  $\frac{p}{q}$  zu finden. Da dieser Bruch durch die Substitution von  $x + dx$  für  $x$  in folgenden Bruch  $\frac{p + dp}{q + dq} = (p + dp) \left( \frac{1}{q} - \frac{dq}{qq} \right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq}$  übergeht, so ist das Differenzial des Bruchs  $\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$ , weil das letzte Glied  $\frac{dpdq}{qq}$  verschwindet. Es ist also

$$d \cdot \frac{p}{q} = \frac{q dp - p dq}{qq}$$

und man findet das Differenzial eines jeden Bruchs, wenn man von dem Produkte aus dem Nenner in das Differenzial des Zählers das Produkt aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abzieht, und die gefundene Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt. Der Gebrauch dieser Regel wird durch folgende Beyspiele deutlich werden.

I. Ist  $y = \frac{x}{aa + xx}$ , so ist nach dieser Regel

$$dy = \frac{(aa + xx)dx - 2x dx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)dx}{(aa + xx)^2}$$

II. Ist  $y = \frac{\sqrt{aa + xx}}{aa - xx}$ , so findet man

$$dy = \frac{(aa - xx)x dx + \sqrt{aa + xx} + 2x dx \sqrt{aa + xx}}{(aa - xx)^2}$$

und

und wenn man diesen Bruch reducirt,

$$dy = \frac{(3aa + xx)xdx}{(aa - xx)^2 \sqrt{(aa + xx)}}$$

Oft ist es vortheilhafter nach der Regel zu handeln, welche dieser Ausdruck, d.  $\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq}$ , enthält, und nach welcher das Differenzial eines Bruchs dem Differenziale des Zählers durch den Nenner dividirt, weniger dem Differenziale des Nenners durch den Zähler multiplicirt, und durch das Quadrat des Nenners dividirt, gleich ist. Ist z. B.

$$\text{III. } y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}, \text{ so ist}$$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{-2xdx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aaxdx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2} \\ &= \frac{-2xdx(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2} \end{aligned}$$

## §. 165.

Diese Vorschriften reichen hin, um das Differenzial einer jeden rationalen Funktion von  $x$  zu finden. Denn ist dieselbe eine ganze Funktion, so ist die Art, ihr Differenzial zu finden, schon vorhin beschrieben worden. Ist sie aber eine gebrochene Funktion so kann man sie allemal auf folgende Form reduciren:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \zeta x^5 + \dots}$$

Setzt man nun den Zähler =  $p$ , und den Nenner =  $q$ , so

daß also  $y = \frac{p}{q}$  wird, so ist  $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$ . Da nun

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

und  $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \dots$  ist, so wird

$$dp =$$

$dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{ic.}$   
 und  $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\epsilon x^3dx + \text{ic.}$   
 Multiplicirt man also, so findet man

$$qdp = \alpha Bdx + 2\alpha Cxdx + 3\alpha Dx^2dx + 4\alpha Ex^3dx + \text{ic.}$$

$$+ \beta Bxdx + 2\beta Cx^2dx + 3\beta Dx^3dx + \text{ic.}$$

$$+ \gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ic.}$$

$$+ \delta Bx^3dx + \text{ic.}$$

$$qdp = \beta Adx + \beta Bxdx + \beta Cx^2dx + \beta Dx^3dx + \text{ic.}$$

$$+ 2\gamma Ax dx + 2\gamma Bx^2dx + 2\gamma Cx^3dx + \text{ic.}$$

$$+ 3\delta Ax^2dx + 3\delta Bx^3dx + \text{ic.}$$

$$+ 4\epsilon Ax^3dx + \text{ic.}$$

Hieraus aber wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \left\{ \begin{array}{l} +\alpha B \quad +2\alpha C \quad +3\alpha D \quad +4\alpha E \quad +5\alpha F \\ -\beta A \quad -2\gamma A \quad +\beta C \quad +2\beta D \quad +3\beta E \\ \quad \quad \quad \quad \quad -\gamma B \quad -2\delta B \quad +\gamma D \\ \quad \quad \quad \quad \quad -3\delta A \quad -4\epsilon A \quad -\delta C \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -3\epsilon B \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -5\zeta A \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} (a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{ic.})^2 \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck kann sehr gut gebraucht werden, um darnach das Differenzial einer jeden rationalen Funktion schnell zu finden; denn die Art, wie der Zähler des Differenzials aus den Coefficienten des Zählers und des Nenners der gegebenen Funktion zusammengesetzt wird, ist leicht zu erkennen, und der Nenner des Differenzials ist das Quadrat des Nenners der gegebenen Funktion.

§. 166.

Wenn der Zähler oder der Nenner des gegebenen Bruchs oder beyde aus Faktoren bestehen, so erhält man zwar durch eine wirklich vorgenommene Multiplication eine solche

solche Form, als wir eben differenziert haben; allein es ist doch besser, dergleichen Fälle nach einer besondern Regel zu behandeln. Es sey also der Bruch  $y = \frac{pr}{q}$  gegeben. Man setze  $pr = P$ , wodurch  $dP = pdr + rdp$ , und weil  $y = \frac{P}{q}$  ist,  $dy = \frac{q dP - P dq}{qq}$  wird. Setzt man nun für  $P$  und  $dP$  die Werthe davon, so wird

I. wenn  $y = \frac{pr}{q}$  ist,

$$dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$$

Ist hingegen  $y = \frac{p}{qs}$ , so setze man  $qs = Q$ , wodurch denn  $dQ = qds + sdq$  und  $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$  wird. Ist also

II.  $y = \frac{p}{qs}$ , so wird

$$dy = \frac{qsdp - pqds - qsdq}{qqss}$$

Ist endlich  $y = \frac{pr}{qs}$ , so setze man  $pr = P$  und  $qs = Q$ , wodurch man  $y = \frac{P}{Q}$  und  $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$  erhält. Da aber  $dP = pdr + rdp$ , und  $dQ = qds + sdq$  ist, so wird, wenn

III.  $y = \frac{pr}{qs}$  ist,

$$dy = \frac{pqsd r + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$$

$$= \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qqs}$$

Auf

Auf eine ähnliche Art findet man die Differenzialien, wenn der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aus mehreren Faktoren bestehen, und es braucht also hiezu keine besondere Anleitung gegeben zu werden. Ich füge daher auch keine zu diesen Fällen gehörende Beispiele hinzu, zumal da bald eine allgemeine Regel das Differenzial zu finden gegeben werden wird, welche alle bisherigen besondern Regeln unter sich begreift.

§. 167.

Es giebt aber sowohl bey den Produkten als bey den Brüchen Fälle, wo sich das Differenzial bequemer ausdrücken läßt, als solches nach den allgemeinen bis jetzt erklärten Regeln geschieht. Dies findet statt, wenn die Faktoren, die entweder die Funktion selbst oder den Zähler oder Nenner derselben ausmachen, Potestäten sind.

Es sey also die Funktion  $y = p^m q^n$  zu differenzieren gegeben. Setzt man hier  $p^m = P$ , und  $q^n = Q$ , so wird  $y = PQ$  und  $dy = P dQ + Q dP$ . Da nun  $dP = mp^{m-1} dp$ , und  $dQ = nq^{n-1} dq$  ist, so findet man, wenn man diese Werthe braucht,

$$dy = np^m q^{n-1} dq + mp^{m-1} q^n dp = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp).$$

Ist daher

I.  $y = p^m q^n$ , so wird

$$dy = p^{m-1} q^{n-1} (npdq + mqdp).$$

Auf eine ähnliche Art läßt sich auch das Differenzial eines Produkts aus drey Faktoren finden. Ist nemlich

II.  $y = p^m q^n r^k$ , so wird

$$dy = p^{m-1} q^{n-1} r^{k-1} (mqrdp + nprdq + kpqdr).$$

§. 168.

Ist ein Bruch gegeben, dessen Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, so lassen sich auch für diesen

fen

fen Fall besondere Regeln geben. Es sey zuvörderst der Bruch  $y = \frac{p^m}{q}$  gegeben. Hier findet man nach der Regel für die Differenziation der Brüche,  $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$ ; allein dieses Differenzial läßt sich bequemer ausdrucken. Ist nemlich

I.  $y = \frac{p^m}{q}$ , so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - p dq)}{qq}$$

Nun sey  $y = \frac{p}{q^n}$ . Hier findet man nach der angeführten Regel  $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$ . Dividirt man aber den Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch  $q^{n-1}$ , so wird  $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$ . Ist daher

II.  $y = \frac{p}{q^n}$ , so wird

$$dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$$

Wäre  $y = \frac{p^m}{q^n}$  gegeben, so fände man

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1} dq}{q^{2n}}$$

und hieraus durch die Reduktion

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}} \quad \text{Wenn also}$$

III.  $y = \frac{p^m}{q^n}$  ist, so wird

$$dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$$

Ist

Ist endlich das Differenzial von  $y = \frac{r}{p^m q^n}$  zu finden, so giebt die angeführte Regel

$$dy = \frac{p^m q^n dr - m p^{m-1} q^n r dp - n p^m q^{n-1} r dq}{p^{2m} q^{2n}}$$

und da der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks durch  $p^{m-1} q^{n-1}$  theibar sind, so wird, wenn

IV.  $y = \frac{r}{p^m q^n}$  ist,

$$dy = \frac{p q dr - m q r dp - n p r dq}{p^{m+1} q^{n+1}}$$

Kommen mehr Faktoren vor, so kann man hiernach für jeden einzelnen Fall sehr leicht eine besondere Regel finden. Es wäre indeß überflüssig, die gefundenen Regeln durch Worte auszudrücken.

§. 169.

Die bisher ertheilten Regeln der Differenziation erstrecken sich so weit, daß sich keine algebraische Funktion von  $x$  denken läßt, deren Differenzial man nicht darnach finden könnte. Denn ist die gegebene Funktion eine rationale entweder ganze oder gebrochene Funktion, so ist für den ersten Fall im 159ten §. und für den andern im 165ten §. gezeigt worden, wie man sich dabey zu nehmen hat; auch sind zugleich die kurzen Arten bey vorkommenden Faktoren mitgetheilt worden. Außerdem kann man darnach auch die Differenzialien der Irrational-Größen finden; indem man dieselben, sie mögen in der gegebenen Funktion addirt oder subtrahirt seyn, als Multiplicatoren oder als Divisoren darin vorkommen, jedesmal auf die untersuchten Fälle zurückführen kann. Es ist dieses indeß von den entwickelten Funktionen zu verstehen; denn was die unentwickelten Funktionen

Eulers Differenz. Rechn. I. Th. K nen

nen betrifft, deren Natur durch eine Gleichung bestimmt wird, so werden wir davon erst weiter unten, nachdem wir das Differenzial der Funktionen zweyer und mehrerer veränderlichen Größen werden finden gelehrt haben, reden können.

## §. 170.

Wenn man die bisher erklärten Regeln aufmerksam überdenkt und unter einander vergleicht, so sieht man bald, daß sie insgesammt auf eine einzige allgemeine Regel zurückgeführt werden können, deren Wahrheit auch hier nicht schwer zu erkennen ist, wenn gleich der strenge Beweis derselben erst weiter hin gegeben werden kann. Es besteht nämlich eine jede algebraische Funktion aus Theilen, die durch die Addition, oder Subtraktion, oder Multiplication, oder Division unter einander verbunden, und theils rational, theils irrational sind. Man nenne also die Größen, welche die Funktion ausmachen, Theile der Funktion. Dann suche man das Differenzial eines jeden Theils so, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Größen wären, und vereinige darauf alle gefundene Differenzialien zu einer Summe. Vermittelt dieser Regel lassen sich alle Funktionen ohne Ausnahme, selbst die Transcendenten differenziren, wie nachher gezeigt werden wird.

## §. 171.

Um diese Regel zu erläutern bestche zuvörderst  $y$  aus zwey Theilen, die entweder durch die Addition oder durch die Subtraktion mit einander verbunden sind, oder es sey  $y = p \pm q$ . Man denke sich also erstlich bloß  $p$  als eine veränderliche, und  $q$  als eine beständige Größe, wo man denn das Differenzial  $dp$  findet. Dann nehme man bloß  $\pm q$  veränderlich an, und lasse  $p$  beständig seyn, wodurch  
man

man das Differenzial  $\pm dq$  erhält. Aus diesen beiden Differenzialien findet man nun das gesuchte Differenzial so, daß  $dy = dp \pm dq$  wird, gerade so, wie wir es bereits gefunden haben. Hieraus fällt zugleich in die Augen, daß auch das Differenzial solcher Funktionen, die aus mehreren entweder zu einander addirten oder von einander subtrahirten Theilen bestehen, nach dieser Regel gefunden werden kann. Ist z. B.  $y = p \pm q \pm r \pm s$ , so findet man darnach  $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$ , welches mit dem Obigen auf das genaueste übereinstimmt.

§. 172.

Sind die Theile mit einander multiplicirt, und also  $y = pq$ , so ist bekannt, daß das Differenzial, wenn man bloß  $p$  als eine veränderliche Größe betrachtet,  $qdp$ , und wenn man bloß  $q$  veränderlich seyn läßt,  $p dq$  ist. Addirt man aber diese beiden Differenzialien, so erhält man das gesuchte Differenzial  $dy = qdp + pdq$ , so wie es oben gefunden worden ist. Sind mehrere Größen mit einander multiplicirt, und also  $y = pqrs$ : so erhält man, wenn man nach und nach jede von diesen Größen allein veränderlich seyn läßt, die Differenzialien

$$qrsdp, prsdq, pqsdr, pqrds,$$

und die Summe derselben giebt das gesuchte Differenzial

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds$$

ganz so wie es oben gefunden wurde. Das Differenzial besteht daher jedesmal aus so viel Theilen, als Theile in der Funktion addirt oder subtrahirt oder mit einander multiplicirt sind.

§. 173.

Wenn die Theile der Funktion durch die Division verbunden sind, und also  $y = \frac{p}{q}$  ist: so lasse man nach der gegebenen

R 2

gegebenen

gebenen Regel erst bloß  $p$  veränderlich seyn. Weil also  $q$  eine beständige Größe ist, so ist das Differenzial  $= \frac{dp}{q}$ . Dann nehme man bloß  $q$  als eine veränderliche Größe an, wodurch, weil  $y = pq^{-1}$  ist, das Differenzial  $= -\frac{p dq}{qq}$  wird. Vereiniget man nun die gefundenen Differenzialien, so wird das gesuchte Differenzial

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{p dq}{qq} = \frac{q dp - p dq}{qq}$$

so wie wir es bereits oben gehabt haben. Ist  $y = \frac{pq}{rs}$ , so findet man, wenn man wieder die einzelnen Größen  $p, q, r,$  und  $s$  nach und nach als veränderliche Größen betrachtet, die Differenzialien

$$\frac{q dp}{rs}; \frac{p dq}{rs}; -\frac{p q dr}{rrs}; -\frac{p q ds}{rss};$$

und es wird daher

$$dy = \frac{q r s dp + p r s dq - p q s dr - p q r ds}{rrss}$$

§. 174.

Wenn also nur die einzelnen Theile, woraus die Funktion besteht, so beschaffen sind, daß man das Differenzial derselben finden kann: so ist man auch zugleich im Stande das Differenzial der ganzen Funktion zu finden. Wenn nun die Theile rationale Funktionen sind, so lassen sich ihre Differenzialien nicht nur nach den oben ertheilten Regeln finden, sondern man kann dieselben auch nach der mitgetheilten allgemeinen Regel erforschen; sind aber die Theile irrational, so kann man, da sich die Irrational-Größen auf Potestäten mit gebrochenen Exponenten reduciren lassen, das

Diffe

Differenzial derselben nach der Regel für die Differenziation der Potestäten, wornach  $d. x^n = nx^{n-1}dx$  ist, finden. Und da aus eben dieser Quelle auch die Regeln für die Differenziation solcher irrationalen Ausdrücke, die außerdem noch andere irrationale Größen enthalten, fließen, so erhellet, daß die hier gegebene und weiter hin zu beweisende allgemeine Regel, verbunden mit der Regel für die Differenziation der Potestäten zur Erfindung der Differenzialien aller algebraischen Funktionen hinreichend ist.

§. 175.

Aus diesem allen folgt sehr deutlich, daß, wenn  $y$  irgend eine algebraische Funktion von  $x$  ist, das Differenzial von  $y$  die Form hat,  $dy = p dx$ , und daß der Werth von  $p$  nach den ertheilten Regeln allemal gefunden werden kann. Es ist aber auch  $p$  eine algebraische Funktion von  $x$ , weil es durch keine andere Operationen gefunden wird, als die in den algebraischen Funktionen gewöhnlichen. Wenn daher  $y$  eine algebraische Funktion von  $x$  ist, so ist auch  $\frac{dy}{dx}$  eine algebraische Funktion von  $x$ ; und ist auch  $z$  eine algebraische Funktion von  $x$ , so daß  $dz = q dx$  ist, so ist auch, weil  $q$  eine algebraische Funktion von  $x$  ist,  $\frac{dz}{dy}$  eine algebraische Funktion von  $x$ , indem  $\frac{dz}{dy} = \frac{p}{q}$  ist. Wenn also Ausdrücke wie  $\frac{dz}{dy}$  in einem Ausdrücke, der übrigens algebraisch ist, vorkommen, so hindern dieselben nicht, daß der ganze Ausdruck algebraisch sey, wosfern nur  $y$  und  $z$  algebraische Funktionen sind.

## §. 176.

Man kann diesen Schluß auch auf die zweyten und übrigen höhern Differenzialien ausdehnen. Bleibt nemlich  $y$  eine algebraische Funktion von  $x$ , und setzt man  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ ; so ist, wenn man das Differenzial  $dx$  als eine beständige Größe betrachtet,  $ddy = q dx^2$ , wie oben gezeigt worden ist. Da nun der angeführten Gründe wegen  $q$  eine algebraische Funktion von  $x$  ist, so ist auch  $\frac{ddy}{dx^2}$  nicht nur eine endliche Größe, sondern auch eine algebraische Funktion von  $x$ , wenn  $y$  eine algebraische Funktion von  $x$  ist. Auf eben die Art erhellet, daß auch  $\frac{d^3y}{dx^3}$ ;  $\frac{d^4y}{dx^4}$ ;  $\text{rc.}$  algebraische Funktionen von  $x$  seyn werden, wenn  $y$  eine solche ist; und wenn  $z$  ebenfalls eine algebraische Funktion von  $x$  ist, so sind auch alle endliche Ausdrücke, die aus den Differenzialien aller Ordnungen von  $y$  und  $z$  und aus  $dx$  zusammengesetzt sind, z. B.  $\frac{ddy}{ddz}$ ;  $\frac{d^3y}{dz ddy}$ ;  $\frac{dx d^4y}{dy^3 ddz}$ ;  $\text{rc.}$  algebraische Funktionen von  $x$ .

## §. 177.

Da also die Art und Weise erklärt worden ist, wie man das erste Differenzial einer jeden algebraischen Funktion von  $x$  findet; so können wir nunmehr auf eben die Art die zweyten und höhern Differenzialien finden. Ist nemlich  $y$  irgend eine algebraische Funktion von  $x$ , so findet man durch Aufsuchung des Differenzials  $dy = p dx$  den Werth von  $p$ . Differenziert man nun von neuem, und findet man  $dp = q dx$ , so wird, wenn man  $dx$  beständig seyn läßt,  $ddy = q dx^2$ , und auf diese Weise wird das zweyte Differenzial gefunden. Differenziert man nun weiter, und sucht man  $dq = r dx$ , so erhält man das dritte Differenzial  $d^3y = r dx^3$ ,

$= r dx^3$ , und so lassen sich, wenn man auf diesem Wege fortfährt, alle übrige höhere Differenzialien finden, weil die Größen  $p, q, r, \text{ic.}$  insgesamt algebraische Funktionen von  $x$  sind, deren Differenziation nach den gegebenen Regeln in unserer Gewalt steht. Man muß also zu diesem Ende die Differenziation fortsetzen. Läßt man nemlich bey der Differenziation von  $y$  die  $dx$  weg, so findet man  $\frac{dy}{dx} = p$ , und differenzirt man diese Größe von neuem, und dividirt dabey das Kommende durch  $dx$ , welches geschieht, wenn man alenthalben  $dx$  wegläßt, so bekommt man  $q = \frac{ddy}{dx^2}$ . Auf eine ähnliche Art erhält man  $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ , u. s. w.

I. Ist also  $y = \frac{aa}{aa + xx}$ , so findet man das erste sowohl als die folgenden Differenzialien auf diese Art.

Zuvörderst findet man durchs Differenzieren und durchs Dividiren mit  $dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}; \text{ und hieraus ferner}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa + xx)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4 - 24aax^3}{(aa + xx)^4};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa + xx)^5};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa + xx)^6};$$

ic.

II. Ist  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - xx}}$  so ist das erste und die folgenden Differenzialien

R 4

dy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9 + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}};$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 4050x^2 + 5400x^4 + 720x^6}{(1 - xx)^{\frac{13}{2}}};$$

u.

Diese Differenzialien lassen sich leicht weiter fortsetzen, allein das Gesetz, nach welchem die Glieder derselben auf einander folgen, entdeckt sich nicht so leicht, obgleich der Coefficient der höchsten Potestät von  $x$  immer ein Produkt aus den Zahlen von 1 bis zu der Ordnung des Differenzials, welches man sucht, ist. Setzt man indeß die Differenziation weiter fort, und überlegt dabey das Gefundene genau, so findet man, daß überhaupt, wenn  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - xx}}$  ist,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(1 - xx)^{n + \frac{1}{2}}} \left( x^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{1 \cdot 2 \dots 6} x^{n-6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{n(n-1) \dots (n-7)}{1 \cdot 2 \dots 8} x^{n-8} + \dots \right)$$

ist. Dergleichen Exempel dienen also nicht bloß dazu, um sich eine Fertigkeit im Differenzieren zu erwerben, sondern es sind auch die Gesetze, die man bey den Differenzialien aller Ordnungen wahrnimmt, an und für sich sehr merkwürdig, und leiten zu verschiedenen andern Erfindungen.

Sechsz



## Sechstes Capitel.

### Von der Differentiation der transcendenten Funktionen.

§. 178.

Von den unzähligen Arten der transcendenten oder nicht algebraischen Größen, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt, haben wir in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen einige häufiger vorkommende Gattungen dieser Größen untersuchen können, nemlich diejenigen, welche die Lehre von den Logarithmen und den Zirkelgrößen darbietet. Da wir nun die Natur dieser Größen so deutlich aus einander gesetzt haben, daß man sich ihrer in der Rechnung eben so leicht als der algebraischen Größen bedienen kann: so wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel die Differentialien derselben auffuchen, damit ihre Beschaffenheit und Eigenschaften noch deutlicher erkannt werden mögen. Auf diese Art wird zugleich der Weg zur Integral-Rechnung, welches die eigentliche Quelle der transcendenten Größen ist, gebahnt werden.

§. 179.

Zuvörderst kommen also die logarithmischen Größen, oder solche Funktionen von  $x$  zur Betrachtung, welche außer algebraischen Ausdrücken auch einen Logarithmen von  $x$ , oder eine Funktion desselben enthalten. Da nun die algebraischen Größen hierbey keine Schwierigkeit machen können,

nen, so kommt es lediglich auf die Erfindung des Differenzials des Logarithmen einer jeden Funktion von  $x$  an. Ob es aber gleich sehr viel Arten von Logarithmen giebt, so wollen wir doch hier vorzüglich nur die hyperbolischen Logarithmen betrachten, und wir können uns darauf einschränken, weil die Logarithmen verschiedener Systeme ein beständiges Verhältniß zu einander haben, und man also aus dem hyperbolischen Logarithmen sehr leicht einen jeden andern Logarithmen finden kann. Ist nemlich der hyperbolische Logarithme einer Funktion  $p = 1p$ , so ist der Logarithme eben dieser Funktion aus einem andern Systeme  $= m1p$ , wenn  $m$  die Zahl bedeutet, welche das Verhältniß der Logarithmen dieses Systems zu den hyperbolischen Logarithmen ausdrückt. Es soll daher der Ausdruck  $1p$  in der gegenwärtigen Untersuchung immer den hyperbolischen Logarithmen von  $p$  bedeuten.

## §. 180.

Wir wollen also das Differenzial des hyperbolischen Logarithmen von  $x$  aufsuchen, und dabei  $y = 1x$  setzen, so daß der Werth des Differenzials  $dy$  zu bestimmen sey. Setzt man nun  $x \mp dx$  anstatt  $x$ , so geht  $y$  in  $y \mp dy$  über, und es wird daher

$$y \mp dy = 1(x \mp dx) \text{ und } dy = 1(x \mp dx) - 1x = 1\left(1 \mp \frac{dx}{x}\right).$$

Aus der Einleitung in die Analysis des Unendlichen ist aber bekannt, daß  $1(1 \mp z) = z - \frac{z^2}{2} \mp \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \mp 1c.$  ist, und

setzt man daher  $\frac{dx}{x}$  anstatt  $z$ , so wird

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} \mp \frac{dx^3}{3x^3} - 1c.$$

und

und da alle folgende Glieder dieser Reihe gegen das erste verschwinden, so wird

$$d \cdot 1x = dy = \frac{dx}{x},$$

und folglich das Differentzial jedes andern Logarithmen, der sich zu dem hyperbolischen wie  $n : 1$  verhält,  $= \frac{n dx}{x}$ .

§. 181.

Wenn also der Logarithme irgend einer Funktion von  $x$ , die wir  $p$  nennen wollen, also  $1p$  gegeben wird, so findet man auf eben dem Wege, daß das Differentzial desselben  $= \frac{dp}{p}$  ist, und so ergibt sich für die Erfindung der Differentzialien der Logarithmen folgende Regel. Man suche das Differentzial der Größe  $p$ , deren Logarithme gegeben ist, und dividire dasselbe durch diese Größe  $p$ . Diese Regel fließt auch aus dem Ausdrucke  $\frac{p^o - 1^o}{o}$ , auf welchen wir oben den Logarithmen von  $p$  reducirt haben. Es sey  $o = 0$ , so wird, weil  $1p = \frac{p^o - 1}{o}$  ist,  $d \cdot 1p = d \cdot \frac{1}{o} p^o = p^{o-1} dp = \frac{dp}{p}$ , indem  $o = 0$  ist. Es ist aber hiers bey zu bemerken, daß  $\frac{dp}{p}$  das Differentzial des hyperbolischen Logarithmen von  $p$  ist, so daß man also, wenn der gemeine Logarithme von  $p$  gegeben würde, das Differentzial  $\frac{dp}{p}$  noch durch die Zahl  $0,43429448$  ic. multipliciren müßte.

§. 182.

S. 182.

Bermittelt dieser Regel kann man das Differenzial des Logarithmen einer jeden Funktion von  $x$  sehr leicht finden, welches folgende Beispiele bestätigen werden.

I. Ist  $y = \ln x$ ; so ist  $dy = \frac{dx}{x}$ .

II. Ist  $y = \ln x^n$ ; so setze man  $x^n = p$ , so daß also  $y = \ln p$  wird. Alsdenn hat man  $dy = \frac{dp}{p}$ , und weil  $dp = n x^{n-1} dx$  ist, so wird

$$dy = \frac{n dx}{x}.$$

Eben dieses erhellet aus der Natur der Logarithmen. Denn da  $\ln x^n = n \ln x$  ist, so ist auch  $d. \ln x^n = n d. \ln x = \frac{n dx}{x}$ .

III. Ist  $y = \ln(1 + xx)$ ; so ist  $dy = \frac{2x dx}{1 + xx}$ .

IV. Ist  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - xx}}$ ; so ist, weil  $y = -\frac{1}{2} \ln(1 - xx)$  ist,

$$dy = \frac{x dx}{1 - xx}.$$

V. Ist  $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1 + xx}}$ , so ist, weil  $y = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1 + xx)$  ist,

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{x dx}{1 + xx} = \frac{dx}{x(1 + xx)}.$$

VI. Ist  $y = \ln(x + \sqrt{1 + xx})$  so wird

$$dy = \frac{dx + x dx : \sqrt{1 + xx}}{x + \sqrt{1 + xx}} = \frac{x dx + dx \sqrt{1 + xx}}{(x + \sqrt{1 + xx}) \sqrt{1 + xx}}$$

und da der Zähler und Nenner dieses Bruchs durch  $x + \sqrt{1 + xx}$  theilbar sind, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + xx}}.$$

VII.

VII. Ist  $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})$  so setze

man  $x\sqrt{-1} = z$ . Da also nun  $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(z + \sqrt{(1+zz)})$

ist, so ist wegen des Vorhergehenden  $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}} dz$ :

$\sqrt{(1+zz)}$ ; und weil  $dz = dx\sqrt{-1}$  ist, so wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Ob also gleich der gegebene Logarithme imaginäre Größen in sich schließt, so wird demohingeachtet das Differenzial desselben reell.

§. 183.

Wenn die Größe, deren Logarithme gegeben wird, aus Faktoren besteht, so läßt sich der Logarithme derselben in mehrere andere zerfallen. Ist z. B.  $y = \log p q r s$ , so wird,

weil  $y = \log p + \log q + \log r + \log s$  ist,  $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$ .

Die Zerfällung findet ebenfalls statt, wenn die Größe, deren Logarithme differenziert werden soll, ein Bruch ist. Ist

nemlich  $y = \log \frac{pq}{rs}$ , so wird, weil  $y = \log p + \log q - \log r - \log s$  ist,

$dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$ . Auch die Potestäten ma-

chen keine Schwierigkeit. Denn ist  $y = \log \frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$ , so wird,

weil  $y = m \log p + n \log q - \mu \log r - \nu \log s$  ist,  $dy = \frac{m dp}{p} + \frac{n dq}{q}$

$-\frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$ .

1. Ist

I. Ist  $y = 1(a+x)(b+x)(c+x)$  so wird, weil alsdenn  
 $y = 1(a+x) + 1(b+x) + 1(c+x)$  ist

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Ist  $y = \frac{1}{2} \frac{1+x}{1-x}$ , so wird  $y = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$  und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2} dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}.$$

III. Ist  $y = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+xx)} + x}{\sqrt{(1+xx)} - x}$ , so ist  $y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1+xx)} + x)$   
 $- \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1+xx)} - x)$ , und also

$$dy = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}.$$

Eben dieses Differenzial findet man noch leichter, wenn man

den irrationalen Nenner des Bruchs  $\frac{\sqrt{(1+xx)} + x}{\sqrt{(1+xx)} - x}$  durch

die Multiplication des Zählers und Nenners mit  $\sqrt{(1+xx)} + x$   
 wegschafft. Man erhält nemlich alsdann

$$y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1+xx)} + x)^2 = 1(\sqrt{(1+xx)} + x)$$

und davon ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \text{ ist.}$$

IV. Ist  $y = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$ , so setze man den Zäh-

ler dieses Bruchs,  $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)} = p$ , und den

Nenner,  $\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} = q$ , wodurch  $y = \frac{p}{q}$

$= \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q$ , und  $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$  wird. Da nun

$$dp = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-xx)}} (\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)})$$

$$= \frac{-q dx}{2\sqrt{(1-xx)}}; \text{ und}$$

$$dq =$$

$$dq = \frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} + \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{p dx}{2\sqrt{(1-xx)}} \text{ ist, so wird}$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-q dx}{2p\sqrt{(1-xx)}} - \frac{p dx}{2q\sqrt{(1-xx)}} = \frac{-(pp + qq) dx}{2pq\sqrt{(1-xx)}}$$

und da  $pp + qq = 4$ , und  $pq = 2x$  ist, so wird

$$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$$

Dieses Differentzial findet man aber auf eine leichtere Art, wenn man den gegebenen Logarithmen auf diese Art verwandelt,

$$y = 1 \frac{1 + \sqrt{(1-xx)}}{x} = 1 \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} \right)$$

indem man nemlich den Zähler und den Nenner durch  $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}$  multiplicirt. Denn setzt man dabey

$\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = p$ , so wird

$$\begin{aligned} dp &= \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\sqrt{\left(\frac{1}{xx} - 1\right)}} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\sqrt{(1-xx)}} \\ &= \frac{-dx(1 + \sqrt{(1-xx)})}{xx\sqrt{(1-xx)}}, \text{ und also, da } p = \frac{1 + \sqrt{(1-xx)}}{x} \end{aligned}$$

ist

$$dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1-xx)}}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 184.

Da nun die ersten Differentzialien, wenn man sie durch  $dx$  dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich die zweyten und die folgenden Differentzialien nach den Vorschriften des vorhergehenden Capitels leicht finden, vorausgesetzt, daß das Differentzial  $dx$  als eine beständige Größe betrachtet wird. So ist, wenn man  $y = 1x$  setzt

$$dy =$$

$$dy = \frac{dx}{x}, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2};$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \text{ und } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3};$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \text{ und } \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4};$$

2c.

Und wenn  $p$  eine algebraische Größe, und  $y = 1p$  ist, so sind auch, wenn gleich  $y$  keine algebraische Größe ist, doch  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{ddy}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$ ; 2c. algebraische Funktionen von  $x$ .

§. 185.

Nachdem auf diese Art die Differentiation der Logarithmen erklärt worden ist, so lassen sich die Funktionen, die aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, leicht differenzieren; und eben so wenig Schwierigkeit machen die Größen, die allein aus den Logarithmen zusammengesetzt werden. Folgende Beispiele werden dieses deutlich machen.

I. Ist  $y = (1x)^2$ , so setze man  $1x = p$ . Da nun  $y = p^2$  ist, so wird  $dy = 2pdp$ , und da  $dp = \frac{dx}{x}$  ist, so ist

$$dy = \frac{2dx}{x} 1x.$$

II. Eben so wird, wenn  $y = (1x)^n$  ist,  $dy = \frac{ndx}{x} (1x)^{n-1}$ , und wenn also  $y = \sqrt{1x}$  ist, so ist, weil alsdenn  $n = \frac{1}{2}$  wird,

$$dy = \frac{dx}{2x\sqrt{1x}}.$$

III. Ist

III. Ist ferner  $p$  irgend eine Funktion von  $x$ , und  $y = (lp)^n$  so wird  $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$ . Da nun das Differenzial von  $p$  nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, so ist dadurch auch das Differenzial von  $y$  bekannt.

IV. Ist  $y = lp \cdot lq$ , und sind  $p$  und  $q$  Funktionen von  $x$ , so ist nach der obigen von den Faktoren gegebenen Regel  $dy = \frac{dp}{p}lq + \frac{dq}{q}lp$ .

V. Wenn  $y = xlx$  ist, so findet man nach eben der Regel  $dy = dxlx + \frac{x dx}{x} = dxlx + dx$ .

VI. Ist  $y = x^m lx - \frac{1}{m}x^m$ , so findet man, wenn man die Differenzialien der Theile aufsucht,  $d. x^m lx = mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}dx$ , und  $d. \frac{1}{m}x^m = x^{m-1}dx$ . Es wird also  $dy = mx^{m-1}dxlx$ .

VII. Ist  $y = x^m (lx)^n$  so wird  $dy = mx^{m-1}dx(lx)^n + nx^{m-1}dx(x)^{n-1}$ .

VIII. Kommen Logarithmen von Logarithmen vor, z. B. wenn  $y = llx$  ist, so setze man  $lx = p$ , wodurch  $y = lp$ , und  $dy = \frac{dp}{p}$  wird. Es ist aber  $dp = \frac{dx}{x}$ , und also wird

$$dy = \frac{dx}{xlx}$$

IX. Ist  $y = ll lx$  so wird, wenn man  $lx = p$  setzt,  $y = llp$ , und also nach dem vorhergehenden Exempel  $dy = \frac{dp}{p lp}$ . Da

$$\text{nun } dp = \frac{dx}{x} \text{ ist, so wird } dy = \frac{dx}{xlx \cdot llx}.$$

## §. 186.

Nach dieser Erklärung der Differentiation der Logarithmen wollen wir zu den Exponential-Größen oder zu den Potestäten, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, fortgehen. Von dergleichen Funktionen von  $x$  lassen sich die Differentialien durch die Differentiation der Logarithmen auf folgende Art finden. Soll das Differential von  $a^x$  gefunden werden, so setze man  $y = a^x$ , wodurch denn, wenn man die Logarithmen nimmt,  $\log y = x \log a$  wird. Differenziert man nun, so wird  $\frac{dy}{y} = dx \log a$ , und also  $dy = y dx \log a$ ; und da  $y = a^x$  ist, so wird ferner  $dy = a^x dx \log a$ , und dieses ist das gesuchte Differential von  $a^x$ . Auf eine ähnliche Art findet man, wenn  $p$  eine Funktion von  $x$  ist, daß das Differential der Exponential-Größe  $a^p = a^p dp \log a$  ist.

## §. 187.

Eben dieses Differential kann aber auch aus dem, was in der Einleitung über die Natur der Exponential Größen gesagt worden ist, unmittelbar abgeleitet werden. Es sey der Ausdruck  $a^p$  gegeben, worin  $p$  eine Funktion von  $x$  bedeute, so daß, wenn man  $x + dx$  statt  $x$  setzt,  $p$  in  $p + dp$  übergehe. Setzt man daher  $y = a^p$ , so wird, wenn  $x$  in  $x + dx$  übergeht,  $y + dy = a^{p+dp}$ , und also  $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p (a^{dp} - 1)$ . Nun ist aber gezeigt worden, daß man jede Exponential-Größe  $a^z$  durch folgende Reihe  $1 + z \log a + \frac{z^2 (\log a)^2}{2} + \frac{z^3 (\log a)^3}{6} + \text{rc.}$  ausdrücken kann. Es wird demnach  $a^{dp} = 1 + dp \log a + \frac{dp^2 (\log a)^2}{2} + \text{rc.}$ , und  $a^{dp} - 1 = dp \log a$ , weil die folgenden Glieder insgesamt gegen  $dp \log a$  verschwinden; und es ist folglich  $dy = d. a^p = a^p dp \log a$ .

Es

Es ist also das Differenzial einer Exponential-Größe ein Produkt aus der Exponential-Größe, aus dem Differenziale des Exponenten,  $dp$ , und aus dem Logarithmen der beständigen Größe  $a$ , in der veränderlichen Potestät des gedachten Exponenten.

§. 188.

Ist also  $e$  die Zahl, deren hyperbolische Logarithme  $= 1$  ist, so ist das Differenzial von  $e^x = e^x dx$ . Betrachtet man daher  $dx$  als eine beständige Größe, so wird das Differenzial von  $e^x dx = e^x dx^2$ , und dieses ist das zweite Differenzial von  $e^x$ . Eben so wird das dritte Differenzial  $= e^x dx^3$ . Ist daher  $y = e^{nx}$ , so wird  $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 e^{nx}$ ;  $\frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}$ ;  $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}$ ; u. s. f. Man sieht hieraus, daß das erste, das zweite und die folgenden Differenzialien von  $e^{nx}$  in einer geometrischen Progression stehen, und daß  $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$ , und folglich  $\frac{d^m y}{y dx^m}$  eine beständige Größe  $= n^m$  ist.

§. 189.

Wenn die zu einer veränderlichen Potestät erhobene Größe selbst eine veränderliche Größe ist, so findet man das Differenzial derselben auf eine ähnliche Art. Es seyen  $p$  und  $q$  Funktionen von  $x$ , und  $y = p^q$ . Nimmt man nun die Logarithmen, so wird  $\log y = q \log p$ , und differenziert man, so wird  $\frac{dy}{y} = d q \log p + \frac{q dp}{p}$ , woraus sich denn  $dy = y d q \log p + \frac{y q dp}{p} = p^q d q \log p + q p^{q-1} dp$  ergibt, weil  $y = p^q$  ist.

Es besteht also dieses Differenzial aus zwey Theilen, wovon der erste  $p^q dq$  gefunden wird, wenn man die gegebene Größe  $p^q$  auf die Art differenziert, als wenn  $p$  eine beständige und bloß der Exponent  $q$  eine veränderliche Größe wäre; der andere hingegen, nemlich  $qp^{q-1} dp$ , wenn man in der gegebenen Größe  $p^q$  den Exponenten  $q$  als eine beständige, und bloß  $p$  als eine veränderliche Größe behandelt. Es hätte daher dieses Differenzial auch nach der oben mitgetheilten allgemeinen Regel gefunden werden können.

§. 190.

Es läßt sich aber auch das Differenzial von  $p^q$  aus dem, was über die Natur der Exponential-Größen gesagt worden ist, herleiten. Ist nemlich  $y = p^q$ , so wird, wenn man  $x + dx$  anstatt  $x$  setzt,  $y + dy = (p + dp)^{q + dq}$ , und löset man diesen Ausdruck auf die gewöhnliche Art in eine Reihe auf, so wird

$$y + dy = p^{q+dq} + (q+dq)p^{q+dq-1} dp + \frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1 \cdot 2} p^{q+dq-2} dp^2$$

+ &amp;c.; und also

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1} dp,$$

weil alle folgende Glieder, die eine höhere Potestät von  $dp$  enthalten, gegen  $(q + dq)p^{q+dq-1} dp$  verschwinden.

Nun ist aber  $p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q \left( 1 + dq \ln p + \frac{dq^2 (\ln p)^2}{2} + \dots - 1 \right) = p^q dq \ln p$ , und setzt man in dem

andern Gliede  $q$  für  $q + dq$ , so wird daraus  $qp^{q-1} dp$ . Folglich ist das gesuchte Differenzial wieder das vorige, oder es ist  $dy = p^q dq \ln p + qp^{q-1} dp$ .

§. 191.

Noch leichter leitet man dieses Differenzial aus dem Angeführten auf folgende Art her. Da, wenn  $e$  die Zahl

bedeutet

bedeutet, deren hyperbolische Logarithme  $= 1$  ist,  $p^q = e^{q \log p}$  wird, indem beyder Größen Logarithmen  $= q \log p$  sind: so wird  $y = e^{q \log p}$ . Da nun hier die zur veränderlichen Potestät erhobene Größe eine beständige Größe ist: so wird  $dy = e^{q \log p} (dq \log p + \frac{q dp}{p})$  wie vorhin §. 187. gelehret worden ist.

Setzt man aber nun wieder  $p^q$  anstatt  $e^{q \log p}$ , so wird

$$dy = p^q dq \log p + p^q q dp : p = p^q dq \log p + q p^{q-1} dp.$$

Wenn also  $y = x^x$  ist, so wird  $dy = x^x dx \log x + x^x dx$ ; und daraus lassen sich denn auch die fernern Differenzialien leicht finden. Es wird nemlich

$$\frac{dy}{dx} = x^x \left( \frac{1}{x} + (1 + \log x) \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^x \left( (1 + \log x)^2 + \frac{3(1 + \log x)}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

26.

§. 192.

Unter den Differenzialien derer Funktionen, die Exponential-Größen in sich schließen, sind vorzüglich folgende Beispiele zu merken, die aus der Differenziation der Formel  $e^{xp}$  entspringen. Es ist aber

$$d. e^{xp} = e^x dp + e^{xp} dx = e^x (dp + p dx).$$

I. Ist  $y = e^{x^n}$ , so ist  $dy = e^{x^n} n x^{n-1} dx + e^{x^n} dx$ , oder

$$dy = e^x dx (n x^{n-1} + x^n).$$

II. Ist  $y = e^{x(x-1)}$ ; so ist

$$dy = e^{x(x-1)} dx.$$

III. Ist  $y = e^{x(x^2 - 2x + 2)}$ ; so ist

$$dy = e^{x(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

IV. Ist  $y = e^{x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}$ ; so ist

$$dy = e^{x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)} dx.$$

§ 3

§. 193.

§. 193.

Wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, so wird die Differenziation nach eben den Regeln verrichtet. Soll z. B. das Differenzial von  $e^x$  gesucht werden, so setze man  $e^x = p$ , wodurch denn  $e^x = ep$ , und  $dy = ep dp$  wird. Es ist aber  $dp = e^x dx$ , und wenn also

$y = e^{e^x}$  ist, so wird  $dy = e^{e^x} e^x dx$ ;  
und wenn

$y = e^{e^{e^x}}$  ist, so wird  $dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$ .

Ist hingegen  $y = p^{q^r}$ , so setze man  $q^r = z$ , wodurch  $dy = p^z dz lp + zp^{z-1} dp$  wird. Da nun aber  $dz = q^r dr lp + r q^{r-1} dp$  ist, so wird  $dy = p^z q^r dr lp + lp + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$ . Wenn also  $y = p^{q^r}$  ist, so wird

$$dy = p^{q^r} q^r (dr lp + lq + \frac{rdq lp}{q} + \frac{dp}{p}).$$

Auf diese Weise lassen sich also die Differenzialien von allen Arten der Exponential-Größen finden.

§. 194.

Wir wollen daher zu denjenigen transcendenten Größen fortgehen, zu welchen uns die Betrachtung der Kreisbogen geführt hat. Es sey von einem Kreise, dessen Halbmesser beständig = 1 gesetzt werden soll, ein Bogen, dessen Sinus =  $x$  ist, gegeben, (diesen Bogen wollen wir durch  $A. \sin. x$  ausdrücken), und dabey sey das Differenzial dieses Bogens, oder der Zuwachs, welchen er bekommt, wenn man  $x + dx$  anstatt  $x$  setzt, zu bestimmen. Dies läßt sich vermittelst der Logarithmen thun, weil wir in der Einleitung gezeigt

zeigt haben, daß der Ausdruck  $A \cdot \sin. x$  auf diesen logarithmischen

Ausdruck gebracht werden kann:  $\frac{1}{\sqrt{-1}} \ln(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})$ .

Setzt man also  $y = A \cdot \sin. x$ , so ist auch  $y =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})$  und daraus findet man durch

die Differentiation

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}} \left( \frac{-x dx}{\sqrt{(1-xx)}} + dx\sqrt{-1} \right)}{\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{dx(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)} + x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}}$$

und es wird also  $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ .

§. 195.

Es läßt sich aber dieses Differential eines Kreisbogens noch leichter ohne Hülfe der Logarithmen finden. Ist nemlich  $y = A \cdot \sin. x$ , so ist  $x$  der Sinus des Bogens  $y$ , oder  $x = \sin. y$ . Da nun  $y$ , wenn man  $x + dx$  anstatt  $x$  setzt, in  $y + dy$  übergeht, so wird  $x + dx = \sin. (y + dy)$ . Da aber

$\sin. (a + b) = \sin. a \cdot \cos. b + \cos. a \cdot \sin. b$  ist, so wird

$\sin. (y + dy) = \sin. y \cdot \cos. dy + \cos. y \cdot \sin. dy$ .

Nun ist der Sinus eines verschwindenden Bogens  $dy$  dem Bogen  $dy$  selbst, und der Cosinus dem Radius gleich. Daher wird

$\sin. (y + dy) = \sin. y + \cos. y \cdot dy$ , und also

$x + dx = \sin. y + \cos. y \cdot dy$ .

Da aber  $\sin. y = x$  ist, so wird  $\cos. y = \sqrt{(1-xx)}$ , und durch die Substitution dieser Werthe wird  $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$

und also endlich

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Das Differenzial eines Bogens, dessen Sinus gegeben ist, ist daher dem Differenziale des Sinus, durch den Cosinus dividirt, gleich.

## §. 196.

Da also wenn  $p$  irgend eine Funktion von  $x$  ist, und  $y$  einen Bogen bedeutet, dessen Sinus  $= p$  ist, das Differenzial dieses Bogens  $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}}$  ist, und  $\sqrt{(1-pp)}$  den Cosinus eben desselben Bogens ausdrückt: so läßt sich hieraus das Differenzial des Bogens finden, dessen Cosinus gegeben ist. Ist nemlich  $y = A. \cos. x$ , so ist der Sinus eben desselben Bogens  $= \sqrt{(1-xx)}$ , und also  $y = A. \sin. \sqrt{(1-xx)}$ .

Setzt man also  $p = \sqrt{(1-xx)}$ , so wird  $dp = \frac{-x dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ,

und  $\sqrt{(1-pp)} = x$ ; woraus sich denn  $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$

ergiebt. Es ist also das Differenzial eines Bogens, dessen Cosinus gegeben ist, gleich dem Differenziale des Cosinus, negativ genommen, und durch den Sinus eben desselben Bogens dividirt. Eben dieses läßt sich auch auf folgende Art zeigen. Es sey  $y = A. \cos. x$ . Setzt man

$z = A. \sin. x$ , so wird  $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ . Da aber

$y + z = 90^\circ$  ist, so ist  $y + z$  eine beständige Größe, und also  $dy + dz = 0$ , oder  $dy = -dz$ . Hieraus folgt

$dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$  wie vorhin.

## §. 197.

§. 197.

Soll das Differentzial eines Bogens gesucht werden, dessen Tangente gegeben worden, so daß  $y = A. \text{tang. } x$  ist: so ist der Sinus eines Bogens, dessen Tangente  $x$  ist,

$$= \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}, \text{ und der Cosinus} = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}. \text{ Setzt}$$

$$\text{man also } \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}} = p, \text{ so daß } \sqrt{(1 - pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$$

$$\text{wird: so wird } y = A. \text{sin. } p, \text{ und es ist daher } dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}.$$

$$\text{Da aber } p = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}} \text{ ist, so wird } dp = \frac{dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{und substituirt man diese Werthe, so findet man } dy = \frac{dx}{1 + xx}.$$

Es ist also das Differentzial eines Bogens, dessen Tangente gegeben ist, gleich dem Differentziale der Tangente, durch das Quadrat der Secante dividirt. Denn wenn  $x$  die Tangente ist, so ist  $\sqrt{(1 + xx)}$  die Secante.

§. 198.

Ist ein Bogen gegeben, dessen Cotangente bekannt ist, so daß  $y = A. \text{cot. } x$  ist, so setze man die Tangente eben dieses Bogens, oder  $\frac{1}{x} = p$ , wodurch denn  $y = A. \text{tang. } p$

$$\text{und also } dy = \frac{dp}{1 + pp} \text{ wird. Da nun } dp = \frac{-dx}{xx} \text{ ist, so}$$

$$\text{wird durch die Substitution dieses Werthes } dy = \frac{-dx}{1 + xx},$$

welches das Differentzial der Cotangente negativ genommen, und durch das Quadrat der Cosecante dividirt ist.

Ist ferner  $y = A. \sec. x$ , so wird, weil alsdenn  $y = A. \cos. \frac{1}{x}$  ist,  $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{(1 - \frac{1}{xx})}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx - 1)}}$ . Ist

aber  $y = A. \operatorname{cosec.} x$ ; so wird  $y = A. \sin. \frac{1}{x}$ , und folglich  $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx - 1)}}$ .

Dst kommt auch der Quersinus vor. Ist daher  $y = A. \operatorname{sv.} x$ , so wird  $y = A. \cos. (1 - x)$ ; und da der Sinus dieses Bogens  $= \sqrt{(2x - xx)}$  ist, so wird  $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$ .

## §. 199.

Ob also gleich jeder Bogen, dessen Sinus, oder Cosinus, oder Tangente, oder Cotangente, oder Secante, oder Cosecante, oder Quersinus gegeben ist, zu den transcendenten Größen gehört: so ist doch sein Differenzial, wenn es durch  $dx$  dividirt wird, eine algebraische Größe, und eben das sind daher auch seine zweyten, dritten und folgenden Differenzialien, wenn sie durch die zu ihnen gehörigen Potestäten von  $dx$  dividirt werden. Damit aber diese Differenziation desto geläufiger werde, mögen noch folgende Beispiele hier stehen.

I. Ist  $y = A. \sin. 2x\sqrt{(1 - xx)}$  so setze man  $p = 2x\sqrt{(1 - xx)}$  so daß  $y = A. \sin. p$  wird; alsdann ist  $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}$ ,

Nun ist aber  $dp = 2dx\sqrt{(1 - xx)} - \frac{2xxdx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{2dx(1 - 2xx)}{\sqrt{(1 - xx)}}$ , und  $\sqrt{(1 - pp)} = 1 - 2xx$ . Substit

tirt man daher diese Werthe, so wird  $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ . Dies

Dies erhellet auch daraus, weil  $2x\sqrt{1-xx}$  der Sinus des doppelten Bogens ist, wenn  $x$  den Sinus des einfachen Bogens bedeutet. Hiernach ist nemlich  $y = 2A \cdot \sin. x$ , und also

$$dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}$$

II. Ist  $y = A \cdot \sin. \frac{1-xx}{1+xx}$ ; so setze man  $\frac{1-xx}{1+xx} = p$ ,

wodurch  $dp = \frac{-4x dx}{(1+xx)^2}$ , und  $\sqrt{1-pp} = \frac{2x}{1+xx}$  wird.

Da also  $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$  ist, so wird  $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$ .

III. Ist  $y = A \cdot \sin. \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ , so setze man  $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$ .

Hierdurch wird  $\sqrt{1-pp} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ , und  $dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\frac{1-x}{2}}}$ ;

folglich  $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-xx}}$ .

IV. Ist  $y = A \cdot \text{tang.} \frac{2x}{1-xx}$ , so setze man  $p = \frac{2x}{1-xx}$ ,

wodurch  $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$ , und  $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$ .

wird. Da also  $dy = \frac{dp}{1+pp}$ , nach der §. 197. für die Tangenten gefundenen Regel, so ist  $dy = \frac{2dx}{1+xx}$ .

V. Ist  $y = A \cdot \text{tang.} \frac{\sqrt{1+xx}-1}{x}$ , so wird, wenn

man  $\frac{\sqrt{1+xx}-1}{x} = p$  setzt,  $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{1+xx}}{xx}$ ,

und  $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{1+xx}}{xx} = \frac{2(\sqrt{1+xx}-1)\sqrt{1+xx}}{xx}$ .

Mun

Nun ist aber  $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$ .

Da also  $dy = \frac{dp}{1+pp}$  ist, so wird  $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$  welches

man auch daraus erkennt, weil A. tang.  $\frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$   
 $= \frac{1}{2}$  A. tang. x ist.

VI. Ist  $y = e^{A \cdot \sin \cdot x}$ , so läßt sich auch diese Formel nach dem Vorhergehenden differenziren; es wird nemlich

$dy = e^{A \cdot \sin \cdot x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ . Auf diese Art lassen sich also

alle Funktionen von x, in welchen außer den Logarithmen und Exponential-Größen auch Kreisbogen vorkommen, differenziren.

