Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XII

PAUL NATORP

DIE LOGISCHEN GRUNDLAGEN DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN


AUS·DER·BÜCHEREI·VON
·KUNO·FLADT·
ANGESCHAFFT: 9.6.1913

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola-Pavia. Deutsch von H. Liebmann-Leipzig. 1908. Geb. M. 5.—

In der vom Verfasser und Übersetzer erweiterten deutschen Ausgabe wird wohl nicht nur den Mathematikern ein Gefallen erwiesen, sondern vor allem auch den vielen, welche mit elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet, Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie kennen lernen wollen. Man wird in der elementar gehaltenen und flüssigen Darstellung die Antwort auf viele Fragen finden, wo andere nur dem gründlich vorgebildeten Mathematiker zugängliche Quellen versagten.

V. Band: **Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer. 43 Illustrationen. 1902. Geb. M. 6.80.

Nach einer Übersicht über die Erscheinungen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb. M. 6.—

In drei Abschnitten wird behandelt: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise; schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips unabhängig von jeglichen Hypothesen über das Wesen der Naturkräfte zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

VII. Band: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert-Göttingen. 3., durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte Auflage. 1909. Geb. M. 6.—

Diese Untersuchung ist ein Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt.

IX. Band: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann-Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. M. 6.—

Durch die sichtliche Zunahme der erkenntnistheoretischen Interessen auf allen Gebieten der Naturwissenschaften war dem Verfasser der Weg für die Neubearbeitung der inzwischen notwendig gewordenen zweiten Auflage vorgezeichnet, seine späteren erkenntnistheoretischen Untersuchungen in die Grundzüge einzuarbeiten und damit eine weitere Durcharbeitung des gesamten für ihn in Betracht kommenden Gegenstandes zu versuchen, ohne daß dabei Richtung und Ergebnis seiner bisherigen Studien eine wesentliche Änderung erfahren konnten.

~~Wilhelm Waldraff s. l. Freund~~
~~Kuno Fladt.~~
~~9.VI.13.~~

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XII

DIE LOGISCHEN GRUNDLAGEN DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

VON

DR. PAUL NATORP
PROFESSOR DER PHILOSOPHIE
AN DER UNIVERSITÄT MARBURG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

VORWORT

Die notwendige Wechselwirkung zwischen Philosophie und positiven Wissenschaften verbirgt sich in solchen Zeiten, in denen die Arbeit beider in festen Geleisen, gleichsam geradlinig oder in kaum merklicher Richtungsänderung fortschreitet; sie tritt deutlich zutage an den entscheidenden Wendepunkten.

Wir stehen jetzt mitten in einer Periode mächtiger Umwälzungen beider, der Wissenschaften und der Philosophie; und so sind in letzter Zeit die Berührungen zwischen beiden, die Jahrzehnte hindurch keine beträchtliche Änderung erkennen ließen, zusehends enger und lebendiger geworden. Zwar hat es die Philosophie gewiß auch in der hinter uns liegenden Periode nicht verabsäumt, vor allem mit den „exakten" Wissenschaften Fühlung zu nehmen und auch mit ihren neuen Errungenschaften sich in Einvernehmen zu setzen. Allein es ist zu besorgen, daß dabei weder dem eigenen Interesse der Philosophie volles Genüge geschehen, noch die Probleme der exakten Wissenschaften selbst bei der Wurzel gefaßt worden sind. Denn nach aller Mühe, welche an die Prinzipienlehre der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft auch von bedeutenden Philosophen gewendet worden ist, steht man rat- und hilflos den tiefgreifenden Revolutionen gegenüber, die über diese Wissenschaften in jüngster Zeit ergangen sind. Durch diese Revolutionen ist der theoretischen Philosophie ihre alte Aufgabe in neuer Wucht und Schwere gestellt. Mit bloßer Übernahme der neuen Errungenschaften (soweit von gesicherten Errungenschaften überhaupt schon geredet werden darf) und deren Einordnung unter alte Schablonen kann es nicht getan sein; sondern gerade die Grundlagen der theoretischen Philosophie, also der Logik (als „transzendentaler“ Logik in Kants Sinne) bedürfen einer Umarbeitung von nicht geringerer Tiefe, als gerade die fundamentalsten der theoretischen Wissenschaften sie in unseren Tagen erfahren haben oder zu erfahren im Begriff sind. Die Gefahr ist heute weit geringer, daß die Philosophie etwa nochmals, wie in Hegels Zeiten, in das Arbeitsgebiet der positiven Wissenschaften unbefugt hinübergreifen sollte, als daß man die spezifische Natur der philosophischen Aufgabe verkennt, und auf Grundfragen der Philosophie antworten zu können meint mit Sätzen positiver Wissenschaft oder oberflächlichen Reflexionen, die an exakte Grundlagen in oft erstaunlich unexakter Logik angeknüpft werden. Der heute üppig wuchernden „Naturphilosophie“ solchen Stils kann durch nichts andres wirksam begegnet werden als durch eine echte Philosophie nicht der Natur, sondern der Naturwissenschaft auf mathematischer Grundlage, die der positiven Forschung nicht mehr als die Fragen entnimmt, die Antworten selbständig erarbeitet.