## §. 200.

Da die Differenzialien der Bogen, wenn man sie durch dx dividirt, algebraische Größen werden, so lassen sich auch ihre zweyten und folgenden Differenzialien nach dem, was wir von der Differentiation der algebraischen Funktionen gesagt haben, finden. Es sey  $y = A \cdot \sin \cdot x$ . Da nun

$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$  ist, so wird  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ ; und

da das Differenzial hiervon den Werth von  $\frac{ddy}{dx^2}$  giebt, wenn man dx als eine beständige Größe betrachtet: so sind die Differenzialien von y folgende:

Wenn  $y = A \cdot \sin$  ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}; \text{ u. wenn man } dx \text{ beständig nimmt,}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

2c.

und hieraus schließen wir wie oben §. 177, daß allgemeyn seyn werde

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(1 - xx)^{n+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\left( x^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} + \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{n-6} + \dots \right)$$

§. 201.

Nun sind noch die Größen, die aus der Umkehrung der bisherigen sich ergeben, oder die Sinus und Tangenten gegebener Bogen, übrig, und wir wollen daher jetzt untersuchen, wie man die Differentialien dieser Größen findet. Es sey also  $x$  ein Kreisbogen, und  $\sin. x$  sein Sinus, dessen Differential gesucht werden soll. Man setze  $y = \sin. x$ . Weil nun  $y$ , wenn man  $x + dx$  für  $x$  setzt, in  $y + dy$  übergeht, so wird

$$y + dy = \sin. (x + dx), \text{ und } dy = \sin. (x + dx) - \sin. x$$

Da aber  $\sin. (x + dx) = \sin. x \cos. dx + \cos. x \sin. dx$ , und nach dem was in der Einleitung I. Th. §. 134. f. gesagt worden,

$\sin. z$

$$\sin. z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ic.}$$

$$\cos. z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ic.}$$

ist: so wird, wenn man die verschwindenden Glieder wegläßt,  $\cos. dx = 1$ , und  $\sin. dx = dx$ ; folglich  $\sin. (x + dx) = \sin. x + dx \cdot \cos. x$ . Ist also  $y = \sin. x$ , so ist  $dy = dx \cdot \cos. x$ . Das Differenzial des Sinus eines Bogens ist also ein Produkt aus dem Differenziale dieses Bogens in den Cosinus desselben. Ist daher  $p$  irgend eine Funktion von  $x$ , so ist auf gleiche Art  $d. \sin. p = dp \cdot \cos. p$ .

§. 202.

Ferner sey  $\cos. x$ , oder der Cosinus eines Bogens  $x$  gegeben, und sein Differenzial zu bestimmen. Es sey also  $y = \cos. x$ , so wird, wenn man  $x + dx$  für  $x$  setzt,  $y + dy = \cos. (x + dx)$ . Da nun  $\cos. (x + dx) = \cos. x \cdot \cos. dx - \sin. x \cdot \sin. dx$ , und, wie wir so eben gesehen haben,  $\cos. dx = 1$ , und  $\sin. dx = dx$  ist: so wird  $y + dy = \cos. x - dx \cdot \sin. x$ , und folglich  $dy = -dx \cdot \sin. x$ . Es ist daher das Differenzial des Cosinus eines jeden Bogens ein Produkt aus dem Differenziale des Bogens, negativ genommen, in den Sinus eben desselben Bogens. Ist also  $p$  irgend eine Funktion von  $x$ , so ist auch  $d. \cos. p = -dp \cdot \sin. p$ .

Diese Differenzialien hätte man auch aus dem Vorhergehenden auf folgende Art finden können. Ist  $y = \sin. p$ , so ist  $p = A. \sin. y$ , und  $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ . Da aber  $y = \sin. p$  ist, so ist  $\cos. p = \sqrt{(1-yy)}$ , und gebraucht man diese Werthe, so wird  $dp = \frac{dy}{\cos. p}$ , also  $dy = dp \cdot \cos. p$   
wie

wie vorhin. Eben so wird, wenn  $y = \text{cos. } p$  ist,  $\sqrt{(1-yy)}$   
 $= \text{sin. } p$ , und  $p = A. \text{cos. } y$ ; folglich  $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1-yy)}}$   
 $= \frac{-dy}{\text{sin. } p}$ ; woraus sich denn  $dy = -dp. \text{sin. } p$  wie vorhin  
 ergibt.

§. 203.

Ist  $y = \text{tang. } x$ , so wird  $dy = \text{tang. } (x + dx) - \text{tang. } x$ .  
 Nun ist aber  $\text{tang. } (x + dx) = \frac{\text{tang. } x + \text{tang. } dx}{1 - \text{tang. } x. \text{tang. } dx}$ , und  
 davon  $\text{tang. } x$  abgezogen, so bleibt

$$dy = \frac{\text{tang. } dx (1 + \text{tang. } x. \text{tang. } x)}{1 - \text{tang. } x. \text{tang. } dx}$$

übrig. Da ferner die Tangente eines verschwindenden Bogen  
 $dx$  dem Bogen selbst gleich ist, so wird  $\text{tang. } dx = dx$ ,  
 folglich der Nenner des gefundenen Bruchs  $1 - dx. \text{tang. } x = 1$ ,  
 und also  $dy = dx (1 + (\text{tang. } x)^2)$ . Endlich ist  $1 + (\text{tang. } x)^2$   
 $= (\text{sec. } x)^2 = \frac{1}{(\text{cos. } x)^2}$ ; und daher wird, wenn  $y = \text{tang. } x$

$$\text{ist, } dy = dx (\text{sec. } x)^2 = \frac{dx}{(\text{cos. } x)^2}.$$

Eben dieses Differential kann man auch durch die  
 Differentiation der Sinus und Cosinus finden. Denn da  
 $\text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}$  ist: so wird

$$dy = \frac{dx. \text{cos. } x. \text{cos. } x + dx. \text{sin. } x. \text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^2} = \frac{dx}{(\text{cos. } x)^2}$$

weil  $(\text{sin. } x)^2 + (\text{cos. } x)^2 = 1$  ist.

§. 204.

§. 204.

Auch auf folgende Art läßt sich dieses Differenzial finden. Da  $y = \text{tang. } x$  ist, so ist  $x = A. \text{tang. } y$ , und also nach dem Obigen  $dx = \frac{dy}{1 + yy}$ . Da aber  $y = \text{tang. } x$

ist, so wird  $\sqrt{(1 + yy)} = \text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos. } x}$ , und also  $dx =$

$dy \cdot (\text{cos. } x)^2$ , und  $dy = \frac{dx}{(\text{cos. } x)^2}$ , wie vorhin. Es ist

also das Differenzial der Tangente eines Bogens gleich dem Differenziale dieses Bogens durch das Quadrat des Cosinus desselben dividirt. Auf ähnliche Art findet man das Differenzial der Cotangente. Ist nemlich  $y = \text{cot. } x$ ,

so wird  $x = A. \text{cot. } y$ , und  $dx = \frac{-dy}{1 + yy}$ . Nun ist aber

$\sqrt{(1 + yy)} = \text{cosec. } x = \frac{1}{\text{sin. } x}$ , folglich  $dx = -dy \cdot (\text{sin. } x)^2$ ,

und  $dy = \frac{-dx}{(\text{sin. } x)^2}$ . Das Differenzial der Cotangente

eines Bogens ist daher gleich dem Differenziale dieses Bogens, negativ genommen, und durch das Quadrat des Sinus eben dieses Bogens dividirt. Oder da  $\text{cot. } x$

$= \frac{\text{cos. } x}{\text{sin. } x}$  ist, so wird, wenn man diesen Bruch differenzirt,

$$dy = \frac{-dx(\text{sin. } x)^2 - dx(\text{cos. } x)^2}{(\text{sin. } x)^2} = \frac{-dx}{(\text{sin. } x)^2}$$

§. 205.

Ist die Secante eines Bogens gegeben, und also  $y =$

$\text{sec. } x$ ; so ist, weil  $y = \frac{1}{\text{cos. } x}$  ist,  $dy = \frac{dx \cdot \text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^2} =$

$dx \cdot \text{tang. } x \cdot \text{sec. } x$ . Eben, so ist, wenn  $y = \text{cosec. } x$  ist, wegen

wegen  $y = \frac{1}{\sin x}$ ,  $dy = \frac{-dx \cdot \cos x}{(\sin x)^2} = -dx \cdot \cot x \cdot \operatorname{cosec} x$ ,

und es würde überflüssig seyn, diese Differentiationen durch besondere Regeln zu bestimmen. Ist der Quersinus eines Bogens gegeben, und also  $y = \operatorname{sv} x$ , so ist, weil  $y = 1 - \cos x$  ist,  $dy = dx \cdot \sin x$ . Es lassen sich also die Differentialien aller trigonometrischen Linien, da man eine jede derselben durch den Sinus und Cosinus ausdrücken kann, ohne Schwierigkeit finden. Auch reichen die gegebenen Regeln nicht bloß zur Erfindung der ersten Differentialien, sondern auch zur Erforschung der zweyten und aller folgenden hin. Denn ist  $y = \sin x$ ,  $z = \cos x$ , und  $dx$  eine beständige Größe: so ist

$$y = \sin x; \quad z = \cos x;$$

$$dy = dx \cdot \cos x; \quad dz = -dx \cdot \sin x;$$

$$ddy = -dx^2 \cdot \sin x; \quad ddz = -dx^2 \cdot \cos x;$$

$$d^3y = -dx^3 \cdot \cos x; \quad d^3z = dx^3 \cdot \sin x;$$

$$d^4y = dx^4 \cdot \sin x; \quad d^4z = dx^4 \cdot \cos x;$$

2c.

2c.

§. 206.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Differentialien aller Ordnungen von der Tangente eines Bogens  $x$  finden. Denn

setzt man  $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , und  $dx$  beständig, so ist

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{(\cos x)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{(\text{cof. } x)^4} - \frac{4}{(\text{cof. } x)^2};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin. x}{(\text{cof. } x)^5} - \frac{8 \sin. x}{(\text{cof. } x)^3};$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{(\text{cof. } x)^6} - \frac{120}{(\text{cof. } x)^4} + \frac{16}{(\text{cof. } x)^2};$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \sin. x}{(\text{cof. } x)^7} - \frac{480 \sin. x}{(\text{cof. } x)^5} + \frac{32 \sin. x}{(\text{cof. } x)^3};$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{(\text{cof. } x)^8} - \frac{6720}{(\text{cof. } x)^6} + \frac{2016}{(\text{cof. } x)^4} - \frac{64}{(\text{cof. } x)^2}$$

16.

§. 207.

Nach diesen Regeln lassen sich also alle Funktionen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, differenziren, welches durch folgende Beispiele klar werden wird.

I. Ist  $y = 2 \sin. x \cdot \text{cof. } x = \sin. 2x$ , so ist

$$dy = 2dx \cdot (\text{cof. } x)^2 - 2dx(\sin. x)^2 = 2dx \cdot \text{cof. } 2x.$$

II. Ist  $y = \sqrt{\frac{1 - \text{cof. } x}{2}}$ , oder  $y = \sin. \frac{1}{2}x$ , so wird

$$dy = \frac{dx \cdot \sin. x}{2\sqrt{2(1 - \text{cof. } x)}}.$$

Da aber  $\sqrt{2(1 - \text{cof. } x)} = 2 \sin. \frac{1}{2}x$ , und  $\sin. x = 2 \sin. \frac{1}{2}x \cdot \text{cof. } \frac{1}{2}x$  ist, so wird ferner  $dy = \frac{1}{2}dx \cdot \text{cof. } \frac{1}{2}x$ , wie sich auch aus der Form  $y = \sin. \frac{1}{2}x$  unmittelbar ergibt.

III. Ist  $y = \text{cof. } l \frac{1}{x}$ , so wird, wenn man  $l \frac{1}{x} = p$  setzt

$$y = \text{cof. } p, \text{ und } dy = -dp \cdot \sin. p.$$

Da aber  $p = l1 - lx$  ist, so wird  $dp = \frac{-dx}{x}$ , und folglich

$$dy = \frac{dx}{x} \sin. l \frac{1}{x}.$$

IV. Ist

IV. Ist  $y = e^{\sin. x}$ ; so wird  $dy = e^{\sin. x} dx \cdot \text{cos. } x$ .

V. Ist  $y = e^{\frac{-n}{\text{cos. } x}}$ , so wird  $dy = - \frac{e^{\frac{-n}{\text{cos. } x}} n dx \cdot \text{sin. } x}{(\text{cos. } x)^2}$ .

VI. Ist  $y = 1(1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}}})$  so setze man  $e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}} = p$ .

Da nun alsdann  $y = 1(1 - \sqrt{1 - p})$  wird, so

findet man  $dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{1 - p})\sqrt{1 - p}}$ . Da

aber  $dp = \frac{e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}} n dx \cdot \text{cos. } x}{(\text{sin. } x)^2}$  ist, so bekommt man,

wenn man diesen Werth substituirt,

$$dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}} dx \cdot \text{cos. } x}{2(\text{sin. } x)^2 (1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}}}) \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\text{sin. } x}}}}$$





## Siebentes Capitel.

Von der Differentiation der Funktionen zweyer  
oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 208.

Wenn zwey oder mehrere veränderliche Größen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , von einander unabhängig sind, so kann, obgleich eine jede von ihnen veränderlich ist, dennoch die eine davon wachsen oder abnehmen, ohne daß deswegen die übrigen eine Veränderung erfahren; denn da sie keinen Zusammenhang unter einander haben, so zieht auch die Veränderung der einen die Veränderung der übrigen nicht nach sich. Es hängen daher auch die Differentialien von  $y$  und  $z$  nicht von dem Differentiale von  $x$  ab, und es können folglich, wenn  $x$  um sein Differential  $dx$  vermehrt wird,  $y$  und  $z$  entweder dieselben bleiben, oder nach Gefallen verändert werden. Wenn man daher  $dx$  das Differential von  $x$  seyn läßt, so bleiben die Differentialien der übrigen Größen, nemlich  $dy$  und  $dz$  unbestimmt, und können nach Gefallen als Null oder als unendlich kleine Größen, die zu  $dx$  ein gewisses Verhältniß haben, betrachtet werden.

§. 209.

Es pflegen aber meistens die Buchstaben  $y$  und  $z$  unbekante oder solche Funktionen von  $x$  zu bedeuten, deren Verhältniß

hältniß zu  $x$  nicht bekannt ist, und in diesem Falle haben die Differenzialien  $dy$  und  $dz$  zu  $dx$  ein gewisses Verhältniß. Es mögen indeß  $y$  und  $z$  von  $x$  abhängen oder nicht, so bleibt die Art die Differenzialien dieser Größen zu finden, welche wir jetzt betrachten wollen, dieselbe. Wir wollen nemlich das Differenzial einer Funktion mehrerer veränderlichen Größen  $x, y, z$  suchen, welches sie bekömmt, wenn alle ihre veränderlichen Größen  $x, y, z$  um ihre Differenzialien  $dx, dy, dz$  wachsen, und dabey kann die Funktion übrigens beschaffen seyn, wie sie will. Um dieses Differenzial zu finden, setzt man in der Funktion anstatt der veränderlichen Größen  $x, y, z$ , allenthalben  $x + dx, y + dy, z + dz$ , und zieht von dem daraus sich ergebenden Ausdrucke die gegebene Funktion ab. Der Rest giebt, wie aus dem, was wir über die Natur der Differenzialien gesagt haben, hinlänglich erhellet, das gesuchte Differenzial.

§. 210.

Es sey  $X$  eine Funktion von  $x$ , und ihr Differenzial, oder ihr Zuwachs, wenn  $x$  um  $dx$  wächst, sey  $= P dx$ . Ferner sey  $Y$  eine Funktion von  $y$ , und ihr Differenzial  $= Q dy$ , welches sie bekömmt, wenn  $y$  in  $y + dy$  übergeht. Endlich sey  $Z$  eine Funktion von  $z$ , und ihr Differenzial  $= R dz$ . Wie man die Differenzialien  $P dx, Q dy, R dz$  aus den Funktionen  $X, Y, Z$  findet, solches ist bereits gezeigt worden. Ist nun die Größe  $X + Y + Z$  gegeben, welches offenbar eine Funktion dreyer veränderlichen Größen ist: so ist ihr Differenzial  $= P dx + Q dy + R dz$ . Ob diese drey Differenzialien unter einander homogen sind oder nicht? darauf kommt hier nichts an. Denn die Glieder, welche Potestäten von  $dx$  enthalten, verschwinden gegen  $P dx$  eben so, als wenn  $Q dy$  und  $R dz$  gar nicht da wären, und auf

gleiche Art verhält es sich mit den Gliedern, die bey der Differentiation von  $X$  und  $Z$  aus der Acht gelassen worden sind.

## §. 211.

Nun sey das Differential der Funktion  $XYZ$  von  $x, y, z$ , indem  $X, Y$  und  $Z$  die ihnen vorhin beygelegte Bedeutung behalten, zu suchen. Setzt man hier  $x + dx$  für  $x$ ,  $y + dy$  für  $y$ , und  $z + dz$  für  $z$ ; so geht  $X$  in  $X + Pdx$ ,  $Y$  in  $Y + Qdy$ , und  $Z$  in  $Z + Rdz$  über, und es verwandelt sich daher die Funktion  $XYZ$  in

$$\begin{aligned} & (X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz) \\ & = XYZ + YZPdx + XZQdy + XYRdz \\ & + ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz. \end{aligned}$$

Da aber  $dx, dy$  und  $dz$  unendlich kleine Größen sind, so verschwindet das letzte Glied gegen ein jedes von den vorhergehenden, und dieses geschieht,  $dx, dy, dz$  mögen homogen oder heterogen seyn. Ferner verschwindet das Glied  $ZPQdxdy$  sowohl gegen  $YZPdx$  als gegen  $XZQdy$ , und auf ähnliche Art verschwinden auch die Glieder  $YPRdxdz$  und  $XQRdydz$ . Zieht man also die gegebene Funktion  $XYZ$  ab, so wird das Differential derselben  $= YZPdx + XZQdy + XYRdz$ .

## §. 212.

Diese Beispiele von Funktionen dreyer veränderlichen Größen  $x, y$  und  $z$ , deren Anzahl jeder nach Belieben vermehren kann, geben hinlänglich zu erkennen, daß das Differential jeder Funktion dreyer veränderlicher Größen  $x, y$  und  $z$ , wie darin auch immer diese Größen unter einander vermischt seyn mögen, allemal die Form haben werde:  $pdx + qdy + rdz$ ; und dabey werden  $p, q, r$  entweder Funktionen von allen drey veränderlichen Größen  $x, y$  und  $z$ ,  
oder

oder nur von zweyen, oder auch nur von einer derselben seyn, je nachdem die gegebene Funktion von  $x$ ,  $y$  und  $z$  selbst beschaffen ist. Eben so muß, wenn eine Funktion von vier veränderlichen Größen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $v$  gegeben wird, ihr Differenzial die Form  $p dx + q dy + r dz + s dv$  bekommen.

§. 213.

Wir wollen zuvörderst die Funktionen betrachten, die nicht mehr als zwey veränderliche Größen enthalten. Es sey also  $V$  eine Funktion von  $x$  und  $y$ , deren Differenzial folglich die Form  $p dx + q dy$  haben wird. Betrachtete man hier  $y$  als eine beständige Größe, wodurch  $dy = 0$  würde: so würde das Differenzial der Funktion  $V = p dx$ ; und betrachtete man  $x$  als beständig, wodurch  $dx = 0$  würde: so würde das Differenzial von  $V = q dy$  seyn. Da also, wenn man beyde Größen  $x$  und  $y$  als veränderliche Größen betrachtet,  $dV = p dx + q dy$  wird: so ergibt sich hieraus folgende Regel für die Differenziation der Funktionen zweyer veränderlicher Größen: Man behandle zuvörderst bloß  $x$  als eine veränderliche und  $y$  als eine beständige Größe, und suche das Differenzial von  $V$ , welches  $= p dx$  seyn wird. Dann behandle man bloß  $y$  als eine veränderliche und  $x$  als eine beständige Größe, und suche abermals das Differenzial von  $V$ , welches  $= q dy$  seyn wird. Ist dies geschehen, so wird für  $x$  und  $y$ , beyde als veränderliche Größen betrachtet,  $dV = p dx + q dy$ .

§. 214.

Da ferner das Differenzial einer Funktion dreyer veränderlicher Größen  $x$ ,  $y$  und  $z$ , welche wir wieder  $= V$  setzen wollen, die Form  $p dx + q dy + r dz$  hat: so erhellet

auf eine ähnliche Art, daß, wenn man bloß  $x$  als eine veränderliche Größe, und  $y$  und  $z$  als beständige Größen betrachtet, wodurch  $dy$  und  $dz = 0$  wird, das Differenzial von  $V = p dx$  ist. Auf eben dem Wege ergiebt sich ferner das Differenzial von  $V = q dy$ , wenn man  $x$  und  $z$  als beständige, und  $y$  allein als eine veränderliche Größe behandelt; und läßt man endlich bloß  $z$  veränderlich seyn, so wird das Differenzial von  $V = r dz$ . Um also das Differenzial einer Funktion dreier veränderlicher Größen zu finden, betrachte man jede dieser Größen für sich als eine veränderliche Größe, und suche ihr Differenzial, als wenn die übrigen Größen keine veränderlichen Größen wären. Dann addire man die auf diese Art gefundenen Differenzialien, worauf das Aggregat derselben das gesuchte Differenzial der gegebenen Funktion seyn wird.

## §. 215.

In dieser Regel, welche wir für die Differenziation der Funktionen von jeder Anzahl veränderlicher Größen gefunden haben, ist der Beweis der oben §. 170 für die Differenziation der Funktionen einer veränderlichen Größe gegebenen allgemeinen Regel enthalten. Denn wenn man für jeden der daselbst gedachten Theile einen besondern Buchstaben setzt, so bekommt die Funktion die Gestalt einer Funktion von so viel veränderlichen Größen, und läßt sich also nach der hier gegebenen Regel differenzieren, indem man erst jeden Theil auf die Art behandelt, als ob er allein veränderlich wäre, und darauf die gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereiniget. Diese Summe ist jedesmal, nachdem man für jeden Buchstaben wieder seinen Werth gesetzt hat, das gesuchte Differenzial. Diese Regel hat also einen sehr weiten Umfang, und erstreckt sich auch auf die Funk-

Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen. Es ist daher dieselbe auch in der ganzen Differenzial-Rechnung von dem größten Nutzen.

§. 216.

Nachdem wir also eine allgemeine Regel gefunden haben, nach welcher alle Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, die Anzahl derselben mag seyn welche sie will, differenziert werden können: so wollen wir den Gebrauch derselben an einigen Beispielen zeigen.

I. Wenn  $V = xy$  ist; so ist  $dV = xdy + ydx$ .

II. Wenn  $V = \frac{x}{y}$  ist; so ist  $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$ .

III. Wenn  $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$ ; so ist

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yx dx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

IV. Wenn  $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n$  ist; so ist

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n (\alpha dx + \beta dy) + n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1} (\delta dx + \epsilon dy)$$

oder

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1} \times$$

$$\left( \begin{array}{l} m\alpha\delta x dx + m\beta\delta x dy + m\alpha\epsilon y dx \\ n\alpha\delta x dx + n\alpha\epsilon y dy + n\beta\delta x dx \\ + m\beta\epsilon y dy + m\alpha\zeta dx + m\beta\zeta dy \\ + n\beta\epsilon y dy + n\gamma\delta dx + n\gamma\epsilon dy \end{array} \right)$$

V. Wenn  $V = y \ln x$  ist; so ist  $dV = d \ln x + \frac{y dx}{x}$ .

VI. Wenn  $V = x^y$  ist; so ist  $dV = yx^{y-1} dx + x^y d \ln x$ .

VII. Wenn  $V = A \cdot \text{tang.} \frac{y}{x}$  ist; so ist  $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$ .

VIII. Wenn  $V = \sin. x. \cos. y$  ist; so ist

$$dV = dx. \cos. x. \cos. y - dy. \sin. x. \sin. y.$$

IX. Wenn  $V = \frac{e^{zy}}{\sqrt{(xx + yy)}}$  ist; so ist

$$dV = \frac{e^{zy} dz}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{e^z (x x dy - y x dx)}{(xx + yy) \sqrt{(xx + yy)}}.$$

X. Wenn  $V = e^z A. \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}}$  ist; so ist

$$dV = e^z dz A. \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}} \\ + e^z. \frac{xy dy - yy dx}{(x + \sqrt{(xx - yy)})(xx - yy)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}}$$

§. 217.

Da wir gesehen haben, daß das Differenzial von  $V$ , wenn  $V$  eine Funktion zweyer veränderlicher Größen  $x$  und  $y$  ist, diese Form,  $dV = P dx + Q dy$ , hat, worin  $P$  und  $Q$  Funktionen sind, die von  $V$  abhängen, und durch dasselbe bestimmt werden: so folgt, daß diese beyden Größen  $P$  und  $Q$  auch auf eine gewisse Art von einander abhängen, indem jede derselben von einer und derselben Funktion  $V$  abhängig ist. Wie nun aber auch der Zusammenhang zwischen den endlichen Größen  $P$  und  $Q$ , den wir nachher untersuchen wollen, beschaffen seyn mag: so ist klar, daß nicht alle Differenzial Formeln von dieser Form  $P dx + Q dy$ , worin  $P$  und  $Q$  aus  $x$  und  $y$  nach Willkühr formirt sind, Differenzialien jeder endlichen Funktion  $V$  von  $x$  und  $y$  seyn können. Denn wosern nicht  $P$  und  $Q$  das Verhältniß zu einander haben, welches die Natur der Differenziation erfordert: so kann das Differenzial  $P dx + Q dy$  auf keine Weise durch die Differenziation entstehen, und hat daher auch kein Integral.

§. 218.

§. 218.

Es kommt daher bey der Integration sehr viel darauf an, daß man das Verhältniß zwischen den Größen  $P$  und  $Q$  kenne, damit man die Differenzialien, die wirklich durch die Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sind, von denen zu unterscheiden im Stande sey, die man nach Belieben angenommen hat, und die kein Integral haben. Ob wir uns nun gleich hier noch nicht mit der Integration beschäftigen, so ist es doch zur genauen Kenntniß der reellen Differenzialien sehr nützlich, daß wir dieses Verhältniß untersuchen: denn es ist dieselbe nicht nur in der Integral-Rechnung, wozu wir uns hier den Weg bahnen, höchst notwendig, sondern es wird dadurch auch in der Differenzial Rechnung vieles weit deutlicher. Zuvörderst also ist klar, daß in dem Differenziale von  $V$ , wenn  $V$  eine Funktion zweyer veränderlicher Größen  $x$  und  $y$  ist, das Differenzial jeder dieser Größen vorkommen muß. Es kann daher weder  $P = 0$  noch  $Q = 0$  seyn. Wenn daher  $P$  eine Funktion von  $x$  und  $y$  ist, so kann die Formel  $P dx$  kein Differenzial einer endlichen Größe seyn, oder es giebt alsdenn keine endliche Größe, deren Differenzial  $P dx$  wäre.

§. 219.

So giebt es keine weder algebraische noch transcendente endliche Größe  $V$ , deren Differenzial  $y x dx$  wäre, wenn  $y$  eine veränderliche Größe ist, die nicht von  $x$  abhängt. Denn sollte es eine solche endliche Größe  $V$  geben, so müßte, da sich  $y$  in ihrem Differenziale findet,  $y$  auch in der Größe  $V$  selbst anzutreffen seyn; allein wenn  $y$  in  $V$  enthalten wäre, so müßte, da  $y$  eine veränderliche Größe ist, auch das Differenzial  $dy$  in dem Differenziale von  $V$  befindlich seyn. Da also dasselbe darin nicht anzutreffen ist, so ist es unmöglich, daß

daß das Differenzial  $y x dx$  durch die Differenziation irgend einer endlichen Größe entstehen könnte. Da also ausgemacht ist, daß die Formel  $P dx + Q dy$ , wenn  $Q = 0$  ist, und  $P$  die veränderliche Größe  $y$  enthält, kein reelles Differenzial seyn kann: so erhellet zugleich, daß man der Größe  $Q$  keinen willkührlichen Werth geben darf, sondern daß derselbe von dem Werthe von  $P$  abhängt.

## §. 220.

Um also das Verhältniß zwischen den Größen  $P$  und  $Q$  in dem Differenziale  $P dx + Q dy = dV$  zu untersuchen, wollen wir zuvörderst  $V$  eine Funktion von keiner Dimension von  $x$  und  $y$  seyn lassen, und so von besondern Fällen zum Allgemeinen aufsteigen. Setzt man also  $y = tx$ , so verschwindet  $x$  aus der Funktion  $V$  gänzlich, und man findet bloß eine Funktion von  $t$ , die wir  $= T$  setzen wollen, und deren Differenzial also  $= \Theta dt$  ist, wenn  $\Theta$  eine Funktion von  $t$  bedeutet. Setzt man daher auch in dem Differenziale  $P dx + Q dy$  allenthalben  $y = tx$ , und  $dy = t dx + x dt$ , so bekommt man  $P dx + Q t dx + Q x dt$ ; und da  $dx$  darin nicht enthalten seyn soll, so muß  $P + Q t = 0$  seyn. Es ist also  $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{P_x}{y}$ , oder  $P_x + Q_y = 0$ , und hieraus erhellet das Verhältniß zwischen  $P$  und  $Q$  für diesen Fall. Ferner muß auch  $\Theta = Q_x$ , und also  $Q_x =$  einer Funktion von  $t$ , d. h. einer Funktion von keiner Dimension von  $x$  und  $y$  seyn. Weil aber  $Q = \frac{\Theta}{x}$  ist, so wird  $P = -\frac{\Theta y}{xx}$ , und es sind also sowohl  $P_x$  als  $Q_y$  Funktionen von keiner Dimension von  $x$  und  $y$ .

## §. 221.

§. 221.

Wenn also eine Funktion von keiner Dimension von  $x$  und  $y$ , die wir  $= V$  setzen, differenziert wird, so ist ihr Differenzial  $dV = Pdx + Qdy$  allezeit so beschaffen, daß  $Px + Qy = 0$  ist. Das heißt, wenn man in dem Differenziale anstatt der Differenzialien  $dx$  und  $dy$  die Größen  $x$  und  $y$  setzt, so erhält man 0, wie solches in folgenden Exempeln statt findet.

I. Wenn  $V = \frac{x}{y}$  ist, so wird  $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$ , und

setzt man  $x$  für  $dx$ , und  $y$  für  $dy$ , so wird  $\frac{yx - xy}{yy} = 0$ .

II. Wenn  $V = \frac{x}{\sqrt{(xx - yy)}}$  ist; so wird

$dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$ , und hieraus  $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$ .

III. Wenn  $V = \frac{y + \sqrt{(xx + yy)}}{-y + \sqrt{(xx + yy)}}$ , also eine Funktion

von keiner Dimension von  $x$  und  $y$  ist; so wird  $dV = \frac{2xxdy + 2xydx}{(\sqrt{(xx + yy)} - y)^2 \sqrt{(xx + yy)}}$  und diese Formel verwandelt sich, wenn man  $x$  für  $dx$  und  $y$  für  $dy$  setzt, in 0.

IV. Wenn  $V = 1 \frac{x + y}{x - y}$  ist; so wird  $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$ ,

und  $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$ .

V. Wenn  $V = A \cdot \sin. \frac{\sqrt{(x-y)}}{\sqrt{(x+y)}}$  ist; so wird

$dV = \frac{ydx - xdy}{(x+y)\sqrt{2yx-y}}$

welche Formel eben diese Eigenschaft hat.

§. 222.

## §. 222.

Nun wollen wir uns zur Betrachtung anderer homogenen Funktionen wenden. Es sey also  $V$  eine Funktion von  $n$  Dimensionen von  $x$  und  $y$ . Setzt man daher  $y = tx$ , so erhält  $V$  die Form  $Tx^n$ , wo  $T$  eine Funktion von  $t$  bedeutet; und ist  $dT = \odot dt$ , so wird  $dV = x^n \odot dt + nTx^{n-1} dx$ . Wenn man also  $dV = Pdx + Qdy$  setzt, so wird, weil  $dy = tdx + xdt$  ist,  $dV = Pdx + Qt dx + Qxdt$ ; und da diese Formel mit der vorhergehenden übereinstimmen muß, so wird, da auch  $V = Tx^n$  ist,

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}.$$

Da nun  $t = \frac{y}{x}$  ist, so wird hieraus  $Px + Qy = nV$ , und diese Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen  $P$  und  $Q$  auf eine solche Art, daß man jede dieser Größen leicht findet, sobald die andere bekannt ist. Da ferner  $Qx = x^{n\odot}$  ist, so ist  $Qx$  und folglich auch  $Qy$  und  $Px$  Funktionen von  $n$  Dimensionen von  $x$  und  $y$ .

## §. 223.

Wenn also in dem Differenziale einer homogenen Funktion von  $x$  und  $y$ , anstatt  $dx$  und  $dy$  die Größen  $x$  und  $y$  gesetzt werden: so ist die daher entspringende Größe der Funktion, deren Differenzial gegeben wurde, mit der Anzahl der Dimensionen multiplicirt, gleich.

I. Wenn  $v = \sqrt{xx + yy}$  ist; so ist  $n = 1$ : und da  $dV = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$  ist, so wird  $\frac{\sqrt{xx + yy}}{xx + yy} = v = \sqrt{xx + yy}$ .

II. Wenn  $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$  ist; so ist  $n = 2$ ; und  $dV =$

$$2y^2 dy$$

$$\frac{2y^3 dy - 3y^2 x dy + 3y x^2 dx - 2x^3 dx + y^3 dx - x^3 dy}{(y-x)^2}$$

Setzt man nun  $x$  für  $dx$ , und  $y$  für  $dy$ , so wird

$$\frac{2y^4 - 2y^3 x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Wenn  $V = \frac{1}{(yy + xx)^2}$  ist, so ist  $n = -4$ , und

$$dV = -\frac{4y dy - 4x dx}{(yy + xx)^3}$$

Setzt man aber  $x$  für  $dx$ , und  $y$  für  $dy$ , so verwandelt sich diese Formel in  $-\frac{4yy - 4xx}{(yy + xx)^3} = -4V.$

IV. Wenn  $V = xx \frac{y+x}{y-x}$  ist; so wird  $n = 2$ , und

$$dV = 2x dx \frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(y dx - x dy)}{yy - xx}$$

Nimmt man aber hier die beschriebene Substitution vor, so findet man  $2xx \frac{y+x}{y-x} = 2V.$

§. 224.

Eine ähnliche Eigenschaft bemerkt man, wenn  $V$  eine homogene Funktion mehrerer veränderlicher Größen ist. Es sey  $V$  eine Funktion von den Größen  $x, y$  und  $z$ , so daß dieselben allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen ausmachen, wo denn bekannt ist, daß das Differenzial die Form  $Pdx + Qdy + Rdz$  haben muß. Setzt man nun  $y = tx$  und  $z = sx$ , so daß  $dy = t dx + x dt$ , und  $dz = s dx + x ds$  wird, so bekommt die Funktion  $V$  die Form  $Ux^n$ , wenn  $U$  eine Funktion der beiden veränderlichen Größen  $t$  und  $s$  ist. Setzt man daher  $dU = p dt + q ds$ , so wird

$$dV = x^n p dt + x^n q ds + n U x^{n-1} dx.$$

Die

Die erste Form aber giebt

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxdx$$

und aus der Vergleichung dieser beyden Differenzialien ergiebt sich

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x}$$

und daraus fließt

$$Px + Qy + Rz = nV,$$

und eben diese Eigenschaft erstreckt sich auch auf mehrere veränderliche Größen.

## §. 225.

Wenn also eine homogene Funktion von irgend einer Anzahl veränderlicher Größen  $x, y, z, v, \text{ic.}$  gegeben ist, so ist das Differenzial derselben jederzeit so beschaffen, daß man, wenn man anstatt der Differenzialien  $dx, dy, dz, dv, \text{ic.}$  die endlichen Größen  $x, y, z, v$  setzt, die gegebene Funktion, durch die Anzahl der Dimensionen multiplicirt, bekommt. Diese Behauptung gilt auch, wenn  $V$  eine homogene Funktion von nicht mehr als von einer einzigen veränderlichen Größe ist. Es ist nemlich in diesem Falle  $V$  eine Potestät von  $x$ , oder  $V = ax^n$ , welches eine homogene Funktion von  $n$  Dimensionen ist; denn es giebt keine andere Funktion von  $x$ , worin  $x$  allenthalben  $n$  Dimensionen hätte, als die Potestät  $x^n$ . Da nun  $dV = nax^{n-1}dx$  ist, so bekommt man, wenn man  $x$  für  $dx$  setzt,  $nax^n = V$ . Es verdient daher diese wichtige Eigenschaft der homogenen Funktionen aufs sorgfältigste gemerkt zu werden, indem sie in der Integral-Rechnung den größten Nutzen gewährt.

## §. 226.

§. 226.

Um nun das Verhältniß der Größen P und Q, welche das Differenzial  $P dx + Q dy$  einer jeden Funktion V von zwey veränderlichen Größen x und y bestimmen, allgemein zu untersuchen, müssen wir folgendes überlegen. Es sey V eine Funktion von x und y, und dabey nehme man an, daß V, wenn man  $x + dx$  für x setzt, in R, hingegen, wenn man  $y + dy$  für y setzt, in S, und wenn man sowohl  $x + dx$  für x, als  $y + dy$  für y setzt, in  $V^1$  übergehe. Da also R aus V entsteht, wenn man darin  $x + dx$  statt x setzt, so ist offenbar, daß sich, wenn man in R,  $y + dy$  für y setzt,  $V^1$  ergeben wird; denn es ist dieses eben so viel, als ob man in V sowohl  $x + dx$  für x, als  $y + dy$  für y setzte. Eben so entsteht auch  $V^1$  aus S, wenn man in S die Größe  $x + dx$  für x setzt, weil S aus V entstanden ist, indem darin  $y + dy$  für y gesetzt wurde. Alles dies wird durch folgende Tafel deutlicher.

Die Größe	geht über in	wenn man für	setzt.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	$V^1$	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	$V^1$	y	$y + dy$
S	$V^1$	x	$x + dx$

§. 227.

Wenn also V so differenziert wird, als wenn bloß x eine veränderliche, y aber eine beständige Größe wäre, so wird, Eulers Differenz, Rechn. I. Th.  $\mathcal{D}$  weil

weil  $V$  durch die Substitution von  $x + dx$  für  $x$  in  $R$  übergeht, das Differenzial derselben  $R - V$ ; und da aus der Form  $dV = Pdx + Qdy$ , eben dieses Differenzial  $= Pdx$  ist, so wird  $R - V = Pdx$ . Wenn man hingegen  $y + dy$  für  $y$  setzt,  $x$  aber als eine beständige Größe behandelt: so wird, weil alsdenn  $R$  in  $V^1$ , und  $V$  in  $S$  übergeht, die Größe  $R - V$  in  $V^1 - S$  verwandelt, und folglich das Differenzial von  $R - V = Pdx$ , welches entsteht, wenn bloß  $y$  als eine veränderliche Größe behandelt wird,  $= V^1 - R - S + V$ . Eben so wird, da, wenn man  $y + dy$  für  $y$  setzt,  $V$  in  $S$  übergeht,  $S - V$  das Differenzial von  $V$ , wenn man bloß  $y$  als eine veränderliche Größe betrachtet, und es ist daher  $S - V = Qdy$ . Weil nun, wenn man  $x + dx$  für  $x$  setzt,  $S$  in  $V^1$  und  $V$  in  $R$  übergeht, so wird dadurch die Größe  $S - V$  in  $V^1 - R$  verwandelt, und es ist folglich das Differenzial von  $S - V = Qdy$ , welches entsteht, wenn man bloß  $x$  als eine veränderliche Größe betrachtet,  $= V^1 - R - S + V$ , und es stimmt also dieses Differenzial mit dem vorhergehenden auf das genaueste überein.

## §. 228.

Aus dieser Uebereinstimmung fließt: Wenn das Differenzial einer Funktion  $V$  zweyer veränderlichen Größen  $x$  und  $y = dV = Pdx + Qdy$  ist: so ist das Differenzial von  $Pdx$ , welches entsteht, wenn man bloß  $y$  als eine veränderliche,  $x$  aber als eine beständige Größe behandelt, dem Differenziale von  $Qdy$  gleich, welches entsteht, wenn man bloß  $x$  als eine veränderliche,  $y$  aber als eine beständige Größe betrachtet. Ist nemlich, wenn man bloß  $y$  als eine veränderliche Größe betrachtet,  $dP = Zdy$ , so ist  
das

das Differenzial von  $P dx$ , auf die beschriebene Art gesucht,  $= Z dx dy$ ; und nimmt man bloß  $x$  als eine veränderliche Größe an, so wird auch  $dQ = Z dx$ , denn alsdenn wird auch das Differenzial von  $Q dy$ , auf die beschriebene Art genommen,  $= Z dx dy$ . Auf diese Art erhellet das Verhältniß, welches die Größen  $Q$  und  $P$  zu einander haben, und welches, kurz es auszudrücken, darin besteht, daß das Differenzial von  $P dx$ , wenn man  $x$  beständig seyn läßt, dem Differenziale von  $Q dy$ , wenn man  $y$  als eine beständige Größe betrachtet, gleich ist.

§. 229.

Um diese merkwürdige Eigenschaft in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir sie durch einige Beispiele erläutern.

I. Ist also  $V = yx$ ; so ist  $dV = y dx + x dy$ , und folglich  $P = y$ , und  $Q = x$ . Läßt man daher  $x$  beständig seyn, so wird  $d. P dx = dx dy$ , und nimmt man  $y$  als beständig an, so wird  $d. Q dy = dx dy$ , und also beyde Differenzialien einander gleich.

II. Ist  $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$ ; so wird  $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$

und folglich  $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$ , und  $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$ .

Setzt man also  $x$  beständig, so wird  $d. P dx = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$

und läßt man  $y$  beständig seyn, so wird  $d. Q dy = \frac{xy dx dy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$

III. Ist  $V = x \sin. A. y + y. \sin. A. x$ ; so wird

$dV = dx. \sin. Ay + xdy. \cos. y + dy. \sin. Ax + ydx. \cos. x$

und es ist daher

$$Pdx = dx \cdot \sin. Ay \dagger ydx \cdot \cos. x, \text{ und}$$

$$Qdy = dy \cdot \sin. Ax \dagger xdy \cdot \cos. y.$$

Läßt man also  $x$  beständig seyn, so wird

$$d. Pdx = dx dy \cdot \cos. y \dagger dx dy \cdot \cos. x,$$

und nimmt man  $y$  beständig an, so wird

$$d. Qdy = dx dy \cdot \cos. y \dagger dx dy \cdot \cos. x.$$

IV. Ist  $V = xy$ ; so wird  $dV = xydy \dagger yx^y-1dx$ , und

$$Pdx = yx^y-1dx, \text{ und } Qdy = xydy.$$

Wenn man also  $x$  als eine beständige Größe betrachtet, so wird

$$d. Pdx = x^y-1dx dy \dagger yx^y-1dx dy,$$

und behandelt man  $y$  als eine beständige Größe, so wird

$$d. Qdy = yx^y-1dx dy \dagger xy^y-1dx dy.$$

§. 230.

Diese Eigenschaft läßt sich auch auf folgende Art beschreiben, wodurch denn die so merkwürdige Beschaffenheit aller Funktionen zweyer veränderlichen Größen in die Augen fällt. Wenn man eine Funktion  $V$  zweyer veränderlicher Größen  $x$  und  $y$  so differenziert, daß man bloß  $x$  als eine veränderliche Größe behandelt, und darauf von neuem das Differenzial dieses Differenzials so sucht, daß man bloß  $y$  als eine veränderliche Größe betrachtet: so findet man nach dieser doppelten Differenziation eben das, was man gefunden haben würde, wenn man in umgekehrter Ordnung die Funktion  $V$  zuerst so, als ob bloß  $y$  veränderlich wäre, differenziert, und darauf bloß  $x$  als eine veränderliche Größe behandelt, und von dem gefundenen Differenziale von neuem das Differenzial gesucht hätte; in beyden Fällen erhält man nemlich  $Zdx dy$ . Der Grund dieser Gleichheit liegt sehr deutlich in der vorhin betrachteten Eigenschaft. Denn differenziert

ziert

ziert man  $V$ , als ob bloß  $x$  veränderlich wäre, so findet man  $Pdx$ ; und differenziert man  $V$ , als ob bloß  $y$  veränderlich wäre, so erhält man  $Qdy$ ; daß aber die Differenzialien von diesen Differenzialien gleich sind, ist vorhin bewiesen worden. Uebrigens fließt diese Eigenschaft auch unmittellbar aus den Schlüssen des 227sten §.

§. 231.

Es läßt sich aber das Verhältniß von  $P$  und  $Q$ , wenn  $Pdx + Qdy$  das Differenzial einer Funktion  $V$  ist, auch auf folgende Art anzeigen. Da  $P$  und  $Q$  Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, so differenziere man beyde Größen, so daß man sowohl  $x$  als  $y$  als veränderliche Größen behandle. Ist nemlich

$$dV = Pdx + Qdy$$

so setze man  $dP = pdx + rdy$

und  $dQ = qdx + sdy$

Behandelt man also  $x$  als eine beständige Größe, so wird

$$dP = rdy, \text{ und } d.Pdx = rdxdy,$$

und behandelt man darauf  $y$  als beständig, so wird

$$dQ = qdx, \text{ und } d.Qdx = qdxdy.$$

Da nun diese beyden Differenzialien einander gleich sind, so folgt, daß  $q = r$  ist. Es sind daher die Funktionen  $P$  und  $Q$  auf die Art mit einander verbunden, daß die Größen  $q$  und  $r$ , wenn man jene Funktionen auf die Art differenziert, wie wir gethan haben, einander gleich werden. Der Kürze wegen können aber, wenigstens in dem gegenwärtigen Capitel, die Größen  $r$  und  $q$  bequem auf die Art angezeigt werden, daß man  $r$  durch  $\left(\frac{dP}{dy}\right)$  ausdrückt; es soll nemlich

dadurch gesagt werden: Wenn man  $P$  auf die Art differens-

ziert, daß man bloß  $y$  als eine veränderliche Größe betrachtet, und darauf das gefundene Differenzial durch  $dy$  dividirt; denn dadurch bekommt man die endliche Größe  $r$ .

Auf eine ähnliche Art druckt  $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$  die endliche Größe  $q$  aus, weil dadurch angezeigt wird, daß man  $Q$  so, als wenn bloß  $x$  veränderlich wäre, differenziren, und dann das Differenzial durch  $dx$  dividiren soll.

## §. 232.

Wir wollen uns daher dieser Bezeichnungsart bedienen, ob sie gleich sonst zweydeutig seyn kann, welches indeß hier durch die Einschließung in Klammern verhindert wird. Wir vermeiden dadurch die Weitläufigkeit in der Beschreibung der Art, wie differenziert werden soll, und können das Verhältniß zwischen  $P$  und  $Q$  nun kurz also ausdrücken, daß wir sagen: es ist  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ . Es zeigt nemlich in dergleichen Brüchen der Nenner, außer seiner eigentlichen Bedeutung, nach welcher dadurch dividirt werden muß, auch an, daß das Differenzial des Nenners so genommen werden soll, als wenn bloß die Größe, deren Differenzial den Nenner ausmacht, veränderlich wäre. Auf diese Art fallen die Differenzialien durch die Division ganz aus der Rechnung weg, und es stellen daher die Brüche  $\left(\frac{dP}{dy}\right)$  und  $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$  endliche Größen vor, die in dem gegenwärtigen Falle einander gleich sind. Nach dieser Bezeichnungsart kann man also auch die Größen  $p$  und  $s$  auf die Art ausdrücken, daß man  $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$  und  $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$  setzt, indem die Differenzialien

renzialien

renziation des Zählers, nach der gemachten Anmerkung durch den Nenner eingeschränkt wird.

§. 233.

Zwischen dieser und der vorhin von den homogenen Funktionen bewiesenen Eigenschaft findet sich eine sehr schöne Uebereinstimmung. Ist nemlich  $V$  eine Funktion von  $n$  Dimensionen von  $x$  und  $y$ , so ist, wenn man  $dV = Pdx + Qdy$  setzt,  $nV = Px + Qy$ , und also

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}$$

Setzt man nun  $dP = pdx + rdy$ ; so wird  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$ ,

und daß dieser Größe  $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$  gleich sey, läßt sich auf diese Art beweisen. Man differenzire  $Q$ , als wenn bloß  $x$  veränderlich wäre, und weil unter dieser Voraussetzung

$$dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{xpdx}{y}$$

ist, so wird

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{Px}{y}, \text{ und es muß daher}$$

$$\frac{(n-1)P}{y} - \frac{Px}{y} = r, \text{ oder } (n-1)P = px + ry \text{ seyn.}$$

Diese Gleichheit erhellet daher, weil  $P$  eine homogene Funktion von  $n-1$  Dimensionen von  $x$  und  $y$  ist, woher denn ihr Differenzial,  $dP = pdx + rdy$ , wegen der Eigenschaft der homogenen Funktionen so beschaffen seyn muß, daß  $(n-1)P = px + ry$  ist.

## §. 234.

Diese Eigenschaft, daß nemlich  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$  ist, welche wir als allgemeine Eigenschaft aller Funktionen zweyer veränderlicher Größen  $x$  und  $y$  kennen gelernt haben, bahnt uns den Weg zur Untersuchung der Natur der Funktionen dreyer oder mehrerer veränderlicher Größen. Es sey  $V$  eine Funktion dreyer veränderlicher Größen  $x, y, z$ , und dabey sey  $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ . Wenn man also bey dieser Differenziation  $z$  als eine beständige Größe behandelte, so würde  $dV = Pdz + Qdy$  werden, und in diesem Falle müßte nach dem Vorhergehenden  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$  seyn. Betrachtete man ferner  $y$  als eine beständige Größe, so würde  $dV = Pdx + Rdz$ , und also  $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$  werden. Endlich gäbe  $x$ , als eine beständige Größe betrachtet,  $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$ . Es hängen also in dem Differenziale  $Pdx + Qdy + Rdz$  der Funktion  $V$  die Größen  $P, Q$  und  $R$  auf die Art von einander ab, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ ist.}$$

## §. 235.

Hieraus folgt eine Eigenschaft der Funktionen dreyer veränderlicher Größen, die derjenigen ähnlich ist, die wir oben §. 230. bey den Funktionen zweyer veränderlicher Größen kennen gelernt haben. Wenn  $V$  eine Funktion dreyer veränderlicher Größen  $x, y$  und  $z$  ist, und dieselbe nach einander dreymal auf die Art differenzirt wird, daß man bey der ersten Differenziation bloß die eine von jenen Größen,

s. B.

z. B.  $x$  ferner bey der zweyten bloß  $y$ , und bey der dritten bloß  $z$  als eine veränderliche Größe behandelt; so findet man einen Ausdruck von der Form  $Z dx dy dz$ , und diesen Ausdruck findet man jedesmal, man mag die Größen  $x$ ,  $y$  und  $z$  in einer Ordnung auf einander folgen lassen, in welcher man will. Man gelangt also auf sechs verschiedene Arten, nach einer dreymaligen Differenziation, zu dem Ausdrücke  $Z dx dy dz$ , weil die Ordnung der Buchstaben  $x$ ,  $y$  und  $z$  sechsmal verändert werden kann. In was für einer Ordnung man auch diese Größen nimmt, so wird sich doch allemal, wenn man die Funktion  $V$  so differenziert, als ob bloß die erste Größe veränderlich wäre, dann das Differenzial von diesem Differenziale sucht, so daß man bloß die zweite als eine veränderliche Größe betrachtet, und endlich von diesem Differenziale von neuem das Differenzial auf die Art nimmt, daß man bloß die dritte als veränderlich behandelt, immer ein und derselbe Ausdruck ergeben.

§. 236.

Um den Grund von dieser Eigenschaft deutlicher zu machen, wollen wir  $dV = P dx + Q dy + R dz$  setzen, und nun die Differenzialien der Größen  $P$ ,  $Q$  und  $R$  suchen. Nach dem bereits Erwiesenen werden diese Differenzialien seyn

$$dP = p dx + s dy + t dz$$

$$dQ = s dx + q dy + u dz$$

$$dR = t dx + u dy + r dz.$$

Differenziert man nun  $V$ , als wenn bloß  $x$  veränderlich wäre, so findet man  $P dx$ ; differenziert man ferner dieses Differenzial, als wenn bloß  $y$  veränderlich wäre, so findet man  $s dx dy$ ; und sucht man endlich auch hiervon das Differenzial, so daß man  $z$  allein als eine veränderliche Größe behandelt, so findet man, nachdem man durch  $dx dy dz$  dividirt hat,  $\left(\frac{ds}{dz}\right)$

N. 5

Setzt

Sieht man nun die veränderlichen Größen  $s, y, x, z$ , so giebt die erste Differenziation  $Qdy$ , die zweite  $sdx dy$ , und die dritte (nach der Division durch  $dx dy dz$ )  $\left(\frac{ds}{dz}\right)$  wie vorhin. Nun lasse man die veränderlichen Größen in dieser Ordnung auf einander folgen,  $z, y, x$ , wo denn die erste Differenziation  $Rdz$ , die zweite  $udy dz$ , und die dritte (nach der Division durch  $dx dy dz$ )  $\left(\frac{du}{dx}\right)$  giebt. Da nun aber, wenn man  $y$  als eine beständige Größe betrachtet,  $dQ = sdx + u dz$  ist; so ist  $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ , wie gleichfalls bewiesen worden ist.

§. 237.

Es sey  $V = \frac{xy}{aa - zz}$ . Wir wollen diese Funktion so oft dreymal differenzieren, als die Ordnung von  $x, y$  und  $z$  verändert werden kann.

wenn man	I. Differenz.	II. Differenz.	III. Differenz.
veränderlich setzt,	bloß $x$	bloß $y$	bloß $z$
	$\frac{2xy dx}{aa - zz}$ ;	$\frac{2x dx dy}{aa - zz}$ ;	$\frac{4xz dx dy dz}{(aa - zz)^2}$
„ „ „	bloß $x$	bloß $z$	bloß $y$
	$\frac{2xy dx}{aa - zz}$ ;	$\frac{4xyz dx dz}{(aa - zz)^2}$ ;	$\frac{4xz dx dy dz}{(aa - zz)^2}$
„ „ „	bloß $y$	bloß $x$	bloß $z$
	$\frac{xx dy}{aa - zz}$ ;	$\frac{2x dx dy}{aa - zz}$ ;	$\frac{4xz dx dy dz}{(aa - zz)^2}$
„ „ „	bloß $y$	bloß $z$	bloß $x$
	$\frac{xx dy}{aa - zz}$ ;	$\frac{2xxz dy dz}{(aa - zz)^2}$ ;	$\frac{4xz dx dy dz}{(aa - zz)^2}$
			bloß

$$\begin{array}{l}
 \text{= = = =} \quad \text{bloß } z \quad \text{bloß } x \quad \text{bloß } y \\
 \frac{2xyzdz}{(aa-zz)^2}; \quad \frac{4xyzdx dz}{(aa-zz)^2}; \quad \frac{4zdx dy dz}{(aa-zz)^2} \\
 \text{= = = =} \quad \text{bloß } z \quad \text{bloß } y \quad \text{bloß } x \\
 \frac{2xxyzdz}{(aa-zz)^2}; \quad \frac{2xxzdy dz}{(aa-zz)^2}; \quad \frac{4zdx dy dz}{(aa-zz)^2}
 \end{array}$$

Dieses Exempel zeigt, daß man nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck,  $\frac{4zdx dy dz}{(aa-zz)^2}$  kommt, man mag die drey veränderlichen Größen in einer Ordnung nehmen, in was für einer man will.

§. 238.

So wie man aber nach einer dreymaligen Differenziation immer auf einerley Ausdruck kommt, so findet sich auch unter den Differenzialien, welche man durch die zweyte Differenziation findet, eine Uebereinstimmung. Unter diesen Differenzialien kommt nemlich jeder Ausdruck zweymal vor, und es erhellet daher, daß alle die Formeln, in denen einerley Differenzialien vorkommen, auch einander gleich sind, und daß deswegen alle dritten Differenzialien gleich sind, weil in ihnen dieselben Differenzialien  $dx dy dz$  enthalten sind. Wir schließen hieraus: Wenn  $V$  eine Funktion von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen  $x, y, z, v, u, \text{ic.}$  ist, und dieselbe nach und nach öfters auf die Art differenziiert wird, daß nur immer eine von diesen Größen als eine veränderliche Größe betrachtet wird: so find, so oft man auf Ausdrücke von gleichen Differenzialien kommt, diese Ausdrücke auch einander gleich. So entsteht nach einer zweymaligen Differenziation unter andern der Ausdruck  $Z dx dy$ , einmal, wenn man  $x$ , und zweitens wenn man  $y$  allein als eine veränderliche Größe behandelt hat; und es  
ist

ist daher gleich, welche man von diesen Größen zuerst, und welche man zuletzt nehmen will. Auf eine ähnliche Weise entsteht nach einer dreymaligen Differenziation der Ausdruck  $Z dx dy dz$  auf sechs verschiedene Arten, und nach einer viermaligen Differenziation der Ausdruck  $Z dx dy dz dv$  auf vier und zwanzig Arten u. s. f.

## §. 239.

Die Wahrheit dieser Lehrsätze wird bey einiger Aufmerksamkeit ein jeder aus den vorhergehenden Sätzen einsehen, und durch eigenes Nachdenken darüber besser fassen, als wenn dieselben mit der hier unvermeidlichen Weitläufigkeit vollständig geführt worden wären. Da aber die Kenntniß dieser Eigenschaften in der Integral Rechnung von der größten Wichtigkeit ist, so müssen sich Anfänger nicht bloß daran begnügen, daß sie die Wahrheit derselben erkennen, sondern sie auch an vielen Beyspielen prüfen, um sich diesen Gegenstand ganz geläufig, und des in der Folge daraus entspringenden Nutzens fähig zu machen. Ja, nicht bloß Anfänger, sondern auch die, die schon die Anfangsgründe der Differenzial Rechnung kennen, sollten dieses thun, weil dieser Gegenstand fast in allen Anleitungen zu diesem Theile der Analysis übergangen wird. Denn man begnügt sich gewöhnlich damit, die Regeln der Differenziation vorgetragen und ihren Gebrauch in der höhern Geometrie gezeigt zu haben, und bekümmert sich dabey nicht um die Natur und die Eigenschaften der Differenzialien, so groß auch der Nutzen ist, der daher für die Integral: Rechnung entspringt. Ich habe es daher für nützlich gehalten, diese fast ganz neue Materie in dem gegenwärtigen Capitel ausführlich zu betrachten, damit der Weg zu den schwerern Integrationen gebahnt,

gebahnt, und diese Beschäftigung in der Folge leicht werden mögte.

§. 240.

Bei dieser Kenntniß der Eigenschaften der Differenzialien der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen ist man leicht im Stande zu beurtheilen, ob eine gegebene Differenzial-Formel, worin zwey oder mehr veränderliche Größen vorkommen, aus der Differenziation irgend einer endlichen Funktion entstanden sey oder nicht?

Denn wenn in der Formel  $Pdx + Qdy$  nicht  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$

ist: so kann man mit Gewißheit behaupten, daß es keine Funktion von  $x$  und  $y$  gebe, deren Differenzial  $= Pdx + Qdy$  wäre, und daß man also in der Integral-Rechnung dergleichen Formeln nicht integrieren könne. Da z. B.  $yxdx + xx dy$  die gedachte erforderliche Eigenschaft nicht hat, so giebt es keine Funktion, deren Differenzial  $= yxdx + xx dy$

wäre. Ob aber, wenn  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$  ist, die

Formel allemal durch die Differenziation irgend einer Funktion entstanden sey? ist eine Frage, die erst in der Integral-Rechnung gründlich beantwortet werden kann.

§. 241.

Wenn in der gegebenen Differenzial-Formel drey oder mehrere veränderliche Größen vorkommen, wie z. B. in  $Pdx + Qdy + Rdz$ ; so kann dieselbe nur dann durch die Differenziation entstanden seyn, wenn dabey die Bedingungen statt finden, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right) \text{ ist.}$$

Sobald

Sobald eine von diesen Bedingungen fehlt, so kann man sicher behaupten, daß es keine Funktion gebe, deren Differenzial  $Pdx + Qdy + Rdz$  wäre. Dergleichen Differenzial-Formeln sind daher gar keines Integrals fähig, und man muß daher auch nicht einmal nach ihren Integralien fragen. Das aber ist leicht einzusehen, daß man in der Integral-Rechnung allemal erst wissen muß, ob eine gegebene Differenzial-Formel eines Integrals fähig sey oder nicht, ehe man diese Integration wirklich unternimmt.





## Achtes Capitel.

### Von der fernern Differentiation der Differential- Formeln.

§. 242.

Es ist bereits in dem Vorhergehenden gelehret worden, wie man, wenn nur eine einzige veränderliche Größe da ist, und das erste Differential als eine beständige Größe betrachtet wird, die Differentialien aller übrigen Ordnungen finden kann. Wenn man nemlich das Differential einer Funktion von neuem differenziert, so findet man das zweite Differential, und wenn man auch dieses Differential wieder differenziert, so findet man das dritte Differential u. s. w. Eben diese Regel gilt aber auch, wenn eine Funktion mehrere veränderliche Größen enthält, oder wenn zwar nur eine veränderliche Größe da ist, aber das Differential derselben nicht als eine beständige Größe betrachtet wird. Es sey  $V$  irgend eine Funktion von  $x$ , und  $dx$  nicht beständig, sondern auf irgend eine Art veränderlich, so daß das Differential von  $dx = ddx$ , und das Differential hiervon  $= d^3x$  u. s. f. sey. Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun das Differential der Funktion  $V$  untersuchen.

§. 243.

Wir wollen annehmen, daß das erste Differential der Funktion  $V = P dx$  sey, wo denn  $P$  irgend eine Funktion  
von

von  $x$  ist, die von  $V$  abhängt. Wollen wir nun das zweite Differenzial der Funktion  $V$  finden, so müssen wir ihr erstes Differenzial  $Pdx$  von neuem differenzieren; und da dasselbe ein Produkt aus zwey veränderlichen Größen  $P$  und  $dx$  ist, von welchen jene das Differenzial  $dP = p dx$  und diese  $dx$  das Differenzial  $ddx$  hat: so ist nach der Regel von den Faktoren das zweite Differenzial  $ddV = P ddx + p dx^2$ . Setzt man nun  $dp = q dx$ , so findet man, da das Differenzial von  $dx^2 = 2 dx ddx$  ist, durch abermaliges Differenzieren.

$$d^3V = Pd^3x + dP ddx + 2p dx ddx + dp dx^2$$

und da  $dP = p dx$ , und  $dp = q dx$  ist, so wird

$$d^3V = Pd^3x + 3p dx ddx + q dx^3$$

und auf eine ähnliche Art werden nun auch die folgenden Differenzialien gefunden.

## §. 244

Wir wollen dieses auf die Potestäten von  $x$  anwenden und die verschiedenen Differenzialien davon suchen, wenn  $dx$  nicht als eine beständige Größe angenommen wird.

I. Ist also  $V = x$ ; so ist  $dV = dx$ ;  $d^2V = d^2x$ ;  
 $d^3V = d^3x$ ;  $d^4V = d^4x$ ;  $\text{rc.}$

II. Ist  $V = x^2$ ; so ist

$$dV = 2x dx;$$

$$d^2V = 2x ddx + 2 dx^2;$$

$$d^3V = 2x d^3x + 6 dx ddx;$$

$$d^4V = 2x d^4x + 8 dx d^3x + 6 ddx^2;$$

$$d^5V = 2x d^5x + 10 dx d^4x + 20 ddx d^3x;$$

$\text{rc.}$

III. 30

III. Ist überhaupt  $V = x^n$ ; so ist

$$dV = nx^{n-1}dx;$$

$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2;$$

$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3;$$

$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dx d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4 + \text{ic.}$$

Nimmt man  $dx$  beständig, und setzt daher  $ddx = 0$ ,  $d^3x = 0$ ,  $d^4x = 0$ , ic., so findet man eben die Differenzialien, die wir bereits oben für diese Voraussetzung gefunden haben.

§. 245.

Da also die Differenzialien aller Ordnungen von  $x$  auf eben die Art differenziert werden, als die endlichen Größen, so lassen sich auch alle Ausdrücke, in welchen außer einer endlichen Größe auch ihre Differenzialien vorkommen, nach den oben erteilten Vorschriften differenzieren. Da diese Operation bisweilen vorkommt, so wollen wir sie hier durch einige Beispiele erläutern.

I. Ist also  $V = \frac{x ddx}{dx^2}$ ; so findet man durchs Differenzieren

$$dV = \frac{x d^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x ddx^2}{dx^3}.$$

II. Ist  $V = \frac{x}{dx}$ ; so ist  $dV = 1 - \frac{x ddx}{dx^2}$ , und es hieß

bert also das nichts, daß wir  $V$  unendlich groß angenommen haben.

III. Ist  $V = x \times 1 \frac{ddx}{dx^2}$ ; so läßt sich dieser Ausdruck in

$$V = x \times 1 ddx + 2 \times x 1 dx$$

Eulers Differenz. Rechn. I, Th.

D

beta

verwandeln, und daraus findet man nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation

$$dV = 2x dx + ddx \ddot{x} + \frac{x x d^3 x}{d d x} - 4x dx + dx - \frac{2x x d dx}{dx}$$

Auf eine ähnliche Art werden aber auch die höhern Differenzialien von  $V$  gefunden.

## §. 246.

Wenn der gegebene Ausdruck zwey veränderliche Größen, nemlich  $x$  und  $y$  enthält, so ist entweder das eine Differenzial derselben beständig, oder es sind beide veränderlich; denn es ist willkürlich, von welcher Größe man das Differenzial als beständig betrachten will, weil es von unserm freyen Willen abhängt, wie wir die auf einander folgenden Werthe der einen Größe wachsen lassen wollen. Aber die Differenzialien beider Größen können nicht beständig seyn, weil man sonst ein Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen  $x$  und  $y$  annähme, dergleichen entweder nicht da ist, oder doch als unbekannt betrachtet wird. Denn wenn man, indem man  $x$  gleichförmig wachsen läßt, auch  $y$  gleichförmig wachsend annehmen wollte, so würde man das durch zu erkennen geben, daß  $y = ax + b$  sey, und es würde also  $y$  von  $x$  abhängen, welches man doch nicht annehmen darf. Es kann daher nur entweder das Differenzial einer von den veränderlichen Größen oder gar keins beständig angenommen werden. Kann man indeß die Differenziation verrichten, wenn gar keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird, so kann man auch die Differenzialien finden, wenn eins beständig ist: denn wenn  $dx$  beständig seyn soll, so darf man nur  $ddx$ ,  $d^3x$ ,  $d^4x$ ,  $ic.$  ausstreichen.

## §. 247.

§. 247.

Es bedeute also  $V$  irgend eine endliche Funktion von  $x$  und  $y$ , und es sey  $dV = Pdx + Qdy$ . Um nun das zweite Differenzial zu finden, wollen wir beide Differenzialien  $dx$  und  $dy$  als veränderlich betrachten; und da  $P$  und  $Q$  Funktionen von  $x$  und  $y$  sind, so wollen wir

$$dP = p dx + r dy$$

$$dQ = r dx + q dy$$

setzen, indem wir oben gesehen haben, daß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r \text{ ist.}$$

Dies vorausgesetzt, so differenziere man  $dV = Pdx + Qdy$ , wodurch man

$ddV = Pddx + p dx^2 + 2rdxdy + Qddy + q dy^2$  findet. Soll also  $dx$  beständig seyn, so wird

$$ddV = p dx^2 + 2rdxdy + Qddy + q dy^2;$$

und soll  $dy$  beständig seyn, so wird

$$ddV = Pddx + p dx^2 + 2rdxdy + q dy^2.$$

§. 248.

Wenn also eine Funktion zweyer veränderlicher Größen  $x$  und  $y$  zweymal differenziert, und dabey keines von den Differenzialien als beständig betrachtet wird: so hat das zweite Differenzial jedesmal diese Form:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy;$$

und dabey hängen die Größen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  und  $T$  auf die Art von einander ab, daß, wenn man die im vorhergehenden Capitel erklärte Bezeichnungsart gebraucht,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); R = \left(\frac{dP}{dx}\right); S = \left(\frac{dQ}{dy}\right); \text{ und}$$

$$T = 2 \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2 \left(\frac{dP}{dy}\right)$$

ist.

ist.

Ist. Fehlt von diesen Bedingungen auch nur eine einzige, so kann man sicher behaupten, daß die gegebene Formel kein zweytes Differenzial einer Funktion sey, und es läßt sich also bald erkennen, ob eine solche Formel das zweyte Differenzial irgend einer Größe sey oder nicht.

§. 249.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die dritten und die folgenden Differenzialien finden; es wird indeß besser seyn, solches an einem besondern Beyspiele zu zeigen, als dabey die allgemeinen Formeln zu gebrauchen.

Ist also  $V = xy$ , so ist

$$dV = ydx + xdy;$$

$$ddV = yddx + 2dxdy;$$

$$d^3V = yd^3x + 3dyddx + xd^3y;$$

$$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$$

2c.

In diesem Exempel richten sich die Zahl-Coefficienten nach dem Gesetze der Potestäten des Binomiums, und man kann daher die Differenzialien soweit man will fortsetzen.

Ist hingegen  $V = \frac{x}{y}$ ; so ist

$$dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx};$$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxdy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2}$$

$$+ \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{ydd^3x}{x^2}$$

In diesem Exempel fällt die Folge der Differenzialien nicht so leicht in die Augen als in dem vorhergehenden.

§. 250.

Es läßt sich aber diese Methode zu differenziren nicht bloß bey den endlichen Funktionen anwenden, sondern sie ist auch bey allen solchen Ausdrücken brauchbar, die selbst schon Differenzialien enthalten, es mag nun eines davon als beständig betrachtet werden oder nicht. Denn da die Differenzialien eben so und nach eben den Regeln differenziert werden, wie die endlichen Größen: so gelten die in den vorhergehenden Capiteln gegebene Regeln auch hier, und müssen daher auch gegenwärtig befolgt werden. Bedeutet also  $V$  einen Ausdruck, dessen Differenzial gesucht werden soll, es mag nun derselbe eine endliche oder eine unendlich große oder eine unendlich kleine Größe vorstellen: so können folgende Beispiele die Art, sein Differenzial zu finden, lehren.

I. Ist  $V = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; so ist

$$dV = \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

II. Ist  $V = \frac{y dx}{dy}$ ; so ist

$$dV = dx + \frac{y ddx}{dy} - \frac{y dx ddy}{dy^2}$$

III. Ist  $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy - dy ddx}$ ; so ist

$$dV = \frac{(3 dx ddx + 3 dy ddy) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx ddy - dy ddx} - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} (dx d^3y - dy d^3x)}{(dx ddy - dy ddx)^2}$$

Da diese Differenzialien in ihrem weitesten Umfange gesucht worden sind, indem dabey kein Differenzial als beständig betrachtet worden ist: so lassen sich daraus leicht die

Differenzialien ableiten, die entstehen, wenn entweder  $dx$  oder  $dy$  als beständig betrachtet wird.

## §. 251.

Da, wenn kein Differenzial beständig angenommen wird, auch kein Gesetz vorgeschrieben ist, nach welchem die successiven Werthe der veränderlichen Größen auf einander folgen; so sind die zweyten und folgenden Differenzialien nicht bestimmt, und haben keine gewisse Bedeutung. Es hat daher auch eine Formel, worin die zweyten und die höhern Differenzialien vorkommen, keinen bestimmten Werth, als nur, wenn eines von ihren Differenzialien beständig angenommen worden ist; im entgegenstehenden Falle ist ihre Bedeutung schwankend, und ändert sich, je nachdem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. Indeß giebt es Ausdrücke, die zweyte Differenzialien enthalten, und die, obgleich kein Differenzial als beständig betrachtet wird, dennoch eine bestimmte Bedeutung haben, die daher auch immer dieselbe bleibt, man mag ein Differenzial als beständig annehmen, welches man will. Wir werden weiter unten die Beschaffenheit dieser Formeln genauer untersuchen, und die Art und Weise beybringen, wie man dieselben von solchen, die keinen bestimmten Werth haben, unterscheiden kann.

## §. 252.

Um die Beschaffenheit der Differenzial-Formeln, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, deutlicher kennen zu lernen, wollen wir zuvörderst solche Formeln betrachten, die nur eine einzige veränderliche Größe enthalten. Hier ist leicht einzusehen, daß, wenn in einer Formel das zweyte Differenzial ihrer veränderlichen Größe vorkommt,  
und

und kein Differenzial beständig angenommen wird, die Formel alsdann keinen bestimmten Werth haben kann. Denn setzte man  $dx$  beständig, so würde  $ddx = 0$ ; nähme man aber das Differenzial von  $xx$ , nemlich  $2x dx$  oder  $x dx$  beständig an, so würde, da alsdenn das Differenzial von  $x dx = x ddx + dx^2 = 0$  wäre,  $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ . Sollte das Dif-

ferenzial von irgend einer Potestät  $x^n$ , nemlich  $n x^{n-1} dx$  oder  $x^{n-1} dx$  beständig seyn, so würde das zweyte Differenzial derselben  $x^{n-1} ddx + (n-1)x^{n-2} dx^2 = 0$ , und also  $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$  werden. Es erhält also  $ddx$

verschiedene Werthe, je nachdem das Differenzial dieser oder einer andern Funktion von  $x$  als beständig betrachtet wird; und es fällt in die Augen, daß eine Formel, in welcher  $ddx$  vorkommt, ganz von einander verschiedene Werthe bekommen muß, wenn man darin einmal  $0$ , dann  $-\frac{dx^2}{x}$ , dann

$-\frac{(n-1)dx^2}{x}$  u. s. f. anstatt  $ddx$  setzt. Würde z. B. die

Formel  $\frac{xx ddx}{dx^2}$  gegeben, die wegen der homogenen unendlich kleinen Größen  $ddx$  und  $dx^2$  einen endlichen Werth haben muß: so wird dieselbe, wenn man  $dx$  beständig nimmt, in  $0$ , wenn man  $d \cdot x^2$  beständig seyn läßt, in  $-x$ , wenn man  $d \cdot x^3$  beständig annimmt, in  $-2x$ , und wenn man  $d \cdot x^4$  als beständig betrachtet, in  $-3x$  u. s. w. verwandelt. Es kann also die angenommene Formel keinen bestimmten Werth haben, wosfern nicht ausgemacht ist, welches Differenzial als beständig betrachtet werden soll.

S. 253.

Auf eine ähnliche Art läßt sich die Unbeständigkeit der Bedeutung zeigen, wenn das dritte Differenzial in einer Formel enthalten ist. Wir wollen zu dem Ende die Formel

$\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$  betrachten, der ebenfalls ein endlicher Werth zukommt. Wird dabey das Differenzial  $dx$  beständig

angenommen, so verwandelt sie sich in  $\frac{0}{0}$ , wovon der Werth gleich nachher gezeigt werden wird. Ist ferner  $d \cdot x^2$  beständig,

so wird  $ddx = -\frac{dx^2}{x}$ , und wenn man von neuem

differenziert, so findet man  $d^3 x = -\frac{2 dx ddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} =$

$\frac{3 dx^3}{x^2}$ , weil  $ddx = -\frac{dx^2}{x}$  ist. In diesem Falle wird das

hier die gegebene Formel  $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$  in  $-3x^2$  verwandelt.

Ist aber  $d \cdot x^n$  beständig, so wird  $ddx = -\frac{(n-1) dx^2}{x}$ ,

und daher denn ferner

$$d^3 x = -\frac{2(n-1) dx ddx}{x} + \frac{(n-1) dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx} + \frac{(n-1) dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1) dx^3}{xx}$$

In diesem Falle wird also

$$\frac{d^3 x}{ddx} = -\frac{(2n-1) dx}{x}; \text{ und } \frac{x^3 d^3 x}{dx ddx} = -(2n-1)x^2.$$

Hieraus erhellet, daß, wenn  $n = 1$  oder  $dx$  beständig ist, der Werth dieser Formel  $= -x^2$  ist. Auch fällt daraus in die Augen, daß die Formeln, die dritte oder höhere Differenzialien enthalten, ohne daß dabey angezeigt ist, welches

Diffe

Differenzial als beständig betrachtet werden soll, keinen bestimmten Werth haben können, und also eigentlich gar nichts bedeuten; woher denn auch dergleichen Formeln nicht in der Rechnung vorkommen können.

§. 254.

Auf eine ähnliche Art läßt sich erkennen, daß die Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen, die zweyte oder höhere Differenzialien enthalten, keinen bestimmten Werth haben können, wofern nicht irgend ein Differenzial beständig angenommen wird, bloß die Fälle ausgenommen, die wir sogleich betrachten werden. Denn sobald  $dx$  in einer Formel vorkommt, so kann dieselbe keinen bestimmten Werth haben, weil sich der Werth von  $dx$  nach dem Differenziale richtet, welches als beständig betrachtet wird, und eben dieses gilt von jedem höhern Differenziale von  $x$ , so wie auch von den zweyten und höhern Differenzialien der übrigen veränderlichen Größen. Wenn aber die zweyten Differenzialien von zweyen oder mehreren veränderlichen Größen in einer Formel vorkommen, so kann es sich ereignen, daß die Unbeständigkeit die von der einen herrührt, durch die Unbeständigkeit von der andern aufgehoben wird; und dann tritt also dergedachte Fall ein, da eine Formel, die die zweyten Differenzialien zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen enthält, gleichwohl einen bestimmten Werth haben kann, obgleich kein Differenzial beständig angenommen worden ist.

§. 255.

Es kann also die Formel  $\frac{y dx + x dy}{dx dy}$  keine feste Bedeutung haben, wofern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist. Denn läßt man  $dx$  beständig

ständig seyn, so erhält man daher  $\frac{x d d y}{d x d y}$ ; nimmt man hingegen  $d y$  beständig an, so bekommt man  $\frac{y d d x}{d x d y}$ , und es fällt in die Augen, daß diese beyden Formeln nicht nothwendig einander gleich sind. Denn sollten sie dieses seyn, so müßten sie auch immer dieselben bleiben, man mögte für  $x$  und für  $y$  eine Funktion setzen, was für eine man wollte. Wir wollen bloß  $y = x x$  setzen. Da nun, wenn man  $d x$  als beständig ansieht,  $d d y = 2 d x^2$  ist, so verwandelt sich die Formel  $\frac{x d d y}{d x d y}$  in  $1$ ; wenn man aber  $d y$  oder  $2 x d x$  beständig annimmt, so wird  $d d y = 2 x d d x + 2 d x^2 = 0$ , und also  $d d x = -\frac{d x^2}{x}$ , und dabey geht die Formel  $\frac{y d d x}{d x d y}$  in  $-\frac{1}{2}$  über. Da man nun schon bey diesem einzigen Falle eine Verschiedenheit antrifft, so kann noch weniger überhaupt  $\frac{x d d y}{d x d y}$ , wenn man  $d x$  als beständig betrachtet, gleich  $\frac{y d d x}{d x d y}$  seyn, wenn man  $d y$  als eine beständige Größe ansieht. Und da die Formel  $\frac{y d d x + x d d y}{d x d y}$  nicht einmal einerley Werth behält, wenn man nur bloß entweder  $d x$  oder  $d y$  als beständig betrachtet, so wird sie noch viel weniger einerley Werth behalten, wenn man das Differenzial eines jeden Funktion entweder von  $x$  oder von  $y$  oder von beyden beständig annimmt.

## §. 256.

Hieraus erhellet, daß dergleichen Formeln nicht anders einen festen Werth haben können, als wenn sie so beschaffen sind, daß die zweyten und höhern Differenzialien von  $x$ , nemlich

nemlich  $ddx$ ,  $d^3x$ , ic. gänzlich aus der Rechnung verschwinden, wenn anstatt der veränderlichen Größen  $y$  und  $z$ , welche außer  $x$  noch in jenen Formeln enthalten sind, nach Belieben jede Funktion von  $x$  gesetzt worden. Denn wenn nach einer solchen Substitution noch  $ddx$ , oder  $d^3x$ , oder  $d^4x$ , ic. in der Formel zurückbleibt, so ist der Werth dieser Formel veränderlich, weil die angeführten Differenzialien ihre Bedeutung verändern, wenn ein anderes Differenzial als beständig betrachtet wird. So ist die vorhergehende Formel  $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$  beschaffen, die dann, wenn sie einen festgesetzten Werth hätte, es mögte  $y$  bedeuten, was es wollte, auch einerley Werth behalten müßte, was auch für  $y$  für eine Funktion von  $x$  gesetzt würde. Allein wenn man bloß  $y = x$  setzt, so verwandelt sich diese Formel in  $\frac{2x ddx}{dx^2}$ , und die Bedeutung hievon ist schwankend, weil darin  $ddx$  vorkommt, und also  $\frac{2x ddx}{dx^2}$ , so wie man ein anderes Differenzial beständig annimmt, auch einen andern Werth bekommt, wie aus §. 252. zur Gnüge erhellet.

§. 257.

Es kann hier der Zweifel entstehen, ob es auch Formeln gebe, die zwey oder mehr Differenzialien vom zweyten, oder einem noch höhern Grade enthalten, und dabey so beschaffen sind, daß sich die Differenzialien des zweyten Grades insgesammt einander aufheben, wenn man anstatt der übrigen veränderlichen Größen Funktionen der einen setzt? Diesem Zweifel wollen wir auf die Art begegnen, daß wir zuerst vörderst eine solche Formel mittheilen, wodurch denn zugleich die weitere Untersuchung erleichtert werden wird. Ich behaupte

Haupte also, daß die Formel  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$  die angeführte Eigenschaft besitze: denn man mag für  $y$  eine Funktion von  $x$ , was für eine man will, setzen, so heben sich darin immer die Differenzialien des zweiten Grades einander auf. Folgende Beispiele mögen dies bestätigen:

I. Ist  $y = x^2$ ; so wird  $dy = 2x dx$ , und  $ddy = 2x ddx + 2dx^2$ . Setzt man aber diese Werthe in die Formel  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ , so wird

$$\frac{2x dx ddx - 2x dx ddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Ist  $y = x^n$ ; so wird  $dy = nx^{n-1} dx$ , und  $ddy = nx^{n-1} ddx + n(n-1)x^{n-2} dx^2$ . Bringt man nun diese Werthe in die Formel  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ , so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{nx^{n-1} dx ddx - nx^{n-1} dx ddx - n(n-1)x^{n-2} dx^3}{dx^3} = -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Ist  $y = -\sqrt{(1-xx)}$ ; so wird  $dy = \frac{x dx}{\sqrt{(1-xx)}}$  und  $ddy = \frac{x ddx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$ ; und die Formel  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$  verwandelt sich in

$$\frac{x ddx}{dx^2 \sqrt{(1-xx)}} - \frac{x ddx}{dx^2 \sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

In allen diesen Beispielen heben sich also die zweyten Differenzialien  $ddx$  einander auf, und eben das wird geschehen, was man auch sonst für Funktionen von  $x$  für  $y$  setzen will.

## §. 258.

Da diese Beispiele die Wahrheit unserer Behauptung schon dargethan haben, daß nemlich die Formel  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$  einen bestimmten Werth habe, wenn auch

gleich kein Differenzial beständig angenommen wird; so wird es nun um so leichter seyn, den Beweis davon zu führen. Ist also  $y$  irgend eine Funktion von  $x$ , so wird sein Differenzial  $dy = p dx$ , und  $p$  eine Funktion von  $x$ , und ihr Differenzial  $dp = q dx$ , und auch  $q$  eine Funktion von  $x$  seyn. Da nun  $dy = p dx$  ist, so ist  $ddy = p ddx + q dx^2$ , und  $dyddx - dxddy = p dx ddx - p dx ddx - q dx^3 = -q dx^3$ ; und da in diesem Ausdrucke kein zweytes Differenzial vorkommt, so ist ihr Werth nicht weiter ungewiß, und  $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = -q$ . Wie also auch immer

$y$  von  $x$  abhängen mag, so heben sich doch immer die zweyten Differenzialien in dieser Formel einander auf, und es ist daher ihr Werth, so sehr er es sonst seyn würde, nichts weniger als schwankend und ungewiß.

## §. 259.

Ob wir hier gleich angenommen haben, daß  $y$  eine Funktion von  $x$  sey, so bleibt dennoch das Gesagte wahr, wenn auch  $y$  gar nicht von  $x$  abhängt. Denn indem wir für  $y$  eine jede Funktion setzen, ohne zu bestimmen, wie sie beschaffen seyn soll: so nehmen wir im Grunde gar keine Abhängigkeit zwischen  $x$  und  $y$  an. Man kann indeß den Beweis, auch ohne einer Funktion Erwähnung zu thun, führen. Denn was auch  $y$  für eine Größe ist, sie mag von  $x$  abhängen oder nicht, so ist doch ihr Differenzial  $dy$  homo-

gen

gen mit  $dx$ , und es bedeutet daher  $\frac{dy}{dx}$  eine endliche Größe, von der das Differenzial, welches sie bestimmt, wenn  $x$  in  $x + dx$ , und  $y$  in  $y + dy$  übergeht, nicht ungewiß ist, und nicht von dem Gesetze der zweyten Differenzialien abhängt. Es sey also  $\frac{dy}{dx} = p$ ; so ist  $dy = p dx$ ; und  $ddy = p dx + dp dx$ ; und folglich  $dx ddy - dy ddx = dp dx^2$ . In diesem Ausdrucke findet keine Ungewißheit weiter statt, weil er bloß erste Differenzialien enthält, und er bleibt daher derselbe, man mag ein Differenzial, und was für eins man will, als beständig betrachten, oder alle veränderlich seyn lassen.

§. 260.

Da also  $dy ddx - dx ddy$ , ungeachtet der darin vorkommenden zweyten Differenzialien, indem diese am Ende doch einander aufheben, eine gewisse Bedeutung hat: so wird auch jeder Ausdruck, in welchem außer der Formel  $dy ddx - dx ddy$  keine andere zweyte Differenzialien vorkommen, ebenfalls eine gewisse Bedeutung haben. Oder, wenn  $dy ddx - dx ddy = \omega$  gesetzt wird, und  $V$  eine aus  $x$  und  $y$ , und den ersten Differenzialien hiervon,  $dx$  und  $dy$ , und aus  $\omega$  auf irgend eine Art zusammengesetzt ist, so wird der Werth von  $V$  ein gewisser Werth seyn. Denn da man bey den ersten Differenzialien  $dx$  und  $dy$  keine Rücksicht auf das willkühliche Gesetz zu nehmen braucht, nach welchem die successiven Werthe von  $x$  wachsend gedacht werden, und in  $\omega$  die zweyten Differenzialien sich aufheben, so ist auch  $V$  keine ungewisse Größe mehr, sondern ihrer Bedeutung nach gewiß. So hat der Ausdruck  $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy - dy ddx}$  einen gewiß

gewissen Werth, ob er gleich durch die zweyten Differenzialien dazu unfähig zu seyn scheint; ja es ist dieser Werth, da der Zähler überdem mit dem Nenner homogen ist, ein endlicher Werth, wofern er nicht zufälliger Weise unendlich groß oder unendlich klein wird.

§. 261.

So wie gezeigt worden ist, daß die Formel  $dxddy - dyddx$  einen gewissen Werth hat, so haben auch, wenn noch eine dritte veränderliche Größe  $z$  dazu kommt, die Formeln  $dxddz - dzddx$  und  $dyddz - dzddy$  gewisse Werthe. Wenn daher Ausdrücke, die drey veränderliche Größen  $x, y$  und  $z$  enthalten, weiter keine zweyten Differenzialien in sich schließen, als die angeführten, so ist ihre Bedeutung eben so gewiß, als wenn sie gar keine zweyte Differenzialien in sich fassen. So hat der Ausdruck

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

der darln vorkommenden zweyten Differenzialien ungeachtet, eine gewisse Bedeutung. Auf eine ähnliche Art lassen sich Formeln machen, die noch mehr veränderliche Größen enthalten, und worin die zweyten Differenzialien die Gewißheit der Bedeutung nicht im mindesten verhindern.

§. 262.

Diese Formeln also unter denen, die zweyte Differenzialien enthalten ausgenommen, so haben die übrigen insgesamt eine ungewisse Bedeutung, und können daher auch nicht anders in den Rechnungen statt finden, als wenn irgend ein erstes Differenzial bestimmt und als beständig angenommen wird. Sobald aber irgend ein erstes Differenzial

zial als beständig angenommen wird, so erhalten alle Ausdrücke, sie mögen so viel veränderliche Größen enthalten als sie wollen, und es mögen außerdem außer dem ersten, Differenziale, von was für einer Ordnung es sey, vorkommen, gewisse Bedeutungen, und sind also nunmehr auch nicht aus der Rechnung ausgeschlossen. Ist z. B.  $dx$  als beständig angenommen worden, so verschwinden die zweyten und folgenden Differenzialien von  $x$ , und es werden von allen Funktionen von  $x$ , die man für die übrigen veränderlichen Größen  $y, z$ , ic. setzt, die zweyten Differenzialien durch  $dx^2$ , die dritten durch  $dx^3$ , ic. bestimmt, und so alle von den zweyten Differenzialien herrührende Unbeständigkeit aus dem Wege geräumt. Eben das geschieht, wenn das erste Differenzial einer andern veränderlichen Größe oder irgend einer Funktion von ihr als beständig angenommen wird.

## §. 263.

Hieraus folgt also, daß die zweyten und die höhern Differenziale eigentlich nie in die Rechnung kommen, und wegen ihrer ungewissen Bedeutung zur Analysis völlig unbrauchbar sind. Denn wenn zweyte Differenzialien da zu seyn scheinen, so wird entweder irgend ein erstes Differenzial als beständig angenommen, oder nicht. Im ersten Falle verschwinden die zweyten Differenzialien ganz aus der Rechnung, indem sie durch die ersten Differenzialien bestimmt werden. Im andern Falle ist ihre Bedeutung, wofern sie sich nicht einander aufheben, ungewiß, und sie selbst finden daher in der Analysis keinen Platz; heben sie sich aber einander auf, so sind sie nur scheinbar da, und man hat eigentlich nur die endlichen Größen mit ihren ersten Differenzialien als daseyend zu betrachten. Da sie aber sehr häufig, obgleich nur scheinbar, in den Rechnungen vorkommen, so  
war

war es nöthig ihre Behandlungsart zu berühren. Es wird sich indeß auch bald die Methode erklären lassen, wie man die zweyten und alle übrige höhere Differenzialien jedesmal wegschaffen kann.

§. 264.

Wenn ein Ausdruck nicht mehr als eine veränderliche Größe  $x$  enthält, und darin die höhern Differenzialien dieser Größe, oder  $ddx$ ,  $d^3x$ ,  $d^4x$ ,  $\text{ic.}$  vorkommen, so kann er keine gewisse Bedeutung haben, wosern nicht irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen wird. Es sey also  $t$  die Größe, deren Differenzial  $dt$  beständig seyn soll, so daß  $ddt = 0$ ,  $d^3t = 0$ ,  $d^4t = 0$ ,  $\text{ic.}$  ist. Setzt man  $dx = p dt$ , so ist  $p$  eine endliche Größe, auf deren Differenzial die ungewisse Bedeutung der zweyten Differenzialien keinen Einfluß hat, und es ist daher auch  $\frac{dp}{dt}$  eine endliche Größe. Nun sey  $dp = q dt$ , und auf ähnliche Art  $dq = r dt$ ,  $dr = s dt$ ,  $\text{ic.}$  so werden  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $\text{ic.}$  endliche Größen, deren Bedeutungen gewiß sind. Da also  $dx = p dt$  ist, so wird

$$ddx = dp dt = q dt^2; \quad d^3x = dq dt^2 = r dt^3; \\ d^4x = dr dt^3 = s dt^4; \quad \text{ic.}$$

und wenn man diese Werthe anstatt  $ddx$ ,  $d^3x$ ,  $d^4x$  setzt, so enthält der ganze Ausdruck bloße endliche Größen und das erste Differenzial  $dt$ , und es ist daher seine Bedeutung nicht mehr ungewiß.

§. 265.

Wenn  $x$  eine Funktion von  $t$  ist, so kann auf diese Art die Größe  $x$  gänzlich weggeschafft werden, so daß bloß die Größe  $t$  mit ihrem Differenziale  $dt$  in dem Ausdrucke zurück

rück bleibt; ist aber  $x$  eine Funktion von  $t$ , so ist auch  $t$  eine Funktion von  $x$ . Inzwischen kann auch die Größe  $x$  selbst mit ihrem ersten Differentiale  $dx$  in der Rechnung behalten werden, wofern nur nach den vorhin gemachten Substitutionen allenthalben anstatt  $t$  und  $dt$  ihre durch  $x$  und  $dx$  ausgedruckte Werthe wieder hergestellt werden. Damit dieses deutlicher werde, so wollen wir  $t = x^n$  setzen, und das erste Differential von  $x^n$  beständig annehmen. Da also

$$dt = nx^{n-1}dx \text{ ist, so ist } p = \frac{1}{nx^{n-1}}, \text{ und}$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx; \text{ daher wird}$$

$$q = \frac{-(n-1)}{nx^{2n-1}}, \text{ und}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx.$$

Hieraus wird ferner

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}; \text{ und } s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Wenn also das Differential von  $x^n$  als beständig betrachtet wird, so ist

$$d^2x = -\frac{(n-1)dx^2}{x};$$

$$d^3x = -\frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx};$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3};$$

2c.

§. 266.

Wenn ein Ausdruck zwey veränderliche Größen  $x$  und  $y$  enthält, und das Differential der einen  $x$  beständig angenommen

nommen

nommen wird, so kommen, weil  $ddx = 0$  ist, keine andere zweyte und höhere Differenzialien vor als  $ddy$ ,  $d^3y$  &c. Diese lassen sich aber auf eben die Art wegschaffen, wenn man  $dy = p dx$ ;  $dp = q dx$ ;  $dq = r dx$ ;  $dr = s dx$ ; &c. setzt. Denn es wird alsdenn

$$ddy = q dx^2; d^3y = r dx^3; d^4y = s dx^4 \text{ \&c.}$$

und braucht man diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den Größen  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , &c. bloß das erste Differenzial  $dx$  enthält. Ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{y dx^4 + x dy d^3y + x d^4y}{(xx + yy) ddy}$$

gegeben, und wird darin  $dx$  beständig angenommen: so setze man

$$dy = p dx; dp = q dx; dq = r dx; \text{ und } dr = s dx.$$

Durch den Gebrauch dieser Werthe verwandelt sich der gegebene Ausdruck in folgenden,

$$\frac{(y + xpr + xs) dx^2}{(xx + yy) q}$$

welcher weiter keine zweyte oder höhere Differenzialien enthält.

§. 267.

Auf eine ähnliche Art werden die zweyten und höhern Differenzialien weggeschafft, wenn  $dy$  beständig angenommen wird. Soll aber irgend ein anderes erstes Differenzial  $dt$  beständig seyn, so muß man zuvörderst auf die vorhin beschriebene Art die höhern Differenzialien von  $x$  wegschaffen, indem man

$$dx = p dt; dp = q dt; dq = r dt; dr = s dt, \text{ \&c.}$$

setzt, wodurch denn

$$ddx = q dt^2; d^3x = r dt^3; d^4x = s dt^4; \text{ \&c.}$$

¶ 2

wird,

wird. Ist dieses geschehen, so schafft man auf eine ähnliche Art die höhern Differenzialien von  $y$  weg, dadurch, daß man  $dy = Pdt$ ;  $dP = Qdt$ ;  $dQ = Rdt$ ;  $dR = Sdt$ ;  $\text{rc.}$  setzt, wodurch denn

$$ddy = Qdt^2; d^3y = Rdt^3; d^4y = Sdt^4; \text{rc.}$$

wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so erhält man einen Ausdruck, der außer den endlichen Größen  $x, p, q, r, s, \text{rc.}$   $y, P, Q, R, S, \text{rc.}$  bloß das Differenzial  $dt$  enthält, und dessen Bedeutung also auch weiter nicht angewiß ist.

## §. 268.

Wenn das erste Differenzial, welches man beständig annimmt, entweder von  $x$ , oder von  $y$ , oder von beiden abhängt, so ist die Einführung einer doppelten Reihe endlicher Größen,  $p, q, r, \text{rc.}$  nicht nothwendig. Denn wenn  $dt$  allein von  $x$  abhängt, so werden die Buchstaben  $p, q, r, \text{rc.}$  Funktionen von  $x$ , und es kommen daher nur die Buchstaben  $P, Q, R, \text{rc.}$  vor. Eben das geschieht, wenn das beständige Differenzial  $dt$  allein von  $y$  abhängt. Hängt aber  $dt$  von beiden Größen ab, so ist eine in etwas veränderte Operation nöthig. Nehmen wir z. B. das Differenzial  $y dx$  beständig an, so wird  $y ddx + dx dy = 0$ , und also  $ddx = -\frac{dx dy}{y}$ . Nun sey  $dy = p dx$ ;  $dp = q dx$ ;  $dq = r dx$ ;  $\text{rc.}$ , so wird  $ddx = -\frac{p dx^2}{y}$ , und wenn man fortfährt zu differenzieren,

$$d^3x = -\frac{q dx^3}{y} + \frac{pp dx^3}{yy} - \frac{2p dx ddx}{y},$$

oder wenn man hierin für  $ddx$  seinen Werth  $-\frac{p dx^2}{y}$  setzt,

$$d^3x = -\frac{q dx^3}{y} + \frac{3pp dx^3}{yy}.$$

Serner

Ferner wird

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right) 3dx^2ddx;$$

und setzt man für  $ddx$  seinen Werth  $-\frac{pdx^2}{y}$ , so erhält man

$$d^4x = \left(-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right) dx^4.$$

Da nun  $dy = pdx$  ist, so wird  $ddy = qdx^2 + pddx =$

$\left(q - \frac{pp}{q}\right) dx^2$ ; und wenn man fortfährt für  $ddx$  seinen

Werth  $-\frac{pdx^2}{y}$  zu setzen, so wird

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \text{ und}$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4;$$

rc.

Setzt man diese Werthe anstatt der höhern Differenzialien von  $x$  und  $y$ , so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen solchen, der keine höhere Differenzialien mehr enthält, und es ist also dabey nicht einmal nöthig, daß man ein Differenzial als beständig betrachte. Denn da nach dieser Verwandlung keine zweite Differenzialien vorkommen, so ist es unnöthig zu bestimmen, welches Differenzial als beständig angenommen worden sey.

§. 269.

Bei der Anwendung des Calculs auf die krummen Linien pflegt man häufig dieses erste Differenzial  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

§ 3

als

als beständig zu betrachten, und wir wollen daher nunmehr untersuchen, wie in diesem Falle die zweyten und höhern Differenzialien weggeschafft werden. Hierdurch wird man zugleich in den Stand gesetzt werden, dieses Geschäfte bey der Annahme eines jeden andern Differenzials als beständig zu verrichten. Es sey also nochmals

$dy = p dx$ ;  $dp = q dx$ ;  $dq = r dx$ ;  $dr = s dx$ ; ic.  
 Alsdann erhält das Differenzial  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  diese Form  $dx\sqrt{(1 + pp)}$ , und da dieses Differenzial beständig seyn soll, so wird

$$d dx \sqrt{(1 + pp)} + \frac{pq dx^2}{\sqrt{(1 + pp)}} = 0, \text{ und also}$$

$$d dx = - \frac{pq dx^2}{1 + pp}$$

Da man auf diese Art den Werth von  $d dx$  hat, so wird nun ferner

$$\begin{aligned} d^3 x &= - \frac{pr dx^3}{1 + pp} - \frac{qq dx^3}{1 + pp} + \frac{2ppqq dx^3}{(1 + pp)^2} - \frac{2pq dx dx}{1 + pp} \\ &= - \frac{pr dx^3}{1 + pp} - \frac{qq dx^3}{1 + pp} + \frac{4ppqq dx^3}{(1 + pp)^2} \\ &= - \frac{pr dx^3}{1 + pp} + \frac{(3pp - 1)qq dx^3}{(1 + pp)^2}; \text{ und} \end{aligned}$$

$$d^4 x = - \frac{ps dx^4}{1 + pp} + \frac{(10pp - 3)qr dx^4}{(1 + pp)^2} - \frac{(15pp - 13)pq^3 dx^4}{(1 + pp)^3}$$

Da wir aber  $dy = p dx$  gesetzt haben, so findet man, wenn man differenziiert

$$d dy = q dx^2 + p d dx = q dx^2 - \frac{ppq dx^2}{1 + pp} = \frac{q dx^2}{1 + pp};$$

$$d^3 y = \frac{rdx^3}{1 + pp} - \frac{2ppq dx^3}{(1 + pp)^2} + \frac{2q dx dx}{1 + pp} = \frac{rdx^3}{1 + pp} - \frac{4ppq dx^3}{(1 + pp)^2};$$

$$d^4 y = \frac{s dx^4}{1 + pp} - \frac{13ppqr dx^4}{(1 + pp)^2} + \frac{4(6pp - 1)q^3 dx^4}{(1 + pp)^3}$$

Es werden also alle höhere Differenzialien sowohl von  $x$  als von  $y$  durch endliche Größen, und die Potestäten von  $dx$  ausgedruckt, und substituirt man diese Werthe, so erhält man einen von allen zweyten Differenzialien befreytten Ausdruck.

§. 270.

Nachdem wir die Art, die zweyten und höhern Differenzialien wegzuschaffen, erklärt haben, so wollen wir nur diese Operation durch einige Beispiele erläutern.

I. Ist also der Ausdruck  $\frac{x ddy}{dx^2}$  gegeben, und  $dx$  beständig; so setze man  $dy = p dx$  und  $dp = q dx$ . Da nun dadurch  $ddy = q dx^2$  wird, so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in die endliche Größe  $xq$ .

II. Ist der Ausdruck  $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$  gegeben, und  $dy$  beständig; so setze man  $dx = p dy$ ;  $dp = q dy$ , wodurch denn, weil  $d dx$  dabey  $= q dy^2$  wird,  $\frac{1 + pp}{q}$  entsteht. Wenn man aber, wie vorhin,  $dy = p dx$ ;  $dp = q dx$  setzen will, so wird, weil  $dy$  beständig ist,  $0 = p d dx + dp dx$ , und  $d dx = -\frac{q dx^2}{p}$ . Hierdurch verwandelt sich der gegebene Ausdruck in  $\frac{-p(1 + pp)}{q}$ .

III. Ist der Ausdruck  $\frac{y d dx - x d dy}{dx dy}$  gegeben, und soll dabey  $y dx$  beständig seyn; so setze man  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ , wodurch aus §. 268.  $d dx = -\frac{p dx^2}{y}$ ,

und  $ddy = q dx^2 - \frac{pp dx^2}{y}$ , so wie durch den Gebrauch dieser Werthe der gegebene Ausdruck in  $1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$  verwandelt wird.

IV. Ist der Ausdruck  $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$  gegeben, und dabey  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  beständig; so setze man wieder  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ , woher denn nach dem vorhergehenden §.  $ddy = \frac{q dx^2}{1 + pp}$  wird. Hierdurch aber verwandelt sich der gegebene Ausdruck in  $\frac{(1 + pp)^2}{q}$ .

Aus diesen Beyspielen erhellet zur Gnüge, wie man in jedem Falle, es mag ein erstes Differenzial als beständig angenommen seyn, was für eins man will, die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann.

## §. 271.

So wie man auf diese Weise durch Einführung der endlichen Größen  $p, q, r, s, u.$  die zweyten und höhern Differenzialien wegschaffen kann, so daß der ganze Ausdruck außer den endlichen Größen  $x, y, p, q, r, s, u.$  bloß das Differenzial  $dx$  enthält: so kann man auch umgekehrt, wenn ein solcher reducirter Ausdruck gegeben ist, ihn wieder auf seine erste Form bringen, indem man anstatt der Buchstaben  $p, q, r, s, u.$  die zweyten und höhern Differenzialien wieder einführt. Hier ist es aber gleich, was man für ein erstes Differenzial als beständig betrachten will, und man kann dazu entweder das, was vorher als beständig angesehen worden ist, oder ein jedes andere nehmen. Ja man kann auch gar kein Differenzial als beständig betrachten, und in diesem

diesem Falle entstehen dergleichen Ausdrücke mit zweiten und höhern Differenzialien, die, ohne daß ein erstes Differenzial angenommen wird, dennoch eine gewisse Bedeutung haben. Dergleichen Ausdrücke sind schon oben da gewesen.

§. 272.

Es sey also irgend ein Ausdruck gegeben, der aus den endlichen Größen  $x, y, p, q, r, \text{ic.}$  und dem Differenziale  $dx$  zusammengesetzt, und worin  $p = \frac{dy}{dx}$ ;  $q = \frac{dp}{dx}$ ;  $r = \frac{dq}{dx}$ ;

$\text{ic.}$  ist. Sollen hieraus die Buchstaben  $p, q, r, \text{ic.}$  auf die Art weggeschafft werden, daß man an ihre Stelle die zweiten und höhern Differenzialien von  $x$  und  $y$  setze, ohne daß ein Differenzial als beständig betrachtet werde: so wird

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} \text{ und } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$$

Differenziert man nun diese Formel, so wird

$$dq = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dx dy d^3x}{dx^4}$$

und also

$$r = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dx dy d^3x}{dx^5}$$

Kommt außerdem der Buchstabe  $s$  vor, welcher den Werth  $\frac{dr}{dx}$  anzeigt, so muß man dafür diesen Werth setzen,

$$s = \left\{ \begin{array}{l} dx^3d^4y - 6dx^2ddx^2d^3y - 4dx^2ddy d^3x + 15dxddx^2ddy \\ + 10dx dy ddx^3x - 15dyddx^3 - dx^2 dy d^4x \end{array} \right\} : dx^7$$

Braucht man nun diese Werthe anstatt der Größen  $p, q, r, s, \text{ic.}$  so wird der gegebene Ausdruck in einen andern verwandelt, welcher höhere Differenzialien von  $x$  und  $y$  enthält, und welcher, obgleich kein erstes Differenzial als beständig betrachtet

trachtet wird, dennoch eine nichts weniger als schwankende, sondern eine gewisse Bedeutung hat.

§. 273.

Auf diese Art läßt sich also jede Differenzial-Formel von einem höhern Grade, worin irgend ein erstes Differenzial beständig angenommen worden ist, in eine andere Formel verwandeln, worin kein Differenzial als beständig betrachtet wird, und die gleichwohl einen gewissen Werth hat. Zuvörderst muß man nemlich vermittelst der vorhin beschriebenen Methode durch die Substitutionen  $dy = p dx$ ;  $dp = q dx$ ;  $dq = r dx$ ;  $dr = s dx$ ;  $z.$  die höhern Differenzialien wegschaffen, und darauf für  $p, q, r, s, z.$  die vorhin dafür gefundenen Werthe setzen. Hierdurch entsteht ein Ausdruck, der dem vorigen gleich ist, und kein beständiges Differenzial in sich schließt. Folgende Beyspiele werden diese Operation in ein helleres Licht setzen.

I. Es sey der Ausdruck  $\frac{x ddy}{dx^2}$  gegeben, und darin  $dx$  beständig. Um denselben in einen solchen Ausdruck zu verwandeln, der kein beständiges Differenzial enthält, so setze man  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ , wodurch denn, wie wir vorhin §. 270. gesehen haben, der gegebene Ausdruck in  $qx$  verwandelt wird. Nun setze man für  $q$  den Werth, welchen es bekommt, wenn man kein beständiges Differenzial annimmt, oder nehme  $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$ . Hierdurch findet man den Ausdruck  $\frac{xdx ddy - xdy ddx}{dx^3}$ , welcher dem gegebenen gleich ist, und kein beständiges Differenzial mehr in sich schließt.

II. Es

II. Es sey der Ausdruck  $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$  gegeben, und dabey  $dy$  beständig angenommen. Setzt man  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ ; so verwandelt sich derselbe in  $-\frac{p(1 + pp)}{q}$ .

Setzt man aber nun  $p = \frac{dy}{dx}$  und  $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ ,

so findet man den Ausdruck  $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$ , welcher, ohne daß ein beständiges Differenzial angenommen wird, eben denselben gewissen Werth hat, als der vorhergehende.

III. Es sey der Ausdruck  $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$  gegeben, in welchem das Differenzial  $y dx$  beständig angenommen worden ist. Setzt man  $dy = p dx$ , so wird derselbe, wie wir § 270 gesehen haben, in  $-1 - \frac{xy}{p} + \frac{xp}{y}$  verwandelt. Hieraus aber erhält man, wenn kein Differenzial beständig seyn soll,

$$-1 - \frac{xdxddy + xdyddx}{dx^2dy} + \frac{xdy}{ydx} = \frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}$$

IV. Es sey der Ausdruck  $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$  gegeben, in welchem das Differenzial  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  beständig angenommen worden ist. Setzt man  $dy = p dx$ , und  $dp = q dx$ , so verwandelt sich dieser Ausdruck nach §. 270 in  $\frac{(1 + pp)^2}{q}$ .