Freilich fordert ein solcher Versuch — wie er in diesem Buche gewagt wird — zugleich eine so umfassende Vertrautheit mit den exakten Wissenschaften, wie sie für einen einzelnen gegenwärtig kaum mehr erreichbar ist. Wer von uns dürfte heute sich rühmen, die ungeheuren Weiten, in die diese Wissenschaften sich gedehnt haben, auch nur rezeptiv zu umspannen; zumal wenn er nicht dieser einzigen Seite der philosophischen Aufgabe seine ganze Kraft widmen kann, sondern, nach der unerbittlichen Forderung der absoluten Problemeinheit der Philosophie, gleichzeitig auch den Grundlagen der biologischen und der soziologisch-historischen Wissenschaften sein Studium zuzuwenden verpflichtet ist? In dieser Beziehung wird jeder, der heute an die Aufgaben der systematischen Philosophie sich heranwagt, auf Nachsicht rechnen müssen. Er wird bemüht sein, von den schaffenden Forschern zu lernen und wieder zu lernen, auch wenn es ein Umlernen ist, das sie von ihm fordern. Voraus verurteilt aber ist ein jeder Versuch, der nicht auf solchen letzten philosophischen Fundamenten fußt, die sicher sein dürfen durch keine der, sei es schon vollbrachten oder im Gang befindlichen wissenschaftlichen Revolutionen erschüttert zu werden.

Wenn der gegenwärtige Versuch mit der Zuversicht auftreten darf, dieser höchsten und zugleich doch unerläßlichsten Forderung zu genügen, so dankt er dies dem historischen Boden, auf dem er erwachsen ist: dem Boden einer philosophischen Arbeitsgemeinschaft, der es an dem wesentlichsten Stück: eben an dem unentbehrlichen Fundamente einer einheitlichen Problemstellung und Methode nicht gebricht. Der „Marburger Schule" ist solche Festigkeit des Fundaments gesichert durch die in unerbittlicher Strenge von Anfang bis zuletzt auf dies wesentliche Ziel gerichtete Arbeit ihres Führers: Hermann Cohen. Der Kundige wird beim Lesen dieses Buches die tiefe Wirkung seines gewiß nicht abschließenden, aber an entwicklungsfähigen Keimen fast überreichen Grundwerkes: der „Logik der reinen Erkenntnis", auf Schritt und Tritt auch da verspüren, wo der Name nicht genannt ist. Nicht minder wesentliche Förderung aber ist sich der Verfasser bewußt der langjährigen Zusammenarbeit mit den jüngeren Gliedern der Schule zu verdanken, von denen als Forscher selbständigen Ranges mehrere schon hervorgetreten sind, andere in kurzem hervortreten werden. Von den letzteren ist einer, Dimitry Gawronsky — den mit seinem reichen mathematischen und physikalischen Wissen und Können zur Seite zu haben dem Verfasser besonders wertvoll war — deshalb hier zu nennen, weil in einem bald erscheinenden Werke desselben eine Reihe der Fragen, die in diesem