Nimmt man nun  $p = \frac{dy}{dx}$ , und  $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ , so erhält

erhält man den Ausdruck  $\frac{(dx^2 + dy^2)}{dx^2 ddy - dx dy ddx}$ , welcher, ohne daß dabey ein beständiges Differenzial angenommen zu werden braucht, dem gegebenen Ausdruck gleich ist.

V. Es sey der Ausdruck  $\frac{dx d^3y}{x ddy}$  gegeben, und dabey das Differenzial  $dx$  beständig angenommen. Setzt man  $dy = p dx$ ,  $dp + q dx$ , und  $dq = r dx$ ; so verwandelt sich derselbe, weil  $ddy = q dx^2$ , und  $d^3y = r dx^3$  ist, in  $\frac{r dx^2}{x q}$ .

Nun setze man für  $q$  und  $r$  die Werthe, welche sie bekommen, wenn man gar kein beständiges Differenzial annimmt,

nemlich  $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$ , und

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx^2}$$

so erhält man folgenden, dem gegebenen gleichbedeutenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx ddy - dy ddx} \\ &= \frac{dx (dx d^3y - dy d^3x)}{dx ddy - dy ddx} - 3 ddx. \end{aligned}$$

§. 274.

Wenn wir diese Verwandlungen genau betrachten, so können wir daraus eine leichtere Methode ableiten, wobei man dieselben zu Stande bringen kann, ohne daß dabey die Einführung der Buchstaben  $p, q, r$ , etc. nöthig ist. Dieses zu thun findet man aber verschiedene Wege, je nachdem man in der gegebenen Formel dieses oder jenes Differenzial als beständig betrachtet. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß in der gegebenen Formel das Differenzial  $dx$  beständig gesetzt

setzt sey. Da wir nun für  $dy$  die Größe  $p dx$ , und dann für  $\frac{dy}{dx}$  wieder  $p$  gesetzt haben, so kann man die ersten Differenzialien  $dx$  und  $dy$  allenthalben aus dem gegebenen Ausdrucke weglassen, ohne daß dadurch eine Veränderung hervorgebracht wird. Wenn aber  $d dy$  vorkommt, so verrichtet man die Verwandlung, weil wir dafür  $q dx^2$ , und dann für  $q$  den Werth  $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$  gesetzt haben, wenn man sogleich

für  $d dy$  allenthalben  $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$  oder  $d dy - \frac{dy ddx}{dx}$

setzt. Da ferner  $r dx^3$  für  $d^3 y$  gesetzt, und dann für  $r$  der vorherin dafür gefundene Werth genommen werden kann, so muß man für  $d^3 y$  allenthalben  $d^3 y - \frac{3 ddx ddy}{dx} + \frac{3 dy ddx^2}{dx^2}$

$-\frac{dy d^3 x}{dx}$  setzen, und so verwandelt sich der gegebene Ausdruck in einen andern, der kein beständiges Differenzial

in sich schließt. Wäre z. B. der Ausdruck  $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy}$

gegeben, worin  $dx$  beständig angenommen worden: so wird demselben, wenn man  $d dy - \frac{dy ddx}{dx}$  für  $d dy$  setzt,

folgender kein beständiges Differenzial in sich enthaltender Ausdruck gleich:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy - dy ddx}$$

§. 275.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, daß man, wenn in einem gegebenen Ausdrucke das Differenzial  $dy$  als beständig

dig

dig betrachtet wird, allenthalben  $ddx - \frac{dxddy}{dy}$  anstatt  $ddx$ , und  $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy}$  für  $d^3x$  setzen muß, wenn man einen gleichbedeutenden Ausdruck haben will, der kein beständiges Differenzial in sich schließt. Ist aber in einem gegebenen Ausdrucke  $y dx$  beständig angenommen worden, so muß man, weil alsdenn  $ddx = -\frac{p dx^2}{y}$ , und  $ddy = q dx^2 - \frac{pp dx^2}{y}$  ist, für  $ddx$  allenthalben  $-\frac{dx dy}{y}$ , und für  $ddy$  allenthalben  $ddy - \frac{dy ddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$  setzen; und hiebey bleibe ich stehen, weil die höhern Differenzialien bey diesem Geschäfte sehr selten vorzukommen pflegen. Ist aber in dem gegebenen Ausdrucke  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  beständig gesetzt worden: so muß man, weil wir dabey  $ddx = -\frac{pq dx^2}{1 + pp}$ , und  $ddy = \frac{q dx^2}{1 + pp}$  gefunden haben, für  $ddx$  allenthalben  $\frac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$  und für  $ddy$  allenthalben  $\frac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$  setzen. So wird der Ausdruck  $\frac{dy \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$ , worin  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  beständig ist, in folgenden verwandelt  $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dy ddx - dx ddy}$ , so daß hierin kein beständiges Differenzial enthalten ist.

## § 276

Damit dieser Reduktionen desto leichter übersehen werden können, so wollen wir sie in folgende Tabelle bringen.

Es

Es wird also eine Differenzial-Formel eines höhern Grades vermittlest folgender Substitutionen in eine andere kein beständiges Differenzial enthaltende Formel verwandelt.

I. Wenn das Differenzial  $dx$  beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
$ddy$	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
$d^3y$	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$

II. Wenn das Differenzial  $dy$  beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
$ddx$	$ddx - \frac{dxddy}{dy}$
$d^3x$	$d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$

III. Wenn das Differenzial  $ydx$  beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
$ddx$	$-\frac{dxdy}{y}$
$ddy$	$ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
$d^3x$	$\frac{dyddx}{y} - \frac{dxddy}{y} + \frac{3dxdy^2}{yy}$
$d^3y$	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ $-\frac{4dyddy}{y} + \frac{4dy^2ddx}{ydx} - \frac{3dy^3}{yy}$

IV. Wenn

IV. Wenn das Differenzial  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  beständig angenommen worden ist, so muß man

für	setzen
$ddx$	$\frac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$
$ddy$	$\frac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$
$d^3x$	$\frac{dy^2 d^3x - dx dy d^3y}{dx^2 + dy^2} +$ $\frac{(dx ddy - dy ddx)(2dy^2 ddy - dx^2 ddx + 4dx dy ddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
$d^3y$	$\frac{dx^2 d^3y - dx dy d^3x}{dx^2 + dy^2} +$ $\frac{(dy ddx - dx ddy)(2dx^2 ddx - dy^2 ddy + 4dx dy ddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

§. 277.

Es sind also die Ausdrücke, die kein beständiges Differenzial enthalten, von der Art, daß man darin jedes Differenzial als beständig betrachten kann. Hiernach können daher die Differenzial-Formeln der höhern Grade, in welchen kein beständiges Differenzial angenommen seyn soll, geprüft und untersucht werden, ob ihre Bedeutung schwankend oder gewiß ist. Nimmt man nemlich nach Gefallen irgend ein Differenzial, z. B.  $dx$  als beständig an, und verwandelt darauf nach der Regel des vorhergehenden §. die erste Formel wieder in eine andere, die kein beständiges Differenzial enthält: so ist, wenn diese mit jener übereinstimmt, die Bedeutung der gegebenen Formel gewiß, und hängt nicht von der Unbeständigkeit der zweiten Differenzialien ab: ist aber die gefundene Formel von der gegebenen verschieden, so ist die Bedeutung von dieser ungewiß. Es sey z. B. der Ausdruck

druck

drück  $y d d x - x d d y$  gegeben, so daß derselbe kein beständiges Differenzial enthalte. Um zu erforschen, ob derselbe eine gewisse Bedeutung habe, setze man  $d x$  beständig, wodurch man dafür  $- x d d y$  erhält. Hierauf setze man nach der Regel des vorhergehenden §. für  $d d y$  wieder  $d d y - \frac{d y d d x}{d x}$ , so findet man  $- x d d y + \frac{x d y d d x}{d x}$ , und da dieser Ausdruck von dem gegebenen verschieden ist, so ist solches ein Zeichen, daß dieser keine gewisse Bedeutung hat.

§. 278.

Auf eine ähnliche Art lassen sich, wenn ein allgemeiner Ausdruck von dieser Form  $P d d x + Q d x d y + R d d y$  gegeben ist, die Bedingungen untersuchen, unter welchen derselbe, ohne Annahme eines beständigen Differenzials, einen gewissen Werth hat. Setzt man nemlich  $d x$  beständig, so erhält man dafür:  $Q d x d y + R d d y$ ; und verwandelt man diesen Ausdruck in einen andern immer dasselbe bedeutenden, obgleich dabey kein Differenzial beständig angenommen wird:

so findet man  $Q d x d y + R d d y - \frac{R d y d d x}{d x}$ , und dieser Ausdruck wird dem gegebenen gleich seyn, wenn  $P d x + R d y = 0$  ist, und nur in diesem Falle ist also die Bedeutung jenes Ausdrucks gewiß. Wenn aber nicht  $P = - \frac{R d y}{d x}$ , oder nicht

$R = - \frac{P d x}{d y}$  ist, so hat der gegebene Ausdruck  $P d d x + Q d x d y + R d d y$  keinen gewissen Werth, sondern es ist die Bedeutung desselben schwankend und verschieden, je nach dem dieses oder ein anderes Differenzial als beständig angenommen wird.

## §. 279.

Nach diesen Grundlehren ist es leicht, einen Differenzial-Ausdruck, worin irgend ein Differenzial beständig angenommen worden ist, in einen andern zu verwandeln, bey welchem ein anderes beständiges Differenzial zum Grunde liegt. Man hat zu dem Ende nur nöthig, den gegebenen Ausdruck in einen solchen zu verwandeln, in welchem kein Differenzial beständig ist, und darauf das andere Differenzial als beständig zu betrachten. Ist z. B. in dem gegebenen Ausdrucke das Differenzial  $dx$  beständig, und soll derselbe in einen andern Ausdruck verwandelt werden, in welchem das beständige Differenzial  $dy$  enthalten sey: so lege man in den nach dem Obigen für  $d^2y$  und  $d^3y$  zu substituierenden Formeln, weil  $dy$  beständig ist,  $d^2y = 0$ ,  $d^3y = 0$ , und dann wird dem Verlangten ein Genüge geschehen, wenn man  $-\frac{dy ddx}{dx}$  für  $d^2y$ , und  $\frac{3dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx}$  für  $d^3y$  setzt. Auf diese Art wird die Formel  $-\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$  worin  $dx$  beständig ist, in diese,  $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy ddx}$  verwandelt, worin  $dy$  als eine beständige Größe enthalten ist.

## §. 280.

Wenn hingegen eine Formel, worin  $dy$  beständig ist, in eine andere verwandelt werden soll, worin  $dx$  beständig ist, so muß man  $-\frac{dx ddy}{dy}$  anstatt  $d^2x$ , und  $\frac{3dx ddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy}$  anstatt  $d^3y$  setzen. Soll eine Formel, worin  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  beständig ist, in eine andere verwandelt werden,

den,

den, worin  $dx$  beständig ist, so muß man  $-\frac{dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$  für

$ddx$ , und  $\frac{dx^2 ddy}{dx^2 + dy^2}$  für  $ddy$  setzen. Soll hingegen

eine Formel, worin  $dx$  beständig ist, in eine andere verwandelt werden, worin  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  beständig ist, so muß man, weil, wenn  $dx^2 + dy^2$  beständig ist,  $dx ddx + dy ddy$

$= 0$ , und  $ddx = -\frac{dy ddy}{dx}$  wird,  $-\frac{dy ddy}{dx}$  für  $ddx$ ,

und  $ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2) ddy}{dx^2}$  für  $ddy$  setzen.

Auf diese Art wird die Formel  $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx ddy}$ , worin  $dx$

beständig ist, in eine andere verwandelt, worin  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

beständig ist, nemlich in  $-\frac{dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddy}$ .





## Neuntes Capitel.

### Von den Differenzial-Gleichungen.

§. 281.

Die Absicht dieses Capitel's ist vorzüglich die Erklärung der Differenziation solcher Funktionen von  $x$ , die nicht entwickelt, sondern in einer Gleichung, welche das Verhältniß der Funktion  $y$  zu  $x$  ausdrückt, gegeben sind; worauf denn ferner die Natur der Differenzial-Gleichungen allgemein untersucht, und ihre Entstehungsart aus endlichen Gleichungen beschrieben soll. Denn da das Hauptgeschäfte der Integral-Rechnung in der Integration der Differenzial-Gleichungen besteht, d. h. in der Erfindung solcher endlichen Gleichungen, die zu den Differenzial-Gleichungen passen: so ist nothwendig, daß wir hier die Natur und Eigenschaften der Differenzial-Gleichungen, die aus der Entstehungsart derselben fließen, sorgfältig untersuchen, und so den Weg zur Integral-Rechnung bahnen.

§. 282.

Es sey also  $y$  eine solche Funktion von  $x$ , als durch diese quadratische Gleichung bestimmt wird,  $yy + Py + Q = 0$ . Da der Ausdruck  $yy + Py + Q = 0$  ist,  $x$  mag bedeuten, was es will, so wird derselbe auch  $= 0$  seyn, wenn man  $x + dx$  für  $x$  setzt, in welchem Falle denn  $y$  in  $y + dy$  übergeht. Hat man aber diese Substitution vorgenommen, so bleibt, wenn man von der gefundenen Größe  $yy + Py + Q$  abzieht,

abzieht, das Differenzial dieser letzten Größe übrig, welches daher ebenfalls = 0 ist. Hieraus erhellet, daß das Differenzial eines Ausdrucks, der = 0 ist, ebenfalls = 0 ist, und daß, wenn zwey Ausdrücke einander gleich sind, auch ihre Differenzialien einander gleich seyn müssen. Da also

$$yy + Py + Q = 0 \text{ ist, so ist auch}$$

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0;$$

und da P und Q Funktionen von x sind, so werden ihre Differenzialien die Form haben, daß

$$dP = p dx, \text{ und } dQ = q dx$$

ist, und daher wird

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0,$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{yp - q}{2y + P}$$

§. 283.

So wie daher eine endliche Gleichung,  $yy + Py + Q = 0$  das Verhältniß zwischen y und x ausdrückt, so drückt eine Differenzial-Gleichung das Verhältniß aus, in welchem

dy zu dx steht. Da aber  $\frac{dy}{dx} = - \frac{yp - q}{2y + P}$  ist; so kann

man über das Verhältniß dy : dx nicht eher urtheilen, als bis y bekannt ist. Dieß muß nothwendig so seyn. Denn wenn y aus der endlichen Gleichung einen doppelten Werth erhält, so hat auch ein jeder derselben sein besonderes Differenzial, und man findet das eine oder das andere, je nachdem man den einen oder den andern Werth von y in den Ausdruck

$- \frac{yp - q}{2y + P}$  setzt. Auf eine ähnliche Art erhält  $\frac{dy}{dx}$ , wenn

y durch eine cubische Gleichung bestimmt wird, einen dreyfachen Werth, nach dem dreyfachen Werthe nemlich von y.

Q 3

hat

Hat  $y$  in der gegebenen Gleichung vier oder mehr Dimensionen, so muß auch  $\frac{dy}{dx}$  nothwendig eben so viel Bedeutungen bekommen.

## §. 284.

Es kann indeß auch die Funktion  $y$  selbst aus der Gleichung weggeschafft werden, weil man zwey Gleichungen hat, die  $y$  enthalten, eine endliche nemlich und eine Differenzialgleichung; alsdenn aber steigt das Differenzial  $dy$  zu eben so viel Dimensionen auf, als vorher  $y$  hatte, und es begreift also die Gleichung, welche man durch die Elimination findet, alle verschiedene Verhältnisse von  $dy$  und  $dx$  zugleich. Wir wollen zum Beispiele die vorhergehende Gleichung  $yy + Py + Q = 0$  nehmen, deren Differenzial  $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$  ist, woher denn  $y = -\frac{Pdy + dQ}{2dy + dP}$  wird.

Setzt man nun diesen Werth anstatt  $y$  in die vorhergehende Gleichung, so wird

$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0$ ,  
wovon die Wurzeln sind

$$dy = -\frac{1}{2}dP \pm \frac{(\frac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{PP - 4Q}}$$

und diese Wurzeln sind die beyden Differenzialien der beyden Werthe von  $y$  aus der endlichen Gleichung, oder von

$$y = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{PP - 4Q},$$

## §. 285.

Hat man den Werth von  $dy$  gefunden, so findet man durch wiederholte Differenziation den Werth von  $d^2y$ , und so auch ferner von  $d^3y$ ,  $d^4y$  u. Da aber diese Werthe ungewiß sind, wosfern nicht ein erstes Differenzial als beständig ange-

angenommen wird, so wollen wir der größern Bequemlichkeit wegen  $dx$  beständig seyn lassen, und zur Erklärung der dabey zu beobachtenden Verhaltungsart dies Beispiel  $y^3 + x^3 = 3axy$  betrachten. Hieraus erhält man nun, wenn man differenziert

$$3yydy + 3xxdx = 3axy + 3aydx, \text{ und also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$$

Nun nehme man abermals die Differenzialien, und behandle dabey  $dx$  als beständig, so findet man

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{aaydy - aaxydy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

und wenn man für  $dy$  seinen so eben gefundenen Werth  $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$  setzt, und durch  $dx$  dividirt, so wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

oder

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3} = -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

weil aus der endlichen Gleichung  $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$  folgt. Und auf diese Weise können diese Werthe vermittelst der endlichen Gleichung unzählige Formen erhalten.

§. 286.

Auch die erste Differenzial-Gleichung kann auf unzählige Arten verändert werden, indem man sie mit der endlichen Gleichung vermischt. So erhält man, da bey dem vorhergehenden Exempel gefunden wurde,

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

wenn man diese Gleichung durch  $y$  multiplicirt,

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx;$$

24

und

und wenn man hierin für  $y^3$  seinen Werth  $3axy - x^3$  setzt, so bekommt man diese neue Gleichung

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

und multiplicirt man diese abermals durch  $y$ , und setzt dars auf wieder den Werth desselben, so wird

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Ueberhaupt aber wird, wenn  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Funktionen von  $x$  und  $y$  bedeuten, und man die Differenzial-Gleichung durch  $P$  multiplicirt,

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Da nun  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ist, so ist auch

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0.$$

Addirt man aber diese beyden Gleichungen zu einander, so geben sie eine allgemeine aus der gegebenen endlichen Gleichung entstandenen Differenzial-Gleichung,

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy + Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

## §. 287.

Es lassen sich aber auch durch die Differenziation selbst unzählige Differenzial-Gleichungen aus einer und derselben endlichen Gleichung finden, wenn man dieselbe, bevor man sie differenzirt, durch irgend eine Größe multiplicirt oder dividirt. Ist z. B.  $P$  irgend eine Funktion von  $x$  und  $y$ , so daß  $dP = pdx + qdy$  ist: so erhält man, wenn man die endliche Gleichung durch  $P$  multiplicirt, und dann erst differenzirt, eine allgemeine Differenzial-Gleichung, die unendlich viele Formen annehmen kann, je nachdem für  $P$  diese oder jene Funktion angenommen wird. Diese Menge und Mannigfaltigkeit wird indeß noch unendlich vermehrt, wenn man zu der gefundenen Differenzial-Gleichung die endliche Gleichung, durch eine Formel wie diese,  $Qdx + Rdy$ , multiplicirt,

tiplicirt, addirt, wobey man denn für Q und R nach Gefallen jede Funktion von x und y annehmen kann. Obnerachtet aber in allen diesen Gleichungen das Verhältniß zwischen dx und dy, welches das Differenzial der Funktion y, die durch eine endliche Gleichung durch x bestimmt ist, zu dx hat, begriffen ist, so erstrecken sie sich doch gewöhnlicher Weise viel weiter, und drucken zugleich das Verhältniß des Differenzials von y aus, wenn es durch andere endliche Gleichungen bestimmt ist. Der Grund hiervon kann erst in der Integral-Rechnung erklärt werden.

§. 288.

Es lassen sich aber nicht nur aus einer und derselben Gleichung unzählige Differenzial Gleichungen ableiten, sondern es lassen sich auch sehr viele ja unzählige endliche Gleichungen angeben, die insgesammt auf eben dieselbe Differenzial-Gleichung führen. So sind z. B. diese beyden Gleichungen  $yy = ax + ab$ , und  $yy = ax$  allerdings verschieden, indem man in der ersten jede beständige Größe für b setzen kann. Wenn man indeß beyde Gleichungen differenziirt, so erhält man nicht mehr als eine Differenzial-Gleichung, nemlich  $2ydy = adx$ ; ja es können alle, unter der Form  $yy = ax$  begriffene Gleichungen, was auch a für einen Werth haben mag, in eine Differenzial-Gleichung, die a nicht enthält, zusammengefaßt werden. Denn dividirt man jene Gleichung durch x, so bekommt man  $\frac{yy}{x} = a$ , und diese giebt, wenn man sie differenziirt,  $2xydy - ydx = 0$ . Auch können transcendente und algebraische Gleichungen auf einerley Differenzial-Gleichungen gebracht werden, so wie solches bey den Gleichungen

$$yy - ax = 0, \text{ und } yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$$

2 5 statt

statt findet. Denn dividirt man beyde Gleichungen durch  $\frac{x}{e^a}$ , wodurch dieselben in

$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0$ , und  $e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb$  verwandelt werden: so findet man aus beyden die einzige Differenzial-Gleichung

$$2ydy - a dx - \frac{yy dx}{a} + x dx = 0.$$

## §. 289.

Der Grund dieser Verschiedenheit liegt darin, weil das Differenzial einer beständigen Größe  $= 0$  ist. Wenn daher eine endliche Gleichung auf eine solche Form gebracht wird, daß darin irgend eine beständige Größe allein, und nicht durch eine veränderliche Größe multiplicirt oder dividirt, vorkommt: so findet man durch die Differenziation eine Gleichung, in welcher jene beständige Größe gar nicht enthalten ist. Auf diese Art kann eine jede beständige Größe, die in einer endlichen Gleichung befindlich ist, durch die Differenziation weggebracht werden. Ist z. B. die Gleichung  $x^3 + y^3 = 3axy$  gegeben, so verwandelt sich dieselbe, wenn man sie durch  $xy$  dividirt, in  $\frac{x^3 + y^3}{xy} = a$ , und differenziirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$2x^3y dx + 2xy^3 dy - x^4 dy - y^4 dx = 0,$$

worin die beständige Größe  $a$  nicht mehr enthalten ist.

## §. 290.

Wenn mehrere beständige Größen, die sich in einer Gleichung finden, aus derselben weggeschafft werden sollen, so geschieht solches durch eine zwey oder mehreremal wiederholte

berholte Differenziation, und so erhält man endlich Differenzial-Gleichungen von einem höhern Grade, in welchen jene beständige Größen nicht mehr enthalten sind. Es sey die Gleichung  $yy = maa - nxx$  gegeben, um daraus durch die Differenziation  $m$  und  $n$  wegzuschaffen. Die erste fällt durch die erste Differenziation weg, wodurch  $2y dy + 2nxdx = 0$  wird. Hieraus formire man nun die Gleichung  $\frac{y dy}{x dx} + n = 0$ , die, wenn man  $dx$  beständig nimmt, von neuem differenziert, folgende giebt:

$$xyddy + xdy^2 - ydx dy = 0.$$

Obgleich diese Gleichung keine beständige Größe enthält, so begreift sie doch alle unter der Form  $yy = maa - nxx$  enthaltene Gleichungen unter sich, es mag den Buchstaben  $m$ ,  $a$  und  $n$  ein Werth beygelegt werden, was für einer man will.

§. 291.

Es lassen sich aber nicht bloß die beständigen Größen, die in einer endlichen Gleichung vorkommen, durch die Differenziation wegschaffen, sondern man kann dieses auch mit der einen veränderlichen Größe thun, mit derjenigen nemlich, deren Differenzial beständig angenommen wird. Sucht man nemlich aus der zwischen  $x$  und  $y$  gegebenen Gleichung den Werth von  $x$ , so daß  $x = Y$  wird, wenn  $Y$  eine Funktion von  $y$  bedeutet: so wird  $dx = dY$ , und nimmt man  $dx$  beständig, so wird bey wiederholter Differenziation  $0 = ddY$ . Ist hingegen  $xx + ax + b = Y$ , so wird bey dreymaliger Differenziation  $0 = d^3Y$ , und die Gleichung  $x^3 + axx + bx + c = Y$  giebt auf ähnliche Art, viermal differenziert,  $d^4Y = 0$ . Ob aber gleich in diesen Gleichungen nur eine veränderliche Größe zu seyn scheint, die eben

dadurch

dadurch aufhören würde, eine veränderliche Größe zu seyn, weil in keiner Gleichung nur eine veränderliche Größe seyn kann: so muß man gleichwohl, weil man das Differenzial  $dx$  beständig angenommen hat, und darauf in der Gleichung Rücksicht genommen werden muß, im Grunde annehmen, daß es in der Gleichung befindlich sey. Man hat sich daher auch nicht zu verwundern, wenn bisweilen Differenzial-Gleichungen vom zweyten oder noch höhern Grade vorkommen, die nur eine veränderliche Größe zu enthalten scheinen.

## §. 292.

Vorzüglich aber ist zu merken, daß man durch die Differenziation die irrationalen und transcendenten Größen aus einer Gleichung wegschaffen kann. Was die irrationalen Größen betrifft, so wird, wenn man durch die bekannten Reductionen die Irrationalität weggebracht hat, und nun differenziert, die Gleichung von aller Irrationalität frey. Es kann aber dies öfters viel bequemer ohne die gedachte Reduction geschehen, indem man, wenn nur eine Irrational-Größe da ist, dieselbe durch die Vergleichung der Differenzial-Gleichung mit der endlichen Irrational-Formel wegschaffen kann. Wenn aber in der endlichen Gleichung zwey oder mehrere irrationale Theile enthalten sind, so darf man nur die Differenzial-Gleichung davon von neuem differenzieren, und auf diese Art so viel Differenzial-Gleichungen höherer Grade suchen, als erforderlich sind, um alle irrationalen Theile wegzuschaffen. Auf diese Art können auch die unbestimmten und gebrochenen Exponenten weggebracht werden. Ist z. B.  $y^m = (aa - xx)^n$ , so erhält man durch die Differenziation,

$$m y^{m-1} dy = - 2n(aa - xx)^{n-1} x dx,$$

und

und hieraus durch die Division durch die endliche Gleichung

$$\frac{m dy}{y} = - \frac{2n x dx}{aa - xx}$$

worin kein unbestimmter Exponent mehr enthalten ist. Hieraus erhellet, daß eine von aller Irrationalität befreyte Differenzial-Gleichung aus einer endlichen irrationalen und selbst transcendente Größen enthaltenden Gleichung entstanden seyn kann.

§. 293.

Um aber zu zeigen, wie die transcendenten Größen durch die Differenziation weggeschafft werden, so wollen wir von den Logarithmen anfangen, bey welchen dieses Geschäfte keine Schwierigkeit hat, da die Differenzialien der Logarithmen algebraische Größen sind. Ist nemlich  $y = x^l x$ , so ist

$\frac{y}{x} = l x$ , und daraus findet man durch die Differenziation

$$\frac{x dy - y dx}{xx} = \frac{dx}{x}, \text{ und es ist folglich } x dy - y dx =$$

$x dx$ . Sind zwey Logarithmen da, so ist eine zweyte Differenziation nöthig. Ist z. B.  $y^l x = x^l y$ , so ist  $\frac{y^l x}{x} = l y$ ,

und daraus erhält man durch die Differenziation

$$\frac{x dy^l x + y dx - y dx^l x}{xx} = \frac{dy}{y},$$

so wie sich hieraus  $l x = \frac{xx dy - yy dx}{yx dy - yy dx}$  ergibt. Nun

differenzire man von neuem so, daß man  $dx$  beständig seyn läßt, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{xx ddy + 2x dx dy - 2y dx dy}{yx dy - yy dx} + \frac{(yy dx - xx d) yx ddy + x dv^2 - v dx dv}{(yx dy - yy dx)^2}$$

oder

oder

$$\frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} y^3 dx ddy - yyxx dddy + 3yxx dx dy^2 - y^2 x dx dy^2 \\ + y^3 dx^2 dy - 2xyy dx^2 dy - x^3 dy^3 \end{array} \right\} : yx dy - yy dx^2.$$

Hieraus aber wird, wenn man diese Gleichung reducirt,

$$y^3 x dx ddy - yyxx dddy + 3yxx dx dy^2 - 2xyy dx^2 dy^2 \\ + 3y^3 dx^2 dy - 2xyy dx^2 dy - x^3 dy^3 - \frac{y^4 dx^3}{x} = 0,$$

oder

$$yyxx(y-x) dx ddy + 3yxx dx dy (xx dy + yy dx) \\ - 2xyy dx^2 dy (dx + dy) = x^4 dy^3 + y^4 dx^3.$$

§. 294.

Die Exponential-Größen werden aus den Gleichungen auf eben die Art wie die Logarithmen durch die Differentiation weggeschafft. Ist z. B. die Gleichung  $P = e^Q$  gegeben, wo P und Q jede Funktion von x und y bedeuten können: so läßt sich diese Gleichung in folgende logarithmische Gleichung  $1P = Q$  verwandeln, deren Differential-Gleichung  $\frac{dP}{P} = dQ$ , oder  $dP = PdQ$  ist. Auch hindert das nichts, wenn die Exponential-Größen mehr zusammen gesetzt sind; denn wenn eine Differentiation nicht hinreicht, so erreicht man doch durch zwey oder mehrere seinen Endzweck.

I. Ist  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ , so multiplicire man den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch  $e^x$ . Hierdurch wird  $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ , und also  $e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$ , und  $2x = 1 \frac{y+1}{y-1}$ .

Hiervon ist aber das Differential  $dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}$ .

II. Ist

II. Ist  $y = 1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , so findet man durch die erste

Differenziation  $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$ , oder  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ,

und  $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$ , und folglich  $2x = 1 - \frac{dy + dx}{dx - dy}$ .

Nimmt man also  $dx$  beständig an, so wird  $dx = \frac{dx ddy}{dx^2 - dy^2}$ ,

oder  $dx^2 = ddy + dy^2$ .

§. 295.

Auf eine ähnliche Art werden auch die transcendenter Größen, die vom Kreise abhängen, aus den Gleichungen, vermittelt der Differenziation, weggeschafft; wie folgende Beispiele zeigen werden.

I. Wenn  $y = a \Delta \cdot \sin. \frac{x}{a}$  ist; so ist  $dy = \frac{a dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ .

II. Wenn  $y = a \text{ cof. } \frac{y}{x}$  ist; so ist  $\frac{y}{a} = \text{cof. } \frac{y}{x}$  und

$\frac{dy}{a} = - \frac{xdy + ydx}{xx} \times \sin. \frac{y}{x}$ . Da aber  $\text{cof. } \frac{y}{x} = \frac{y}{a}$  ist,

so ist  $\sin. \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a}$ , und gebraucht man diesen

Werth, so wird  $\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(aa - yy)}}{axx}$  oder

$xxdy = (ydx - xdy)\sqrt{(aa - yy)}$ .

III. Wenn  $y = m \sin. x + n \text{ cof. } x$  ist, so ist nach der ersten Differenziation  $dy = m dx \cdot \text{cof. } x - n dx \cdot \sin. x$ . Hieraus findet man, wenn man von neuem differenziert und  $dx$  beständig annimmt,

$d dy = - m dx^2 \cdot \sin. x - n dx^2 \cdot \text{cof. } x$ ,

und

und diese Gleichung, durch die erste dividirt, giebt

$$\frac{ddy}{y} = - dx^2, \text{ oder } ddy \dagger ydx^2 = 0.$$

so daß also hier nicht bloß der Sinus und Cosinus, sondern auch die beständigen Größen  $m$  und  $n$  verschwunden sind.

IV. Wenn  $y = \sin. lx$  ist, so ist  $A. \sin. y = lx$ , und hieraus erhält man durch die Differenziation  $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$

$$= \frac{dx}{x}. \text{ Nimmt man hiervon die Quadrate } xx dy^2 =$$

$dx^2 - yy dx^2$ , und differenziirt nun wieder, so daß man  $dx$  beständig seyn läßt, so wird

$$2xx dy ddy \dagger 2x dx dy^2 = - 2y dx^2 dy$$

oder

$$xx ddy \dagger x dx dy \dagger y dx^2 = 0.$$

V. Wenn  $y = a e^{mx} \sin. nx$  ist, so wird durch die Differenziation

$$dy = m a e^{mx} dx \sin. nx \dagger n a e^{mx} dx \cos. nx$$

und hieraus durch die Division mit der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dy}{y} = m dx \dagger \frac{ndx \cdot \cos. nx}{\sin. nx} = m dx \dagger ndx \cdot \cot. nx.$$

Es ist also  $A. \cot. \left( \frac{dy}{ny dx} - \frac{m}{n} \right) = nx$ . Differenziirt man nun diese Gleichung, so daß man  $dx$  beständig seyn läßt, so wird

$$ndx = \frac{ndx dy^2 - ny dx ddy}{m^2 y^2 dx^2 \dagger n^2 y^2 dx^2 - 2m y dx dy}, \text{ oder}$$

$$(m^2 \dagger n^2) y^2 dx^2 - 2m y dx dy = dy^2 - y ddy.$$

Es erhellet hieraus, daß eine Differenzial-Gleichung, wenn sie auch gleich keine transcendenten Größen enthält, doch aus

aus

aus einer endlichen Gleichung entstehen kann, die transcendente Größen jeder Art enthält.

§. 296.

Da also die Differenzial-Gleichungen sowohl des ersten als jedes höhern Grades, welche zwey veränderliche Größen  $x$  und  $y$  enthalten, aus endlichen Gleichungen entspringen: so wird durch sie ebenfalls ein Verhältniß zwischen jenen zwey veränderlichen Größen ausgedruckt. Ist nemlich irgend eine Differenzial-Gleichung, worin zwey veränderliche Größen  $x$  und  $y$  vorkommen, gegeben, so wird dadurch ein gewisses Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  ausgedruckt, nach welchem  $y$  eine gewisse Funktion von  $x$  ist. Daher erkennet man die Natur der Differenzial-Gleichung, wenn man für  $y$  die Funktion von  $x$  angeben kann, welche durch jene Gleichung angezeigt wird, oder welche so beschaffen ist, daß sich, wenn man dieselbe allenthalben anstatt  $y$ , ihr Differenzial anstatt  $dy$ , und ihre höhern Differenzialien anstatt  $ddy$ ,  $d^3y$ ,  $d^4y$  setzt, eine identische Gleichung ergibt. Mit der Erfindung dieser Funktion beschäftigt sich die Integral-Rechnung, deren Endzweck ist, aus jeder gegebenen Differenzial-Gleichung die Funktion von  $x$ , welcher die andere veränderliche Größe gleich ist, zu finden, oder welches einerley ist, die endliche Gleichung zu finden, welche das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  ausdrückt.

§. 297.

Es sey z. B. die Differenzial-Gleichung

$$2ydy - a dx - \frac{yy dx}{a} + x dx = 0$$

gegeben, welche wir §. 288 gefunden haben, und wodurch ein solches Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  ausgedruckt  
Eulers Differenz. Rechn. I. Th. R wird,

wird, als in folgender endlichen Gleichung  $yy - ax =$

$\frac{x}{bbe^a}$  zum Grunde liegt. Da also aus dieser Gleichung

$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}$  ist, so erhellet, daß  $\sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})}$   
 $= y$  die Funktion von  $x$  ist, der die veränderliche Größe  $y$   
 vermöge der Differenzial-Gleichung gleich ist. Denn wenn

man in dieser Gleichung anstatt  $yy$  seinen Werth  $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$

und anstatt  $2ydy$  sein Differenzial  $a dx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$  setzt, so

erhält man diese identische Gleichung:

$$a dx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - a dx - x dx - \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + x dx = 0.$$

Auf diese Art erhellet, daß jede Differenzial-Gleichung eben  
 so als eine endliche Gleichung ein bestimmtes Verhältniß  
 zwischen den Größen  $x$  und  $y$  anzeigt, welches aber nicht an-  
 ders als vermittelt der Integral-Rechnung erforscht wer-  
 den kann.

## §. 298.

Um dies deutlicher zu machen, wollen wir annehmen,  
 daß die Funktion von  $x$ , der  $y$  vermöge der Differenzial-  
 Gleichung gleich ist, bekannt sey, wobey denn die Differenzial-  
 Gleichung zum ersten oder zu einem höhern Grade ge-  
 hören kann. Ferner sey  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ ,  
 ic., so daß also, wenn man  $dx$  beständig annimmt,  $d^2y =$   
 $q dx^2$ ,  $d^3y = r dx^3$  ic. werde. Setzt man diese Werthe in  
 die Gleichung, so verschwinden daraus weil alle ihre Glieder  
 homogen sind, die Differenzialien  $dx$  durch die Division,  
 und es entsteht eine Gleichung, welche bloß die endlichen  
 Größen

Größen  $x, y, p, q, r, \text{ic.}$  enthält. Da nun  $p, q, r$  Größen sind, die von der Natur der Funktion  $y$  abhängen, so enthält die Gleichung eigentlich nur die veränderlichen Größen  $x$  und  $y$ , und so erhellet wiederum, daß eine jede Differenzial-Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen den veränderlichen Größen  $x$  und  $y$  ausdrücke. Wenn man daher bey der Auflösung einer Aufgabe auf eine Differenzial-Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  kommt, so ist dadurch das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  eben so bestimmt, als wenn man eine endliche Gleichung gefunden hätte.

§. 299.

Auf diese Art kann daher jede Differenzial-Gleichung auf eine endliche Form gebracht werden, worin bloß endliche Größen enthalten, und woraus alle Differenzialien oder unendlich kleine Größen weggebracht sind. Denn da  $y$  eine Funktion von  $x$  ist, so werden, wenn man

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \quad dq = r dx; \quad \text{ic.}$$

setzt, man mag ein Differenzial, was für eins man will, beständig annehmen, die zweyten und höhern Differenzialien durch die Potestäten von  $dx$  ausgedruckt, und darauf durch die Division gänzlich weggebracht. Wäre z. B. die Gleichung

$$xy d^3 y + xx dy ddy + yy dx ddy - xy dx^3 = 0,$$

worin  $dx$  beständig ist, gegeben: so würde sich dieselbe, wenn man  $dy = p dx, dp = q dx, dq = r dx$ , setzte, und die ganze Gleichung durch  $dx^3$  dividirte, in

$$xyr + xypq + yyq - xy = 0.$$

verwandeln, und diese endliche Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$ .

## §. 300.

Es werden also alle Differenzial-Gleichungen, zu was für einer Ordnung sie auch gehören mögen, durch diese Substitutionen

$$dy = p dx; \quad dp = q dx; \quad dq = r dx; \quad \text{ic.}$$

auf bloße endliche Größen reducirt. Und wenn die gegebene Differenzial-Gleichung zur ersten Ordnung gehört, so daß also nur die ersten Differenzialien in ihr befindlich sind, so wird durch die gedachte Reduktion außer den veränderlichen Größen  $x$  und  $y$  noch die Größe  $p$  eingeführt. Gehört hingegen die Differenzial-Gleichung zum zweiten Grade, oder enthält sie zweyte Differenzialien, so kommt außerdem noch die Größe  $q$ , und gehört sie zum dritten Grade, so kommt noch die Größe  $r$  dazu u. s. f. Da also auf diese Art die Differenzialien gänzlich aus dem Calcul wegfallen, so hat man auch nicht weiter nöthig, ein Differenzial als beständig zu betrachten, und es bedarf daher, obgleich die aus den zweyten Differenzialien entspringenden Größen,  $q, r, s, \text{ic.}$  da sind, keiner Anzeige, welches Differenzial beständig angenommen worden sey. Denn es ist gleich, ob man bey der Entwicklung ein beständiges Differenzial annimmt oder nicht.

## §. 301.

Wenn also eine Differenzial-Gleichung vom zweiten oder einem noch höhern Grade gegeben wird, von der angezeigt ist, daß dabey kein erstes beständiges Differenzial zum Grunde liege: so kann man auf diese Art so gleich erforschen, ob sie ein bestimmtes Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  enthalte oder nicht? Denn da kein beständiges Differenzial angenommen worden ist, so steht es bey uns, welches wir als beständig betrachten wollen, und es kommt daher bloß darauf an, daß wir untersuchen, ob die Gleichung auch, wenn man ver-

schiedene

schiedene Differenzialien beständig seyn läßt, eben dasselbe Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  enthalte. Ist dies nicht, so ist solches ein untrügliches Kennzeichen, daß die Gleichung kein bestimmtes Verhältniß ausdrückt, und daher auch bey der Auflösung der Aufgaben nicht statt haben kann. Der sicherste und leichteste Weg dieses zu erforschen ist aber der, auf welchem nach dem Obigen bey den Differenzial Formeln der höhern Ordnungen untersucht wird, ob dieselben eine gewisse Bedeutung haben oder nicht.

§. 302.

Ist also eine Differenzial-Gleichung der zwoyten oder einer höhern Ordnung gegeben, wobey kein beständiges Differenzial angenommen worden, so nehme man  $dx$  beständig an. Dann verwandele man die Gleichung auf die Art, wie bey den Differenzial Formeln gezeigt worden ist, in eine solche, die kein beständiges Differenzial voraussetzt, und

schreibe zu dem Ende  $ddy = \frac{dy ddx}{dx}$  für  $ddy$ , und  $d^3y = \frac{3 ddx ddy}{dx} + \frac{3 dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx}$  für  $d^3y$ . Ist dies

geschehen, so untersuche man, ob die gefundene Gleichung mit der gegebenen übereinstimme oder nicht. Im ersten Falle drückt die gegebene Gleichung ein bestimmtes Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  aus, im andern aber nicht, wie solches bereits ausführlich bewiesen worden ist.

§. 303.

Es sey, um dies deutlich zu machen, folgende Gleichung gegeben,

$$P ddx + Q ddy + R dx^2 + S dx dy + T dy^2 = 0,$$

und zwar unter der Bedingung, daß darin kein Differenzial

R 3 beständ

beständig sey. Setzt man  $dx$  beständig, so verwandelt sich dieselbe in

$$Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0,$$

und verwandelt man nunmehr diese gefundene Gleichung auf die vorhin beschriebene Art wieder in eine solche, wobey kein beständiges Differenzial statt findet, so wird

$$-\frac{Qdy dx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0.$$

Da nun diese Gleichung von der gegebenen bloß in Ansehung des ersten Gliedes unterschieden ist, so muß man zusehen, ob

$P = -\frac{Qdy}{dx}$  ist. Ist dies, so druckt die gegebene Gleichung

ein bestimmtes Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  aus, welches die Integral-Rechnung finden lehrt, was auch für ein erstes Differenzial als beständig angenommen wird; ist aber nicht

$P = -\frac{Qdy}{dx}$ , so ist die gegebene Gleichung unmöglich.

## §. 304.

Wobey also die Gleichung

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0.$$

nicht unmöglich ist, so ist nothwendiger Weise  $Pdx + Qdy = 0$ . Dies kann auf eine zwiefache Art geschehen. Denn

es ist entweder wirklich  $P = -\frac{Qdy}{dx}$ , oder die Gleichung

$Pdx + Qdy = 0$ ; oder es ist die Gleichung  $Pdx + Qdy = 0$

selbst die Differenzial-Gleichung des ersten Grades, durch deren Differenziation die gegebene entstanden ist. Im letz-

ten Falle stimmt die Gleichung  $Pdx + Qdy = 0$  mit der gegebenen überein, und druckt eben dasselbe Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  aus, wobey man denn dieses Verhältniß ohne

Hülfe

Hilfe der Integral-Rechnung finden kann. Da nemlich  $Pdx + Qdy = 0$  ist, so findet man, wenn man differenziert,

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

und zieht man diese Gleichung von der gegebenen ab, so bleibt

$$Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$$

übrig. Weil aber  $dy = -\frac{Pdx}{Q}$  ist, so lassen sich die Differenzialien gänzlich wegschaffen, und dadurch erhält man eine endliche Gleichung, welche das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  ausdrückt.

§. 305.

Nun wollen wir annehmen, daß man bey der Auflösung eines Problems, wobey kein Differenzial beständig angenommen worden, auf diese Gleichung gekommen sey:

$$x^3 ddx + xxyddy - yydx^2 + xx dy^2 + aadx^2 = 0.$$

Da man also weiß, daß diese Gleichung keinen Widerspruch enthalte, so ist

$$x^3 dx + xxydy = 0, \text{ oder } xdx + ydy = 0.$$

Hiervon ist nun das Differenzial

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydx dy + xxdy^2 = 0,$$

und die Differenz zwischen dieser und der gegebenen Gleichung ist

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydx dy = 0,$$

oder

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Da aber  $xdx + ydy = 0$  ist, so wird  $2xydy = -2xxdx$ , und folglich

$$aadx - yydx - xx dx = 0, \text{ oder } yy + xx = aa.$$

Diese Gleichung drückt das wahre Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  aus, indem sie mit der vorhin gefundenen Differenzial-

Gleichung  $x dx + y dy = 0$  übereinstimmt. Hätte sich diese Uebereinstimmung nicht gezeigt, so hätte man die Gleichung für unmöglich halten müssen; da sie aber hier statt fand, so haben wir die endliche Gleichung  $xx + yy = aa$  ohne die Integral-Rechnung finden können.

§. 306.

Um auch ein Beispiel einer unmöglichen Gleichung anzuführen, so sey folgende

$yy dx - xx dy + y dx^2 - x dy^2 + a dx dy = 0$   
gegeben, und dabei kein Differenzial beständig. Hier sollte nun  $yy dx - xx dy = 0$ , und also, wenn man differenziert,

$yy dx - xx dy + 2y dx dy + 2x dx dy = 0$   
seyn; woraus, wenn man diese Gleichung der gegebenen gleich setzt,

$$y dx^2 - x dy^2 + a dx dy = 2y dx dy - 2x dx dy$$

fließt. Da aber  $dy = \frac{yy dx}{xx}$  ist, so erhält man durch Weg-

schaftung der Differenzialien

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{a yy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{xx}, \text{ oder}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy.$$

Ob nun diese Gleichung mit der Differenzial-Gleichung  $yy dx - xx dy = 0$  übereinstimme, läßt sich leicht finden. Es wird nemlich, wenn man differenziert,

$$3xx dx - 3yy dy + ax dy + ay dx = 2yy dx + 4xy dy - 2xx dy - 4xy dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{9yy - ax + 4xy - 2xx}$$

und da aus jener Gleichung  $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$  ist, so müßte

3x4

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

oder

$$axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$$

seyn. Aus der zuerst gefundenen endlichen Gleichung aber ist

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

und zieht man diese Gleichung von jener ab, so wird

$$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$$

Diese Gleichung läßt sich in folgende zwey auflösen:

$$0 = y - x; \text{ und } 2yy + yx + 2xx = 0;$$

wobon die erste,  $y = x$ , zwar mit dem Differenziale  $dy = \frac{yy dx}{xx}$  bestehen kann, aber dagegen der endlichen Gleichung

widerspricht, wosern nicht entweder  $a = 0$ , oder beyde veränderliche Größen  $x$  und  $y$  beständig angenommen werden. In diesem Falle geschieht, wegen  $dx = 0$ , und  $dy = 0$  allen Differenzial-Gleichungen ein Genüge, und die gegebene Gleichung kann daher nicht bestehen.

§. 307.

Nun wollen wir auch die Differenzial-Gleichungen, die drey veränderliche Größen,  $x$ ,  $y$  und  $z$  enthalten, betrachten, welche entweder zum ersten oder zum zweyten, oder zu einem höhern Grade gehören werden. Um die Natur derselben zu untersuchen, muß man merken, daß durch die endlichen Gleichungen, die drey veränderliche Größen enthalten, das Verhältniß ausgedruckt wird, welches eine jede von diesen Größen zu den beyden übrigen hat, und es wird also das durch bestimmt, was  $z$  für eine Funktion von  $x$  und  $y$  ist. So wie daher eine solche endliche Gleichung aufgelöset wird, wenn man findet, was für eine Funktion von  $x$  und  $y$  für  $z$

K 5 gesetzt

gesetzt werden muß, wenn der Gleichung ein Genüge geschehen soll: so bestimmt auch eine Differenzial-Gleichung von drey veränderlichen Größen, was für eine Funktion die eine davon von den übrigen ist, und eine solche Gleichung ist alsdenn aufgelöset, wenn die Funktion der beyden veränderlichen Größen  $x$  und  $y$  angegeben worden ist, die anstatt der dritten  $z$  gesetzt, der Gleichung ein Genüge thut, oder sie zu einer identischen Gleichung macht. Es wird also die Differenzial-Gleichung aufgelöset, wenn entweder die Funktion von  $x$  und  $y$ , welche den Werth von  $z$  ausdrückt, bestimmt, oder eine endliche Gleichung angegeben wird, die ebenfalls den Werth von  $z$  ausdrückt.

## §. 308.

So wie aber jede Differenzial-Gleichung zweyer veränderlichen Größen immer ein bestimmtes Verhältniß zwischen diesen veränderlichen Größen ausdrückt, so kann sich bey den Differenzial-Gleichungen dreyer veränderlichen Größen ganz anders verhalten. Denn es giebt darunter Gleichungen, denen auf keine Weise ein Genüge geleistet werden kann, was man auch für eine Funktion von  $x$  und  $y$  für  $z$  setzt. So sieht man leicht, daß man für die Gleichung  $z dy = y dx$  keine einzige Funktion von  $x$  und  $y$  angeben kann, die für  $z$  gesetzt,  $z dy = y dx$  gebe, denn es fallen bey keiner die Differenzialien  $dx$  und  $dy$  weg. Auf eine ähnliche Art erhellet, daß es keine Funktion von  $x$  und  $z$  giebt, die, für  $y$  gesetzt, der Gleichung ein Genüge leiste. Denn was man auch für eine Funktion von  $x$  und  $z$  nehmen mag, so ist doch in ihrem Differenziale  $dz$  enthalten, und da dieses in der Gleichung nicht vorkommt, so kann sie auch nicht 0 werden. Es läßt sich daher keine endliche Gleichung

Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und  $z$  angeben, welche mit der Differenzial-Gleichung  $z dy = y dx$  übereinstimme.

§. 309.

Man muß daher die Differenzial-Gleichungen dreier veränderlicher Größen in imaginäre und reelle eintheilen. Imaginär ist eine Gleichung alsdenn, wenn ihr keine endliche Gleichung ein Genüge thut, so wie solches bey der eben betrachteten Gleichung  $z dy = y dx$  statt fand. Hingegen ist eine Gleichung reell, wenn sich eine ihr gleichbedeutende endliche Gleichung angeben läßt, und dieses findet statt, wenn die eine veränderliche Größe irgend einer Funktion der beyden andern gleich ist. Von dieser Art ist die Gleichung

$$z dy + y dz = x dz + z dx + x dy + y dx$$

denn sie stimmt mit dieser endlichen Gleichung

$$yz = xz + xy$$

überein, und es ist daher

$$z = \frac{xy}{y-x}$$

Diese Eintheilung der gegenwärtigen Gleichungen in imaginäre und reelle ist wohl zu merken, vorzüglich in der Integral-Rechnung; denn es würde thöricht seyn, eine Differenzial-Gleichung integriren, das heißt, eine ihr Genüge leistende endliche Gleichung suchen zu wollen, wenn es dergleichen gar nicht giebt.

§. 310.

Zuvörderst also fällt in die Augen, daß alle Differenzial-Gleichungen dreier veränderlicher Größen, worin nur die Differenzialien zweyer von diesen Größen vorkommen, imaginär und widersprechend sind. Denn angenommen, daß in einer Gleichung, welche die veränderliche Größe  $z$  enthält,

enthält, bloß die Differenzialien  $dx$  und  $dy$  befindlich seyen, so ist offenbar, daß es keine Funktion von  $x$  und  $y$  geben könne, welche für  $z$  gesetzt, eine identische Gleichung hervorbringe, denn die Differenzialien  $dx$  und  $dy$  werden auf keine Art weggeschafft. In diesen Fällen giebt es also gar keine endliche, jener Differenzialgleichung Genüge leistende, Gleichung, es müßte sich denn ein solches Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  angeben lassen, welches mit jeder Bedeutung von  $z$  bestehen könnte, wie in der Gleichung

$$z dy - z dx = y dy - x dx,$$

welcher die Gleichung  $y = x$  ein Genüge thut. Es ist aber leicht zu erforschen, in welchen Fällen dieses statt finde. Man darf nur das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$ , wenn  $z=0$  ist, aufsuchen, und dann prüfen, ob dieses Verhältniß für einen jeden Werth von  $z$  ein Genüge leiste.

## §. 311.

Es ist indeß eine Gleichung von drey veränderlichen Größen nicht bloß dann imaginär, wenn sie nur zwey Differenzialien enthält, sondern sie kann solches auch seyn, wenn gleich alle drey Differenzialien in ihr vorkommen. Um diese Fälle zu entwickeln, wollen wir annehmen, daß  $P$  und  $Q$  bloß Funktionen von  $x$  und  $y$  seyen, und daß man die Gleichung habe,

$$dz = P dx + Q dy.$$

Wenn diese Gleichung nicht imaginär ist, so ist  $z$  irgend eine Funktion von  $x$  und  $y$ , und ist das Differenzial derselben  $dz = p dx + q dy$ , so wird  $P = p$ , und  $Q = q$ . Nun haben wir aber oben gezeigt, daß  $p dx + q dy$  kein Differenzial einer Funktion von  $x$  und  $y$  seyn kann, wofern nicht

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) \text{ ist, wo, wie wir oben angenommen haben, } \left(\frac{dp}{dy}\right)$$

das

das Differenzial von  $p$ , wenn bloß  $y$  als veränderlich betrachtet wird, durch  $dy$  dividirt, bedeutet, und  $\left(\frac{dq}{dx}\right)$  auf eine ähnliche Art verstanden werden muß. Es kann daher die Gleichung  $dz = Pdx + Qdy$  nicht anders reell seyn, als wenn

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist.

§. 312.

Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit der Gleichung

$$dZ = Pdx + Qdy,$$

wenn  $Z$  irgend eine Funktion von  $z$ ,  $P$  und  $Q$  aber Funktionen von  $x$  und  $y$  bedeuten, die  $z$  nicht enthalten. Soll nemlich  $Z$  einer Funktion von  $x$  und  $y$  gleich seyn, so muß

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$
 seyn. Nach diesem Kennzeichen läßt sich

also bei jeder gegebenen in dieser allgemeinen Form enthaltenen Differenzial-Gleichung beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Auf diese Art läßt sich z. B. zeigen, daß diese Gleichung  $zdz = ydx + xdy$  reell ist. Denn da  $P = y$

$$\text{und } Q = x \text{ ist, so wird } \left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Das gegen ist diese Gleichung  $azdz = yydx + xx dy$  imaginär;

$$\text{denn hier wird } \left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y, \text{ und } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x, \text{ welche}$$

Werthe einander ungleich sind.

§. 313.

Um aber dieses Kennzeichen in seinem ganzen Umfange zu untersuchen, so seyen  $P$ ,  $Q$  und  $R$  beliebige Funktionen von

von  $x$ ,  $y$  und  $z$ ; wo denn alle Differenzial Gleichungen dreyer veränderlicher Größen, wenn sie zum ersten Grade gehören, unter dieser Form begriffen werden:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

So oft nun diese Gleichung reell ist, so ist  $z$  immer gleich einer Funktion von  $x$  und  $y$ , und sein Differenzial hat folglich diese Form:  $dz = p dx + q dy$ . Wenn daher in der gegebenen Gleichung jene Funktion von  $x$  und  $y$  für  $z$ , und  $p dx + q dy$  für  $dz$  gesetzt wird, so muß nothwendig die identische Gleichung  $0 = 0$  entstehen. Und da nun aus der gegebenen Gleichung  $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$  ist, so muß nothwendig, wenn in  $P$ ,  $Q$  und  $R$  jener Werth für  $z$  gesetzt wird  $p = -\frac{P}{R}$ , und  $q = -\frac{Q}{R}$  werden.

## §. 314.

Weil aber  $dz = p dx + q dy$  ist, so ist nach dem vorhin Bewiesenen  $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ . Da nun durch die Substitution des Werthes von  $z$  in  $x$  und  $y$ ,  $p = -\frac{P}{R}$ , und  $q = -\frac{Q}{R}$  wird, so findet man hierdurch

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

und multiplicirt man durch  $RR$ , so erhält man diese Gleichung

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Die Nenner  $dy$  und  $dx$  zeigen auch hier an, daß man bey der Differentiation der Zähler bloß die Größe als veränderlich betrachten soll, deren Differenzial in dem Nenner steht,

steht. Diese Differenziation aber  $dP$ ,  $dQ$ ,  $dR$ , lassen sich nicht eher erkennen, als bis man in den Größen  $P$ ,  $Q$  und  $R$  den gehörigen Werth für  $z$  substituirt hat. Da nun derselbe unbekannt ist, so muß man folgenden Weg einschlagen.

§. 315.

Da  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Funktionen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind, so setze man

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

$$dQ = \delta dx + \epsilon dy + \zeta dz$$

$$dR = \eta dx + \theta dy + \iota dz$$

und lasse  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\iota$ . die Funktionen bedeuten, die bey der Differenziation entstehen. Nun nehme man an, daß anstatt  $z$  allenthalben sein Werth, durch  $x$  und  $y$  ausgedruckt, gesetzt werde, und substituirt  $p dx + q dy$  für  $dz$ . Als denn wird

$$dP = (\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy$$

$$dQ = (\delta + \zeta p) dx + (\epsilon + \zeta q) dy$$

$$dR = (\eta + \iota p) dx + (\theta + \iota q) dy.$$

Aus diesen Werthen fließt nun

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

§. 316.

Da also zur Realität der Gleichung erfordert wird, daß

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

sey, so wird, wenn man die gefundenen Werthe substituirt,

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p)$$

Nun

Nun haben wir vorhin  $p = -\frac{P}{R}$ , und  $q = -\frac{Q}{R}$  gefunden, und da die Differenzialien nicht mehr in Rechnung kommen, so können diese Werthe gebraucht werden, wenn auch gleich für  $z$  sein durch  $x$  und  $y$  ausgedruckter Werth nicht gesetzt wird. Es ist daher

$$P\vartheta - \frac{PQ\zeta}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

oder

$$0 = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta).$$

Weil aber die Größen  $\beta, \delta, \gamma, \eta, \zeta, \vartheta$ , durch die Differenziation gefunden werden, so wird, wenn man die obige Bezeichnungsgart gebraucht:

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Wenn diese Eigenschaft nicht in einer Gleichung anzutreffen ist, so ist dieselbe nicht reell, sondern imaginär.

## §. 317.

Ob wir gleich diese Regel aus der Betrachtung der veränderlichen Größe  $z$  hergeleitet haben, so ist gleichwohl, da alle Größen auf gleiche Art vorkommen, offenbar, daß man bey der Betrachtung einer von den übrigen Größen eben denselben Ausdruck gefunden haben würde. Ist also irgend eine Differenzial-Gleichung des ersten Grades von drey veränderlichen Größen gegeben, so läßt sich hiernach leicht beurtheilen, ob sie reell oder imaginär ist. Man darf nemlich dieselbe nur mit der allgemeinen Form,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

vergleichen, und den Werth dieser Formel suchen:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) - R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

31

Ist dieser Werth  $= 0$ , so ist die Gleichung reell; ist er aber nicht  $= 0$ , so ist solches ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung imaginär und widersprechend ist.

§. 318.

Die gegebene Gleichung kann auch jedesmal durch die Division auf diese Form gebracht werden:

$$P dx + Q dy + dz = 0,$$

und da die vorhergehende Gleichung in diese übergeht, wenn  $R = 1$  ist, so läßt sich das gefundene Kennzeichen einfacher auf folgende Art ausdrücken:

$$P \left( \frac{dQ}{dz} \right) - Q \left( \frac{dP}{dz} \right) + \left( \frac{dP}{dy} \right) - \left( \frac{dQ}{dx} \right) = 0.$$

So oft nemlich dieser Ausdruck in der That  $= 0$  ist, so oft ist die Gleichung reell; wenn aber das Gegentheil sich ereignet, imaginär. Das letzte ist aus den bisher geführten Beweisen gewiß. Was das erste betrifft, so ließe sich noch fragen, ob eine Gleichung allezeit reell sey, wenn das gegebene Kennzeichen statt findet. Da dieses an dem gegenwärtigen Orte nicht vollständig bewiesen werden kann, sondernt der Beweis davon in die Integral-Rechnung gehört: so begnügen wir uns hier, es bloß zu behaupten; es ist aber auch daher kein Nachtheil zu besorgen, wenn etwa jemand so lange an der Wahrheit dieser Behauptung zweifeln will.

§. 319.

Es erhellet aber aus diesem Kennzeichen zuvörderst, daß, wenn in einer Gleichung  $P dx + Q dy + R dz = 0$ ,  $P$  eine Funktion von  $x$ ,  $Q$  eine Funktion von  $y$ , und  $R$  eine Funktion

Eulers Differenz. Rechn. 1. Th. S tion

tion von  $z$  allein ist, die Gleichung allezeit reell seyn wird. Denn es wird alsdann

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0;$$

## §. 320.

Wenn aber, wie vorhin,  $P$  bloß von  $x$ , und  $Q$  bloß von  $y$ ,  $R$  hingegen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  irgend eine Funktion ist: so wird die Gleichung reell seyn, wenn

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ oder } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

ist. Ist z. B. die Gleichung

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0$$

gegeben, so wird, weil hier  $P = \frac{2}{x}$ ,  $Q = \frac{3}{y}$  und  $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$ ,

und hieraus  $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$ , und  $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3x^2y^2}{z^6}$  ist,

$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xy^2}{z^6}$ , und es ist also die gegebene reell.

## §. 321.

Wenn  $P$  und  $Q$  Funktionen von  $x$  und  $y$ ,  $R$  hingegen bloß von  $z$  eine Funktion ist, so ist, wegen  $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0;$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right)$$

$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0$ ;  $\left(\frac{dR}{dx}\right) = 0$  und  $\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0$ , die Gleichung  
 reell, wenn  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$  ist. Eben diese Bedingung  
 aber wird erfordert, wenn  $Pdx + Qdy$  ein bestimmtes Dif-  
 ferenzial, oder aus der Differenziation irgend einer endlichen  
 Funktion von  $x$  und  $y$  entstanden seyn soll. Hierauf läuft das  
 hinaus, was wir oben §. 312. bereits angemerkt haben, nem-  
 lich, daß die Gleichung  $dZ = Pdx + Qdy$ , wenn  $Z$  bloß  
 von  $z$ ,  $P$  und  $Q$  aber von  $x$  und  $y$  Funktionen sind, nicht  
 reell seyn kann, wofern nicht  $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$  ist. Beide  
 Fälle stimmen aber völlig mit einander überein, denn an-  
 statt  $Rdz$  kann man, wenn  $R$  eine Funktion von  $z$  allein ist,  
 $dZ$  setzen, wenn  $Z$  eine Funktion von  $z$  ist.

§. 322.

Um dieses Kennzeichen durch ein Beispiel zu erläutern,  
 so sey die Gleichung gegeben:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy + (4x^2y^2 - 6xyz^2)dz = 0.$$

Vergleicht man dieselbe mit der allgemeinen Form, so  
 wird

$$P = 6xy^2z - 5yz^3; \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2.$$

$$Q = 5x^2yz - 4xz^3; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2.$$

§ 2

R =

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

Hat man diese Werthe gefunden, so wird die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält, folgende:

$$\dagger(6xy^2z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz) \dagger (5x^2yz - 4xz^3)(2xyy \dagger 9yzz) \\ \dagger (4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so heben sich alle Glieder einander auf, und es wird  $0=0$ , welches anzeigt, daß die Gleichung reell ist.

## §. 323.

Wenn aber der Ausdruck, der auf diese Art aus dem Kennzeichen hergeleitet worden ist, nicht verschwindet, so dient dies zur Anzeige, daß die gegebene Gleichung imaginär ist. Da man aber auf diese Art aus dem Kennzeichen eine endliche Gleichung findet, so zeigt dieselbe, wenn sie mit der Differenzial Gleichung übereinstimmt, zugleich das Verhältniß an, welches die veränderlichen Größen zu einander haben. Und auf diese Art werden die Fälle, deren wir oben §. 310. Erwähnung gethan haben, entwickelt. Es sey die Gleichung

$$(z - x)dx \dagger (y - z)dy = 0$$

gegeben. Hier wird  $P = z - x$ ;  $Q = y - z$ ; und  $R = 0$ ,

ferner  $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$  und  $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$ . Ferner wird die

Gleichung, welche das Kennzeichen enthält,  $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) =$

$Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$ , oder  $z - x = z - y$ , woher denn  $y = x$  wird.

Da

Da sich also hier trifft, daß die Gleichung  $y = x$  zugleich der Differenzial-Gleichung ein Genüge leistet, so kann man sagen, daß die gegebene Gleichung eigentlich nichts anders bedeute, als daß  $y = x$  sey.

§. 324.

Ist also eine Differenzial-Gleichung, die drey veränderliche Größen enthält,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gegeben, so sind drey Fälle zu betrachten, zu denen diese Gleichung führt:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Der erste findet statt, wenn dieser Ausdruck in der That  $= 0$  wird, wo denn die gegebene Gleichung reell ist. Wenn aber diese Gleichung nicht identisch ist, so muß man untersuchen, ob sie der gegebenen Gleichung ein Genüge thut. Ist dies, so hat man eine endliche Gleichung, und dieses ist der zweite Fall. Der dritte endlich findet statt, wenn die endliche Gleichung nicht mit der gegebenen Differenzial-Gleichung bestehen kann, und dann ist die gegebene Gleichung imaginär, denn es läßt sich keine endliche Gleichung finden, die ihr ein Genüge leistete.

§. 325.

Der erste und dritte Fall sind von selbst deutlich. Was den zweiten betrifft, so verdient er, ob er gleich sehr selten vorkommt, dennoch sorgfältig gemerkt zu werden. Und da wir schon oben ein Beispiel davon in einer Gleichung, die zwey veränderliche Größen enthält, gegeben haben, so wol-

Len wir noch eine Gleichung anführen, in welcher drey Differenzialen vorkommen, nemlich

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0.$$

Hier ist also

$$P = z - y; \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0; \quad \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1;$$

$$Q = x; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1;$$

$$R = y - z; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1;$$

Es ist also die Gleichung, welche das Kennzeichen enthält,

$$z - x - y = 0, \quad \text{oder } z = x + y.$$

Setzt man aber diesen Werth von  $z$  in die Differenzialgleichung, so wird

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0$$

und da dieses eine identische Gleichung ist, so folget, daß die Differenzialgleichung nichts anders bedeutet, als daß  $z = x + y$  ist.

§. 326.

Da wir behauptet haben, daß alle Differenzialgleichungen des ersten Grades, die drey veränderliche Größen enthalten, auf die Form:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gebracht werden können: so kann hier ein Zweifel in Ansehung derer Gleichungen entstehen, in welchen die ersten Differenz

ferenzialen zwey oder mehrere Dimensionen ausmachen, dergleichen z. B. folgende ist:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdx dy + 2Tdx dz + Vdy dz.$$

Allein von diesen Gleichungen ist zu merken, daß sie auf keine Weise reell seyn können, wofern sie nicht Divisoren von der ersten Form haben, die daher einfache Gleichungen geben werden. Denn da aus dieser Gleichung  $dz =$

$$\frac{-Tdx - Vdy \pm (dx^2(T^2 - PR) + 2dxdy(TV + RS) + dy^2(V^2 - QR))}{R}$$

wird: so ist leicht einzusehen, daß  $z$  keiner Funktion von  $x$  und  $y$ , oder  $dz$  einem solchen Ausdrucke,  $pdx + qdy$  gleich werden kann, wofern nicht die irrationale Größe rational wird. Dies wird geschehen, wenn

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

oder

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

ist. Wenn also nicht diese endliche Gleichung selbst der gegebenen Gleichung ein Genüge thut, so ist diese imaginär.

§. 327.

Nun sollten noch in diesem Capitel die Differenzial-Gleichungen der höhern Ordnungen, die drey veränderliche Größen enthalten, betrachtet, und die Fälle festgesetzt werden, wo dieselben reell oder imaginär sind. Allein da die Kennzeichen gar zu verwickelt werden würden, so lassen wir sie hier auf der Seite, zumal, da sie aus den bisher benutzten Quellen gleichfalls fließen. Wenn übrigens in der Integral-Rechnung diese Kennzeichen nöthig werden, so wird es da auch leicht seyn, sie zu finden.

Aus eben dem Grunde betrachten wir auch die Gleichungen nicht, die mehr veränderliche Größen enthalten, indem dergleichen fast nie vorkommen, und wenn sie vorkämen, nach dem Bisherigen leicht untersucht werden könnten. Wir endigen also hier die Anleitung zur Differenzialrechnung, und wollen nunmehr den außerordentlichen Nutzen zeigen, den diese Rechnung, theils in der Analysis selbst, theils in der höhern Geometrie gewährt.



Alimmer

Anmerkungen und Zusätze  
zum  
ersten Theile  
der  
vollständigen Anleitung  
zur  
**Differenzial = Rechnung**  
von  
Leonhard Euler  
vom  
Uebersetzer.

UNIVERSITÄT PADERBORN

PHILOSOPHISCHE FAKULTÄT

DEUTSCHE SPRACHE

UND LITERATUR

VERGLEICHENDE LITERATURKUNDE

1911



Anmerkungen und Zusätze  
zum  
ersten Theile  
der  
vollständigen Anleitung  
zur  
Differenzial-Rechnung  
von  
Leonhard Euler.

---

Es ist in mehr als einer Rücksicht wichtig, das Verhältniß der Differenzial-Rechnung zu den übrigen Theilen der Mathematik genau zu kennen, und die Bestimmung desselben soll daher auch den ersten Gegenstand der gegenwärtigen Anmerkungen und Zusätze ausmachen.

Die Mathematik betrachtet die Größe entweder einzeln in Constructionen, und führt dann den Namen der Elementar-Mathematik; oder im Allgemeinen, wobey sie die Eigenschaften der Größen, vermittelst Constructionen, aus deutlichen

lichen Begriffen, das heißt aus solchen, welche die Größe nach Zahl und Einheit darstellen, entwickelt. Da ihr Hauptgeschäft in der Untersuchung des Verhältnisses der Größen zu einander besteht, und das Verhältniß zweyer Größen bey gleichen Einheiten nach den Zahlen, und bey gleichen Zahlen nach den Einheiten sich richtet: so zerfällt daher die allgemeine Mathematik in zwey Theile, in die gemeine und höhere Mathematik. Jene betrachtet das Verhältniß derjenigen Größen, wobey die Einheiten, und diese das Verhältniß derer, wobey die Zahlen gleich gedacht werden. Was für Theile die Elementar- und die gemeine Mathematik unter sich begreifen, brauche ich hier nicht aus einander zu setzen, indem die Differenzial-Rechnung zur höhern Mathematik gehört; was diese betrifft, so verhält es sich damit auf folgende Art. Zuvörderst enthalten die Größen, welche man auf die Weise untersucht, daß man dabey bloß auf ihre Einheiten Rücksicht nimmt, alle bestimmte Größen ihrer Gattung unter sich; und da man dergleichen Größen veränderliche Größen zu nennen pflegt, so hat die höhere Mathematik die veränderlichen Größen zum Gegenstande. Zum andern kann man bey der Untersuchung der veränderlichen Größen entweder aus den Größen das Verhältniß ihrer Einheiten, oder aus dem Verhältnisse dieser Einheiten die Größen entwickeln; und dabey ferner jene Einheiten entweder von endlicher Größe sich gedenken, oder kleiner annehmen, als jede endliche Größe, die gegeben werden kann. Auf diese Art entstehen zwey Haupttheile der höhern Mathematik, die Differenzial-Rechnung und die Integral-Rechnung, und jeder derselben zerfällt von neuem in zwey andere, der erste nemlich in die Lehre von den Differenzen und die Differenzial-Rechnung im engern und gewöhnlichen Verstande; der andere aber in die Lehre von den

Suma

Summen und in die Integral-Rechnung, in der Bedeutung, in welcher dieses Wort gewöhnlich genommen wird. Um hier nur ein Paar Worte zur Bestätigung dieser Bestimmung der Haupttheile der Mathematik zu sagen, so ist dabey sehr leicht zu erklären, wie ein und derselbe Gegenstand theils in der Elementar-, theils in der gemeinen, theils in der höhern Mathematik vorkommen könne; wie dieses z. B. selbst beym Cirkel der Fall ist. Auch ist sie im Grunde weder neu noch unbekannt, sondern wenn man in den meisten Abhandlungen über den Begriff der Mathematik und ihre Theile andere und oft weniger genaue Eintheilungen der Mathematik findet, so rührt solches daher, weil dieselben in einer andern Absicht, und für andere Personen geschrieben wurden, als ich gegenwärtig vor Augen habe.

Dieses vorausgesetzt, so beschäftigt sich das Werk des unsterblichen Euler, welches ich den Liebhabern der höhern Mathematik in einer deutschen Uebersetzung zu liefern angefangen, mit der Differenzial Rechnung im weitläuftigen Verstande, und dem ersten Theile der Integral-Rechnung, oder der Lehre von den Summen; und der erste Theil desselben enthält besonders die Lehre von den Differenzen und den Summen, so wie auch die Differenzial-Rechnung im engern Verstande selbst, indem die Anwendungen dieser Theorien den Gegenstand des zweiten Theils ausmachen. Betrachtet man daher die Integral-Rechnung eben dieses großen Mathematikers, als zu dem gedachten Werke gehörig: so findet man in beyden Schriften die Haupttheile der höhern Mathematik ganz in der Ordnung, in welcher sie sich vorhin darboten, und es spricht daher auch dieser Umstand für die vorstehende Entwicklung. Aber die Art, wie sich Euler über die Differenzen und die Differenzialien erklärt

klärt hat, beweiset, daß ich bey meiner Classification von einer andern Vorstellung ausgegangen bin; und so eröffnet sich mir eine Quelle zu mehreren Anmerkungen, von welchen ich hoffe, daß sie wenigstens denen nicht unwillkommen seyn werden, welche das Eulerische Werk bey der Erlernung der Differenzial-Rechnung zum Grunde legen wollen, wenn sie gleich für Kenner keine Wichtigkeit haben können. In der Mittheilung derselben will ich die Ordnung befolgen, daß ich jedesmal eine tabellarische Darstellung des Inhalts derjenigen Capitel, worauf sie sich beziehen, voranschicke.



Inhalt



# Inhalt

des ersten und zweyten Capitels

des

ersten Theils der Eulerischen vollständigen  
Anleitung zur Differenzial-Rechnung.

---

## Inhalt des ersten Capitels.

### Von den Differenzen.

1. Vorläufig von der Veränderung des Werthes einer jeden Funktion, wenn man die veränderliche Größen derselben anders annimmt, §. 1. und von derjenigen, welche an dem gegenwärtigen Orte zum Grunde gelegt werden soll, insbesondere, §. 2. 3.
2. Anfangsgründe der Lehre von den Differenzen und den Summen, §. 4 : 36.
  - a. Von den Differenzen, §. 4 : 22.
    - α. Erklärung, Arten und Bezeichnung der Differenzen, §. 4 : 7.
    - β. Anmerkungen über die Natur der Differenzen, und darauf gegründete Methoden, dieselben auszudrücken, §. 8 : 11.

γ. Er-

- v. Erfindung der Differenzen, §. 11 = 22.
  - aa. Von der Erfindung der Differenzen überhaupt, §. 11.
  - bb. Von der Erfindung der Differenzen solcher Funktionen, welche entweder Aggregate oder Produkte sind, §. 12.
  - cc. Von der Erfindung der Differenzen der ganzen und rationalen Funktionen, §. 13 = 17.
  - dd. Von der Erfindung der Differenzen der gebrochenen und irrationalen Funktionen, §. 12 = 20.
  - ee. Von der Erfindung der Differenzen der transcendenten Funktionen, §. 21.
  - ff. Von den allgemeinen Formen der Differenzen einer jeden Ordnung, §. 22.
- b. Von den Summen, §. 23 = 36.
  - a. Wie die veränderten Werthe der Funktionen vermittelst der Differenzen ausgedrückt werden können, §. 23.
  - ß. Von den Schwierigkeiten in der Lehre von den Summen, und den daher für die gegenwärtige Untersuchung entstehenden Grenzen, §. 24.
  - γ. Erklärung und Bezeichnung der Summen, §. 25. 26.
  - δ. Von der Erfindung der Summen aus gegebenen Differenzen, §. 26 = 36.
    - aa. Hauptsätze dazu, aus der Lehre von den Differenzen abgeleitet, §. 26. 27.
    - bb. Von der Erfindung der Summen ganzer rationaler Funktionen, §. 28 = 31.
    - cc. Von der Erfindung der Summen, wenn die gegebene Differenz aus einfachen Faktoren besteht, die eine arithmetische Progression bilden, §. 32. 33.
    - dd. Von der Erfindung der Summen gebrochener Differenzen, §. 34 = 34.

Inhalt

## Inhalt des zweyten Capitels.

### Von dem Gebrauche der Differenzen in der Lehre von den Reihen.

1. Von den verschiedenen Arten der Reihen, §. 37. 38, von dem allgemeinen und dem summirenden Gliede der Reihen, §. 39, und von den Anzeigern, §. 40.
2. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen, §. 41 = 52.
  - a. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der ersten Ordnung, §. 41.
  - b. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der zweyten Ordnung, §. 42.
  - c. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen der dritten Ordnung, §. 43.
  - d. Von der Erfindung des allgemeinen Gliedes der Reihen einer jeden Ordnung, §. 44. 45.
  - e. Weitere Betrachtungen über die untersuchten Reihen, und deren allgemeine Glieder, §. 46 = 52.
    - α. Jede dieser Reihen ist eine wiederkehrende Reihe, §. 46. 47.
    - β. Aus dem allgemeinen Gliede derselben läßt sich die Ordnung bestimmen, zu welcher sie gehört, §. 48.
    - γ. Auch lassen sich daraus die Reihen der Differenzen finden, §. 49 = 51.
    - δ. Wenn das allgemeine Glied einer Reihe bekannt ist, so kann man die Reihe nicht nur rückwärts fortsetzen, sondern auch dieselbe interpoliren, §. 52.
3. Von der Erfindung des summirenden Gliedes der Reihen, §. 53 = 71.

- a. Was das summirende Glied einer Reihe sey, so wie auch die Erklärung der summirenden Reihe, §. 53.
- b. Von der Erfindung des summirenden Gliedes der Reihen, vermittelst der summirenden Reihen, §. 54 - 57.
- c. Methode das summirende Glied der Reihe unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede derselben zu finden, §. 58 - 68.
  - α. Beschreibung dieser Methode, §. 58 - 60.
  - β. Gebrauch derselben, §. 61 - 71.
    - aa. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied unter der Form  $x^n$  begriffen, oder eine ganze rationale Funktion von  $x$  ist, §. 61 - 64.
    - bb. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied ein Produkt aus einfachen Faktoren ist, §. 65 - 67.
    - cc. Bey den Reihen, deren allgemeines Glied eine gebrochene Funktion ist, §. 68 - 69.
- γ. Summirende Glieder einiger vor andern merkwürdigen Reihen, §. 70, 71.



---

## Anmerkungen und Zusätze

zum

### ersten und zweyten Capitel.

---

**W**enn man den Theil der Differenzial-Rechnung, welcher sich mit den Differenzen beschäftigt, aus dem S. 284. festgesetzten Gesichtspunkte betrachtet, oder annimmt, daß in der Lehre von den Differenzen das Verhältniß der Einheiten solcher Größen erforscht werde, auf deren Zahlen man bey dieser Vergleichung nicht zu sehen braucht, weil dieselben bey den verglichenen Größen gleich groß vorausgesetzt werden: so gebührt der erste Platz darin der Anweisung, die gedachten Einheiten deutlich auszudrucken, weil ohne dies die Untersuchung ihres Verhältnisses unmöglich ist. Angenommen also, daß  $y$  und  $z$  zwey gleichartige Größen bedeuten, deren Verhältniß bloß von ihren Einheiten abhängt: so ändert sich zuvörderst das Verhältniß von  $y$  und  $z$  nicht, wenn man  $my$  für  $y$ , und  $mz$  für  $z$  setzt,  $m$  mag übrigens vorstellen, was es will, eine ganze oder gebrochene, eine absolute oder positive oder negative, eine rationale oder irrationale, eine mögliche oder imaginäre Zahl, und es sind daher  $y$  und  $z$  veränderliche Größen in dem Verstande, in welchem Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen \*) diese Benennung nimmt. Dieses vorausgesetzt,

L 2

ist

\*) Im ersten Theile im ersten Capitel, so wie auch im zweyten Theile im ersten Capitel, gleich im Anfange.

ist leicht einzusehen, daß man die Einheiten von  $y$  und  $z$  selbst, nicht anders als unbestimmt aedenken und ausdrucken kann, ob sich gleich dabey der doppelte Fall annehmen läßt, daß diese Einheiten zu ihren Größen entweder irgend ein endliches Verhältniß haben oder nicht. Jenes findet in der Lehre von den Differenzen und Summen, dieses in der Differenzial- und Integral-Rechnung statt. Nun sey  $\Delta y$  die Einheit von  $y$ , welche zu  $y$  irgend ein endliches aber unbekanntes Verhältniß hat, und eben so  $\Delta z$  die Einheit von  $z$ : so ist offenbar, daß sich das Verhältniß  $\Delta y : \Delta z$ , wenn die Art, wie  $y$  und  $z$  von einander abhängen, nicht gegeben ist, bloß andeuten, aber nicht entwickeln läßt, und dabey muß es also auch bey ihnen sein Bewenden haben. Anders ist der Fall, wenn  $y$  irgend eine Funktion von  $z$  wird. Denn setzt man z. B.  $y = az$ , und behält dabey  $\Delta y$  und  $\Delta z$  in der angenommenen Bedeutung: so muß, wenn beyde Größen  $y$  und  $z$  aus einer gleich großen Anzahl von Einheiten bestehen sollen, nothwendig  $\Delta y = a\Delta z$ , und also

$$\Delta y : \Delta z (= a\Delta z : \Delta z) = a : 1$$

werden. Unterscheidet man daher veränderliche Größen und Funktionen veränderlicher Größen auf die Art, daß man unter jenen bloß diejenigen veränderlichen Größen versteht, welche einzig und allein als Summen ihrer Einheiten gedacht werden; und unter Funktionen veränderlicher Größen alle diejenigen veränderlichen Größen begreift, welche aus jenen und aus beständigen Größen auf irgend eine Art zusammengesetzt sind: so ist klar,

1. daß man das Verhältniß der Einheiten zweyer veränderlicher Größen bloß bezeichnen, aber nicht entwickeln und deutlich ausdrucken kann; sondern daß dieses

2. nur

2. nur dann möglich wird, wenn die gegebenen Größen Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.

Was aber die Art und Weise betrifft, das gedachte Verhältniß in diesem zweyten Falle zu finden: so beruhet dieselbe auf folgendem leichten Sage: Da die veränderlichen Größen, man mag diese Benennung im engern oder im weitläufigern Verstande nehmen, in Ansehung der Menge ihrer Einheiten nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich die Menge der Einheiten einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Einheiten derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da  $z + \Delta z$  von  $z$  um die Einheit  $\Delta z$  unterschieden ist, auch jede Funktion von  $z + \Delta z$ , welche man aus einer Funktion von  $z$  erhält, wenn man darin allenthalben  $z + \Delta z$  für  $z$  setzt, von der Funktion von  $z$  um eine ihrer Einheiten unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von  $z$  auf die gedachte Art in eine Funktion von  $z + \Delta z$ , und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste die Einheit der gegebenen Funktion, und zwar durch  $\Delta z$ ,  $z$  und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey z. B. die gegebene Funktion von  $z$ :

$$z^2;$$

so ist die nach der gegebenen Vorschrift daraus abgeleitete:

$$(z + \Delta z)^2 = z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2$$

und folglich

$$z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2 = 2z\Delta z + \Delta z^2$$

die gesuchte Einheit der Funktion von  $z^2$  in einem deutlichen Ausdrücke. Auf ähnliche Art findet man für die Einheit der Funktion  $z^3$  den Ausdruck:

$$3z^2\Delta z$$

$$3z^2\Delta z$$

$$3z^2\Delta z + 3z\Delta z^2 + \Delta z^3$$

und für die Einheit der allgemeinen Funktion  $z^n$  den Ausdruck:

$$nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}\Delta z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-3}\Delta z^3 \\ + \text{rc.}$$

wo, da der Binomische Lehrsatz (S. Zusätze zum ersten Theile meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen) für jeden Werth von  $n$  erwiesen worden ist,  $n$  jede Zahl, von was für einer Art sie seyn mag, bedeuten kann.

Was ich bisher Einheiten veränderlicher Größen genannt habe, belegt Euler mit dem Namen, Differenz, und statt der Redensart: die Einheit einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe deutlich ausdrücken, gebraucht er diese: die Differenz einer veränderlichen Größe, oder einer Funktion von einer veränderlichen Größe finden. Beide Ausdrücke sind gut, wie, bey einiger Ueberlegung, jeder von selbst sieht, und ich werde mich ihrer daher in der Folge ebenfalls bedienen. Bis jetzt habe ich es nicht gethan, so wie ich mir dieselbe Freiheit, wo es mir nützlich scheinen wird, auch noch ferner vorbehalte, um die Hauptsätze der Lehre von den Differenzen und Summen unmittelbar aus dem Begriffe dieser Theile der Differenzial- und Integral-Rechnung, und, wie ich hoffe, zugleich auf eine leichtere Art abzuleiten.

Da ferner die veränderlichen Größen dadurch veränderliche Größen sind, weil sie aus gleich großen Mengen von Einheiten bestehen, und die Gleichheit der Mengen ihrer Einheiten keine Veränderung leiden kann, wenn  
man

man jede dieser Größen um eine ihrer Einheiten vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen als solcher (d. h. unter der Bedingung, daß alles von ihnen zu Behauptende auf die gleiche Menge ihrer Einheiten in ihnen, und zugleich darauf allein, gegründet werde) gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eine Einheit vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen, einander gleich: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größen im engern Verstande, woraus sie etwa zusammengesetzt sind, eben diese Größen, um eine ihrer Einheiten vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v \pm c.$$

so ist auch

$y \pm \Delta y = \pm z \pm \Delta z \pm x \pm \Delta x \pm w \pm \Delta w \pm v \pm \Delta v \pm c.$   
und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abzieht,

$$\Delta y = \pm \Delta z \pm \Delta x \pm \Delta w \pm \Delta v \pm c.$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y \pm \Delta y = (z \pm \Delta z)(x \pm \Delta x) = zx \pm x\Delta z \pm z\Delta x \pm \Delta z\Delta x$$

und

$$\Delta y = x\Delta z \pm z\Delta x \pm \Delta z\Delta x$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Da dieses die Hauptsätze zur Erfindung der ersten Differenzen gegebener Funktionen sind, aus welchen die übrigen im Werke befindlichen abgeleitet werden: so kann ich mich zu der Art und Weise wenden, die zweyten und folgenden Differenzen gegebener Funktionen zu finden, oder deutlich aus-

zudrucken, habe aber dabei nicht nöthig, weitläufig zu seyn. Denn ist die Einheit oder erste Differenz einer gegebenen Funktion wieder eine Funktion; so gilt das Vorhergehende, in sofern sie eine Funktion ist, natürlich auch von ihr; und behandelt man sie darnach: so findet man auf eben die Art die zweite Differenz aus der ersten, als man die erste aus der gegebenen Funktion bekam. Ist ferner die zweite Differenz ebenfalls eine Funktion: so läßt sich auch von ihr behaupten, was so eben von der ersten im ähnlichen Falle gesagt worden ist; und also auch aus der zweiten Differenz auf eben die Art die dritte finden, als die zweite aus der ersten, oder die erste aus der gegebenen Funktion selbst, abgeleitet werden kann. Auf ähnliche Art kann man immer fort schließen, und zur wirklichen Anwendung des Gesagten darf man nur vor Augen behalten, was man bey einiger Ueberlegung bald findet, daß die Einheiten der veränderlichen Größen im engern Verstande keine veränderliche Größen seyn können, sondern nothwendig beständig seyn müssen.

Auf diese Art ist vieles von dem, was Euler in den ersten 10 §§. des ersten Capitels sagt, zur Erfindung der Differenzen, entbehrlich; aber dieses benimmt ihm nichts von seiner Wichtigkeit, sondern es würde vielmehr die vorstehende Entwicklung der Eulerischen sehr weit nachstehen, wenn man dabei die Methode, die Differenzen auszudrücken, welche §. 10. enthalten ist, auf der Seite lassen müßte, indem dieselbe bey dem Gebrauche der Differenzen äußerst nothwendig und wichtig ist. Allein der Weg dazu ist nicht versperrt, sondern er bietet sich nur etwas später dar; und ob dies nachtheilig sey oder nicht, wird sich bald beurtheilen lassen.

Zuvor

Zuvor muß ich folgendem Einwurfe begegnen. „Wenn der Grund feststeht, auf welchem der Satz S. 293. sich stützt, so muß man auch folgendes behaupten können. Wenn  $y$  irgend eine Funktion von  $z$ ,  $\Delta y$  die Differenz von  $y$ , und  $\Delta z$  die Differenz von  $z$  bedeutet: so muß, nachdem man  $y$  um  $n\Delta y$ , und  $z$  in dem  $y$  gleichen Ausdrücke allenthalben um  $n\Delta z$  vermehrt, die nöthigen Operationen vorgenommen, und die gegebene Gleichung von der gefundenen abgezogen hat,  $r\Delta y$  dem in der andern Hälfte der resultirenden Gleichung sich ergebenden Ausdrücke gleich seyn,  $n$  mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will. Ist dies, so muß man auch für  $n$  die um eins verminderte Zahl  $n-1$  setzen können, und thut man solches, so muß, wenn zuletzt der für  $(n-1)\Delta y$  gefundene Werth von dem für  $n\Delta y$  gefundenen abgezogen wird, der Werth von  $\Delta y$  eben so herauskommen, als ihn der S. 293. stehende Satz giebt. Es sey aber z. B.  $y = z^2$ , so bekommt man

$$n\Delta y = 2nz\Delta z + n^2\Delta z^2, \text{ und}$$

$$(n-1)\Delta y = 2nz\Delta z - 2z\Delta z + n^2\Delta z^2 - 2n\Delta z^2 + \Delta z^2$$

und folglich

$$n\Delta y - (n-1)\Delta y = \Delta y = 2z\Delta z + 2n\Delta z^2 - \Delta z^2,$$

und nach der S. 293. gegebenen Regel findet man

$$\Delta y = 2z\Delta z + \Delta z^2;$$

wie läßt sich dieser Widerspruch heben?“ Ich habe die veränderlichen Größen eingetheilt in veränderliche Größen in engerer Bedeutung, und in Funktionen; und zu jenen die gerechnet, welche man sich nicht anders als Summen ihrer Einheiten gedenken kann. Wenn daher von veränderlichen Größen in engerer Bedeutung die Rede ist: so hat man allerdings ein Recht anzunehmen, daß die Einheiten von jeder derselben einander gleich sind, und daß sich die Einheiten zweyer solcher veränderlicher Größen zu einander eben so als

diese Größen selbst verhalten. Es seyen z. B.  $y$  und  $z$  zwey veränderliche Größen in engerer Bedeutung; so hat sowohl  $\Delta y$  als  $\Delta z$  die Größe, die demselben einmal, obgleich unbestimmter Weise, beygelegt ist, beständig; und wenn  $y = az$  ist: so verhält sich  $\Delta y : \Delta z = y : z = az : z = a : 1$ . Allein, wenn die gegebenen veränderlichen Größen Funktionen sind, so verhält es sich meistens (denn einige sind allerdings ausgenommen, wie z. B., wenn  $y = az$  ist) auf eine andere Art. Wollte man nemlich auch die Einheiten oder Bestandtheile der Funktionen einander gleich annehmen, so würde man dadurch die ganze Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, unmöglich machen, weil man dadurch in der That die gegebenen veränderlichen Größen in beständige verwandelte. Denn es sey  $y = x^2$ : so ist nothwendiger Weise  $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ . Nun sey  $y + \Delta y = Y$ , und  $x + \Delta x = X$ : so ist auch  $Y = X^2$ , und  $Y + \Delta Y = (X + \Delta x)^2$ ; folglich  $\Delta Y = 2Xd x + \Delta x^2$ . Sollte daher  $2Xd x + \Delta x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$  seyn, so würde auch  $X = x$  seyn müssen, und es könnte demnach  $x$  nicht den Werth von  $X$  in sich schließen, welches doch seyn muß, wenn  $x$  eine veränderliche Größe bleiben soll. Muß man also annehmen, daß die Funktionen veränderlicher Größen nicht immer, oder vielmehr in den wenigsten Fällen, Summen gleicher, sondern ungleicher Bestandtheile sind: so muß man auch, wenn verschiedene, unmittelbar oder mittelbar auf einander folgende, Bestandtheile derselben allgemein ausgedruckt werden sollen, die Zeichen dazu so einrichten, daß dadurch zugleich die Stelle dieser Bestandtheile angedeutet werde. Dazu ist nun die Eulerische Bezeichnungsart sehr bequem, und sie wird daher, so wenig als wir sie bisher gebraucht haben, so bald man auf den gegenwärtigen Punkt gekommen ist, nothwendig. Es sey also  $y$  irgend einer Funktion

von

von  $z$  gleich, und  $y$  werde  $y \dagger n\Delta y$ , wenn  $z$  in  $z \dagger n\Delta z$  verwandelt wird. Ferner sey

$$y \dagger \Delta y = y^I; \quad y \dagger 3\Delta y = y^{III};$$

$$y \dagger 2\Delta y = y^{II}; \quad y \dagger 4\Delta y = y^{IV};$$

2c.

und  $\Delta y = y^I - y$ ;  $\Delta y^I = y^{II} - y^I$ ;  $\Delta y^{II} = y^{III} - y^{II}$ ;  
 2c.: so wird man nie versucht werden, so zu schließen, als es  
 in dem angeführten Einwurfe am Ende geschehen ist, sondern  
 vielmehr auf folgende Art: Ist

$$y = z^2;$$

so ist, wenn man den bey  $y$  in der Stelle der Exponenten  
 stehenden deutschen Buchstaben eben die Bedeutung giebt,  
 welche vorhin die dabey stehenden römischen Ziffern hatten,

$$y \dagger n\Delta y = y^n = 2nz\Delta z \dagger n^2\Delta z^2$$

$$y \dagger (n-1)\Delta y = y^{n-1} = 2nz\Delta z - 2z\Delta z \dagger n^2\Delta z^2 - 2n\Delta z^2 \dagger \Delta z^2$$

und also

$$y^n - y^{n-1} = \Delta y^{n-1} = 2z\Delta z \dagger (2n-1)\Delta z^2;$$

und wem könnte es dabey einfallen,  $\Delta y = 2z\Delta z \dagger \Delta z^2$   
 mit  $\Delta y^{n-1}$  zu verwechseln?

Angenommen also, daß die Lehre von den Differenzen  
 ganz methodisch vorgetragen werden soll: so scheint es am  
 füglichsten in folgender Ordnung geschehen zu können.

1. Den Anfang muß der Begriff von dieser Lehre ma-  
 chen, so daß dabey der Gegenstand derselben, und die Ab-  
 sicht, in welcher er darin untersucht wird, deutlich und ent-  
 wickelt angegeben werde.

2. Hierauf muß die Art und Weise folgen, die Einheits-  
 ten, oder Bestandtheile, oder Differenzen der veränderli-  
 chen

chen Größen überhaupt, in so fern man unter jenen endliche Größen versteht, deutlich auszudrucken. Dann muß

3. die Natur der gedachten Bestandtheile oder Differenzen genauer entwickelt, und damit die Beschreibung der übrigen auf diese Entwicklung sich gründenden Methoden, die Differenzen darzustellen, verbunden werden.

4. Ist dieses geschehen, so ist der Weg zur Untersuchung des Verhältnisses der Differenzen gegebener veränderlicher Größen gebahnt, und dadurch auch der Ort dieser Untersuchung bestimmt.

5. Den Beschluß kann endlich die Lehre von dem Gebrauche der Differenzen machen, wofern man nicht lieber die Anleitung dazu bis nach der Lehre von den Summen versparen will.

Da es hier nicht meine Absicht ist, die Lehre von den Differenzen vollständig abzuhandeln, sondern bloß eins und das andere zu berühren, was mir nicht undienlich scheint, Anfänger in der höhern Mathematik, zur eigenen Ueberlegung anzukommen, (welches bekanntlich durch Vorzeichnung und Vergleichung mehrerer zu Einem Ziele führenden Wege am besten geschehen kann) und zugleich, sie so viel als möglich vor den Schwierigkeiten zu verwahren, die so manchen bei der Erlernung der höhern Mathematik finden: so habe ich nicht nöthig, das bis jetzt aus Eulern nicht berührte ebenfalls aus den oben mitgetheilten Hauptsätzen abzuleiten, und dadurch erwähnten Anfängern das Vergnügen zu entsetzen, was sie durch die eigene Herleitung desselben sich verschaffen können. Noch weniger kann ich mich entschließen, hier schon die Betrachtungen anzustellen, welche eigentlich erst

erst in der Lehre von den Differenzialien gebraucht werden. Ich setze also bloß noch einige leichte Anmerkungen über die Lehre von den Summen her.

Zunächst fließt der Satz, S. 27, daß

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V + \text{rc.}$$

ist, sehr leicht aus der in diesen Anmerkungen von den veränderlichen Größen gegebenen Vorstellung, wobei  $\Delta y^n$  ein allgemeiner Ausdruck für die Einheiten von  $y$  ist, und alle vorhergehende Einheiten von  $y$  diejenigen werden, welche der B. durch  $\Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \text{rc.}$  ausgedrückt hat.

Zum andern ergeben sich nicht weniger leicht die Regeln, welche bey der Abänderung der S. 28. §. 28. zum Grunde gelegten Formeln befolgt worden sind, aus dem Satze, daß bey den veränderlichen Größen im engerm Verstande das Verhältniß ihrer Einheiten dem Verhältniß der Größen selbst gleich sey; und wenn daher Anfängern, wie bisweilen zu geschehen pflegt, die Art zu schließen, welche in dem angeführten §. herrscht, nicht einleuchtend ist, so liegt die Schwierigkeit in nichts als in gewissen dunkeln Vorstellungen.



Inhalt



**Inhalt**  
des  
dritten und vierten Capitels.

---

**Inhalt des dritten Capitels.**

Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen.

Unter allen Untersuchungen, welche Euler in dem gegenwärtigen Werke angestellt hat, ist keine, die Anfängern mehr Schwierigkeiten machen könnte, als die in diesem dritten Capitel, und vielleicht sind dieselben nicht immer bloß scheinbar. Es wird daher auch nöthig seyn, dabey länger als bey den übrigen zu verweilen. Euler handelt darin von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen auf folgende Art.

1. Zuvörderst sucht er die Behauptung festzustellen, und wider die dagegen gemachten Einwürfe zu sichern: daß eine jede Größe ins Unendliche vermehrt werden könne, §. 72 = 82. In diesem Abschnitte findet man
  - a. die erwähnte Behauptung selbst, §. 72. 73.
    - a. aus dem Begriffe der Größen abgeleitet, §. 72.
    - b. an einzelnen Arten der Größe erläutert, und dadurch bestätigt, §. 73.
  - b. eine Anzeige der Schwierigkeiten, worin man sich bey dieser Behauptung verwickelt hat, nebst der Beseitigung derselben, §. 74 = 81.
  - c. Daß

- c. daß man wenigstens in der theoretischen Mathematik unendliche Zahlen in dem Verstande, in welchem das Wort unendlich vom Verfasser genommen wird, nicht leugnen könne, §. 82. Hierauf folgt
2. eine genauere Entwicklung der Begriffe des Unendlichen und des unendlich Kleinen, §. 83 : 96.
- a. Entwicklung des Begriffs des unendlich Kleinen, §. 83 : 89.
- α. Was man unter einer unendlich kleinen Größe zu verstehen habe, §. 83. und warum man diese Größen nicht so bezeichnet, als es darnach geschehen zu müssen scheint, §. 84. 85.
- β. Daß man die unendlich kleinen Größen zwar wohl in Ansehung ihres arithmetischen, aber nicht in Ansehung ihres geometrischen Verhältnisses zu einander verwechseln dürfe, §. 86 87.
- γ. Wie es sich mit den Potenzen der unendlich kleinen Größen verhalte, oder von den Ordnungen unter den unendlich kleinen Größen, §. 88. 89.
- b. Entwicklung des Begriffs des Unendlichen, oder unendlich Großen, §. 90 : 96.
- α. Daß man das Unendliche durch die Division endlicher Größen durchs unendlich Kleine erhalte, §. 90. 91.
- β. Hierauf gegründete Erklärung des Unendlichen, §. 92.
- γ. Verschiedenheit der unendlich großen Größen, und daß jede derselben noch weiter vermehrt werden kann, §. 93.
- δ. Beispiele unendlicher Größen aus der gemeinen Mathematik, §. 94.
- ε. Von den Ordnungen oder Graden des Unendlichen, §. 95. 96.

3. Den Beschluß machen noch einige anderweitige Betrachtungen über das Unendliche und das unendliche Kleine, §. 97 = 111.
  - a. Was das Produkt aus einem unendlich großen, und einem unendlich kleinen Faktor für eine Größe sey? §. 97.
  - b. Wie man nach dem Gesetze der Stetigkeit von den endlichen Größen zu den unendlich großen und unendlich kleinen Größen übergehen muß, §. 98 = 101.
  - c. Erläuterung der Lehre vom Unendlichen aus den ohne Ende fortlaufenden Reihen, und dabei gelegentlich einiges über die negativen Zahlen, und über die Summen der gedachten Reihen, §. 102 = 111.

### Inhalt des vierten Capitels.

#### Von der Natur der Differenzialien einer jeden Ordnung.

1. Erklärung und Bezeichnungsart sowohl des Differenzials überhaupt, als des ersten, zweiten, dritten Differenzials 2c. insbesondere, §. 112 = 119.
  - a. Wiederholung eines hieher gehörigen Satzes aus der Lehre von den Differenzen, §. 112.
  - b. Erklärung und Bezeichnung der Differenzialien, §. 113. 119.
    - α. Nach Leibnizens Art, §. 113.
    - β. Nach Newtons Art, §. 114.
    - γ. Vergleichung beider Arten, §. 115. 116.
    - δ. Von der im gegenwärtigen Werke gebrauchten Bezeichnung der Differenzialien, §. 117. 119.

2. Von

2. Von der Natur der Differenzialien einer jeden Ordnung,  
§. 120 - 128.
  - a. Von der Natur der Differenzialien der ersten Ordnung, §. 120 - 123.
  - b. Von der Natur der Differenzialien der zweyten Ordnung, §. 124.
    - α. Von der Natur der Differenzialien der zweyten und der folgenden Ordnungen, dieselben an sich betrachtet, §. 124 - 127.
    - β. Von der Natur der Differenzialien der zweyten und folgenden Ordnungen, in Vergleichung mit denen der ersten Ordnung betrachtet, §. 128 - 130.
    - γ. Von der Natur der Differenzialien aller Ordnungen, wenn die veränderliche Größe  $x$  als eine gleichförmig wachsende Größe betrachtet wird, §. 131 - 137.
    - δ. Erklärung der Differenzial-Rechnung, §. 138.
3. Von den Integralien und der Integral-Rechnung, §. 139 - 143.
  - a. Erklärung der Integral-Rechnung und des Integrals, §. 139. 140. Desgleichen die Bezeichnungsart der Integralien, §. 141.
  - b. Von der Natur der Integralien, §. 142. 143.
4. Ausführlichere Beschreibung der Art, die Differenzialien und Integralien zu bezeichnen, §. 144 - 147.
5. Wie man die Differenzial- und Integral-Rechnung gleich abzuhandeln pflegt, und wie solches in dem Folgenden geschehen soll, §. 148 - 151.



---

## Anmerkungen und Zusätze

zum

### dritten und vierten Capitel.

---

Ich nehme diese beyden Capitel zusammen, und werde dasjenige, was ich dabey und darüber zu sagen habe, in der Ordnung vortragen, daß ich

1. einige von den Schwierigkeiten berühre, in welche man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt. Dann will ich
2. den Begriff der Differenzialien auf eine ander, mit weniger Schwierigkeiten verknüpfte Art, festzusetzen suchen, und daraus die Natur derselben entwickeln; und zuletzt
3. einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen beyfügen.

#### 1. Von den Schwierigkeiten,

worin man sich durch Annahme der Eulerischen Vorstellung von dem Unendlichen, dem unendlich Kleinen, und von der Natur der Differenzialien verwickelt.

Es leidet freylich keinen Zweifel, daß jede gegebene Größe, ihre Zahl mag so groß oder so klein seyn als sie will, ohne

ohne Ende, oder ins Unendliche, wenn dieser Ausdruck eben dasselbe sagen soll, vermehrt oder vermindert werden kann, und daß also unendlich, d. h. ohne Ende wachsende oder abnehmende Größen keinen Widerspruch enthalten. Aber so wie keine ohne Ende wachsende Größe je eine unendliche Größe werden kann: so verschwinden auf der andern Seite die ohne Ende abnehmenden Größen auch nie, oder werden nie  $= 0$ . Eben so ausgemacht ist es, daß jede gegebene Größe durch fortgesetzte Verminderung in nichts verwandelt werden kann; nur wird es dabei unmöglich, die Verminderung, wodurch solches geschieht, ohne Ende fortzusetzen. Denn soll eine Größe ohne Ende vermindert werden, so kann solches nicht anders als auf dem Wege der Division oder der Extraction der Wurzeln geschehen; und soll sie in Null übergehen, so wird dazu der Weg der Subtraction erfordert. Wenn man mit Rücksicht hierauf den 83sten §. liest, welcher die Quelle und den Grund dessen enthalten soll, was in dem Folgenden über das Unendliche, das unendlich Kleine, und über die Natur der Differenzialien gesagt wird: so muß man sich wundern, daß Euler eine so wichtige Untersuchung auf so schwankende Behauptungen hat gründen können. Eine unendlich kleine Größe soll nichts anders als eine verschwindende Größe, und in der That  $= 0$  seyn. Eine unendlich kleine Größe kann doch, wenn man den Worten keine Gewalt anthun will, nichts anders bedeuten, als die Größe, welche man durch keine, noch so weit fortgesetzte, Verminderung erhalten würde; wie kann also dieselbe  $= 0$  seyn? Kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, kann und muß sie seyn, aber es ist relativ gesprochen, wenn man sagt, daß dergleichen Größen  $= 0$  seyn, und es sind daher Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, und verschwindende Größen noch sehr von einander verschieden. Wir

haben dergleichen unendlich kleine Größen in dem Unterschiede des Winkels eines Halbkreises und eines rechten Winkels, aber es ist Mangel an geometrischer Schärfe, wenn man diesen Unterschied  $= 0$  setzt. Auch zeigen sich die Nachteile von der geringen Sorgfalt, welche Euler bey der Festsetzung des Begriffs des unendlich Kleinen bewiesen, bald und in großer Menge. Wie unbefriedigend ist z. B. gleich das, was er im 84sten §. sagt? Wie scheinbar sind die Widersprüche, welche man wider die unendlich vielen Ordnungen der Nichtse macht? Wie kann in der Folge §. 306. daraus, daß man  $dx = 0$ , und  $dy = 0$  findet, geschlossen werden, daß die Gleichung, woraus man diese Bestimmungen gefunden, nicht bestehen könne? Wie können in der Integrals Rechnung die Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien angesehen werden. Doch hiervon nachher mehr, wenn ich zuvor den Begriff der unendlich kleinen Größen, so wie ich glaube, daß es geschehen muß, festgesetzt habe.