Buche behandelt sind, gleichfalls zur Sprache kommen werden. Es ist, auch im rein sachlichen Interesse, nicht überflüssig, zu bemerken, daß wir beide, von gemeinsamen methodischen Grundvoraussetzungen ausgehend und an denselben Problemen arbeitend, wesentlich unabhängig voneinander zu nahe übereinstimmenden Ergebnissen gelangt sind. Es gilt dies besonders auch von dem anstößigsten Punkte: der Anerkennung des Begriffs des aktuell Unendlichkleinen und dessen Anwendung auf die Probleme nicht bloß des Irrationalen (worin wir beide nur die Richtung von Cantor und Veronese innehalten), sondern auch des Infinitesimalen. Die letztere Frage konnte in diesem Buche deshalb im Verhältnis zu ihrer Bedeutung kurz behandelt werden, weil eine sehr eingehende Untersuchung darüber in Gawronskys Werk demnächst zu finden sein wird.

Auch der äußeren Fertigstellung des Buches ist die Mithilfe der jungen Freunde zugute gekommen. Einige Druckfehler sind gleichwohl stehen geblieben; sinnstörend wohl nur einer: S. 123, Z. 5 v. u. ist statt „Vereinigung" „Verneinung" zu lesen.

Das vorangeschickte Literaturverzeichnis enthält die in dem Buche (unter den Nummern des Verzeichnisses, in Kursivschrift) zitierten Bücher und Abhandlungen, und wenige mehr, d. h. nur die wichtigsten von denen, welche den auf diesem Felde Arbeitenden bekannt sein sollten; entfernt nicht alle, die der Verfasser selbst eingesehen hat und für beachtenswert hält.

Das Register möchte einesteils, als Namenregister, es erleichtern, den historischen und kritischen Gehalt des Buches bequem zu überschauen, andernteils, als Sachregister, die Hauptbegriffe, mit und an denen gearbeitet wird, auch gesondert in prüfende Erwägung zu ziehen.

So ist das Buch in jedem Sinne auf die Fortarbeit an den Problemen angelegt. Es erhebt nicht den Anspruch, Abschließendes zu geben, was nach der Natur der Aufgabe zurzeit überhaupt nicht möglich ist. Es würde vielmehr nur der eigenen Absicht dieses Versuches entsprechen, wenn er, was die Stellungnahme zu einzelnen Problemen der exakten Wissenschaften betrifft, durch die planmäßige Zusammenarbeit von Philosophie und exakter Forschung, zu der er auffordert und die er an seinem Teile fördern möchte, in einigem vielleicht schon bald überholt würde. Denn wir erkennen die unzerstörliche Lebenskraft der theoretischen Philosophie gerade in der unbeschränkten Entwicklungsfähigkeit der logischen Prinzipien, deren klare Herausstellung und sichere Begründung dieser Versuch sich zur vornehmsten Aufgabe gestellt hat.

MARBURG, im März 1910.

DER VERFASSER.

INHALT

IV. Die Modalität. Seite

Drittes Kapitel.

Zahl und Rechnung.

Viertes Kapitel.

Unendlichkeit und Stetigkeit.

Fünftes Kapitel.

Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl.

Sechstes Kapitel.

Zeit und Raum als mathematische Gebilde.

Siebentes Kapitel.

Die zeit-räumliche Ordnung der Erscheinungen und die mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft.

LITERATURVERZEICHNIS [1])

1. D'Alembert, *Traité de Dynamique.* 1743. 1758.
2. Archimedes, *Opera ed.* Heiberg. 1880. 1881. („Archimedisches Prinzip“: *De sph. et cycl* I *post.* 5, und Vorr. zu *De quadrat. parab.*)
3. Aristoteles *ed. Acad. reg. Boruss.* I—V. 1831. 1836. 1870 (bes. Physik, griech. u. deutsch v. Prantl, 1854, und Metaphysik, deutsch v. Bonitz 1890, Lasson 1907 u. a.). Vgl. Görland *59. 61*; Natorp *131*, Kap. 11 u. 12.
4. Aufsätze, Philosophische, Ed. Zeller zu s. 50jähr. Doktor-Jubiläum gewidmet. 1887. (Darin Aufsätze von Helmholtz *76* und Kronecker *97*.) Vgl. Cohen *24*.
5. Baumann, Jul., Die Lehren von Raum, Zeit u. Mathematik in der neueren Philosophie. I. II. 1868. 1869.
6. Du Bois-Reymond, P., Allgemeine Funktionentheorie. 1882.
7. —, Über die Grundlagen der Erkenntnis in den exakten Wissenschaften. 1890.
8. Boltzmann, L., Prinzipien der Mechanik. I. 1897.
9. Bolzano, B., Wissenschaftslehre. Versuch einer ausf. . . . Darstellung der Logik. I—IV. 1837.
10. —, Paradoxien des Unendlichen. 1850 (Facs.-Druck in: Wiss. Classiker in Facs.-Dr., Berlin, Mayer & Müller, 1889).
11. Born, Die träge Masse u. d. Relativitätsprinzip. Ann. d. Phys.^{4} XXVIII, 571.
12. Bucherer, A. H., Experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys.^{4} XXVIII, 513.
13. Buek, O., Die Atomistik und Faradays Begriff der Materie. Arch. f. Gesch. d. Philos. XVIII, 65. 139, und I.-D. Marburg 1905.