## 2. Von der Natur der Differenzialien.

Wir mögen eine gegebene Größe theilen, durch was für eine Zahl wir wollen, so haben die Theile, auf welche wir dadurch kommen, zu der getheilten Größe ein bestimmtes Verhältniß, welches sich angeben läßt, und jeder Theil, so klein er auch seyn mag, kann wieder von neuem getheilt werden. Es sey  $x$  die gegebene Größe, und  $m$  stelle jede noch so große Zahl vor; so ist

$$\frac{x}{m} : x = \frac{1}{m} : 1 = 1 : m$$

und setzt man  $\frac{x}{m} = y$ , so läßt sich, was von  $x$  gesagt worden,

den,

den, ebenfalls von  $y$  behaupten. Wenn man sich daher eine Größe bloß als ein Aggregat bestimmter Theile, oder solcher, deren Verhältniß zu der Größe angegeben werden kann, vorstellt: so erschöpft man dadurch die Arten, wie diese Größe gedacht werden kann, nicht, sondern es bleibt noch übrig, dieselbe als ein Aggregat solcher Theile anzusehen und zu betrachten, deren Verhältniß zu der Größe durch keine Zahl, wie man dieselbe auch annehmen mag, ausgedrückt werden kann; und es fällt in die Augen, daß diese Theile kleiner seyn müssen, als jede Größe, die sich angeben läßt. Wir wollen daher dergleichen Theile Differenzialien, und zwar derjenigen Größen, welche man sich als Aggregate von ihnen gedenkt, nennen; und wenn eine von diesen Größen  $= x$  gesetzt wird, das Differenzial derselben, durch  $dx$  bezeichnen. Da also das Verhältniß von  $dx : x$  durch keine Zahl, so groß man dieselbe auch annehmen mag, dargestellt werden kann: so gehört auch das Verhältniß  $n dx : x$ ,  $n$  mag angenommen seyn, wie es will, nur daß es eine bestimmte Zahl bedeute, zu denen, welche sich nicht angeben lassen. Denn wollte man das Gegentheil behaupten, so seyn  $n dx : x = p$ , also  $n dx = px$ . Alsdenn wäre auch  $dx : x = p : n$ , und da  $p$  und  $n$  bestimmte Zahlen wären, so hätte man in  $p : n$  einen deutlichen und bestimmten Ausdruck für das Verhältniß von  $dx : x$ , welches wider den Begriff von  $dx$  streitet. Hieraus folgt:

1. daß man bey den Größen, welche man sich als Aggregate von Differenzialien oder solchen Theilen vorstellt, deren Verhältniß zu der Größe nicht angegeben werden kann, die Menge der Theile unbestimmt lassen muß, und daher auch nur diejenigen Untersuchungen dabey anzustellen im Stande ist, welche diese Voraussetzung zulassen.

2. Daß aber gleichwohl die Differenzialien wirkliche Größen sind, und an sich betrachtet, nie mit Null verwechselt werden dürfen, welches denn natürlich auch von den Produkten aus Differenzialien und gegebenen Größen gilt.
3. Daß folglich auch die Differenzialien, nachdem man sie ihrer Natur gemäß, durch Zeichen ausgedrückt hat, alle Operationen zulassen, welche man mit ähnlichen Constructionen bestimmter Größen vorzunehmen gewohnt ist.
4. Daß, wenn Differenzialien oder Produkte aus Differenzialien und gegebenen Größen als Null betrachtet werden sollen, solches nur dann geschehen dürfe, wenn die vorgesezte Absicht weiter keine Größen erfordert, als solche, die sich bestimmt geben lassen.

Wenn man also unter den unendlich kleinen Größen keine andere versteht, als diejenigen, welche jetzt betrachtet worden sind: so fällt in die Augen, warum man dieselben durch besondere Zeichen, und nicht durch 0 ausdrücken muß. Ferner braucht man den offenbar harten Satz nicht, daß diese Größen in Ansehung ihres arithmetischen Verhältnisses gleich, und dabey doch in Ansehung des geometrischen Verhältnisses ungleich, ja eine unendlichmal größer als eine andere seyn könne. Auch wird dadurch, wie sich in der Folge zeigen wird, den Widersprüchen vorgebauet, welche man sonst in der Lehre von den Differenzialien wahrzunehmen glauben muß. Die Schlussfolge S. 306, deren vorhin gedacht wurde, erscheint in ihrer ganzen Richtigkeit und Stärke. Endlich bleibt dabey die Vorstellung von den Integralien als Summen aller vorhergehenden Differenzialien, welche in der Integral Rechnung und bey der Anwendung derselben so wichtig und unentbehrlich ist, von allen Schwierigkeiten frey.

Dies

Dies kann ohnstreitig hier hinreichen, den mitgetheilten Begriff von den unendlich kleinen, oder denjenigen Größen, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, vorläufig zu empfehlen.

Da also der Begriff von den Differenzialien, wobey man sich dieselben als wirkliche Größen gedenkt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, auf keine Weise etwas widersprechendes in sich schließt: so darf man allerdings bey allgemeinen Untersuchungen über die Größen von ihm ausgehen, und es kommt nur darauf an: nicht bloß nichts dawider streitendes zu behaupten, sondern alle Sätze von den aus Differenzialien bestehenden Größen gerade aus dem in ihm enthaltenen Kennzeichen abzuleiten. Sollen nun Größen aus Differenzialien auf die Art bestehen, daß man sie als Summen derselben betrachten kann: so wird jede Untersuchung derselben unmöglich, wofern man nicht annimmt, daß die Menge der Differenzialien in jeder derselben eben so groß, als in jeder andern, sey; und in diesem Stücke sind daher die Differenzialien den in den beyden ersten Capiteln untersuchten Differenzen ähnlich. Eben diese Uebereinstimmung nimmt man ferner darin wahr, daß der Gegenstand der Untersuchung solcher Größen, die als Summen von Differenzialien betrachtet werden, kein anderer ist, als das Verhältniß ihrer Differenzialien, unter der Voraussetzung, daß die Menge derselben in jeder Größe dieselbe sey, wodurch also die Größen selbst veränderliche Größen werden. Ueberhaupt wird also auch die Lehre von den Differenzialien, oder die Differenzial-Rechnung auf eine ähnliche Art eingetheilt werden können, als nach S. 299. 300. die Lehre von den Differenzen.

Nun seyen  $y$  und  $z$  veränderliche Größen, und  $dy$  das Differenzial von  $y$ , so wie  $dz$  das Differenzial von  $z$ . Sind  $y$  und  $z$  nicht weiter bekannt, so kann weder  $dy$  noch  $dz$  deutlich, sondern bloß wie hier durch ein willkührliches Zeichen ausgedruckt, und also das Verhältniß  $dy : dz$  nicht angegeben, sondern bloß angezeigt werden. Ist hingegen  $y$  eine Funktion von  $z$ , so findet derselbe Schluß statt, welcher S. 293. in der Lehre von den Differenzen gebraucht wurde. Da nemlich die veränderlichen Größen in Ansehung der Menge ihrer Differenzialien in ihnen nicht von einander verschieden gedacht werden dürfen, und folglich auch die Menge der Differenzialien einer Funktion dieselbe seyn muß, als die Menge der Differenzialien derjenigen Größe, wovon sie eine Funktion ist: so muß, da  $z \mp dz$  von  $z$  um das Differenzial  $dz$  verschieden ist, auch jede Funktion von  $z \mp dz$ , welche man aus einer Funktion von  $z$  erhält, wenn man darin allenthalben  $z \mp dz$  für  $z$  setzt, von der Funktion von  $z$  um eins ihrer Differenzialien unterschieden seyn. Verwandelt man daher eine gegebene Funktion von  $z$  auf die gedachte Art in eine Funktion von  $z \mp dz$ , und zieht von dieser, nachdem man die dazu nöthigen, in der Funktion selbst angezeigten, Operationen vorgenommen hat, die gegebene Funktion ab: so findet man in dem Reste das Differenzial der gegebenen Funktion, und zwar durch  $dz$ ,  $z$  und beständige Größen, und also deutlich ausgedruckt. Es sey z. B. die gegebene Funktion

$$z^2$$

so ist die nach der vorstehenden Regel daraus abgeleitete:

$$(z \mp dz)^2 = z^2 \mp 2zdz \mp dz^2$$

und folglich

$$z^2 \mp 2zdz \mp dz^2 - z^2 = 2zdz \mp dz^2$$

das gesuchte Differenzial von  $z^2$  in einem deutschen Ausdrucke.

drucke. Auf ähnliche Art findet man für das Differenzial der Funktion  $z^3$  den Ausdruck:

$$3z^2dz + 3zdz^2 + dz^3$$

und für das Differenzial der allgemeinen Funktion von  $z^n$  diesen:

$$nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-3}dz^3$$

+ 2c.

und zwar für jeden Werth für  $n$ : so daß also auch die Art die Differenzialien der Funktionen deutlich auszudrücken, mit der Art, die Differenzen der Funktionen zu finden, übereinstimmt.

Aus diesem Grunde sind auch bey dem S. 294. 295. stehenden Sage nur einige leichte Modificationen nöthig, um ihn den Differenzialien anzupassen. Mit diesen Modificationen nemlich lautet er folgendermaßen.

Da ferner die veränderlichen Größen, als Summen von Differenzialien betrachtet, da durch veränderliche Größen sind, weil sie als aus gleich großen Mengen von Differenzialien bestehend gedacht werden, und die Gleichheit der Mengen ihrer Differenzialien keine Veränderung leiden kann, wenn man jede dieser Größen um eins ihrer Differenzialien vermehrt: so ist es auch bey der Untersuchung der veränderlichen Größen, als solcher, gleichviel, ob man diese veränderlichen Größen selbst nimmt, oder jede derselben um eins ihrer Differenzialien vermehrt. Sind daher zwey veränderliche Größen einander gleich, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen: so muß man auch wieder eine Gleichung bekommen, wenn man statt jeder der veränderlichen Größe, woraus sie etwas zus

sammengesetzt sind, eben diese Größen, um eins ihrer Differentialien vermehrt, setzt. Ist daher

$$y = \pm z \pm x \pm w \pm v \pm \text{ic.}$$

so ist auch

$y \mp dy = \pm z \pm dz \pm x \pm dx \pm w \pm dw \pm v \pm dv \pm \text{ic.}$   
und daher, wenn man hiervon die vorhergehende Gleichung abziehet,

$$dy = \pm dz \pm dx \pm dw \pm dv \pm \text{ic.}$$

und ist

$$y = zx$$

so ist auch

$$y \mp dy = (z \mp dz)(x \mp dx) = zx \mp xdz \mp zdx \mp dx dy$$

und

$$dy = xdz \mp zdx \mp dx dy,$$

und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Wenn das Differential einer Funktion wieder eine veränderliche Größe ist: so gilt das Bisherige von ihm, in so fern es eine veränderliche Größe ist, natürlich ebenfalls, und so werden zweyte, dritte, vierte Differentialien u. s. w. bey ihm möglich. Man findet aber jedes von den folgenden aus dem unmittelbar vorhergehenden eben so, als man das erste aus der gegebenen Funktion erhält, und so braucht hier davon nicht besonders geredet zu werden.

Allein man druckt deswegen die Differentialien deutlich aus, um die Differentialien zweyer und mehrerer veränderlichen Größen mit einander zu vergleichen, und ihr Verhältniß zu einander anzugeben, in so fern dasselbe durch endliche Größen bestimmt werden kann. Ob nemlich gleich die Größen, welche kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, an sich betrachtet, nie  $= 0$  gesetzt werden dürfen: so

so

so kommen sie doch in Ansehung unserer nicht in Betrachtung, und wir haben das Verhältniß zweyer Differenzialien zu einander in aller uns erreichbaren Schärfe und Genauigkeit ausgedruckt, wenn wir den Quotienten desselben so darstellen, daß dabey keine Größe, die sich angeben läßt, vernachlässiget und aus der Acht gelassen wird. Weiter gehen wir ja in der gemeinen Mathematik nie. Hierdurch wird eine sehr vortheilhafte Abkürzung der nach den vorhergehenden Regeln für die Differenzialien der Funktionen gefundenen deutlichen Ausdrücke möglich. Denn soll z. B. das Verhältniß des Differenzials der Funktion  $z^2$  zu dem Differenziale von  $z$ , oder

$$d . z^2 : dz$$

angegeben werden: so ist, da  $d . z^2 = 2z dz + dz^2$ , und  $dz^2 = dz . dz$  ist,

$$d . z^2 : dz = 2z dz + dz . dz : dz$$

und also der Quotient des Verhältnisses von  $d . z^2 : dz$

$$2z + dz$$

wofür man, weil sich  $dz$  durch keine Größe, so klein man sie auch annehmen mag, ausdrucken läßt,  $2z$  setzen kann. Wollte jemand behaupten, daß man sich dadurch von der Schärfe, welche in der gemeinen Mathematik beobachtet wird, entferne, der würde vor allen Dingen beweisen müssen, daß wir bey der Bestimmung der Verhältnisse in der gemeinen Mathematik auch das bestimmt ausdrücken, was sich seiner Natur nach gar nicht bestimmt ausdrücken läßt; und wem dieses möglich schiene, mit dem hörte aller fernere Streit auf. Auf ähnliche Art ist der Quotient des Verhältnisses

$$d . z^3 : dz$$

da  $d . z^3 = 3z^2 dz + 3z dz^2 + dz^3$ , und  $dz^2 = dz . dz$ , so wie  $dz^3 = dz . dz^2$  ist,

(322

316 Anmerkungen und Zusätze zum ersten Theile etc.

$$3z^2 + 3zdz + dz^2 = 3z^2 + (3z + dz)dz,$$

und da jedes Produkt aus einem Differentiale und endlichen Größen zu jeder gleichartigen endlichen Größe ein eben so wenig anzugebendes Verhältniß hat, als das Differential allein genommen: so kann man dafür wieder, ohne der mathematischen Schärfe im geringsten zu nahe zu treten,  $3z^2$  setzen. Ueberhaupt wird hiernach der Quotient des Verhältnisses

$$\begin{aligned} & d.z^n : dz \\ & \frac{nz^{n-1}dz + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}dz^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}dz^3 + \text{ic.}}{dz} \\ & = \\ & \frac{(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2}dz + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}dz^2)dz}{dz} \\ & = \\ & nz^{n-1} + \left( \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}dz + \text{ic.} \right) dz \end{aligned}$$

und folglich, wenn wir bloß angeben wollen, was sich seiner Natur nach angeben läßt,

$$d.z^n : dz = \frac{d.z^n}{dz} = nz^{n-1}.$$

Wenn man das Bisherige sorgfältig überdenkt, wird man leicht von selbst finden, daß es zur Erfindung aller der Abkürzungen hinreiche, welche bey dem Geschäfte, die Differentialien der Funktionen deutlich auszudrucken, gebraucht werden. Und da man dabey alles lediglich aus dem Begriffe ableitet, daß das Differential jeder veränderlichen Größe, obgleich nicht  $= 0$ , sondern stets eine wirkliche, aber auf keine Art bestimmt anzugebende Größe ist, und dies  
fer

fer Begriff keine Schwierigkeiten hat, da es nie verlangt wird, das Differenzial irgend einer veränderlichen Größe selbst anzugeben: so kann dasselbe wenigstens als ein Versuch gelten, die Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung Anfängern zu erleichtern. Uebrigens bedarf es kaum erwähnt zu werden, daß die Ausdrücke

$$\frac{d \cdot z^n}{dz} = n z^{n-1}, \text{ und } d \cdot z^n = n z^{n-1} dz$$

einander völlig gleichbedeutend sind.

Allein so außer allem Zweifel auch die bisher betrachteten Abkürzungen der deutlichen Ausdrücke der Differenzialien sind; so betreffen sie doch nur außer den ersten Differenzialien diejenigen zweiten und höhern Differenzialien, woben das Differenzial der veränderlichen Größe der Funktion beständig ist, und es kann daher das Gesagte, bey aller seiner Richtigkeit und Gewißheit, den Fehler der Unvollständigkeit und Unzulänglichkeit zu haben scheinen. Nun bedürfen zwar allerdings die zweiten und höhern Differenzialien solcher Funktionen, woben das Differenzial ihrer veränderlichen Größe ebenfalls eine veränderliche Größe ist, in Ansehung der bey ihrer Darstellung möglichen, üblichen und selbst nothwendigen Abkürzungen einer besondern Untersuchung; allein die Schlüsse, worauf sich diese Abkürzungen gründen, sind von den bisherigen nicht verschieden. Denn es sey  $y$  irgend eine Funktion von  $x$ , und  $x$  eine Funktion der veränderlichen Größe  $z$  im engern Verstande, und also das Differenzial von  $z$  beständig; so ist, allgemein ausgedruckt, nach §. 129.

$$dx = p dz.$$

$$dy = q dx = P dz$$

$$ddy = r ddx + s dx^2 + dx ddx.$$

Da

318 Anmerkungen und Zusätze zum ersten Theile ic.

Da aber  $ddx$  allemal  $= \sigma dz^2$ , und  $dx^2 = \sigma dz^2$  wird: so folgt hieraus

$$ddy = \rho dz^2 + \sigma dz^2 + \tau dz^3;$$

und soll daher  $ddy$  mit  $dz^2$  verglichen werden, so fällt dabei nach den obigen Gründen  $\tau dz^3 = \tau dz^2 \cdot dz$  weg, und es wird

$$\frac{ddy}{dz^2} = \rho + \sigma.$$

Es sey z. B.  $y = x^2$  und  $x = z^2$ , also  $y = z^4$ ; so ist

$$dx = 2z dz$$

$$dy = 2x dx = 4z^3 dz, \text{ und}$$

$$ddy = 2(x ddx + dx^2 + dx ddx).$$

Nun ist aber  $ddx = 2 dz^2$ , und  $dx^2 = 4z^2 dz^2$ ; folglich

$$ddy = 2(2z^2 dz^2 + 4z^2 dz^2 + 4z dz^3),$$

und also

$$\frac{ddy}{dz^2} = 12z^2 = d^2 \cdot z^4.$$

Will man daher das zweite Differenzial von  $y$  vor der Bestimmung desselben, durch das Differenzial derjenigen veränderlichen Größe, deren Differenzial beständig ist, und von  $y$  eine Funktion ist, so abkürzen, daß man nur die Glieder behält, die bey der Erforschung des verlangten Verhältnisses wirklich gebraucht werden können: so hat man

$$ddy = r ddx + s dx^2,$$

und auf ähnliche Art lassen sich auch in andern Fällen die nöthigen Abkürzungen finden und beweisen. Uebrigens setze ich hier voraus, was allgemein zugestanden werden muß, daß bey der wirklichen Bestimmung des Verhältnisses der Differenzialien, die Ausdrücke derselben allemal auf solche reducirt werden müssen, die durch endliche Größen und beständige Differenzialien dargestellt sind, wosfern nicht etwa der Fall ist, daß die vorkommenden Differenzialien durchaus von

von einer und derselben Art sind; und bemerke nur noch, daß sich, wenn  $y$  eine Funktion von  $x$ , und  $x$  eine Funktion von  $z$  ist, beweisen läßt, daß sich jedes zweyte Differenzial von  $dx$ , oder  $d^2x$ , durch ein Produkt aus  $dz^2$  und einer endlichen Größe, das dritte Differenzial von  $dx$ , oder  $d^3x$ , durch ein Produkt aus  $dz^3$  und einer endlichen Größe ausdrücken läßt, und daß sich hierauf dasjenige gründet, was Euler im 4ten Capitel § 134 f. von diesen Differenzial-Größen behauptet. Soviel jetzt hiervon; vielleicht in der Folge ein Mehreres.

Da die Menge der Differenzialien in einer veränderlichen Größe durch keine Zahl ausgedrückt werden kann, S. 308 f. so bleibt uns bey der Darstellung der Differenzialien der veränderlichen Größen, wenn diese Größen selbst gegeben sind, nichts weiter möglich, als diejenigen Differenzialien in ihrer natürlichen Ordnung, so weit wir es etwa für möglich halten, auszudrücken, die entweder auf die in den gegebenen Größen enthaltenen folgen, oder vor denselben vorhergehen. Es sey die gegebene veränderliche Größe  $y$ , und  $y$  irgend eine Funktion von  $x$ . Ferner sey

$$y^I = y + dy; \quad y^{II} = y + 2dy; \quad y^{III} = y + 3dy; \text{ 2c.}$$

$$y_I = y - dy; \quad y_{II} = y - 2dy; \quad y_{III} = y - 3dy; \text{ 2c.}$$

desgleichen

$$dy = y^I - y; \quad dy^I = y^{II} - y^I; \quad dy^{II} = y^{III} - y^{II} \text{ 2c.}$$

$$dy_I = y - y_I; \quad dy_{II} = y_I - y_{II}; \quad dy_{II} = y_{II} - y_{III} \text{ 2c.}$$

und allgemein

$$y^n = y + ndy; \quad y_n = y - ndy$$

und

$$dy^{n-1} = y^n - y^{n-1}; \quad dy_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

so wird, da  $y =$  eine Funktion von  $x$  ist,

der

der hier stehende Aus-  
druck

gleich derselben Funktion von  
x, wenn man darin für x  
allenthalben setzt

$y^I$	$x + dx$
$y^{II}$	$x + 2dx$
$y^{III}$	$x + 3dx$
$y^{IV}$	$x + 4dx$
$\vdots$	$\vdots$
$y^n$	$x + ndx$

ferner

$y_I$	$x - dx$
$y_{II}$	$x - 2dx$
$y_{III}$	$x - 3dx$
$y_{IV}$	$x - 4dx$
$\vdots$	$\vdots$
$y_n$	$x - ndx$

und will man daher  $dy$ ;  $dy^I$ ;  $dy^{II}$ ;  $dy^{III}$ ;  $dy^{IV}$  2c. oder  
 $dy_I$ ;  $dy_{II}$ ;  $dy_{III}$ ;  $dy_{IV}$  2c. durch  $dx$  und endliche Größen  
ausdrücken, so darf man die Funktionen suchen, welche den  
Ausdrücken  $y^I$ ;  $y^{II}$ ;  $y^{III}$ ; 2c.  $y_I$ ;  $y_{II}$ ;  $y_{III}$ ; 2c. gleich sind,  
und darauf mit denselben nach diesen Gleichungen ver-  
fahren:

$$dy = y^I - y; \quad dy^I = y^{II} - y^I; \quad dy^{II} = y^{III} - y^{II}; \quad 2c.$$

$$dy_I = y - y_I; \quad dy_{II} = y_I - y_{II}; \quad dy_{III} = y_{II} - y_{III}; \quad 2c.$$

Uebrigens ist allemal, so wie in der Lehre von den Diffe-  
ferenzen

$$y = \Delta y_I + \Delta y_{II} + \Delta y_{III} + \Delta y_{IV} + \Delta y_V + 2c.$$

war, auf ähnliche Art hier,

$$y = dy_I + dy_{II} + dy_{III} + dy_{IV} + dy_V + 2c.$$

ein Satz, der sowohl bey den Anwendungen der Differenzial-

Rech-

Rechnung, als auch in der Integral-Rechnung von der äußersten Wichtigkeit ist.

Ob die Differenzialien, woraus Eine gegebene veränderliche Größe besteht, einander gleich seyn oder nicht? läßt sich, da man dieselben nach der beschriebenen Methode deutlich darstellen kann, leicht untersuchen. Es verhält sich aber damit völlig, wie mit den Differenzen der veränderlichen Größen; und da sie also nur bey den wenigsten veränderlichen Größen einander gleich sind: so entsteht die Frage:

Ob es hinlänglich sey, bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien der veränderlichen Größen, überhaupt genommen, bloß diejenigen Differenzialien zum Grunde zu legen, welche man nach den S. 312 f. mitgetheilten Regeln findet?

Eben diese Frage hätte auch schon in der Lehre von den Differenzen aufgeworfen werden können, weil sich die Differenzialien von den Differenzen bloß darin unterscheiden, daß diese zu ihren Größen ein endliches, obgleich unbekanntes, Verhältniß haben, das Verhältniß von jenen zu ihren Größen hingegen kleiner ist, als jedes Verhältniß, das sich angeben läßt. Die Antwort aber ist bejahend und leicht. Es sind nemlich die Ausdrücke, welche man nach der gewöhnlichen Methode für die Differenzialien der veränderlichen Größen findet, nicht bloß Ausdrücke für das nächste Differenzial, sondern allgemeine Darstellungen aller in jenen Größen enthaltenen Differenzialien. Denn sind die gegebenen veränderlichen Größen veränderliche Größen in engerer Bedeutung, oder auch von der Art, daß sie unter die Form  $y = az$  u. dgl. gehören: so sind alle ihre Differenzialien einander gleich, und was also von einem gilt, das gilt auch

Eulers Differenz, Rechn. I, Th.      K      von

von allen. Sind aber dieselben solche Funktionen, daß die Differenzialien ungleich werden: so enthält das gedachte Differenzial, außer dem Differenziale der veränderlichen Größe der Funktion, auch diese veränderliche Größe selbst, und begreift deswegen alle in den gegebenen veränderlichen Größen enthaltene Differenzialien unter sich. Es sey z. B.  $y = z^2$ , und also  $dy = 2z dz + dz^2$ , um dasselbe vollständig auszudrücken. Man suche  $dy^n = y^{n+1} - y^n = (z + (n+1) dz)^2 - (z + ndz)^2 = 2z dz + 2ndz^2 + dz^2$ . Da  $y$  und  $z$ , so wie sie, als veränderliche Größen, ihre Einheiten in gleicher Menge enthalten müssen, also auch hier bloß durch dieses Kennzeichen gegeben sind: so kann man allemal, wenn  $y$  in irgend einer Funktion von  $z$  gegeben ist,  $y + ndy = Y$ , und  $z + ndz = Z$  setzen, und dann  $Y$  nicht nur als eben die Funktion von  $Z$  ansehen, welche  $y$  von  $z$  ist, sondern auch  $dy$  als die Differenzialien von  $Y$ , und  $dz$  als die Differenzialien von  $Z$  betrachten. Auf diese Art aber wird in dem gegenwärtigen Falle  $Y = Z^2$ , und  $dY = 2Z dz + dz^2 = dy^n$ ; und setzt man hierin  $Z = z + ndz$ , so wird  $2Z dz + dz^2 = 2z dz + 2ndz^2 + dz^2$ . Da übrigens hieraus zugleich erhellet, daß man, wenn man bey der Untersuchung des Verhältnisses der Differenzialien nicht die nächsten, oder nach der S. 312 f. beschriebenen Methode sich ergebenden, sondern irgend andere nehmen wollte, doch allemal  $dy^n$  nehmen müßte, wenn man von irgend einer veränderlichen Größe das gleichliegende Differenzial genommen hätte; und  $dy^n = y^{n+1} - y^n$ , hingegen  $dy = y^1 - y$  ist: so lassen sich auch die Differenzialien auf keine bequemere Art ausdrücken, als eben nach der gedachten Methode.

Wenn man in dem Gesagten statt des Worts Differenzial den Ausdruck Differenz, und statt  $dy$  das Zeichen  $\Delta y$ .

u. 1. f.

u. s. f. setzt: so paßt die aufgeworfene Frage und die Beantwortung derselben durchaus in die Lehre von den Differenzen; und wäre sie daselbst aufgeworfen und beantwortet worden, so würde man sie durch eine entgegenstehende Abänderung für die Differenzial-Rechnung haben einrichten können. Dieses rührt ebenfalls her von der vorhin S. 311. und S. 321. erwähnten Uebereinstimmung zwischen den Differenzen und den Differenzialien, aber nicht daher, weil man die Differenzialien aus den Differenzen durch genugsam fortgesetzte Verkleinerung dieser letztern erhalten könnte. Denn man setze die Theilung einer Differenz so weit fort, als man irgend will und kann: so haben die Theile, auf welche man kommt, zu der Differenz, und also auch zu der veränderlichen Größe derselben, noch immer ein endliches Verhältniß, welches bey den Differenzialien nicht statt findet. Oder soll man die Theilung der Differenzen ohne Ende fortsetzen? Dann kann man ja selbst in Gedanken das Ende dieser Theilung nicht erreichen; und wie stimmt das mit einander überein, daß die Differenzialien kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, seyn, und doch durch eine unbegrenzte Theilung sollen gefunden werden können? da jene Redensart im Grunde nichts anders sagt, als: die Differenzialien sind Größen, welche man durch keine Theilung irgend einer Größe finden kann?

Um bey dieser Gelegenheit noch einiger andern Vorstellungen von den Differenzialien zu gedenken, so ist es gar nicht ungewöhnlich, sich dieselben auch, ohne sie erst von den Differenzen abzuleiten, sogleich als unbestimmt kleine Theile ihrer Größen zu gedenken, so daß ihr Verhältniß zu diesen Größen gleichwohl ein endliches Verhältniß bleibt. So erklärt z. B. Raymond-Roux in seinen *Leçons élémentaires*

de Calcul infinitésimal das Differenzial auf folgende Art: La différentielle ou la fluxion d'une quantité  $x$  fera une partie de  $x$  assez petite pour devoir s'évanouir en comparaison de la quantité dont elle fait partie; c'est à dire, que la fluxion de  $x$  n'est autre chose que  $x$  divisée par l'unité, suivie d'un assez grand nombre de zeros, pour que le quotient soit négligeable en comparaison du dividende, ou fluxion

$$\text{de } x = \frac{x}{1000 \dots 0} \text{ fluxion de } y = \frac{1}{1000 \dots 0} y, \text{ 2c.}$$

Nach dieser Erklärung wären also nicht bloß Differenzialien bey veränderlichen Größen möglich, sondern es ließen sich dergleichen auch sehr gut bey beständigen Größen gedenken! Man braucht nicht mehr, um das Falsche derselben einzusehen; allein es werden dabey noch schönere Behauptungen nothwendig. So findet sich z. E. in den Schriften von einigen, die eben die Meinung von den Differenzialien haben, ob sie gleich dabey die Differenzen gebrauchen, der Satz, daß die abgekürzten Differenzial-Ausdrücke nur beynahе wahr seyn, und denn heißt es weiter: Wenn zwey Größen beynahе gleich sind, so sind auch ihre Gleichvielfachen, ihre gleichnamigen Theile, ihre gleichvielte Potenzen oder Wurzeln 2c. beynahе gleich. Ferner: wenn zwey Größen beynahе gleich sind, und es werden Größen dazu addirt oder davon subtrahirt, welche beynahе gleich sind, oder sie werden mit beynahе gleichen Größen multiplicirt oder dividirt u. s. f. so sind die Resultate auch beynahе gleich; so daß, da diese Grundsätze durch die ganze Differenzial-Rechnung gebraucht werden, die ganze Differenzial-Rechnung zu einer Beynaherechnung gemacht wird. Nun be-

deute  $n$  eine solche Zahl, daß  $\frac{x}{n}$  nach der gedachten Mathematischer Begriffe ein Differenzial von  $x$  ausdrücke. Dann sind

$$x + \frac{x}{n} \text{ und } x, \text{ oder } x \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ und } x$$

beynahe gleich; folglich, nach dem einen von den angeführten Grundsätzen, beynahe

$$\left(x \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^m = x^m \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = x^m,$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1$$

was auch  $m$  für eine Zahl bedeute. Hätte Euler das im Jahr 1748 gewußt, als er seine Einleitung in die Analysis des Unendlichen schrieb; würde er wohl im siebenten Capitel des ersten Buchs, §. 119 behauptet haben, daß  $(1 + k\omega)^i = 1 + x$  in den daselbst den Buchstaben  $k$ ,  $\omega$ ,  $i$ , und  $x$  beygelegten Bedeutungen sey? Und wenn von den beynahe gleichen Größen überall eben das beynahe wahr seyn soll, was von den gleichen Größen streng und vollkommen wahr ist: so müssen doch auch die Potestäten gleicher Größen, wenn ihre Exponenten beynahe gleich sind, einander beynahe gleich seyn. Nun sey beynahe  $m = n$ , wobey also  $m$ , wie ich hier annehmen will, so viel nemlich, als es das Wort, beynahe, erlaubt, größer seyn kann als  $n$ . Da

$$dx = dx$$

ist, so muß nach dem angeführten Satze beynahe

$$dx^m = dx^n$$

und eben so

$$\frac{a}{dx^m} = \frac{a}{dx^n}$$

seyn. Man vergleiche hiermit den 95ten §. des ersten Theils der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung! Endlich ließe sich wahrlich nicht, ohne ein Wunder zu Hülfe zu nehmen, erklären, wie die Differenzial-Rechnung die ends-

X 3

lichen

lichen Größen, welche sie finden lehrt, aus beynahe wahren Größen genau zusammensetzen könne, ohne das Weggelassene je wieder dazu zu nehmen? Das zu erklären, wie die, welche gedachten durchaus falschen Begriff von den Differenzialien zum Grunde legen, im Stande gewesen sind, aus diesem falschen Begriffe so viele wahre Lehrsätze herzuleiten? ist leicht. Sie haben nemlich diese Lehrsätze, nicht aus dem Begriffe, sondern aus und durch Constructionen gefunden, und die mathematischen Constructionen lassen sich nicht so verwirren und verderben, als sich wohl durch Worte ausgedruckte Begriffe verwirren und verderben lassen. Wer genau überlegt, was  $dx$  unter den Umständen, unter welchen wir es brauchen, andeuten kann, und dabei das, bey den Ausdrücken der Differenzialien überhaupt, übliche Verfahren gehörig untersucht, wird in Ansehung des wahren Begriffs von den Differenzialien nicht zweifelhaft bleiben.

Weit scheinbarer ist die Theorie derer, die behaupten, daß man durch die Differenzial-Formeln und Gleichungen weiter nichts als die Grenze gewisser Verhältnisse, und z. B. durch  $dy = nz^{n-1}dz$ , oder  $\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}$ , bloß die Grenze des Verhältnisses ausdrücke, welcher sich, wenn  $y = z^n$  ist, das Verhältniß  $dy : dz$  ohne Ende nähern kann; allein genau geprüft kämpft sie gleichwohl mit einer doppelten Unbequemlichkeit. Die eine ist, daß man dabei nicht füglich vermeiden kann,  $dy$  und  $dz$  in Nichtse zu verwandeln, und dann erst den für  $\frac{dy}{dz}$  gefundenen Ausdruck als eine genaue Bestimmung ihres Verhältnisses anzusehen; die andere aber, daß man dabei gezwungen ist, eine Menge uneigentlicher Redensarten, die einer weitläufigen Erklärung bedür-

bedürfen, einzuführen. Jenes thut selbst Hr. Kästner in seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, S. II. in dem Zusätze 16; dieses findet man allenthalben. Gleichwohl hat diese Theorie, insbesondere unter den neuern Mathematikern, viel Anhänger gefunden, und vorzüglich haben sie Hr. Karsten in seiner Abhandlung vom Mathematischen Unendlichen, der ersten unter den 1786 zu Halle von ihm herausgegebenen mathematischen Abhandlungen, und Hr. L'Huilier in der in eben dem Jahre von der hiesigen Akademie der Wissenschaften gekrönten Preisschrift: Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs, von allen Zweifeln zu befreien, und wider alle Einwürfe zu sichern gesucht. Es wird daher nicht unzweckmäßig seyn, beyder Schriften noch mit etwas Mehrerm zu gedenken.

Hr. Karsten verwirft also zuvörderst den Eulerischen Grundsatz: Jede Größe kann ohne Ende vermehrt werden. Jener vermeinte Grundsatz, sagt er S. 20, ist wenigstens in der Allgemeinheit genommen, falsch, wie man ihn hier anwenden will, und man kann ihn ohne Umstände verwerfen: denn man ist eben so gut berechtiget, festzusetzen, jede Größe könne ohne Ende vermindert werden. Daraus würde also folgen, es sey unmöglich, daß eine Größe  $= 0$  werden könne, denn hiemit hätte ja die Verminderung ein Ende. Seiner Meinung nach enthalten daher unendliche Größen für den Verstand keinen Widerspruch, und zwar unendliche Größen in der Bedeutung, wobey  $\frac{1}{\infty} = 0$  ist. Im 29sten und 30sten §. erklärt er sich ferner über das unendlich Kleine und über die Differenzialien auf folgende Art: „Der Ausdruck unendlich klein rührt von der Vorstellung her, wie vermittelt der Division eines Ganzen mit

einer beständig wachsenden Zahl der Quotient der Größe  $o$  immer näher gebracht werden kann. Sie ist der Vorstellung ganz ähnlich, wie vermittelt der Division mit einer veränderlichen beständig abnehmenden Zahl der Quotient größer als jede noch zu bestimmende Größe werden kann, sie sey so groß, als man will. Kurz man wählte für das Zeichen  $\frac{1}{\infty} = o$  den Ausdruck unendlich Klein, weil man für das Zeichen  $\frac{1}{o} = \infty$  den Ausdruck unendlich groß gewählt hatte. Schemalige Vorstellungen von der Sache könnten dem Leser Zweifel übrig lassen, ob man auch berechtigt sey, das Zeichen  $\frac{1}{\infty}$  schlechterdings mit  $o$  für gleichgültig anzunehmen. Um solchem Zweifel zu begegnen, muß ich an die sehr bekannte trigonometrische Formel  $\frac{1}{\sec. \alpha} = \cot. \alpha$  erinnern. Wenn  $\alpha = 90^\circ$  ist, setzt man  $\sec. \alpha = \infty$ , also  $\frac{1}{\infty} = \cot. 90^\circ$ . Nach aller Geständniß bezeichnet  $\frac{1}{\infty}$  das unendlich Kleine, und nach aller Geständniß ist  $\cot. 90^\circ = o$ , also kann  $\frac{1}{\infty}$  kein Mittelding zwischen Nichts und Etwas seyn. Wenn ich nun voraus setze, daß  $\frac{1}{\infty}$  nichts mehr und nichts weniger bedeute als  $o$ , so versteht es sich von selbst, daß  $a \mp \frac{1}{\infty} = a - \frac{1}{\infty} = a$  sey, oder daß  $\frac{1}{\infty}$  in allen solchen Fällen aus einer Formel wegfallen müsse, wenn die  $o$  selbst, oder was vielleicht damit multiplicirt ist, wegfallen muß. Das ist es, was die Regel sagen will:

Das

Das unendlich Kleine verschwinde in Vergleichung mit dem Endlichen.

Vormals mochte man diese Regel nöthig haben, jetzt ist sie ganz überflüssig. Wenn man bey Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie oder andere Theile der Mathematik  $x + dx = x$ ,  $y + dy = y$  nimmt: so liegt allemal die Voraussetzung zum Grunde, daß  $dx$  oder  $dy$  so viel als  $\frac{1}{\infty}$ , mithin nichts anders als 0 sey.

Die ehemaligen Zweifel dagegen rühren von den ganz undeutlichen Begriffen her, die man sich davon machte, was  $dx$ ,  $dy$  eigentlich bedeuten solle.“ Man sieht hieraus, daß Hr. Karsten eben denselben Begriff von den Differenzialien zum Grunde legt, der im gegenwärtigen übersehten Eulerischen Werke angenommen worden ist, ob er gleich die Behauptung verwirft, auf welche man denselben hierin gebauet findet; aber so bleibt die Quelle, woraus die Schwierigkeiten in den ersten Grundsätzen der Differenzial-Rechnung fließen, immer noch unverstopft. Denn einmal läßt sich aus dem gedachten Begriffe nicht erklären, warum die beständigen Größen kein Differenzial haben. Zum andern giebt derselbe keine sichere Regel an die Hand, wornach man sich bey der Weglassung einiger Differenzial-Ausdrücke und der Beybehaltung anderer richten könnte. Endlich bleibt dabey drittens immer die Schwierigkeit zurück, daß man in der Differenzial-Rechnung bloße Nichtse untersuche, und, ohne eine Verschiedenheit unter ihnen aus dem Begriffe derselben herleiten zu können, sie gleichwohl verschiedentlich bezeichne, und bey der Vergleichung als wirklich von einander verschieden behandle. Ob dieser zuletzt gedachten Schwierigkeit auf folgende Art hinlänglich begegnet werde? wird jeder Uneingenommene von selbst schon beurtheilen: „Es sey

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ic.$$

$$z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + ic.$$

so müssen  $y$  und  $z$  beyde 0 werden, wenn man  $x = 0$  setzt. Dagegen ist der Exponent des Verhältnisses  $y : z$

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ic.}{f + gx + hx^2 + kx^3 + ic.}$$

und dieser wird  $\frac{a}{f}$ , wenn man  $x = 0$  setzt, in allen andern

Fällen aber ist der Werth des Exponenten  $\frac{y}{z}$  von  $\frac{a}{f}$  verschieden. Wenn nun gleich in dem Falle  $x = 0$  nicht weiter gefragt werden kann, wie vielmal  $z$  und  $y$  enthalten sey? weil es sich von selbst versteht, daß alle Nullen einander gleich sind, und weiter keine Größe haben, die man vergleichen könnte: so läßt sich doch oft durch andere Schlussfolgen beweisen, daß der letzte Werth des Exponenten  $\frac{y}{z}$  für den

besondern Fall  $x = 0$  dem Exponenten des Verhältnisses zweyer andern Größen gegen einander, welches man eigentlich suchte, gleich seyn müsse. Eben diese Grenze des Verhältnisses  $y : z$  stellte man sich sonst als das Verhältniß der dem eingeführten Sprachgebrauche gemäß, nun unendlich Klein gewordenen Größen  $y : z$  vor, und in diesem Sinne konnte man so reden, als wenn die eine unendlich Kleine Größe  $z$  in der andern  $y$  so und so vielmal enthalten sey, oder als wenn zwischen zweyen unendlich Kleinen Größen jedes endliche Verhältniß statt haben könne.“ Wenn  $y = ax + bx^2 + cx^3 + ic.$  und  $z = fx + gx^2 + hx^3 + ic.$  ist: so ist allerdings  $y$  sowohl als  $z$  für  $x = 0$  ebenfalls 0,

und  $\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + ic.}{f + gx + hx^2 + ic.}$ . Allein da hieraus für

$x = 0$

$x = 0$  auch  $\frac{0}{0} = \frac{a}{f}$  fließt, und alle Nullen einerley seyn sollen, so ist  $0 : 0 = 1$ , und so muß auch  $a : f = 1$ , und also  $a = f$  seyn; und wozu alsdenn die Bestimmung des Verhältnisses  $y : z$  durch  $a : f$ ? „Über es zeigt sich ja der Nutzen von dergleichen Bestimmungen in so vielen Fällen und so offenbar, daß man darauf das Recht, diese Bestimmungen zu gebrauchen, gründen könnte?“ Sieht man Größen zu, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und dergleichen Größen gebraucht man ja schon in der Elementar-Mathematik: so ändern sich vorstehende Schlüsse in folgende. Wenn  $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{rc.}$  und  $z = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + \text{rc.}$  ist: so ist sowohl  $y$  als  $z$  für  $x = 0$  ebenfalls  $0$ , und  $a = f$ , und es hebt also in diesem Falle alle Vergleichung der Größen,  $y$  und  $z$ , mit einander auf. Allein wenn man  $x$  kleiner nimmt, als jede Größe, die sich angeben läßt, und  $a, b, c, d, \text{rc.}$   $f, g, h, k, \text{rc.}$  endliche Größen bedeuten, so werden auch  $y$  und  $z$  Größen die kleiner sind, als jede anzugebende Größen, aber weder  $0$ , noch nothwendig einander gleich. Ihr Verhältniß zu einander ist vielmehr alsdann

$$\frac{y}{z} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{rc.}}{f + gx + hx^2 + kx^3 + \text{rc.}}$$

so daß  $x$  kleiner als jede anzugebende Größe ist; und wenn daher das Verhältniß  $y : z$  nur so weit ausgedrückt werden soll, als wir es durch endliche Größen zu thun im Stande sind: so bekommt man

$$\frac{y}{z} = \frac{a}{f}.$$

Hier hat man es nicht mit Nullen, sondern mit Größen zu thun, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt; und wenn man durch Bestimmung und Vergleichung der  
Nichtse

Nichtse wirklich etwas wahres und brauchbares findet: so hat man es sicher allemal auf die Art gefunden, daß man zwar von Nichtsen geredet, aber im Grunde immer Größen, die kleiner sind, als jede anzugebende Größe, darunter gedacht, und seine vorgegebenen Nichtse durchaus als dergleichen Größen behandelt hat.

Dieses vorausgesetzt will ich gerne zugeben, daß man mich mit Recht tadeln würde, wenn ich behaupten wollte, daß die unter dem Namen der Exhaustion bekannte Methode der Alten, gehörig erweitert, unzulänglich sey, um den Grund der Differenzial Rechnung fest zu legen. Dieses leugne ich keinesweges selbst und an sich genommen, sondern ich verlange nur, daß man die dabey nöthigen unbestimmbar kleinen Größen nicht mit Null verwechselt und wirklichen Nichtsen gleich annehme; und behaupte dabey, daß die gewöhnliche Art, die Gründe der Differenzial Rechnung auf die Exhaustions-Methode zu bauen, weitläufiger und unbequemer sey, als es nöthig ist. Wo haben wohl die Alten bey ihren Exhaustionen Größen gebraucht, die Nullen gleich gesetzt werden könnten? Durch die Einführung solcher Größen erweitert man die Exhaustions-Methode der Alten nicht, sondern man entfernt sich gänzlich von ihr. Und wie schwer ist das mit einander zu vereinigen, oder vielmehr wie unmöglich, daß man einmal durch keine noch so weit fortgesetzte Theilung einer endlichen Größe je auf Null kommen könne, und denn doch die endlichen Differenzen durch eine solche Theilung zu verschwindenden Größen machen soll? Hr. L'Huilier vermeidet diese Klippe, allein wenn man ein Beispiel von der oben gedachten Weitläufigkeit und Unbequemlichkeit anführen will, braucht man sich auch nur auf seine Exposition &c. zu berufen. Damit dieses Urtheil nicht

nicht

nicht unbillig scheine, will ich die Erklärungen und Lehrsätze, aber ohne die hinzugefügten Erläuterungen und Beweise, hersehen, auf welche Hr. L'Huilier die Erfindung der Differenzialien bauet. Sie sind folgende:

Erste Erklärung.

Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette quantité constante est dite la *limite* en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Zweyte Erklärung.

Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier: le rapport donné est appelé la *limite en grandeur* du rapport variable. Item: soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier: le rapport donné est appelé la *limite en petitesse* du rapport variable.

Erster Lehrsatz.

Soit une quantité constante; & soit une quantité variable toujours plus petite ou toujours plus grande que la première, mais qui puisse en différer moins que d'aucune quantité assignée plus petite qu'elle. Le rapport d'égalité est la *limite en petitesse* ou en grandeur du rapport de la quantité constante à la quantité variable. Et reciproquement, si le rapport d'égalité est la *limite*, soit en grandeur soit en petitesse, du rapport d'une quantité constante à une quan-

quantité variable plus grande ou plus petite qu'elle, la quantité variable peut différer de la quantité constante moins que d'aucune quantité assignée.

### Zweyter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse; & ayant entr'elles un rapport constant; je dis que leurs limites sont entr'elles dans le même rapport.

Soient  $A$  &  $B$  deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient  $A'$  &  $B'$ ; & soit le rapport de  $a$  à  $b$  le rapport constant des quantités  $A$  &  $B$ . Je dis que aussi  $A' : B' = a : b$ .

### Dritter Lehrsatz.

Soient deux quantités variables d'espèces différentes susceptibles de limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse. Que les rapports de ces quantités variables à deux quantités constantes soient toujours égaux entr'eux. Je dis que les rapports de leurs limites aux mêmes quantités constantes sont aussi égaux entr'eux.

Soient  $A$  &  $B$  deux quantités variables, dont les limites, l'une & l'autre en grandeur ou l'une & l'autre en petitesse, soient  $A'$  &  $B'$ ; & soient  $a$  &  $b$  deux quantités constantes, respectivement, des mêmes espèces qu'elles. Si on a toujours la proportion  $A : a = B : b$ , je dis qu'on a aussi la proportion  $A' : a = B' : b$ .

Vier

## Vierter Lehrsatz.

Si deux rapports variables, susceptibles de limites, sont toujours égaux entr'eux, leurs rapports limites sont aussi égaux entr'eux.

Que les rapports de  $A$  à  $B$  & de  $C$  à  $D$  soient toujours égaux entr'eux & que les rapports de  $A'$  à  $B'$  & de  $C'$  à  $D'$  soient respectivement leurs limites; je dis que les rapports de  $A'$  à  $B'$  & de  $C'$  à  $D'$  sont aussi égaux entr'eux.

## Fünfter Lehrsatz.

Le rapport composé d'un nombre quelconque de rapports susceptibles de limites a pour limite le rapport composé des rapports limites des premiers.

## Sechster Lehrsatz.

Soient  $A, B, C, D, \dots, L, M, N$ , des quantités données; soit  $x$  une quantité variable non susceptible de limite en petitesse (ou qui peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée); soient  $b, c, d, \dots, l, m, n$ , des exposants donnés qui vont successivement en croissant.

Soit  $Q$  une fonction de  $x$  telle que,  $Q = A + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \&c. \dots Lx^l + Mx^m + Nx^n +$

je dis que le rapport d'égalité est la limite du rapport de  $Q$  à  $A$ , en petitesse ou en grandeur, suivant que  $B$  est positif ou négatif.

## Lehrsatz.

Soit  $Q$  une quantité variable susceptible de limite, laquelle soit  $Q'$ : je dis que le rapport limite du rapport de  $Q$  à une quantité constante  $A$  est égal au rapport de  $Q'$  à  $A$ .

Siebent:

## Siebenter Lehrsatz.

Soit  $a$  un nombre donné; soit  $n$  un exposant donné; soit  $x$  une quantité variable, dont la variation, que j'appellerai changement, soit  $\Delta x$ ; je dis: que le rapport des changements simultanés de  $a^{n-1}x$  & de  $x^n$  peut approcher du rapport de  $a^{n-1}$  à  $nx^{n-1}$  plus près que n'en approche aucun rapport assigné plus petit ou plus grand que celui-là, suivant que  $n$  est plus grand ou plus petit que l'unité.

## Achter Lehrsatz.

Soit  $Q$  une fonction de  $x$  de la forme  $Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \dots$ . Et soit  $Q' = Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + Ccx^{c-1} + Ddx^{d-1} + Eex^{e-1} + \dots$ ; je dis que le rapport de  $A'$  à  $Q'$  est la limite du rapport des changements simultanés de  $A'x$  & de  $Q$ , par un même changement  $\Delta x$  de  $x$ . En effet, le rapport des changements simultanés de  $A'x$  & de  $Q$  est celui de  $A'$  à la quantité  $Q'$  augmentée de la somme des produits de  $\Delta x$  & de ses puissances par des puissances de  $x$  & des facteurs constants. Donc, pour une même valeur de  $x$ , le rapport de  $A'$  à  $Q'$  est bien la limite du rapport de ces changements simultanés.

Ich lasse es bey der bloßen Mittheilung dieser Fälle mit den Worten des Verfassers bewenden, um Raum zu den übrigen hieher gehörigen Anmerkungen zu behalten. Aber vielleicht fällt jemanden der Gedanke ein: „Wozu so viel Worte über die Natur der Differenzialien? Wir haben so manche unvollkommne Erklärungen in der Mathematik, ohne dabey über die Eigenschaften der Gegenstände derselben im mindesten ungewiß zu seyn. Was läßt sich z. B. selbst über die

die Erklärung der geraden Linie und des geradlinigen Winkels sagen, die nichts weniger als Definitionen, im strengen Sinne genommen, sind; und wie evident sind gleichwohl die Sätze von den geraden Linien und Winkeln! Wenn denn nun auch in der Beschreibung der unendlich kleinen Größen nicht alles ganz genau paßt und wörtlich verstanden werden darf, was schadet's? Wer sich mit der Differenzial- und Integral-Rechnung selbst bekannt macht, kann wegen der Wahrheit ihrer Vorschriften nicht in Ungewißheit bleiben.“

Zuvörderst gebe ich sehr gern zu, daß derjenige, der den Begriff von den Differenzialien zu berichtigen und einen unbezweifelten Grundsatz für die Differenzial-Rechnung zu finden sucht, bloß den Anfang des Weges zu einem reizenden und fruchtbaren Gefilde ebene; allein dieses scheint mir, jenes Einwurfs ungeachtet, nothwendig und wichtig. Denn daß in der Elementar-Mathematik und also auch in der Euclidischen Geometrie unvollkommene Erklärungen hinreichen, rühret daher, weil die Elementar-Mathematik die Größe unmittelbar in Constructionen betrachtet, und häufig weiter nichts als Beschreibungen erfordert werden, um diese Constructionen zu machen. Dahingegen untersucht die allgemeine Mathematik, wovon die Differenzial-Rechnung ein Theil ist, die Größe zwar vermittelt Constructionen, aber nicht in denselben, sondern in deutlichen Begriffen; und wie kann ein Strom klar fließen, wenn seine Quelle trübe ist? Und denn enthalten die unvollkommenen Erklärungen der Elementar-Mathematik, von welchen man sagen kann, daß sie nicht geändert zu werden brauchen, nichts, woraus etwas widersprechendes flösse. So lange man daher keinen wahrhaftig mathematischen Grundsatz hat, der an die Stelle des Unendlichen gesetzt werden kann, und dennoch die Untersuchungen, so durch dieses Mittel geschehen, weder erschwert noch ver-

Eulers Differenz. Rechn. I. Th.            9            längert:

längert: so lange kommt die ehrenvolle Benennung der vöblig genauen Wissenschaft nur dem niedrigsten Theile der Mathematik zu. Aber vielleicht ist folgendes, für manchen wenigstens, wichtiger. Es werden nicht nur durch die Differential- und Integral-Rechnung viele, auch ohne sie mögliche, Untersuchungen in einem sehr hohen Grade erleichtert und abgekürzt; sondern es machen auch diese beyde Rechnungen eine, gewiß eben so große, Menge von Untersuchungen über die Größe erst möglich, und die angewandte und praktische Mathematik kann des Differential- und Integral-Calculs bey dem jetzigen Zustande der Sachen schlechterdings nicht entbehren. Nun gründe man diesen Calcul auf Principien, welche von denen der gemeinen Mathematik, und ich möchte sagen, von denen der geraden Vernunft, wesentlich verschieden sind; ist denn Wunder, wenn diejenigen, die die Mathematik wegen der Anwendung auf die Geschäfte des Lebens treiben, sich durch die Dornen abschrecken lassen, womit er umzäunt ist, und in dem Gebiete der gemeinen Mathematik verweilen? Man muß von dem, der Theorien brauchen soll, nicht bloß verlangen, daß er sie lerne, sondern ihm auch die Erlernung derselben in seiner Lage möglich, und ohne Nachtheil der Gründlichkeit angenehm und leicht machen.

Und nun zur weitem Entwicklung der Schwierigkeiten womit die Eulerische Theorie von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen kämpft.

Zu §. 84 und 85.

Man darf in der Mathematik allerdings nicht immer einerley oder gleiche Größen durch einerley oder dieselbigen Zeichen ausdrücken, aber umgekehrt müssen dieselbigen Zeichen immer dieselbigen Größen bedeuten, oder es muß das  
Gegen-

Gegentheil, wenn es statt finden soll, ausdrücklich angezeigt werden. Es sey also, wie Euler verlangt,

$$n : 1 = 0 : 0$$

weil  $n \cdot 0 = 0$  ist. Ferner bedeute  $m$  eine von  $n$  verschiedene Zahl. Aus eben dem Grunde, aus welchem  $n \cdot 0 = 0$  ist, ist auch  $m \cdot 0 = 0$ , und also auch, so wie  $n : 1 = 0 : 0$  ist,

$$m : 1 = 0 : 0; \text{ folglich}$$

$$n : 1 = m : 1; \text{ und } n = m.$$

Zu §. 86.

Wenn  $dx = 0$ , und auch  $adx = 0$  ist: so verhält sich

$$adx : dx = 0 : 0.$$

Nun sollen nach dem 85sten § die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können: (inter cyphras ratio quascunque intercedere potest) also wäre nicht bloß

$$adx : dx = a : 1, \text{ sondern auch}$$

$$adx : dx = A : 1$$

wie verschieden auch  $A$  von  $a$  seyn mögte. Hierdurch würde die Möglichkeit  $adx$  und  $dx$  mit einander zu vergleichen gänzlich aufgehoben.

Zu §. 88.

Eine Linie ist eine Fläche, deren Breite  $= 0$  ist. Gäbe es unter den Nullen verschiedene Ordnungen, so ließe sich vielleicht auch geometrisch scharf darthun, daß die Breite von einigen Linien in Vergleichung mit der Breite anderer unendlich groß sey, obgleich keine eine Breite hätte.

Zu §. 90 = 95.

So wie es Größen giebt, die kleiner sind als jede Größe, die sich angeben läßt, so giebt es auch solche, die größer sind, als jede anzugebende Größe, d. h. beyde Arten von Grö-

ßen lassen sich denken. Jene werden selbst in der Elementar-Mathematik gebraucht, zu diesen gehören die Mengen der Differenzialien in jeder Größe. Warum sollte man also, da man jene durch  $dx$  bezeichnet, wenn  $x$  die gegebene Größe ist, nicht auch für diese ein besonderes Zeichen, z. B.  $\infty$  brauchen. Aber nun stehen auch  $dx$  und  $\infty$  einander gegenüber, und so wie jenes nicht  $= 0$  ist, so bedeutet auch  $\infty$  keine unendliche Größe im metaphysischen Verstande. So wie man durch eine, ohne Ende fortgesetzte, Verkleinerung jeder endlichen Größe sich dem Differenziale derselben immer mehr nähert, ohne es je zu erreichen, und also noch weniger dadurch zu  $0$  gelangt, weil  $dx$  nicht  $= 0$  ist: so nähert man sich auch der durch  $\infty$  angezeigten Größe durch eine ohne Ende fortgesetzte Vermehrung immer mehr, erreicht sie aber nie, und gelangt also auch noch weniger zu dem Unendlichen, welches  $0$  gegenüber gedacht werden muß. Für dieses Unendliche will ich das Zeichen  $[\infty]$  gebrauchen, und dann würde allerdings, wenn man beim bloß Gedenkbareren stehen bliebe, nicht nur

$$\frac{x}{dx} = \infty, \text{ und } \infty \cdot dx = x$$

sondern auch

$$\frac{x}{[\infty]} = 0, \text{ und } [\infty] \cdot 0 = x$$

seyn. Was indeß diese Gleichung  $[\infty] \cdot 0 = x$  betrifft, so wird sich weiter hin Gelegenheit finden, sie genauer zu erklären. Das Zeichen  $\infty$  wird aber sehr verschieden gebraucht. So setzt man nicht bloß

$$\frac{x}{dx} = \infty; \text{ sondern auch } \frac{ax}{dx} = \infty;$$

auch ist es nicht ungewöhnlich, die Summen von Reihen wie folgende:



Im 94ten §. wird behauptet, man müsse in der Geometrie sogar zugeben, daß das Produkt aus einer unendlichen Größe in Null eine endliche Größe seyn könne, weil aus

$$\text{tang. } \alpha \cdot \text{cot. } \alpha = r^2$$

wenn  $\alpha = R$  ist,  $\infty \cdot 0 = r^2$  folge. Aus dem was Euler behauptet, fließt dieses allerdings; allein wenn aus richtigen Vorderätzen durch richtige Schlüsse nichts Falsches muß herausgebracht werden können, und jene Behauptung nicht zugegeben werden kann, ohne andere ausgemachte Wahrheiten über den Haufen zu werfen: so ist ja dieselbe ein sicheres Kennzeichen, daß die Sätze, worauf sie gebauet ist, falsch sind. Wenn  $\alpha = R$  ist, so ist  $\text{tang. } \alpha = [\infty]$  und  $\text{cot. } \alpha = 0$ . Aber will man aus  $\text{tang. } \alpha \cdot \text{cot. } \alpha = r^2$  für  $\alpha = R$  den Satz

$$[\infty] \cdot 0 = r^2$$

herleiten, so ist dabey noch einiges zu beobachten, was weiter unten angeführt werden wird.

Zu §. 95 : 97.

Wenn in der Elementar-Mathematik die Linie durch eine Länge ohne Breite erklärt oder beschrieben, die Grenzen der Linien Punkte genannt, und weil man eine Linie theilen kann, wo man will, in jeder Linie unzählige Punkte angenommen werden: so sind das Vorstellungen und Behauptungen, wovider kein Mensch etwas einwenden kann; und wenn man bey den Untersuchungen, wobey man den Begriff der Linie gebraucht, weiter nichts fordert: so kann allenthalben das hellste Licht herrschen. Allein man ziehe aus jenen Behauptungen die Folge: Jede Linie bestehe aus unendlich vielen Punkten; und verschwende dann seine Zeit mit der Bestimmung der unendlichen Mengen der Punkte  
in

in verschiedenen Linien: so wird und muß man sich, obgleich nach und nach, doch immer bald, aus der lichtvollsten Gegend in dicke Finsterniß versetzt sehen. In der Rücksicht sind zwar die Differenzialien von den Punkten verschieden, daß sie als wirkliche Theile ihrer Größen gedacht werden müssen: allein übrigens darf man nur mit ihnen so verfahren, als nach dem Borigen mit den Punkten, um in dasselbe Labyrinth zu gerathen. Wenn  $x$  jede veränderliche Größe bedeutet, so ist, das Verhältniß von  $x : dx$  anzugeben, keine noch so große Zahl hinreichend. Dies fließt aus dem Begriffe des Differenzials; und was könnte die Lehre von den Differenzialien für Schwierigkeiten haben, wenn man darin weiter nichts als dieses fordert. Allein man folgere daraus, daß  $\frac{x}{dx} = \infty$  sey, und denke sich das  $\infty$ , wie gewöhnlich; und daneben auch  $dx$  als unendlich klein, im gewöhnlichen Verstande: so hat man auf einmal nicht bloß unendlich große und unendlich kleine Größen, sondern auch unendlich große Größen, die unendlichmal kleiner als andere unendlich große Größen, und unendlich kleine, die unendlichmal kleiner als andere unendlich kleine Größen sind. Noch mehr! Man hat alsdenn so viele unendlich große und unendlich kleine als endliche Größen, ja sogar unendlich viele Ordnungen unendlich großer und unendlich kleiner Dinge: ja wenn ein unendlich großes schon wer weiß wie vielmal unendliche Male auf einander gehäuft ist, so ist es doch wieder soviel als Nichts gegen ein anderes Unendliche; und wenn ein unendlich Kleines wer weiß wie vielmal unendliche Mal in Theile getheilt ist, so ist doch jeder Theil noch ein unendlich großes gegen andere unendlich Kleine. Das sind doch wohl keine *toleranter vera, quae explicatione rigidantur*? Und wozu nun diese ganze geheimnißvolle

Sprache? Was ist man dadurch im Stande zu finden, was man nicht ohne sie viel leichter und bequemer finden könnte? Wenn man Dinge an sich zu untersuchen unternimmt, welche bloß in Vergleichung mit einander untersucht werden können, und untersucht zu werden brauchen: so kann dasjenige, was man findet, aus dem ersten Grunde nicht anders als verworren und falsch, und aus dem andern nicht anders als unnütz und unbrauchbar seyn. Daß zu dieser Classe der Inhalt des 95, 96 und 97ten §. gehöre, glaube ich nur nöthig zu haben, anzuzeigen.

### 3. Einige anderweitige hieher gehörige Betrachtungen.

Zu §. 102 §. III.

Wenn man nach speciellen Regeln, die nur auf eine Art passen, weil sie bloß aus dem Begriffe dieser Art abgeleitet sind, auch die übrigen neben ihr liegenden, wenn gleich mit ihr zu einem und demselben Geschlechte gehörenden, Arten behandelt: so darf man sich nicht wundern, wenn man dadurch auf Resultate geführt wird, die nicht erlauben, den angenommenen zu eingeschränkten Gesichtspunkt beizubehalten. Auf diese Weise aber verhält es sich mit den individuellen Reihen, welche der Verf. aus der allgemeinen Formel:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ic.}$$

hergeleitet hat. Es haben dieselben ganz und gar keine Schwierigkeit, wenn man dabey vor Augen behält, daß die Regeln der Division bey den positiven und negativen Zahlen bald auf die Vorstellung: jede negative Zahl sey weniger als 0; und bald auf den Begriff gegründet sind, woben das

Negat

Negative als dem Positiven entgegengesetzt, und das Positive noch vom Absoluten unterschieden gedacht wird. Wenn

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \dots$$

gesetzt wird, so werden die Regeln der ersten Gattung, wenn

$$\text{aber } \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ angenommen wird, die Re-}$$

geln der zweiten Gattung befolgt. Man kann daher nicht sagen, daß schlechterdings und ohne alle weitere Rücksicht

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \dots = -1$$

sey, weil sowohl  $\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ ,

als auch  $\frac{1}{1-2} = -\frac{1}{2}$  nach richtigen Regeln gefunden

werde: denn so richtig diese Regeln sind, so liegt dabey gleichwohl ein doppelter Begriff von den negativen Zahlen zum Grunde. Allein da ohne Einschränkung

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

seyn müßte, wenn jene Regeln nicht durch die bey ihnen angenommenen Gesichtspunkte eingeschränkt wären: so läßt sich aus den vom B. angeführten Reihen allerdings beweisen, daß man sich, wenn die Regeln vom Positiven und Negativen ganz allgemein und ohne alle weitere Rücksicht gebraucht werden sollen, die negativen Zahlen, außer auf die doppelte vorhin berührte Art, auch noch als Zeichen des mehr als unendlich Großen gedenken müsse. Thut man dieses, so wird zwar die Bedeutung der negativen Zahlen mannigfaltig, und man muß in jedem Falle, wenn man am Ende auf dergleichen Zahlen stößt, aus andern Umständen bestimmen, was für eine Bedeutung statt habe: allein ähnliche Fälle giebt es in der unbestimmten Mathematik in

Menge, und es entsteht also daher kein Einwurf. Aber das könnte wichtiger scheinen, daß alsdenn die negativen Zahlen solche Zahlen vorstellen müßten, die größer wären als das Unendliche, welches ich oben S. 340. durch  $[\infty]$  zu bezeichnen vorgeschlagen habe. Indesß zugegeben, daß die durch das Zeichen  $[\infty]$  ausgedruckten Zahlen, und also noch mehr die unter die Form  $[\infty] + m$  gehörigen imaginär seyen; wir gebrauchen ja auch sonst mit Vortheil imaginäre Größen im Calcul, warum sollten wir diese Gattung verwerfen? zumal da jene imaginären Größen bloße Verkürzungsmittel der anzustellenden Untersuchungen sind, und, wofern das Gesuchte nicht unmöglich ist, am Ende aus der Rechnung wegfallen; diese hingegen häufig in Resultaten vorkommen, welche wir nicht für unmöglich erklären dürfen, ohne die schönsten Regeln der Mathematik über den Haufen zu stoßen. Uebrigens verweise ich wegen der Bedeutungen, welche wir den negativen Zahlen belegen müssen, auf das, was ich darüber in den Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen und in der folgenden Betrachtung, von S. 352. an, gesagt habe.

Dieses vorausgesetzt haben die Reihen, welche Euler im 103ten § aus der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ic.}$$

ableitet, keine Schwierigkeit. Es ist vielmehr ganz natürlich, daß z. B.

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ic.}$$

ist, weil man diesen Werth von  $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1}$  durch die Division der 1 mit einer Größe, die kleiner als 0 gedacht wird,



$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ic.} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

abgeleitet werden? Hieraus findet man

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{ic.}$$

und da vorhin

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ic.}$$

war, und  $\frac{1}{2}$  nach dem Obigen =  $[\infty]$  seyn soll: so sollte ja auch

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{ic.} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ic.}$   
seyn. Noch mehr! Wenn man in jener Formel für  $x$  die Zahl  $-2$  setzt, so bekommt man

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{ic.} = 1.$$

Wie kann  $1 = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{ic.}$  seyn? oder: Wie kann, da durch  $(1-2)^2$  dividiren eben so viel ist, als durch  $-1$  dividiren, und den Quotienten nochmals durch  $-1$  theilen, und jene Division schon mehr als das Unendliche giebt, folglich diese das Unendliche, unendliche Mal genommen, hervorbringen müßte,  $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$  werden? Dergleichen Knoten sind leicht geschürzt, aber in der That noch leichter gelöst. Wenn man  $\frac{1}{(1-1)^2}$  oder  $\frac{1}{(1-2)^2}$  nach der Formel:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ic.}$$

entwickelt: so dividirt man im ersten Falle  $1$  durch  $0$ , und den gefundenen Quotienten wieder durch  $0$ ; im andern aber  $1$  erst durch  $-1$ , und darauf den Quotienten nochmals durch  $-1$ .

— 1. Wenn man hingegen  $\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0}$  und  $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$  findet: so dividirt man im ersten Fall 1 durch 0, und im zweyten 1 durch 1; und so wäre es doch in der That zu bewundern, wenn jemand sich wundern wollte, daß einerley Größe durch verschiedene Größen dividirt, verschiedene Quotienten geben. Allein vielleicht wendet hier jemand ein, daß man auf diese Art bey der Anwendung der Sätze von den Zeichen + und — in Gefahr sey, sich zu irren, wenn man dieselben ganz unbedingt befolgte? Ich kann dieses an meinem Theile nicht leugnen, da bekanntermaßen bedingte Sätze nie als unbedingte gebraucht werden dürfen; und daß insbesondere die Behauptung: bey zwey Größen geben einerley Zeichen sowohl im Produkte als im Quotienten +, und verschiedene —; keine allgemeine und unbedingte Wahrheit haben, habe ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, Berlin 1788, im ersten Abschnitte S. 98 f. genugsam gezeigt, und daher auch an diesem Orte jene Behauptung anders entwickelt und genauer bestimmt, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

„Wenn aber die negativen Zahlen bald weniger als 0 und bald mehr als das [∞] bedeuten: so wäre es ja wohl gut, wenn man die negativen Zahlen von jener Bedeutung von denen, welchen diese zukäme, auch durch die Bezeichnungart unterschiede, etwa so, wie nach dem B. S. 104. schon mehrere gewollt haben?“ Man könnte es wohl thun, allein es müßte auf eine andere Art geschehen, und dabey auch noch die negativen Zahlen, wenn man sie als den positiven entgegengesetzt gedenkt, unterschieden werden. Indesß wozu soll man es thun, da man die Bedeutung der negativen Zahlen jedesmal so lange unbestimmt lassen kann, bis man



$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \frac{64}{1 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \frac{128}{1 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \frac{729}{1 + 3} = \frac{1}{4}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - \frac{2187}{1 + 3} = \frac{1}{4}$$

u. s. f.

Man kann also allerdings in jedem Falle oder für jeden Werth von  $x$ ,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{rc.}$$

setzen, aber unter den einzeln Fällen, die unter diese allgemeine Formel gehören, giebt es welche, wo es besser ist, den Werth von  $\frac{1}{1-x}$  oder von  $\frac{1}{1+x}$  unmittelbar aus diesen Ausdrücken zu entwickeln, als denselben aus den unendlichen Reihen zu suchen, welche ihnen gleich sind, weil man dasjenige, was man hieraus findet, nicht eher zu beurtheilen im Stande ist, als bis man es mit dem verglichen hat, was die Ausdrücke  $\frac{1}{1-x}$  und  $\frac{1}{1+x}$ , unmittelbar angewandt, geben.

Zum Schlusse dieser Betrachtung bemerke ich nur noch, daß der Anfang des 107ten §. einen wirklichen Widerspruch enthalte, wenn man darin das Zeichen  $\infty$  eben so versteht, als nach meiner Annahme dieses [ ] gedacht werden muß,

1 +

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{[\infty]}$$

muß nothwendig allemal  $\frac{1}{1-x}$  seyn, ob man gleich das [∞]ste Glied selbst in Gedanken nie erreicht.

### Von dem sogenannten unendlich Großen und unendlich Kleinen der Mathematiker.

Es hat Gelehrte gegeben, die bewunderten, wie unser endliche Geist unendliche Reihen fassen könne, und wohl gar darin eine Probe seines unendlichen Ursprungs fanden. Hr. Kästner ist so menschenfeindlich, diesen Traum zu stören, und in seinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verstande sind, Göttingen 1767, zu behaupten: das Unendliche, welches unser Geist bey den unendlichen Reihen fasse, sey so endlich, so den Kräften eines endlichen Geistes angemessen, daß man bey einiger Ueberlegung sich wundern müsse, wie man sich darüber habe wundern können. Der Marquis de l'Hôpital sagt im Anfange der Vorrede zu seiner Analyse des infiniment petits: L'Analyse qu'on explique dans cet Ouvrage, suppose la commune; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies: celle-ci *pénètre jusques dans l'infini même.* Elles compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences, et par-la elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. *On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini: car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes; quatriemes, et ainsi de suite,*

suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. Hier ist Bewunderung zu wenig, staunen muß man! Denn ist der Geist, der das Unendliche zu fassen vermag, schon unendlich, so muß der, welcher das Unendliche vom Unendlichen faßt, zum wenigsten unendlichmal unendlich seyn. Dazu nehme man die Gewalt, mit welcher unser Geist in der höhern Analyse über das Unendliche herrscht. Vor dem Schelten Gottes fliehen nur Berge, auf seinen Befehl entstehen nur Welten, die endlich sind. Die höhere Analyse winkt, so verschwinden unendliche Größen zu Tausenden; sie befehlt, so schwingen sie sich aus Nichts hervor und stehen da. Nur Schade, daß bloße Namen zwar die Dinge aus unserm Gesichtskreise entfernen, aber nicht ihre Natur verändern können. Schade, daß alle auf die Unendlichkeit des Gegenstandes der höhern Analyse gebaute Lobsprüche dieser Wissenschaft noch nicht einmal so fest gegründet sind, als Kartenhäuser, woran sich Kinder ergötzen! Ich habe nichts dawider, wenn man mich hier an die Ehrfurcht erinnern will, welche man einem Manne, der in dem Jahrhunderte Newtons, Leibnizens, der Bernoulli und Huyghens zu den großen Mathematikern gehörte, schuldig ist; ich kenne sie, und hätte deswegen gerne die ausgezogene Stelle nicht hergesetzt. Allein soll denen, für welche ich schreibe, die folgende Untersuchung wichtig seyn, so mußte ich ihnen ein Beyspiel vor Augen legen, zu was für Behauptungen über den Gegenstand derselben selbst Mathematiker vom ersten Range sich haben verleiten lassen. Und warum soll man von den Verirrungen großer Männer nicht frey sprechen, da dieselben, eben weil sie Verirrungen großer Männer sind, mit einem verführerischen Schein umgeben sind, und überdies wahre Größe nicht gängliche Freyheit

Eulers Differenz. Rechn. I. Th.                    3                    heit

heit von Fehlern, sondern nur neben Fehlern große und ausgebreitete Verdienste erfordert? Zur Sache! d. h. zum Beweise des Satzes:

Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet; mit andern Worten: Kein anderes als das metaphysisch Unendliche, oder dasjenige, welches ich S. 340. durch  $[\infty]$  ausgedrückt habe; daß ferner das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als 0 sey; daß sie folglich alle Verschiedenheit sowohl unter mehreren unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben, durchaus verwerfe; daß ihr unendlich Großes und ihr unendlich Kleines, oder ihr  $[\infty]$  und ihr 0, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde; daß folglich alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne jene Begriffe dabey im geringsten zu Hülfe zu nehmen; daß die aus  $[\infty]$ , 0, und endlichen Größen willkürlich zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen Größen geschieht; und daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen her rühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben,

Es ist wahr, es wird in der Mathematik und insbesondere in der höhern Analyse sehr häufig vom Unendlichen und unendlich Kleinen gesprochen, ohne daß man unter jenem das  $[\infty]$ , und unter diesem  $0$  denken darf: allein alle diese unendlich großen und unendlich kleinen Größen gleichen völlig dem Papiergelde, welches zwar den Namen führt, und unter denen, welche sich darüber vereinigt haben, die Stelle des Geldes vertritt, aber, an sich betrachtet, doch bloß den Werth des Papiers hat. Um sich davon zu überzeugen braucht man nur die unendlichen Größen etwas näher und genauer zu untersuchen.

Wenn wir uns eine unendliche Größe von irgend einer Art vorstellen wollen, so gehen wir allemal von einer endlichen Größe derselben Art aus, und setzen entweder zu ihren Einheiten in Gedanken ohne Ende immer eine mehr hinzu, oder dividiren dieselbe fortgesetzt, durch immer kleinere und kleinere Brüche. Auf jenem Wege sind wir, sogar in Gedanken, nicht im Stande, das Unendliche ohne das Unendliche zu erreichen, ich will sagen, zu einer unendlichen Größe zu gelangen, ohne eine unendliche Menge von Einheiten zu der angenommenen endlichen Größe hinzugesetzt zu haben: und eben dieses muß von dem andern Wege behauptet werden, wenn man die Brüche, womit man dividirt, auf die Art immer kleiner und kleiner macht, daß man ihre Nenner entweder durch die Addition, oder durch die Multiplication vergrößert. Wollen wir uns daher eine unendliche Größe irgend einer Art wirklich gedenken, so bleibt kein anderes Mittel übrig, als von einer endlichen Größe derselben Art auszugehen, diese durch irgend eine unbenannte Zahl zu dividiren, den Divisor durch die Subtraction immer kleiner zu machen, bis er in  $0$  verwandelt wird, und nun den zuge-

Hörigen Quotienten unendlich groß anzunehmen. Da sich jede Zahl durch fortgesetzte Subtraction einer oder mehrerer ihrer Einheiten in 0 verwandeln läßt, und der Satz: der Quotient nimmt in eben dem Verhältnisse zu, in welchem bey unverändertem Dividend der Divisor abnimmt, keine Ausnahme zuläßt: so schwingen wir uns auf diese Art allerdings zum Unendlichen auf: allein es ist auch klar:

1. daß, da 0 die Grenze der Verminderung des Divisors ist, (und dies leidet keinen Widerspruch, wofern man nicht die Zahlen relativ sich gedenken, und dadurch alles ohne Noth verwirren will) der auf dem beschriebenen Wege denkbare Quotient die Grenze der Vermehrung der dividirten Größe, oder wenn man diese = a setzt,

$$\frac{a}{0} = [\infty] \cdot a$$

seyn müsse.

2. daß wir, wenn wir unendliche Größen irgend einer Art construiren wollen, weiter nichts thun können, als endliche Größen derselben Art so zu verzeichnen oder darzustellen, daß dabey zugleich der Weg, auf welchem man dieselben ohne Ende wachsen lassen kann, vor Augen liege. Dieses findet sich sehr deutlich bey folgender Darstellung:

$$\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ic.}$$

desgleichen bey der Construction der Tangente eines rechten Winkels, u. dgl.

3. daß wir jedesmal, wenn wir uns eine unendlich große Größe vorstellen, ein Produkt aus einer gleichartigen endlichen Größe und der durch  $[\infty]$  bezeichneten unendlichen Zahl denken, und daß also das Unendliche der Größen nicht in ihren Einheiten, sondern lediglich in ihrer Zahl gedacht werde.

4. daß,

4. daß, da  $0$  und  $[\infty]$  einander gegenüberstehen,  $0$  in eben dem Verstande unendlich klein sey, als  $[\infty]$  das unendlich Große bedeutet, und daß also unendlich klein und  $0$ , desgleichen eine unendlich kleine Größe und eine endliche Größe von eben der Art, entweder mit  $0$  multipliziert oder durch  $[\infty]$  dividirt, einerley sagen wollen.

Dieses vorausgesetzt sollte man zuvörderst die unendlich großen Größen nicht bloß durch das Zeichen  $[\infty]$ , welches man besser allein für die unendlich große Zahl brauchte, sondern durch dieses Zeichen und das Zeichen der Einheit, welche die Art jener Größen bestimmte, z. B. wenn  $a$  diese Einheit bedeutete, durch  $[\infty] \cdot a$  bezeichnen; und die ähnliche Form  $0 \cdot a$  für die unendlich kleinen Größen wenigstens dann gebrauchen, wenn man unmittelbar auf die Bezeichnungen unendlich großer und unendlich kleiner Größen weitere Schlüsse bauen wollte. Auf diese Art erhielte man aus der Gleichung  $\text{tang. } \alpha \cdot \text{cot. } \alpha = r^2$ , §. 94. und S. 324, wenn  $\alpha = R$  würde, nicht sowohl  $[\infty] \cdot 0 = r^2$ , als vielmehr

$$[\infty] \cdot r \cdot 0 \cdot r = [\infty] \cdot 0 \cdot r^2 = r^2$$

und da das  $[\infty]$  nichts anders bedeutet als  $\frac{1}{0}$ , und folglich  $[\infty] \cdot 0 = \frac{1}{0} \cdot 0 = 1$  ist: so sagte nunmehr die Formel  $[\infty] \cdot 0 \cdot r^2 = r^2$  nichts weiter, als es sey  $1 \cdot r^2 = r^2$ . Hierwider hat die Geometrie nichts einzuwenden, aber wo lehrt sie aus einer unbegrenzten geraden Linie und  $0$  ein Rechteck oder ein Quadrat hervorbringen? wie ihr §. 94. am Ende beygelegt wird. Wenn man in  $[\infty] \cdot 0 \cdot r^2 = r^2$  anstatt  $0 \cdot r$  den gleichbedeutenden Ausdruck  $\frac{r}{[\infty]}$  setzt, so ist

$$\text{ebenfalls } \frac{[\infty] \cdot r^2}{[\infty]} = r^2.$$

Zum andern kommt es nun bey dem Beweise, daß es  
 keine verschiedene unendliche Größen Einer Art in der Ma-  
 thematik gebe, wegen der Nr. 2. stehenden Behauptung bloß  
 darauf an, daß dargethan werde, die Mathematik fordere  
 nie, Zahlen anzunehmen, die größer als  $[\infty]$  wären; (wobey  
 es sich aber von selbst versteht, daß absolute Zahlen gemeint  
 werden, denn sobald relativ geredet wird, können Welten  
 Punkte, und Punkte Welten heißen.) Dieses ist leicht. Da  
 nemlich  $o$  die Grenze der Verminderung jeder Zahl  $m$  ist:  
 so ist auch der zu  $\frac{m}{o}$  gehörige Quotient die Grenze der Ver-  
 mehrung derselben. Aber vielleicht wendet man ein:  $\frac{m}{o}$   
 müsse dabey doch immer größer seyn als  $\frac{n}{o}$ , wenn  $m$  grö-  
 ßer als  $n$  sey. Dieser Einwurf ist sehr scheinbar, so lange  
 man sich die Art, wie wir die unendlich große Zahl uns  
 denken, nicht deutlich vorstellt. Denn da  $\frac{1}{o} = [\infty]$  ist, und  
 jede Zahl  $m = 1 \cdot m$  ist: so scheint natürlich  $\frac{m}{o} = \frac{1 \cdot m}{o}$   
 $= m \cdot [\infty]$ , und  $\frac{m}{o} = \frac{1 \cdot n}{o} = n \cdot [\infty]$ , und also  $\frac{m}{o} : \frac{n}{o}$   
 $= m : n$  zu seyn. Allein da  $o$  nicht bloß die Abwesenheit  
 der 1, sondern die Abwesenheit jeder Zahl andeutet, und da-  
 her  $m \cdot o = o = n \cdot o$  ist: so kann man auch  $\frac{m}{o} = \frac{m}{m \cdot o}$   
 und  $\frac{n}{o} = \frac{n}{n \cdot o}$  setzen; und da auf diese Art  $\frac{m}{o} : \frac{n}{o} = 1 : 1$   
 wird, so fällt dadurch der gemachte Schluß gänzlich über  
 den Haufen. Auch bleibt, wenn man sich auf dem S. 355.  
 beschriebenen Wege von einer endlichen Zahl zur unendlichen  
 aufschwingen will, der anfängliche endliche Divisor willkühr-  
 lich.



sich die Linie nach einer Seite unbegrenzt vorstellen, und so zwey unendliche gerade Linien sich einbilden, welche um die Entfernung der angenommenen Punkte verschieden zu seyn scheinen; oder eine nach beyden Seiten unbegrenzte Linie, so wie auch eine nach allen Seiten unbegrenzte Fläche oder dergleichen körperlichen Raum, in Theile theilen, die zum Theil begrenzt, zum Theil unbegrenzt sind, und die Theile so wie ihre Grenzen unendlich groß nennen: allein hat man alsdenn unendliche Linien, und unendliche Flächen, und körperliche Räume, wie sie die Geometrie giebt? Wenn  $a = R$  wird, so soll die Tangente unendlich groß seyn. Ist sie es etwa nur, weil sie von der einen, oder weil sie von keiner Seite begrenzt ist? Ein Kreis, dessen Radius unendlich groß gedacht wird, verwandelt sich in eine gerade Linie; eine Kugel-Fläche von eben dem Halbmesser, in eine Ebene. Ist dieses wahr, wenn der Ausdruck unendlich groß nicht im strengsten Sinne genommen wird? und läßt sich ein größerer Radius denken, ohne ihn endlich aber negativ zu nehmen? Wir gelangen nicht anders zum Begriffe des Unendlichen, als so, daß wir uns etwas endliches von eben der Art vorstellen, und durch 0 dividiren. Man nehme alle die Fälle, wo wir in der Geometrie eben dieses zu thun ein Recht haben, und untersuche das Unendliche, wozu sie führen. Man wird allemal finden, daß man entweder zu unendlichen Größen komme, die unter die Form  $[\infty]$  a gehören, oder daß man einen Fehlschluß begangen, und Bestimmungen übersehen habe. Dies letzte fände z. B. statt, wenn man aus der Gleichung für die Parabel,  $px = y^2$ , herleiten wollte, daß, für  $x = [\infty]$ , y nothwendig ein kleineres Unendliche bedeuten müsse. Denn soll  $x = [\infty]$  seyn, so muß es in  $\frac{x}{0}$  übergehen. Da aber  $a : y = y : x$  ist, so kann man statt x nicht anders

ders

ders  $\frac{x}{o}$  setzen, als wenn man auch  $\frac{y}{o}$  statt des einen  $y$  schreibt. Allein dann bleibt nicht mehr, wie bey der Parabel seyn muß,  $a : y = y : x$ , sondern man hat die Proportion  $a : \frac{y}{o} = y : \frac{x}{o}$ . Ueberhaupt rühren alle paradoxe Behauptungen, welche man in der Mathematik bey den unendlichen Größen hat, so wie auch alle übrige, aus undeutlichen und verworrenen Vorstellungen her, und verschwinden insgesammt, sobald man an deren Stelle deutliche Begriffe braucht.

Dieser Umstand verleitet mich zu einer Ausschweifung, wegen welcher ich um Verzeihung bitte, wenn sie wirklich Ausschweifung ist; den Gegenstand derselben wird hoffentlich Niemand für unwichtig erklären.

Ich habe oben S. 283 f. die Elementar- und allgemeine Mathematik auf die Art unterschieden, daß ich behauptete, die Elementar-Mathematik betrachte die Größen unmittelbar in Constructionen, die allgemeine hingegen vermittelt Constructionen in deutlichen Begriffen. In jener werden daher die Größen durch die Merkmale gegeben, wodurch sie sich von allen andern unterscheiden, in dieser durch eine bekannte Größe von eben der Art, und durch das Verhältniß, welches sie zu dieser Größe haben. Hieraus fließt, um nur einiges zu berühren,

- I. daß der Gegenstand der allgemeinen Mathematik viel allgemeiner ist als der der Elementar-Mathematik, obgleich auch diese sich nie mit einzelnen Größen, sondern mit den Arten und den niedrigsten Geschlechtern der Größen beschäftigt.

2. daß die Constructionen, welche in der allgemeinen Mathematik gebraucht werden, keine nothwendige, sondern willkührliche Constructionen sind, deren Ausdehnung also lediglich von der Bedeutung abhängt, welche wir den darin gebrauchten Zeichen beygelegt haben.

Nur dieses vorausgesetzt, wer muß nicht zugeben, einmal, daß es in der allgemeinen Mathematik eine Sache von der äußersten Wichtigkeit sey, den Umfang der gebrauchten Constructionen jedesmal aufs genaueste und deutlichste zu bestimmen; und zweytens, daß die Resultate der allgemeinen Mathematik bey der Anwendung auf die weniger allgemeinen Fälle allemal erst nach der Natur dieser Fälle modificirt werden müssen, wenn sie durchaus passend seyn sollen. Wenn man nach diesen Regeln den Vortrag der allgemeinen Mathematik einrichten will, so ist es freylich unvermeidlich, manche Unterscheidungen zu machen, die dem, welcher von der Nothwendigkeit jener Regeln nicht lebhaft überzeugt ist, überflüssig scheinen können, und dann um so eher in Gefahr sind verworfen zu werden, weil durch sie die Erlernung der Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik schwerer zu werden scheint. Allein man übergehe dieselben, so wird freylich der Anfang des Weges, welchen man seine Schüler führt, ihnen lichtvoller und angenehmer seyn, aber dagegen in der Folge desto mehr dunkle und dornige Stellen haben. Wie soll man z. B. das erklären, daß man durch bekannte und nicht verwerfliche Entwicklungen

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ic.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-1)^2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \text{ic.} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 + 448 + \text{ic.} = 1$$

ic.

findet.

findet. Nach dem, was ich in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra über die Zeichen  $\dagger$  und  $-$ , insbesondere S. 68 f. S. 98 - 103. gesagt habe, kann man nicht nur, sondern man muß selbst den Zähler 1, in den Brüchen  $\frac{1}{(1-1)^2}$  und  $\frac{1}{(1-2)^2}$ , nicht absolute, ja nach den Regeln der allgemeinen Multiplication und Division, außerdem noch als ein Produkt, und also entweder als  $\dagger 1 \times \dagger 1$ , oder als  $- 1 \times - 1$  ansehen. Hierdurch wird

$$\frac{1}{(1-1)^2} = \frac{\dagger 1 \times \dagger 1}{0 \times 0} = \frac{- 1 \times - 1}{0 \times 0}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{(1-2)^2} = \frac{\dagger 1 \times \dagger 1}{- 1 \times - 1} = \frac{- 1 \times - 1}{- 1 \times - 1}.$$

Nun ist  $\frac{\dagger 1}{0} = 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger \dots$ , folglich

$$\frac{\dagger 1}{0} \times \frac{\dagger 1}{0} = 1 \dagger 2 \dagger 3 \dagger 4 \dagger 5 \dagger 6 \dagger 7 \dagger 8 \dagger \dots$$

Serner ist  $\frac{\dagger 1}{- 1} = 1 \dagger 2 \dagger 4 \dagger 8 \dagger 16 \dagger 32 \dagger 64 \dagger \dots$ , folglich

$$\frac{\dagger 1}{- 1} \times \frac{\dagger 1}{- 1} = 1 \dagger 4 \dagger 12 \dagger 32 \dagger 80 \dagger 192 \dagger 448 \dagger \dots$$

Eben das findet man, wenn man  $\dagger 1$  im ersten Fall durch 0, und den Quotienten nochmals durch 0, im zweiten aber durch  $- 1$ , und den Quotienten nochmals durch  $- 1$ , auf die Art dividirt, daß man  $0 = 1 - 1$ , und  $- 1 = 1 - 2$  setzt. Nach eben den Regeln also, nach welchen man

$$\frac{1}{1-1} = 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger 1 \dagger \dots \text{ findet, ergiebt}$$

$$\text{sich zwar auch } \frac{1}{(1-1)^2} = 1 \dagger 2 \dagger 3 \dagger 4 \dagger 5 \dagger 6 \dagger 7 \dagger 8 \dagger \dots$$

$$\text{so wie ebenfalls bey } \frac{1}{1-2} = 1 \dagger 2 \dagger 4 \dagger 8 \dagger 16 \dagger 32 \dagger \dots$$

und

und  $\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 + \dots$  einerley Regeln gebraucht worden sind. Aber da die Vorstellung welche der Bruch  $\frac{1}{1-2}$  giebt, von der, welche der Bruch

$\frac{1}{(1-1)^2}$  erzeugt, ganz verschieden ist, so muß nothwendig bey der Entwicklung verschiedenes kommen. Es ist daher

auch ganz natürlich, daß der Bruch  $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$  nicht anders den Werth bekommt, welchen man für den Bruch  $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$  durch die Entwicklung findet, als wenn man ihn

zuvor in  $\frac{+1}{0 \times 0}$  verwandelt hat, und daß es sich auf ähnl-

liche Art mit dem Bruche  $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$  verhält. Wenn man

aber aus  $\frac{1}{(1-2)^2}$  nichts weiter als 1 herleitet, so handelt

man dabey nach Regeln, welche sich auf die Vorstellung von den negativen Zahlen gründen, bey welcher sie, nicht kleiner als 0, sondern den absoluten Zahlen entgegengesetzt gedacht werden, und diese Vorstellung ist von der so eben gedachten, so wenig man sie auch unterscheidet, sehr verschieden. Ob man daher gleich den Bruch  $\frac{1}{2}$  in gewissen Rücksichten den

Brüchen  $\frac{1}{(1-1)^2}$ ;  $\frac{+1 \times +1}{0 \times 0}$ ;  $\frac{-1 \times -1}{0 \times 0}$ , so wie diesen

$\frac{1}{2}$  den Brüchen  $\frac{1}{(1-2)^2}$ ;  $\frac{+1 \times +1}{-1 \times -1}$ ;  $\frac{-1 \times -1}{-1 \times -1}$  gleich

setzen kann: so darf man solches doch auch nur in diesen Rücksichten thun: und da sich dieselben mit den gebräuch-

ten Substitutionen ändern: so muß man nothwendiger Weise  
bey

bey der Entwicklung auf Resultate stoßen, die nicht allgemein mit einander verwechselt, oder einander gleich gesetzt werden können. Einen andern Fall anzuführen, wo der Mangel an Genauigkeit in den ersten Bestimmungen Schwierigkeiten erzeugt, die, bey größerer Sorgfalt dabey, sogleich verschwinden: so ist bekanntermåßen, wenn  $\alpha$  einen spitzen Winkel bedeutet, die Secante von  $\alpha$  positiv und die Secante von  $2R + \alpha$  negativ, und doch liegen beyde Secanten, wenn man die ersten Schenkel der Winkel  $\alpha$  und  $2R + \alpha$  auf einander legt, so, daß die Vergleichung derselben mit einem Wege, den man hin und her machen, und mit einer Treppe, die man hinauf und hinunter steigen kann, (Geometrische Abhandlungen, von Abr. Gotth. Kästner, erste Sammlung, Göttingen 1790 S. 463. 464) nicht zu den glücklichen Gleichnissen gehört. Als Linie betrachtet und vollständig ausgedruckt, ist nemlich jede Secante eines Winkels  $\gamma$ , oder

$$\text{sec. } \gamma = \frac{r^2}{\text{cos. } \gamma}, \text{ also sec. } \alpha = \frac{r^2}{\text{cos. } \alpha}, \text{ und sec. } (2R + \alpha) =$$

$$\frac{r^2}{\text{cos. } (2R + \alpha)}; \text{ folglich sec. } \alpha \text{ positiv, weil cos. } \alpha \text{ positiv, und}$$

sec.  $(2R + \alpha)$  negativ, weil cos.  $(2R + \alpha)$  negativ ist. Auf diese Art ist für die Rechnung sowohl als für die Zeichnung allen Schwierigkeiten selbst die Quelle verstopft, und man hat gar nicht nöthig, zu einer doppelten Einheit, einer bejahenden und einer verneinten, seine Zuflucht zu nehmen, sondern kann dieselbe, wie es in der Geometrie seyn muß, entweder positiv oder negativ sich denken, nur daß man die einmal angenommene Voraussetzung beybehalte. Auch sehe ich nicht ein, wozu überhaupt die doppelte Einheit hier dienen könne? Denn da der Satz

$$\text{sec. } \alpha = \frac{r^2}{\text{cos. } \alpha}, \text{ oder sec. } \alpha : r = r : \text{cos. } \alpha$$

ein

ein allgemeiner Satz ist, und seyn muß: so wäre bey einem doppelartigen Halbmesser oder Einheit

$$\sec. \alpha : -r = \mp r : \cos. \alpha, \text{ und } \sec. \alpha = \frac{-r^2}{\cos. \alpha};$$

und wer also bey dem angeführten Satze keine doppelte Einheit sieht, der übersieht nicht, sondern er nimmt nur nicht wahr, was nicht da ist. Um zur Sache selbst zurück zu kehren, so hat man in der allgemeinen Mathematik noch weit mehr Ursache, sich vor dunkeln und unvollständigen Begriffen zu hüten, als in jeder andern Wissenschaft; weil man hier die zum Grunde gelegten Begriffe immer vor Augen behalten muß, indem man unmittelbar aus denselben folgert, dagegen in der allgemeinen Mathematik von den Begriffen zu Constructionen fortreißt, und bey den Operationen, welche man damit vornimmt, die zum Grunde gelegten Begriffe sehr bald aus dem Gesichte verliert. Auch ist in andern Wissenschaften die Prüfung des Gefundenen durch Anwendung auf einzelne Fälle meistens leichter. Aber wie oft sind nicht die Untersuchungen der allgemeinen Mathematik so transcendent, daß jede Erläuterung durch einzelne Fälle eben so unpassend seyn würde, als wenn man ein Differenzial mit der Veränderung vergleichen wollte, welche die Höhe des Oceans erfährt, wenn man eine Schwalbe im Fluge daraus ihren Durst löscht? Hat man sich nicht ganz genau mit dem Sinne und der Ausdehnung oder dem Umfange der Constructionen bekannt gemacht, welche man braucht, oder verliert man denselben aus den Augen: so wird man ein Spiel dieser Constructionen, und öfters nach Orten hingeschleudert, von welchen man keinen Rückweg finden kann, weil man den Weg, der zu denselben führt, nicht kennen zu lernen suchte. Ich hoffe, daß diese Betrachtung mich rechtfertigen werde, wenn ich bey der Erklärung der ersten Gründe der

der

der Mathematik hie und da Unterscheidungen mache, wo dergleichen von andern entweder noch gar nicht gemacht, oder doch nicht genug verfolgt worden sind. Ich habe dieses in Rücksicht auf die gemeine Algebra bereits sowohl in meiner Anleitung zur Selbsterlernung der Buchstabenrechnung und Algebra in Briefen, als auch in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gethan, und wage es hier ebenfalls in der höhern Mathematik. Nach den Urtheilen, welche über jene Versuche gefällt worden sind, darf ich freylich hoffen, daß man den gegenwärtigen nicht ganz verwerflich werde, muß aber auch einigen Einwürfen entgegen sehen, die mir hier ein Paar Worte nöthig machen. Der erste, daß durch dergleichen Unterscheidungen die Anfangsgründe der Mathematik zu sehr erschwert werden, ist bloß scheinbar; davon bin ich durch die damit beyhm Unterrichte gemachten Versuche überzeugt. Ein anderer ist: die Mathematik werde dadurch mit problematischen Sätzen überhäuft. Wenn Kenner sich die Mühe geben wollen, meine Vorschläge und Behauptungen zu prüfen: so können dieselben entweder über den Haufen geworfen, oder zu Sätzen erhoben werden, die nicht mehr problematisch sind. Der dritte: daß durch meine Methode gleichwohl nicht alle Schwierigkeiten gehoben werden, und die Art, wie einige weggeräumt werden, nicht den gehörigen Grad der Leichtigkeit haben. Diesen Einwurf will ich gern nicht widerlegen, wenn mir nur jene Schwierigkeiten angezeigt und Winke gegeben werden, wie man einen höheren Grad der Leichtigkeit erhalten kann. Ueberhaupt soll mir jede gründliche Belehrung um so willkommener seyn, je tiefer sie eindringt, und alle Bitten, die ich sonst etwa thun könnte, vereinigen sich dahin, den Gesichtspunkt nicht aus den Augen zu verlieren, daß ich den Weg zur Erlernung der Mathematik Anfängerin  
gern

gern auf die Art eben machen möchte, daß sie zwar vom Anfang an angestrongtes Nachdenken beweisen müßten, aber doch in keinem höhern Grade, als jedem möglich, und zur Erhaltung alles, von dem Studium dieser Wissenschaft zu erwartenden, formellen Nutzens, nothwendig ist.

Um zu dem Unendlichen zurück zu kehren, so wird das, was ich S. 355 bis S. 361. gesagt habe, hinreichend seyn zum Beweise, daß wir allerdings im Stande sind, uns zu dem Begriffe einer unendlich großen Zahl aufzuschwingen, daß wir aber, wenn wir bey den absoluten Zahlen stehen bleiben wollen, auf keine Weise über dieselbe hinauszugehen vermögen, und daß, wenn die Zahlen relativ gedacht werden, zwar mehr als unendlich großen Zahlen, dem Namen nach, entstehen können, die aber, sobald jene Relation wegfällt, durchaus als endliche Zahlen erscheinen. Ueberlegt man insbesondere, daß wir bey der Herleitung der unendlichen Zahl aus endlichen durch die Division mit 0, die 0 als das Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen betrachten: so fällt auch die Behauptung über den Haufen, daß verschiedene Zahlen, durch 0 dividirt, doch nothwendig verschiedene unendlich große Zahlen geben müssen, und die angeführten Sätze sind wider alle Einwürfe gesichert. Allein demungeachtet könnte mancher glauben, es seyen dadurch noch nicht alle Schwierigkeiten gehoben, weil wir doch die unendliche Zahl, da sie keinen Widerspruch enthalte, zu sich selbst setzen, desgleichen mit jeder endlichen Zahl multipliciren und dividiren könnten, und so nothwendig zu mehrern der Größe nach verschiedenen unendlich großen Zahlen gelangen. Eben so verhalte sichs, könnte hinzugefügt werden, mit allen übrigen unendlichen Größen. Wenn  $[\infty]$ . a  
irgend

irgend eine unendliche Größe vorstelle, so müsse doch  $[\infty]$ . manothwendig eine von jener verschiedene unendliche Größe ausdrücken. Daß wir das Vermögen besitzen, mehrere reelle Begriffe willkürlich mit einander zu combiniren, wer könnte das leugnen. Wer wollte einem Maler das Vermögen absprechen, einen Venuskopf auf einen Pferdehals zu setzen, den Leib mit Gliedern von verschiedenen Thieren mit bunten Federn und mit Flügeln auszustücken, und um aus allen Elementen etwas anzubringen das schöne Bild in einen grausenhaften Fisch sich verlieren zu lassen? nur muß er sich nicht schmeicheln, nun ein wundervolles Werk uns aufgestellt zu haben. Auf ähnliche Art, was sollte uns hindern, das Zeichen des reellen Begriffs der unendlich großen Zahl mit dem Zeichen der eben so reellen Begriffe von endlichen Zahlen oder jeden Größen, wie wir wollen, zu combiniren? wofür wir nur nicht verlangen, daß jede dieser Combinationen reelle Zahlen und Größen vorstellen solle. Wie sehr wir uns bey willkürlichen Constructionen betrügen können, wenn wir dabey die Bedeutung, welche ihnen nach den Umständen zukommt, unter welchen wir sie gemacht haben, nicht beständig und genau vor Augen behalten, mag folgendes Beispiel zeigen. Wenn  $\alpha = R$  ist, so ist allemal  $\text{tang. } \alpha$  eine unendlich große Linie in dem Verstande, daß keine größere gedacht werden kann, denn sie ist von beyden Seiten unbegrenzt. Nun sey der Radius einmal  $= r$  und dann  $= m r$ . Da allgemein  $\text{tang. } \alpha \cdot \text{cot. } \alpha = r^2$  ist, so hätte man für  $\alpha = R$ , wenn  $[\infty]$  die unendliche gerade Linie im strengsten Verstande bedeutete, nicht nur

$$[\infty] \cdot 0 = r^2, \text{ sondern auch } [\infty] \cdot 0 = m^2 r^2$$

und folglich nicht nur  $[\infty] = \frac{r^2}{0}$ , sondern auch  $\frac{m^2 r^2}{0}$ . Was

wollen wir hieraus schließen? Daß es mehrere der Größe  
Eulers Differenz, Rechn. I. Th.      U a      nach

nach verschiedene unendliche, von beyden Seiten unbegrenzte, gerade Linien gebe? oder, daß das Unendliche keine Verschiedenheit in der Größe zulasse, wenn der Begriff desselben reell seyn soll? Am besten wäre es unstreitig, da wir doch das Unendliche uns nicht anders vorstellen können, als nach der Art, wie wir uns dazu vom gleichartigen Endlichen aufschwingen, wenn man bloß diejenigen Quotienten unendlich groß nennete, welche entstehen, wenn man jede Größe durch sich selbst oder durch die Zahl, welche die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten ausdrückt, zu dividiren anfängt, und dann den Divisor in 0 übergehen läßt. Hierdurch würde alle Verschiedenheit in der Größe unter den unendlichen Größen einer und derselben Art unmöglich, und die allgemeine Mathematik hätte kein anderes reelle Unendliche als die Elementar-Mathematik. Nur ein Einwurf bliebe noch möglich, und zwar folgender: „Man nehme eine unendliche gerade Linie, ein unendliches Quadrat, und einen unendlichen Cubus, und nenne einen Theil jener Linie  $a$ . Dies vorausgesetzt, muß die Linie  $= [\infty] \cdot a$ , das Quadrat  $[\infty]^2 \cdot a^2$ , und der Cubus  $= [\infty]^3 \cdot a^3$  seyn, und hier sind also drey reelle Ordnungen der unendlichen Zahl  $[\infty]$ “. Allein einmal unternimmt man, wenn man auf diese Art schließt, das Unendliche durchs Endliche zu messen; und stellt sich eben deswegen das Unendliche zweitens nicht als unendlich vor, sondern bildet sich dabey nur eine sehr weit, aber doch immer erreichbare, Grenze ein; und endlich bliebe drittens übrig, mit Bailly in seiner Histoire de l'Astronomie moderne zu sagen: *L'infini est le gouffre, ou se perdent nos pensées.*

Indeß entsteht nun eine doppelte Frage, nemlich: Wie soll man es machen, wenn unendliche Größen unter solchen Umständen:

Umstän-

Umständen vorkommen, daß dabey und damit die einfachen mathematischen Operationen nöthig werden? und: Wie sind die Fälle zu erklären, wenn das Verhältniß einer Größe, die nicht unendlich groß im absoluten Verstande ist, zu einer endlichen Größe  $= 1 : 0$  gefunden wird? wohin z. B. derjenige gehört, dessen Montucla im 2ten Theile seiner Histoire des Mathematiques S. 300 gedenkt. Ich beantworte diese letzte Frage zuerst, weil sie die leichteste ist. Man darf nemlich in diesen Fällen nur vor Augen behalten, daß durch den gefundenen Quotienten nichts weiter angezeigt werden solle, als, der Nenner des gesuchten Verhältnisses sey eine unendlich große Zahl sey. Daß man dabey, wenn der eine Raum  $a$  und der andere  $b$  gesetzt, und  $a : b = 1 : 0$  gefunden wird, nicht schließen darf, es sey  $a = \frac{b}{0}$ , und folglich eine unend-

lich große Größe im absoluten Verstande, rührt daher, weil die  $0$ , welche man braucht, unter solchen Umständen gefunden wird, daß sie nicht ein Zeichen der Abwesenheit aller Zahlen, sondern bloß die Abwesenheit der  $1$  anzeigt. Was die erste Frage betrifft, so werden zwar allerdings die Größen, welche man aus reellen unendlichen Größen durch die einfachen mathematischen Operationen zusammensetzt, wenn sie nicht unter die Formen  $[\infty]$  und  $[\infty]$ .  $a$  gehören, eben so wohl imaginäre Größen, als die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen: allein hierin liegt auch zugleich die Antwort auf die aufgeworfene Frage. Während des Calculs mag man sich immerhin der Größe nach verschiedene unendlich große Größen eibilden, und nach Gefallen combiniren und trennen: dadurch bekommen dieselben keine Realität, sondern sind nur ein Verkürzungsmittel der Untersuchungen. Oder soll es keine imaginäre Größe weiter geben, als die geraden Wurzeln aus negativen Größen? wozu gehörte dann

$a b c d$ , wenn jeder dieser vier Buchstaben eine gerade Linie bedeutet? Aber wenn jene eingebildete unendliche Größen in den letzten Resultaten bleiben, so ist nur ein Fall, bey welchem die aufgelösten Aufgaben mögliche Aufgaben seyn können, und dieser findet dann statt, wenn die Einheit, welche bey dem Zeichen des Unendlichen steht, eben dieselben Dimensionen hat, als das Zeichen des Unendlichen, und mit diesen Dimensionen wirklich gedacht werden kann. Bedeutet z. B.  $a$  eine gerade Linie, so sind  $[\infty]^2 \cdot a^2$  und  $[\infty]^3 \cdot a^3$  wenn man dazu durch die mathematischen Operationen gelangt, deswegen nicht imaginär, sondern den Ausdrücken  $[\infty] \cdot a^2$  und  $[\infty] \cdot a^3$  gleichbedeutend, weil der Ausdruck  $[\infty]^2 \cdot a^2$  eigentlich nichts anders als ein Quadrat, und dieser,  $[\infty]^3 \cdot a^3$  eigentlich nichts anders als einen Cubus, deren Seiten unendlich groß sind, bedeutet. Auf diese Art wird daher der Gebrauch des  $[\infty]$  in der Mathematik durch das Bisherige auf keine Weise eingeschränkt, sondern es enthält dasselbe nur die Regeln, ohne welche man bey dem Gebrauche des Unendlichen öfters ungewiß und in Gefahr ist, Fehlschlüsse zu machen.