---

1) Vgl. F. Müller, Führer durch die mathematische Literatur m. bes. Ber. der historisch wichtigen Schriften. Leipzig u. Berlin, Teubner, 1909.

14. Cantor, Georg, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Math. Ann. XXI, 545 ff. und Acta math. II, 1883.
15. —, Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuell Unendliche. Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik LXXXVIII, 224, 1886; Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, ebenda XCI, 81, 1887 u. XCII, 240, 1888.
16. —, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann. XLVI, 481, 1895; XLIX, 207, 1897.
17. Cassirer, E., Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. 1902.
18. —, Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. I. II. 1906. 1907.
19. —, Kant und die moderne Mathematik. M. Bez. auf Russells u. Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik. Kantstudien XII, 4. 1907.
20. —, Zur Frage nach der Methode der Erkenntniskritik. Eine Entgegnung. Vtljschr. f. wiss. Philos. XXXI, 441.
21. Cohen, H., Platos Ideenlehre u. die Mathematik. 1879.
22. —, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. 1883.
23. —, Kants Theorie der Erfahrung. 2. A. 1885.
24. —, Rez. der Philos. Aufs. für Zeller (*4*). Philos. Monatsh. XXIV, 257. 1888.
25. —, Einleitung u. kritischer Nachtrag zu F. A. Langes Geschichte des Materialismus (*98*).
26. —, Logik der reinen Erkenntnis. 1902. Vgl. Görland *60*.
27. —, Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft. 1907.
28. Cohn, J., Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. 1908.
29. Couturat, L., *Sur la définition du continu. Rev. de Métaph.* VIII, 157. 1900.
30. —, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits.* 1901.
31. —, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch v. C. Siegel 1908. (Vgl. Cassirer *19*).
32. Dedekind, R., Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1872. 2. A. 1892.
33. —, Was sind und was sollen die Zahlen? 1887. 2. A. 1893.
34. Demokrit, s. Diels *37*.
35. Descartes, *Œuvres* ed. Adam & Tannery 1897 ff.
36. —, Philosophische Werke übers. v. A. Buchenau 1904. 1906. 1908 (Dürrs Philos. Bibliothek). — Vgl. Cassirer *17*, Natorp *122*.
37. Diels, H., Die Fragmente der Vorsokratiker. Griech. u. deutsch. 2. Aufl. 1906 ff.