Ich wende mich zu einer andern Betrachtung. Wenn man aus dem Endpunkte eines Halbmessers eines Kreises auf dem Halbmesser eine senkrechte Linie errichtet: so hat dieselbe mit der Peripherie des Kreises weiter keinen Punkt gemein als denjenigen, in welchem sie auf dem Halbmesser senkrecht steht; alle ihre übrige Punkte liegen außerhalb des Kreises. Es heiße der gedachte gemeinschaftliche Punkt  $A$ , der in der Tangente ihm nächste  $B$ , und der in der Peripherie ihm nächste  $b$ . Da  $B$  und  $b$  wegen des angeführten Satzes nicht zusammen fallen können, so muß zwischen ihnen eine gerade Linie möglich seyn, aber diese gerade Linie kann zu jeder gegebenen geraden Linie kein Verhältniß haben, welches

welches sich durch irgend eine Zahl, so groß sie auch angenommen wird, ausdrücken ließe. Hier haben wir also eine gerade Linie, die kleiner ist als jede gerade Linie, die sich angeben läßt, und welche gleichwohl nicht  $= 0$  ist, und durch sie gelangen wir sehr leicht zu Quadraten und Würfeln von ähnlicher Art. Ich will hier die Realität der Größen, die kleiner sind, als jede gleichartige Größe, welche sich angeben läßt, ohne daß man sie deswegen  $= 0$  setzen könnte, ihre Realität nemlich in der reinen Mathematik, nicht beweisen, sondern nur durch ein Paar Beispiele erläutern: denn ich denke nicht, daß man Einwendungen dawider machen werde. Aber wie soll man nun dergleichen Größen nennen? unendlich kleine Größen? dann müßten sie  $= 0$  seyn; oder Differenzialien? diese Benennung kommt ihnen nicht allgemein, sondern nur unter gewissen Umständen zu. Man erlaube mir daher, sie mit dem Namen Elemente zu belegen, ohne daß dadurch denselben Einfachheit und Untheilbarkeit beygelegt werde, denn diese kommt ihnen auf keine Weise zu. Ferner erlaube man mir eine jede Größe dieser Art, wenn die Gattung, zu welcher sie gehört, durch die Einheit  $a$  bestimmt wird, durch  $\delta . a$  oder  $\delta a$  zu bezeichnen. Da bey diesen Voraussetzungen  $\delta a$  nicht  $= 0 . a$  ist, so kann auch  $\frac{a}{\delta a}$  nicht  $= [\infty]$  seyn, aber eben so wenig durch irgend eine Zahl, wie groß man sie auch annehmen mag, ausgedruckt werden. Es heiße daher die Zahl, welche  $\frac{a}{\delta a}$  gleich gesetzt werden kann, unbestimmbar groß, und ihr Zeichen sey  $\infty$ . Dann ist die durch  $\infty$  ausgedruckte Zahl keine unendliche Zahl, und eben so wenig  $\infty a$  eine unendlich große Größe. Ferner ist  $\frac{a}{\delta a} = \infty$ , und  $\frac{m a}{\delta a} = m \infty$ ;

U a 3

a<sup>2</sup>

$$\frac{a^2}{(\delta a)^2} = \infty^2, \text{ so wie } \frac{ma^2}{(\delta a)^2} = m\infty^2 \text{ u. s. w. und es}$$

lassen sich also unter den unbestimmbaren großen Zahlen und Größen eben die Verschiedenheiten und Ordnungen gedanken, welche unter den endlichen, oder bestimmbaren großen Zahlen und Größen statt finden, und zwar so, daß allen diesen unbestimmbaren großen Größen in der reinen Mathematik die Realität schlechterdings nicht abgesprochen werden kann. Da aber zugestanden werden muß, daß nur

$$\frac{a}{0 \cdot a}$$

eine unendliche Größe sey, so werden durch diese Verschiedenheiten und Ordnungen unter den unbestimmbaren großen Größen auf keine Weise reelle unendlich große Größen einer Art, die in der Größe verschieden wären, in die Mathematik eingeführt: sondern wenn man dieses behauptet hat, so hat das daher geführt, weil man das unbestimmbare Große mit dem unendlich Großen verwechselte.

Ich kann diese Gelegenheit nicht vorbehen lassen, ohne noch einiges andere theils über die Elemente, oder unbestimmbare kleinen Bestandtheile der Größen, theils über die unbestimmbaren großen Größen, und insbesondere über die Art und den großen Nutzen ihres Gebrauchs in der Mathematik zu sagen.

Wenn  $\delta a$  ein Element von  $a$  bezeichnet, oder unter  $\delta a$  eine Größe gedacht werden soll, die kleiner ist, als jede Größe, die sich angeben läßt: so ist auch  $m\delta a$  kleiner als jede anzugebende Größe, wofern nur  $m$  eine bestimmbare Zahl bedeutet. Der Beweis dieses Satzes ist dem S. 308, 309. ähnlich. Stellt man sich daher unter  $A$  und  $a$  bestimmbare Größen

Größen Einer Art vor, so hat man gar nicht nöthig  $\delta A$  und  $\delta a$  gleich anzunehmen, sondern man kann, wenn solches aus andern Gründen nützlich ist,  $\delta A : A = \delta a : a$ , oder  $\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta a}{a}$   $= \infty$  setzen, und folglich dem Zeichen  $\infty$  die Bedeutung einer zwar unbestimmbar großen, aber dabey gleichwohl beständigen Zahl beylegen. Thut man dieses, so ist allemal

$$1 = \delta.1.\infty; \quad a = \delta a.\infty; \quad \text{und} \quad \frac{1}{\infty} = \delta.1; \quad \frac{a}{\infty} = \delta a;$$

Ferner lassen sich reelle Verschiedenheiten in Ansehung der Größe, so wie auch reelle Ordnungen, sowohl unter den Elementen als unter den unbestimmbar großen Zahlen und Größen denken, und ihrer Natur gemäß bezeichnen. Eben deswegen sind drittens bey und mit diesen Größen alle einfache mathematische Operationen erlaubt; aber wenn irgend eine dieser Größen wirklich dargestellt werden soll, so können wir solches nie anders als auf dem Wege der Näherung thun. Hierin liegen alle Regeln, welche man bey dem Gebrauche der Elemente und der unbestimmbar großen Größen nöthig hat. Man unterscheide daher das unendlich Große von dem unbestimmbar Großen, da sie durch ihre Natur von einander verschieden sind, auch durch die Bezeichnung, und verwechsle solche selbst dann nicht, wenn daraus der Beschaffenheit der vorgesezten Absicht wegen kein Fehler entstehen könnte. Wenn man z. B. aus der bekannten Formel für die Berechnung der Brennweiten bey sphärischen

Hohlspiegeln  $f = \frac{dr}{2d-r}$  die Bestimmung des Orts, wo das

Bild eines vor einem ebenen Spiegel stehenden Objekts erscheint, ableiten will: so ist allerdings nicht nur

$$f = \frac{[\infty]d}{2d-[\infty]} = \frac{[\infty]d}{-[\infty]} = -d; \quad \text{sondern auch}$$

Ma 4

f =

$$f = \frac{\infty d}{2d - \infty} = \frac{\infty d}{-\infty} = -d$$

S. 341; allein warum wollte man nicht lieber bloß  $f = \frac{[\infty]d}{2d - [\infty]} = -d$  brauchen, da auf diese Art die strengste Wahrheit gefunden wird. Eben so verhält sich mit den Formeln für die Erfindung der natürlichen Logarithmen

$$1a = (a^{\frac{1}{\infty}} - 1)^{\infty}, \text{ und } 1a = (a^{[\frac{1}{\infty}]} - 1)^{[\infty]}.$$

Wenn man unmittelbar nach diesen Formeln rechnen will, mag man darunter nach Gefallen wählen, man kann nach der einen nicht anders handeln als nach der andern. Allein will man daraus auf die bekannte Art den Satz:

$$1(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{zc.}$$

herleiten, so bekommt derselbe nicht anders als durch den Gebrauch der letzten Formel strenge Gewißheit. Ferner brauche man das Zeichen  $\infty$ , wenn man unbestimmbar große Zahlen oder Größen deutlich ausdrücken will, allemal so, das seine Bedeutung beständig bleibe, und setze im zweiten Falle die Einheit, wodurch die Gattung der Größe bestimmt wird, dazu. Hiemit ist verbunden, daß man verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen, auf eben die Art als verschiedene bestimmbar Zahlen und Größen, verschiedentlich bezeichne, und es wird dieses nothwendig, wenn verschiedene unbestimmbar große Zahlen und Größen mit einander verglichen werden sollen. Eben so brauche man drittens zur Bezeichnung der unbestimmbar kleinen Größen oder der Elemente verschiedene Zeichen, und betrachte dieselben, absolute genommen, nie als Nullen. Beobachtet man diese Regeln, und modificirt man darnach, wo es nothig ist, das bey dem Gebrauche der fälschlich sogenannten unendlich großen und unendlich kleinen Größen übliche Verfahren:

fahren: so sind die unbestimmbar großen und kleinen Größen in der Mathematik von dem größten Nutzen. Wenn diese Behauptung noch bewiesen zu werden brauchte, so dürfte ich nur daran erinnern, daß man durch die genannten Größen in den Stand gesetzt werde, die Größen von einer neuen und ganz andern Seite zu betrachten, als es geschieht, wenn man sich dieselben bloß als Aggregate bestimmter oder bestimmbarer Theile gedenkt, und wegen des daher entspringenden Vortheils auf Cavaleri Geometrie des Untheilbaren (*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota; auctore P. Bonaventura Cavalerio. Bononiae, MDCLIII.*) verweisen. Durch Annahme unbestimmbar kleiner Größen gelangt man nemlich zu alle dem, wozu Cavaleri sein Untheilbares brauchte, vermeidet aber, weil man diese Größen nicht als untheilbare oder einfache Größen zu denken nöthig hat, alle die Schwierigkeiten, worin ihn die Einfachheit seiner Elemente verwickelte. Kommen endlich unbestimmbare Größen in letzten Resultaten vor, so ist solches, wie ebenfalls aus dem Gesagten erhellt, ein Kennzeichen, daß man das Gesuchte nicht anders als auf dem Wege der Näherung bekommen könne. So viel hier von diesem Gegenstande, eine weitere Ausführung gehört an einen andern Ort.

Ich ziehe aus dem, was ich, von S. 352. an, über das sogenannte unendlich Große und unendlich Kleine der Mathematiker gesagt habe, folgende Behauptungen.

Die Größen, welche in der allgemeinen Mathematik vorkommen, sind der Zahl nach, wodurch sie ausgedruckt werden, entweder bestimmte oder unbestimmte, und jene entweder endliche oder unendliche, theils unendlich große,

A a 5

theils

theils unendlich kleine, diese entweder bloß unbestimmte aber dabey bestimmbare, oder unbestimmbare, theils unbestimmbare große, theils unbestimmbare kleine. Ferner untersucht die allgemeine Mathematik, da ihr Endzweck ist, Verhältnisse zu erforschen, nie das Unendliche, weder das unendlich Große noch das unendlich Kleine, selbst, indem dabey keine Verhältnisse zu erforschen sind; sondern es gehören alle Größen, über welche sie sich verbreitet, zu den endlichen; und wenn in ihr unendlich große und unendlich kleine Größen, oder in den Constructionen, welche sie zum Grunde legt, die Zeichen  $[\infty]$ ;  $[\infty]. a$ ;  $o. a$  und  $o$  vorkommen, so befinden sie sich entweder in den letzten Resultaten, oder werden bloß als Erleichterungsmittel gebraucht. Eben so wenig unternimmt sie das Verhältniß unbestimmbarer Größen zu untersuchen, und zwar aus eben dem Grunde; findet aber auch auf eben die Art öfters dergleichen Größen, oder bedient sich ihrer, um desto schneller ihr Ziel zu erreichen. Also bleiben bloß die endlichen Größen, für den wirklichen Gegenstand der allgemeinen Mathematik übrig; und da diese nunmehr nicht weiter als in bestimmte und in unbestimmte, obgleich nicht unbestimmbare, eingetheilt werden können: so hat auch die ganze allgemeine Mathematik nicht mehr als zwey Haupttheile, davon der erste mit Recht den Namen der gemeinen Mathematik führt. Was den andern Haupttheil oder denjenigen betrifft, welcher sich mit der Untersuchung unbestimmter Größen beschäftigt: so bedient man sich darin bey der Erforschung der Verhältnisse der gegebenen Größen entweder bestimmter oder unbestimmter Constructionen: in jenen denkt man sich die Größen als unbestimmte Mengen bestimmter und in jeder Größe durchaus einander gleicher Einheiten, in diesen als unbestimmbare, aber bey allen gleich große, Mengen, bald gleicher bald un-

gleicher

gleicher Einheiten. Die Größen, welche durch die erste Art der Constructionen dargestellt werden können, sind allerdings veränderliche Größen, aber ihre Veränderlichkeit hat Schranken; dagegen diejenigen, welche durch die andere Gattung ausgedrückt werden, veränderliche Größen ohne Einschränkung sind. Hiernach läßt sich der zweyte Haupttheil der allgemeinen Mathematik von neuem in zwey Theile theilen, die, mit bekannten Namen, unbestimmte Mathematik, und höhere Mathematik genannt werden können, wenn man sich bey dem letztern die Differenzial- und Integral-Rechnung in ihrem ganzen Umfange gedenkt. Logisch beurtheilt ist also die unbestimmte Mathematik sowohl von der gemeinen als von der höhern Mathematik unterschieden, und kann als zwischen beyden mitten inne stehend angesehen werden. Um hier auch der Elementar-Mathematik mit ein Paar Worten zu gedenken, so betrachtet dieselbe die Größen in solchen Constructionen, welche die unterscheidenden Merkmale der Größen, nicht aber ihr Verhältniß zu andern ausdrücken, und also Anschauungen erzeugen und nicht Begriffe; übrigens aber hat auch sie es theils mit bestimmten theils mit unbestimmten Größen zu thun, und theilt sich ferner noch nach dem Unterschiede der Größen, nach welchem dieselben entweder continuirliche oder discrete, oder beydes zugleich sind, in Geometrie, Arithmetik und Mechanik ein. Ich will diesen letzten Theil aus gewissen Gründen hier weglassen, ob ich gleich sonst der reinen Mechanik sehr gern eine Stelle in dem Gebiete der reinen Mathematik einräume; und dann läßt sich also die ganze reine Mathematik auf die Art einteilen, wie es folgende Tabelle darstellt.

Keine

## Reine Mathematik.

## I. Elementar-Mathematik.

## a. Bestimmte.

α. Geometrie.

β. Arithmetik.

γ. Vermischte Geometrie.

## b. Unbestimmte.

α. Sogenannte höhere Geometrie.

β. Unbestimmte Analytik.

γ. Vermischte höhere Geometrie.

## 2. Allgemeine Mathematik.

## a. Gemeine Mathematik,

α. in so fern sie die Größe überhaupt,

β. in so fern dieselbe in ihren Hauptarten, oder

aa. die continuirlichen, und

bb. die discreten Größen betrachtet.

## b. Unbestimmte Mathematik, mit ähnlichen Abtheilungen.

## c. Höhere Mathematik.

α. Höhere Mathematik in möglichster Allgemeinheit.

aa. Differenzial-Rechnung.

bb. Integral-Rechnung.

β. Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung,

aa. bey continuirlichen, und

bb. bey discreten Größen.

Unter vermischter Geometrie verstehe ich die Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie, und habe übrigens deswegen allemal die Theile, welche sich mit den continuirlichen Größen beschäftigen, denen, welche die discrete Größe zum Gegenstande haben, vorgelegt, weil sie sich bey der Behandlung der Mathematik als reine Vernunftwissenschaft zuerst darbieten.

Und

Und nun ist klar:

- I. Daß die Mathematik kein anderes unendlich Große anerkenne, als dasjenige, über welches oder jenseits dessen nichts mehr statt findet, und dessen Zeichen  $[\infty]$  ist; so wie auch, daß das unendlich Kleine, welches sie braucht, diesem unendlich Großen im strengsten Verstande gegenüberstehe, und nichts anders als  $o$  sey. Denn
  - a. kommt in der bestimmten Elementar-Mathematik das unendlich Große und unendlich Kleine entweder gerade so vor, oder es sind zugleich Bedingungen hinzugefügt, welche, bey einiger Aufmerksamkeit, nicht übersehen lassen, daß nicht absolut, sondern relativ geredet werde. In diesem Falle hat man es aber nicht mit dem Unendlichen, sondern nur mit dem uns Unbestimmbaren zu thun.
  - b. findet auch in den übrigen Theilen der reinen Mathematik kein anderes reelle unendlich Große oder unendlich Kleine statt. Denn wollte man darin von andern unendlich großen und unendlich kleinen Größen ausgehen, so trüge man dieselben in die Mathematik hinein, fände sie aber nicht darin. Braucht man ferner die Zeichen  $[\infty]$  und  $o$  während der Untersuchung, als wenn es Verschiedenheiten und Ordnungen unter den dadurch ausgedruckten Größen gäbe: so hat man deswegen eben so wenig reelle unendlich Große und unendlich Kleine in der Mathematik, als man mögliche unmögliche, oder rationale Irrational-Zahlen hat, weil man Zeichen von unmöglichen und Irrational-Zahlen wie die Zeichen der reellen und der Rational-Zahlen braucht. Findet man endlich unendlich große oder unendlich kleine Größen durch die mathematischen Operationen und aus  
 endlichen

endlichen Größen, ohne daß dieselben in der Form  $[\infty]$  a, und o. a erscheinen: so entdeckt man bey genauerer Ueberlegung, entweder, daß die Aufgabe zu den unmöglichen gehöre, oder es ist die Abweichung von der gedachten Form nur scheinbar.

- c. Was insbesondere die Differenzial- und Integral-Rechnung betrifft, so darf man bey der Festsetzung ihrer Hauptregeln nur den Weg einschlagen, den ich oben S. 308 f. gegangen bin, um auch darin auf kein anderes unendlich Große und unendlich Kleine zu stoßen. Doch hiervon werde ich noch nachher reden.
2. Daß die Mathematik alle Verschiedenheit sowohl unter mehreren unendlich großen als unendlich kleinen Größen Einer Art, und also noch mehr unendliche Ordnungen bey denselben durchaus verwerfe. Dieses folgt aus dem Vorhergehenden nothwendiger Weise, und so sehr, daß es demjenigen, der die Natur der willkürlichen Constructionen und der allgemeinen mathematischen Operationen nicht kennt, befremden kann, im Calcul die Zeichen verschiedener unendlicher Größen und selbst Ordnungen derselben zu erblicken. Man braucht sich indeß nur die sogenannte Multiplication und Erhebung zu Dignitäten als das, was sie wirklich sind, nemlich als bloße Combinationen, und die Division und Extraction der Wurzeln als Trennung gegebener Combinationen gedenken, um das eben so thunlich und nützlich zu finden, als den Gebrauch der imaginären Wurzelgrößen.
3. Daß das unendlich Große und unendlich Kleine, im wahren Sinne genommen, ganz und gar nicht bloß der Differenzial- und Integral-Rechnung eigenthümlich sey, sondern eben so in andern Theilen der Mathematik gebraucht werde. Hier setze ich weiter nichts dazu,

dazu,

dazu, als daß ich unter den andern Theilen der Mathematik diejenigen verstehe, welche zusammen die unbestimmte allgemeine Mathematik ausmachen.

4. Daß alle Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung gefunden, bewiesen und gebraucht werden können, ohne das Unendliche im eigentlichen Sinne im geringsten zu Hülfe zu nehmen. Sobald bewiesen ist, daß die Differenzialien an sich genommen, nicht  $= 0$  gesetzt werden dürfen, sobald fallen auch alle unendlich große Größen, von welchen so oft in der Differenzial- und Integral-Rechnung geredet wird, von selbst weg; und daß jenes nicht erlaubt sey, ist hoffentlich durch das Obige hinlänglich dargethan worden. Ferner kommt es bey der Erfindung und dem Beweise der Regeln der Differenzial Rechnung in Ansehung des Punkts, wovon hier die Rede ist, nur auf folgende drey Regeln an:  $d.(x + y + z) = dx + dy + dz$ ;  $d.xy = xdy + ydx$ ; und  $d.x^m = mx^{m-1}dx$ ; und dabey braucht man kein unendlich Kleines und noch weniger ein unendlich Großes zu Hülfe zu nehmen; was aber die Integral-Rechnung betrifft, so ist sie die umgekehrte Methode der Differenzialien, und also in der jetzigen Rücksicht von der Differenzial-Rechnung nicht verschieden. Endlich wäre es wahrlich keine preiswürdige Art, das Unendliche zu untersuchen, um das Endliche zu finden, und es kontrastirt sehr, wenn man behauptet, die höhere Analyse dringe in das Unendliche, ja selbst in das Unendliche vom Unendlichen, und doch am Ende dadurch nichts als das Verhältniß endlicher Größen findet.
5. Daß die aus  $[\infty]$ ,  $0$ , und endlichen Größen zusammengesetzten Größen in der ganzen Mathematik nicht anders gebraucht werden müssen, als solches darin entweder mit den imaginären oder auch mit den irrationalen Größen

Größen geschicht. Dies fließt aus dem unter den vorhergehenden Nummern Gesagten hinlänglich.

6. Daß also die Entfernung, in welcher die Mathematik öfters von ihrer Schwester der Philosophie hat stehen müssen, nicht von der Denkungsart dieser beyden Schönen selbst, sondern von den Hindernissen herrühre, welche ihre Liebhaber denselben in den Weg gelegt haben. Ich habe in meinen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik und die Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit derselben zu vergrößern, Berlin 1789. S. 137. die Kenntniß der Formen, oder die reine Vernunftkenntniß, eingetheilt in mathematische, in philosophische, und in mathematische durch die philosophische erhöhte Kenntniß. Auf diese letzte Stufe der Formen-Kenntniß erhebt man sich durch das Studium der allgemeinen Mathematik, und man kann also dabey die Hülfe der Philosophie nicht entbehren, wenigstens insofern nicht, als man dazu eine Fertigkeit, aus Begriffen zu schließen, haben muß. Wenn die allgemeine Mathematik mit der Philosophie, auch nur in Ansehung des Unendlichen wirklich im Widerspruche stände, auf welche Seite sollte der Vorwurf fallen? Sollte die Philosophie in dem, was die Mathematik von ihr bedarf, irrig seyn; wie traurig stünde es dann mit ihr? sollte aber vollends die Mathematik bey gehöriger Unterstützung von Seiten der Philosophie, in ihrem Gebiete Widersprüche wider den gesunden Verstand als unwiderleglich zurücklassen müssen; was sollte man dann überhaupt von der Gewißheit unserer Kenntnisse, wenn sie nicht unmittelbar auf sinnliche Wahrnehmungen sich stützen, urtheilen? Doch es läßt sich alles erklären, wenn man annimmt, daß die Mathematiker bisweilen die Philosophie zu wenig gebraucht,

braucht, und die Philosophen auf der andern Seite die Nothwendigkeit ihrer Wissenschaft zu einem vollkommenen Mathematiker nicht einleuchtend genug dargestellt haben. Schwesterlich vereint, erklimmen Mathematik und Philosophie den höchsten Gipfel menschlicher Kenntnisse; getrennt, sind beyde in Gefahr, bald hier bald da zu straucheln, und erreichen ihr Ziel nie ganz und immer spät.

Und nun noch ein Paar Worte zur Erläuterung der Endlichkeit der unbestimmbaren Größen. Es bedeute  $x$  irgend eine endliche Größe, z. B. eine gerade Linie, und  $dx$  ein Element derselben, oder eine Größe von eben der Art, die aber kleiner sey, als jede gleichartige Größe, die gegeben werden kann, und gleichwohl weder  $0$  noch einfach.

Dann ist  $\frac{x}{dx} = \infty$  eine unbestimmbar große Zahl, und  $x = \infty \cdot dx$ . Da  $x$  eine endliche Größe ist, so sind auch  $x^2$ ;  $x^3$ ;  $x^4$ ;  $x^5$ ; 2c. endliche Größen, und darunter, wenn  $x$  eine gerade Linie bedeutet,  $x^2$  und  $x^3$  reell. Nun ist aber, weil  $x = \infty \cdot dx$  gesetzt werden kann,  $x^2 = \infty^2 \cdot dx^2$ ; und  $x^3 = \infty^3 dx^3$ ; ja wenn  $x$  eine absolute Zahl bedeutet, so sind auch  $x^4 = \infty^4 dx^4$ ;  $x^5 = \infty^5 dx^5$ ; 2c. reelle endliche Größen. Mit was für einem Rechte könnte man also behaupten, daß  $\infty$  in diesen Beyspielen eine unendlich große Zahl bedeute, da jede endliche Größe, sie mag bestimmbar oder unbestimmbar seyn, mit einer unendlichen Zahl multiplicirt, keine endliche Größe geben kann? Oder soll  $dx = 0$  seyn? Wem dieses bey dem, was dawider nicht nur von mir, sondern von so vielen andern von jeher gesagt worden ist, noch annehmungswerth scheint, dem wäre es vergebliche Mühe, weiter zu widersprechen, denn Er kann aus Nichts hervorbringen, was er will.



**Inhalt**  
des  
fünften Capitels.

---

Von der Differenziation der algebraischen Funktionen  
einer veränderlichen Größe.

1. Wenn die gegebene algebraische Funktion die Form  $x^n$  hat, §. 152 : 157. Hier werden folgende Fälle betrachtet.
  - a. Wenn  $n$  unbestimmt genommen wird, oder jede Zahl bedeutet, §. 152. 153.
    - α. Erfindung des ersten Differenzials, §. 152.
    - β. Erfindung des zweyten und der übrigen Differenzialien, §. 153.
  - b. Wenn  $n$  eine positive Zahl vorstellt, §. 154; wo aber nur nöthig war, von dem zweyten und den folgenden Differenzialien zu reden.
  - c. Wenn  $n$  eine negative Zahl ist, §. 155.
  - d. Wenn  $n$  eine gebrochene Zahl ist, §. 156. 157.
2. Wenn die gegebene veränderliche Größe irgend eine algebraische Funktion ist, §. 158 : 177.
  - a. Wenn dieselbe irgend eine ganze rationale Funktion ist, §. 158 : 168.

α. Wenn

- a. Wenn dieselbe die Form  $p + q + r + s + t$  2c. oder  $ap + bq + cr + f$  hat, §. 158.
- β. Wenn darin Potestäten der veränderlichen Größe vorkommen, §. 159 = 161.
  - aa. Wenn die Exponenten dieser Potestäten ganze und positive Zahlen sind, §. 159. 160.
  - bb. Wenn dieselben negative oder gebrochene Zahlen sind, §. 161.
- γ. Wenn sie Potestäten von solchen Funktionen sind, deren Differenzial nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann, §. 162.
- δ. Wenn sie Produkte aus zweyen oder mehrern Funktionen einer veränderlichen Größe, und die Differenzialien dieser Funktionen bekannt sind, §. 163.
- ε. Besondere Regeln für die Fälle, wenn Brüche in den Faktoren vorkommen, §. 164.
- h. Wenn dieselbe irgend eine gebrochene Funktion ist, §. 165 = 168.
  - a. Allgemeine Regel, §. 165.
  - β. Besondere Regeln, §. 166.
- c. Noch einige Regeln, um das Differenzial bequemer auszudrücken, §. 167. 168.
  - a. wenn die gegebene Funktion ein Produkt, §. 167.
  - β. wenn dieselbe ein Bruch ist, deren Zähler oder Nenner einen Faktor hat, der eine Potestät ist, §. 168.
3. Wenn die gegebene Funktion irgend eine algebraische Funktion ist, §. 169 = 177.
  - a. Wie man die irrationalen Funktionen durch Reduction auf rationale unter die vorhergehenden Regeln bringe, §. 169.
  - b. Allgemeine Regel der Differentiation jeder algebraischen Funktion, §. 170 = 177.

B b 2

a. Diese

388 Anmerkungen und Zusätze zum ersten Theile 2c.

- α. Diese Regel selbst, §. 170.
- β. Erläuterung derselben durch Beispiele, §. 171: 173.
  - aa. Wo  $y = p \pm q$  ist, §. 171.
  - bb. Wo  $y = pq$  ist, §. 172.
  - cc. Wo  $y = \frac{p}{q}$  ist, §. 173.
- γ. Noch einige allgemeine Betrachtungen, §. 174: 177.
  - α. über die ersten, §. 174, 175.
  - β. über die zweyten und übrigen Differenzialien aller algebraischen Funktionen, §. 176. 177.



Anmer

---

## Anmerkungen und Zusätze

zum

### fünften Capitel.

---

Es würde eine sehr überflüssige Sache seyn, die Vortreflichkeit des Ganges, welchen Euler in diesem Capitel genommen, und der Art, wie er darin seinen Gegenstand behandelt hat, zu rühmen, sie giebt sich selbst zu empfinden. Eben so wenig bedarf dieses Capitel, wegen der darin durchaus herrschenden großen Deutlichkeit, Erläuterungen; und ich setze daher bloß zu dem 152sten §. ein Paar Worte hinzu.

Euler setzt darin den Binomischen Lehrsatz, oder daß

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \text{rc.}$$

sey, in der Allgemeinheit voraus, wobey n jede ganze und gebrochene, positive und negative Zahl bedeuten kann. Er hatte dazu ein Recht, ob er gleich selbst die Richtigkeit des gedachten Lehrsatzes, in dem gedachten Umfange, erst geraume Zeit nach der Herausgabe der Differenzial-Rechnung elementarisch bewiesen hat, nemlich im neunzehnten Bande der neuen Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1774. (Die Besizer mei-

B b 3

ner

ner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, finden seinen Beweis in dem Anhange zum ersten Theile, unter den Zusätzen zum achten Capitel. S. 460 f.) Will man indeß, so kann man die Erfindung der Differenzialien der Funktionen, die unter die Form  $x^n$  gehören, von dem Binomischen Lehrsätze ganz unabhängig machen, und zwar auf folgende Art.

Wenn  $x$  eine veränderliche Größe bedeutet, so ist, unabhängig von dem Binomischen Lehrsätze,

$$d. x^2 = 2x dx; \text{ und } d. x^3 = 3x^2 dx.$$

Ferner läßt sich beweisen, daß wenn, für irgend einen Werth für  $n$ ,  $d. x^n = n x^{n-1} dx$  ist, auch allemal  $d. x^{n+1} = (n+1)x^n dx$  sey. Denn es ist

$$x^{n+1} = x^n \cdot x; \text{ also}$$

$$d. x^{n+1} = d. x^n \cdot x = (x^n + n x^{n-1} dx)(x + dx) - x^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \left. \begin{array}{l} n x^n \\ x^n \end{array} \right\} dx + n x^{n-1} dx^2 - x^{n+1}$$

$$= (n+1)x^n dx.$$

Run ist aber aus  $d. x^2 = 2x dx$ , und  $d. x^3 = 3x^2 dx$  die Formel  $d. x^n = n x^{n-1} dx$  wahr für  $n=2$ , und  $n=3$ ; also nach dem geführten Beweise nunmehr auch für  $n=4$ ;  $n=5$ ;  $n=6$ ;  $n=7$ ; u. s. f. ohne Ende. Hat man auf diese Weise die Richtigkeit der Formel,  $d. x^n = n x^{n-1} dx$ , für jeden ganzen positiven Werth von  $n$  dargethan, so findet man die Richtigkeit derselben für die übrigen Werthe nach der gewöhnlichen und bekannten Methode ebenfalls, ohne den Binomischen Lehrsatz im geringsten zu gebrauchen.

Wenn man daher den Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Binomischen Lehrsatzes mit Hilfe der Differential-

zial-Rechnung führen will: so ist es nicht einmal nöthig, die Wahrheit dieses Satzes für die ganzen positiven Werthe von  $n$  zuvor auf andere Art außer Zweifel zu setzen. Allein die Erfindung der zweyten und folgenden Differenzen von  $x^n$  muß bekannt seyn, wenigstens für den Fall, wenn  $dx$  beständig ist. Nun findet man nach Regeln, die den Binomischen Lehrsatz gar nicht voraussetzen,

$$d \cdot x^n = n x^{n-1} dx; \quad d^2 \cdot x^n = n(n-1)x^{n-2} dx^2;$$

$$d^3 \cdot x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3} dx^3.$$

Ferner ist klar, daß jederzeit, wenn

$$d^m \cdot x^n = A x^{n-m} dx^m$$

ist,

$$d^{m+1} \cdot x^n = (n-m) A x^{n-m-1} dx^{m+1}$$

seyn müsse. Da also die Formel  $d^m \cdot x^n = A x^{n-m} dx^m$  wahr ist, wenn man  $m = 2$  und  $A = n(n-1)$ , desgleichen, wenn man  $m = 3$ , und  $A = n(n-1)(n-2)$  setzt: so muß sie auch wahr seyn, wenn man  $m = 4$ , und  $A = n(n-1)(n-2)(n-3)$ , desgleichen, wenn man  $m = 5$ , und  $A = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$  und überhaupt, wenn man, für jeden Werth von  $m$ ,

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-m+1)$$

setzt. Dieses und daß  $d^{n+1} \cdot x^n$ , wenn  $dx$  beständig ist, alles mal  $= 0$  sey, vorausgesetzt, ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes mit Hülfe der Differenzial-Rechnung folgender. Es sey

$$(1+x)^n = 1 + A^1 x + A^2 x^2 + A^3 x^3 + \dots + A^m x^m + A^{m+1} x^{m+1} + \text{ic.}$$

so ist

$$n(1+x)^{n-1} dx = A^1 dx + 2 A^2 x dx + 3 A^3 x^2 dx + \text{ic.}$$

und daher

$$n(1+x)^{n-1} = A^1 + 2 A^2 x + 3 A^3 x^2 + \text{ic.}$$

Soll nun  $x$  jeden Werth haben können, so muß dieses alles auch gelten, wenn man  $x = 0$  setzt. Und da hiedurch

B b 4

$n(1^{n-1})$

$n(1^{n-1}) = n = A^I$  wird, so erhellet, daß in der angenommenen Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + A^I x + A^{II} x^2 + A^{III} x^3 + \dots + A^m x^m + A^{m+1} x^{m+1} + \dots$$

$A^I$  nichts anders bedeuten könne als  $n$ . Ferner ist

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} dx^2 = 2A^{II} dx^2 + 6A^{III} x dx^2 + \dots$$

oder

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2A^{II} + 6A^{III}x + \dots$$

und es kann daher aus ähnlichen Gründen, wie vorhin,  $A^{II}$

nichts anders als  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  bedeuten. Ueberhaupt aber ist

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)(1+x)^{n-m} dx^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-m+1) \cdot A^m dx^m + \dots$$

oder

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)(1+x)^{n-m} = m(m-1)(m-2) \dots (m-m+1) \cdot A^m$$

und also

$$A^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m}$$

Man hat also für die Werthe von  $A^I$ ;  $A^{II}$ ;  $A^{III}$ ; ꝛc. in der Formel  $(1+x)^n = 1 + A^I x + A^{II} x^2 + A^{III} x^3 + \dots$

$$A^I = n$$

$$A^{II} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$A^{III} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$A^{IV} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

⋮

$$A^m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m-1)m}$$

Inhalt



I n h a l t  
des  
sechsten Capitels.

---

Von der Differenziation der transcendenten Funktionen.

1. Was für transcendente Funktionen hier betrachtet werden sollen, und warum? §. 178.
2. Die Differenziation der transcendenten Größen selbst, §. 179 = 207, und zwar
  - a. der logarithmischen Größen, §. 179 = 185.
    - a. Vorläufige Anmerkung, §. 179.
    - ß. Die Differenziation der logarithmischen Größen selbst, §. 180 = 185.
      - 1) wenn das erste Differenzial gefunden werden soll, §. 180 = 183.
        - aa. wenn  $dy$  für  $y = lx$  gesucht wird, §. 180.
        - bb. wenn  $d.lp$  gesucht wird, und  $p$  eine Funktion von  $x$  ist, §. 181. 182.
          - aa. Regel, §. 181.
          - ßß. Beispiele, §. 182.
        - cc. wenn  $y = lpqrs$ , oder  $= l\frac{pq}{rs}$ , oder  $= l\frac{p^m \cdot n}{r^l \cdot s^y}$  ist, §. 183.

B 6 5

2) wenn

- 2) wenn die zweyten und folgenden Differenzialien gesucht werden, §. 184.
- γ. Die Differenziation solcher Funktionen, welche aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen, §. 185.
- b. der Exponential-Größen, §. 186 = 193.
- a. wenn d.  $a^x$  gesucht wird, §. 186 = 188.
  - β. wenn  $y = p^q$  ist, und  $dy$  gesucht wird, §. 189 = 192.
  - γ. wenn die Exponenten ebenfalls Exponential-Größen sind, §. 193.
- a. derjenigen transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen, §. 194 = 207.
- a. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 194. 200.
    1. wenn dieselben unter die Form  $A. \sin. x$ , §. 194. 195.
    2. wenn sie unter die Form  $A. \cos. x$ , §. 196;
    3. wenn sie unter die Form  $A. \tan. x$ , §. 197;
    4. wenn sie unter die Formen  $A. \cot. x$ ,  $A. \sec. x$ ,  $A. \operatorname{cosec.} x$ , gehören, §. 198.
    5. Beispiele, §. 199.
  - β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien der betrachteten Größen, §. 200.
- d. derjenigen transcendenten Größen, die sich aus der Umkehrung der vorhergehenden ergeben, §. 201 = 207.
- a. Von der Erfindung der ersten Differenzialien dieser Größen, §. 201 = 205, und zwar
    1. des  $\sin. x$ , §. 201.
    2. des  $\cos. x$ , §. 202.
    3. der  $\tan. x$ , §. 203.
    4. der  $\cot. x$ , §. 204.
    5. der  $\sec. x$ , und der  $\operatorname{cosec.} x$ , §. 205.

β. Von

β. Von der Erfindung der zweyten und folgenden Differenzialien dieser Größen, S. 205. 206.

1. der Sinus und Cosinus, S. 205.

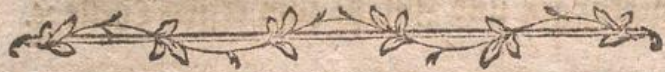
2. der Tangente, S. 206.

γ. aller derjenigen Größen, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen, S. 207.

Wegen der Erläuterungen, welche der 180ste und 181ste §. nöthig haben, verweise ich auf meine Zusätze zu dem sieben und achten Capitel der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, im Anhange zu meiner Uebersetzung des ersten Theils dieses Werkes.



Inhalt



# Inhalt

des

## siebenten Capitels.

---

Von der Differentiation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

1. Allgemeine Regel der Differentiation der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, §. 208 = 217.
  - a. Vorbereitung dazu, §. 208 = 212.
  - b. Gedachte allgemeine Regel selbst, §. 213 = 215.
  - c. Erläuterung derselben durch Beyspiele, §. 216 = 217.
2. Betrachtungen über die Eigenschaften der Differentialien zweyer und mehrerer veränderlichen Größen, §. 218 = 241.
  - a. Vorläufige Anmerkung, die Nothwendigkeit und Nützlichkeit dieser Betrachtungen betreffend, §. 218 = 219.
  - b. Gedachte Betrachtungen selbst, §. 220 = 239.
    - a. Speciell, oder über homogene Funktionen, §. 220. 225.
      - aa. Funktionen zweyer veränderlicher Größen, §. 220 = 223.
        - aa. Wenn  $V$  eine Funktion von  $x$  und  $y$  von keiner Dimension ist, §. 220. 221.
        - bb. Wenn  $V$  eine Funktion von  $x$  und  $y$  von  $n$  Dimensionen ist, §. 223.
          - bb. Funke

- bb. Funktionen mehrerer veränderlichen Größen,  
§. 224. 225.
- β. Allgemein, §. 226 = 239.
  - aa. Funktionen zweyer veränderlichen Größen, §.  
226 = 233.
    - αα. Merkwürdige Eigenschaft derselben, §. 226. 228.
    - ββ. Erläuterung dieser Eigenschaft an Beyspielen,  
§. 229.
    - γγ. Andere Methoden, dieselbe zu beschreiben und  
anzuzeigen, §. 230 = 232.
    - δδ. Uebereinstimmung zwischen dieser und der vor-  
hin von den homogenen Funktionen bewiesenen  
Eigenschaft, §. 233.
  - bb. Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, §.  
234. 241.
    - αα. Merkwürdige Eigenschaft derselben, §. 234. 235.
    - ββ. Grund davon, und weitere Erläuterung, §.  
236 = 239.
- ε. Gebrauch des Bisherigen, §. 240. 241.





**Inhalt**  
des  
**achten Capitels.**

---

Von der fernern Differenziation der Differenzial-  
Formeln.

1. Anzeige des Gegenstandes dieses Capitels, § 242.
2. Regeln der fernern Differenziation der Differenzial-Formeln, §. 243 = 250.
  - a. für die Funktionen einer veränderlichen Größe, §. 243 = 245.
  - b. für die Funktionen zweyer veränderlicher Größen, §. 246 = 249.
  - c. für die Ausdrücke, welche Differenzialien enthalten, §. 250.
3. Betrachtungen über die zweyten und folgenden Differenzialien, §. 251 = 280.
  - a. Allgemeine Bemerkung darüber, §. 251.
  - b. Besondere Untersuchungen, §. 252 = 263.
    - α. solche Formeln betreffend, worin nur eine veränderliche Größe ist, §. 252. 253.
    - β. solche Formeln betreffend, worin zwey veränderliche Größen vorkommen, §. 254 = 263, wo §. 257 = 262. auch diejenigen unter diesen Formeln erwogen werden,

den, welche, der in ihnen vorkommenden zweyten Differenzialien ungeachtet, eine gewisse Bedeutung haben.

- e. Methode, die zweyten und höhern Differenzialien wegzuschaffen, nebst einigen andern hieher gehörigen Untersuchungen, §. 264 = 280.

---

## Inhalt

des

### neunten Capitels.

---

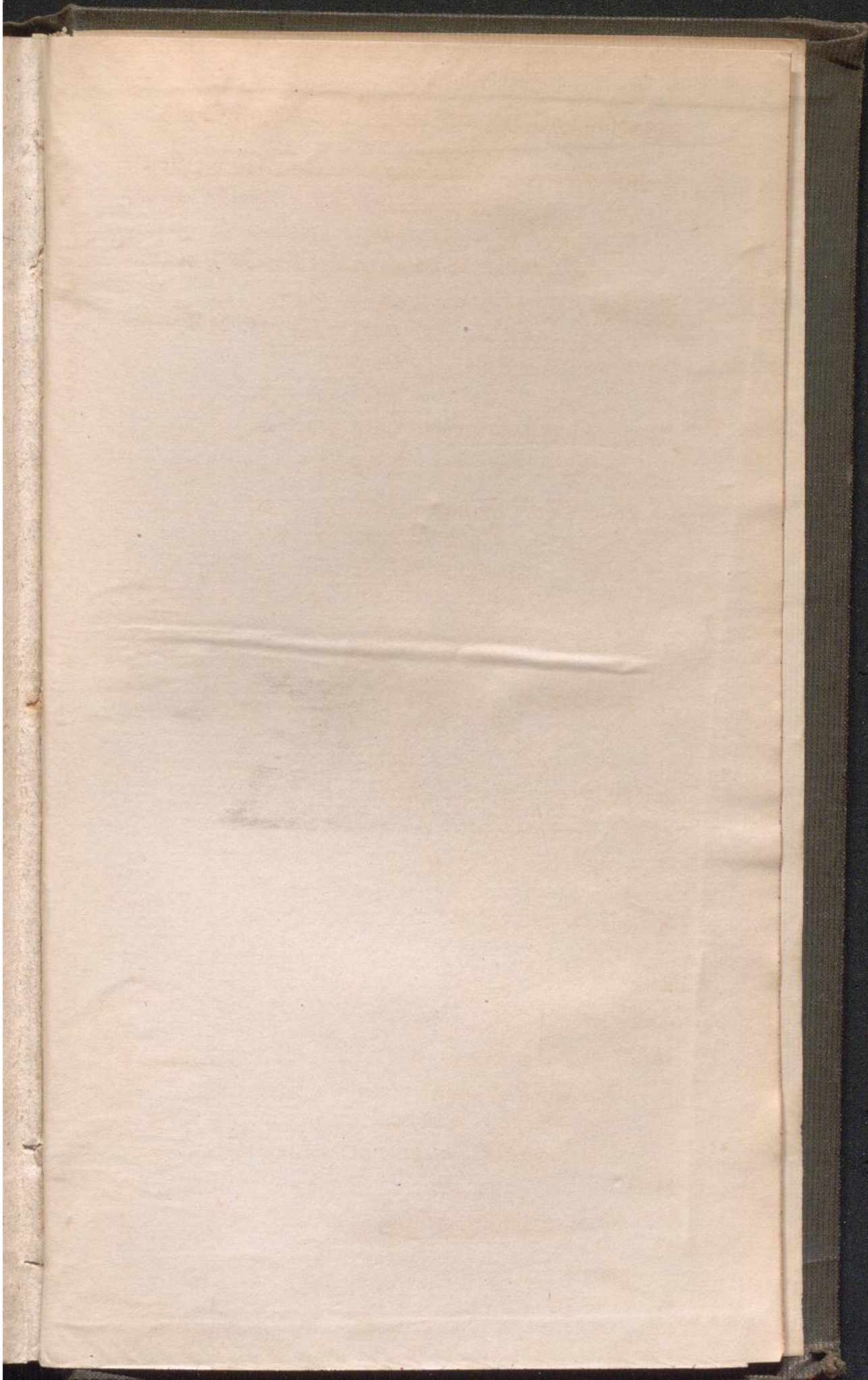
#### Von den Differenzial-Gleichungen.

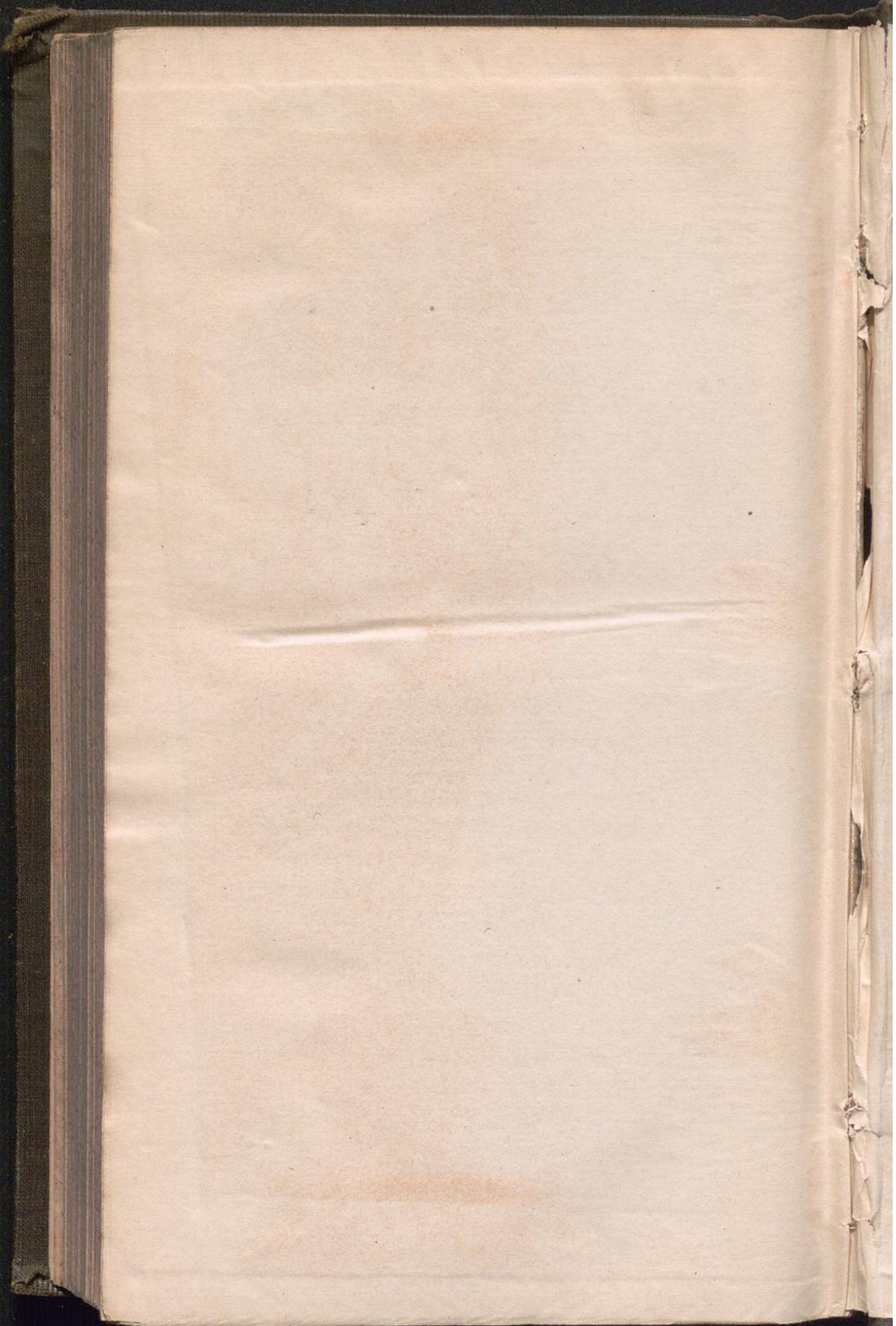
1. Anzeige des Gegenstandes dieses Capitels, §. 281.
2. Von der Erfindung der Differenzial-Gleichungen auf endlichen, §. 282 = 285.
3. Von den Veränderungen, welche man mit der zuerst gefundenen Differenzial-Gleichung vernehmen kann, §. 286. 287.
4. Von der Reduction der Differenzial-Gleichungen auf endliche, §. 288.
5. Von der Wegschaffung beständiger Größen aus endlichen Gleichungen, vermittelst der Differenziation, §. 289 = 295.
6. Wie Differenzial-Gleichungen das Verhältniß zwischen  $x$  und  $y$  ausdrücken, §. 296 = 300, und warum? §. 301 = 306.
7. Von

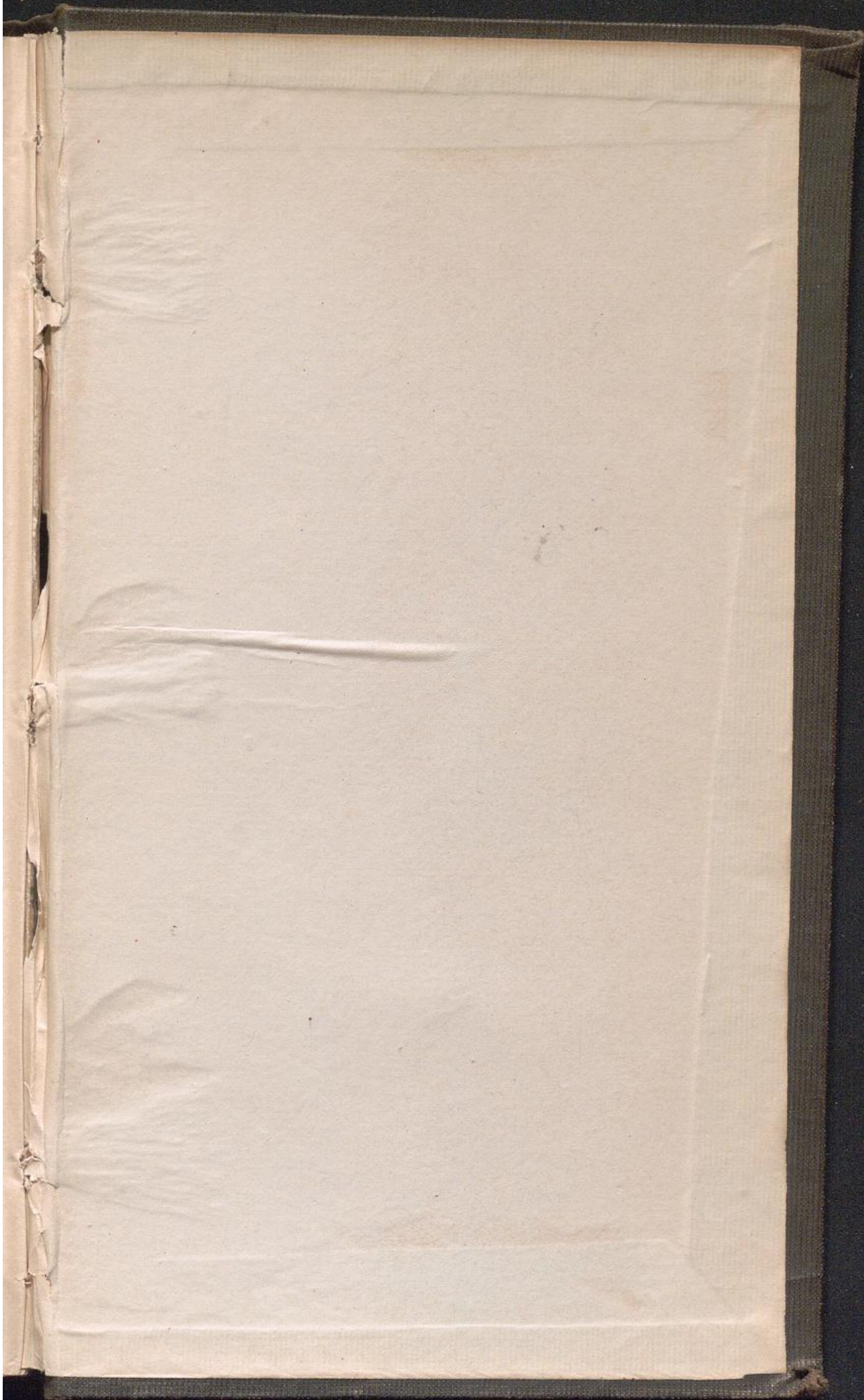
400 Anmerkungen und Zusätze zum ersten Theile ic.

7. Von den Differenzial-Gleichungen, welche drey veränderliche Größen enthalten, §. 307 : 326.  
a. Von diesen Differenzial-Gleichungen überhaupt, §. 307. 308.  
b. Eintheilung derselben in reelle und imaginäre, und Untersuchung der Kennzeichen beyder Arten, § 309 : 326.  
8. Beschluß, §. 327.











P  
05

Euler,  
Differenzial-  
Rechnung.

1-2

THU  
3217  
-1/2