38. Driesch, H., Naturbegriffe und Naturunteile. 1904.
38ª. Drobisch, M. W., Über die geometrische Konstruktion der imaginären Größen. Ber. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, II, 171ff. 1848.
39. Dühring, E., Natürliche Dialektik. Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. 1865.
40. —, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. 2. A. 1877.
41. —, Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. I. 1878.
42. Durège, G., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. 1864. 4. Aufl. 1893.
43. Einstein, A., Zur Elektrodynamik bewegter Systeme. Ann. d. Phys.[4] XVII, 891, 1905.
44. Engel, Fr., und Stäckel, P., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. 1895.
45. Enriques, F., Prinzipien der Geometrie, in: Encykl. d. math. Wiss. Bd. III 1, H. 1. 1907.
45ª. —, Probleme der Wissenschaft, deutsch von K. Grelling. 1910.
46. Erdmann, B., Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie. 1877.
47. Euclidis *Opera ed.* Heiberg & Menge. 1883 ff. (Deutsch von Lorenz, 6. A. v. Dippe 1840.) Vgl. Engel u. Stäckel *44*, Simon *160*.
48. Euler, L., *Reflexions sur l'espace et le temps.* (*Hist. de l'Acad. d. Sc. et B. L.*, Berlin.) 1748.
49. —, *Mechanica s. motus scientia analytice exposita.* 1736. 1742.
50. —, *Theoria motus corporum solidorum* usw. 1765.
51. —, Briefe an eine deutsche Prinzessin. 1768. Vgl. Cassirer *18* (II, 346ff.); Streintz *169*.
52. Fechner, G. Th., Die physikalische und philosophische Atomenlehre. 1855. 2. A. 1864.
53. Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. 1884.
54. —, Funktion und Begriff. 1891.
55. —, Grundgesetze der Arithmetik. I. 1893. II. 1903.
56. Galilei, G., *Le opere, ediz. naz.* 1890—1906.
57. —, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und kopernikanische, übers. v. Strauß. 1891.
57ª. —, Unterredungen u. math. Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, deutsch v. Öttingen. (Ostwalds Klass. d. ex. Wiss.) Vgl. Cassirer *18*, Natorp *123*, De Portu *150*.

58. Gauß, C. F., Werke her. v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1870—1906. Vgl. Engel u. Stäckel *44*.
59. Görland, A., Aristoteles und die Mathematik. 1899.
60. —, Index zu H. Cohens Logik d. r. Erk. (*26*) 1906.
61. —, Aristoteles und Kant bez. der Idee der theoretischen Erkenntnis untersucht. (Philos. Arbeiten her. v. Cohen u. Natorp, Bd. II.) 1909.
62. Graßmann, H., Ausdehnungslehre. 1844 und 1862. (Ges. Werke I, 1. 2, 1894. 1896. Ich unterscheide die beiden Darstellungen als A^1 und A^2.) Vgl. Natorp *128*.
63. Hamilton, W. R., *Lectures on Quaternions*. 1853.
64. —, *Elements of Quaternions*. 1866. Deutsch von Glan. 1882. 1884.
65. Hankel, H., Theorie der komplexen Zahlsysteme. 1869.
66. —, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. 1874.
67. Hartmann, Ed. von, Kategorienlehre. 1896 (vgl. Rez. Natorp *126*).
68. —, Die Weltanschauung der modernen Physik. 1902.
69. Hartmann, Nic., Platos Logik des Seins. (Philos. Arb. her. v. Cohen u. Natorp, Bd. III.) 1909.
70. —, Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik nach den ersten zwei Büchern des Euklidkommentars dargestellt. (Philos. Arb. her. v. Cohen u. Natorp, Bd. IV, H. 1.) 1909.
71. Hegel, G. W. F., Wissenschaft der Logik I, 1. 2. u. II. (Werke Bd. 3—5.) 1833. 1834.
72. Helm, G., Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt. 1888.
73. Helmholtz, H., Über die Erhaltung der Kraft. 1847. (Ostwalds Klass. d. ex. Wiss. H. 1. 1889.)
74. —, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. gel. Nachr. 1868, 193ff.
75. —, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. (In: Popul. wiss. Vorträge H. 3. 1876.)
76. —, Zählen und Messen, in: Aufsätze *4*.
77. —, Vorlesungen über theoretische Physik, bes. I, 1. Einleitung zu den Vorl. üb. th. Physik. 1903. I, 2. Vorl. üb. d. Dynamik diskreter Massenpunkte. 1898.
78. Heraklit s. Diels *37*.
79. Hertz H., Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. (Ges. Werke Bd. III.) 1894.

80. Heymans, G., Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens. I. II. 1890. 1894. Vgl. Natorp *126*.

81. Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 3. A. 1908; dsgl. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In: Verh. d. III. internat. Math.-Kongr. 1904. (Leipzig, 1905.)

82. —, Nachruf auf H. Minkowski. Gött. Nachr. 1909, H. 1.

83. Höfler, A., s. Kant *89*.

84. Husserl, E., Logische Untersuchungen. I. II. 1900. 1901. Vgl. Natorp *129*.

85. Jevons, W. St., *The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method.* 3. ed. 1879.

86. Johannesson, P., Das Beharrungsgesetz. Progr. Berlin 1896.

87. Joule, J. P., *On the calorific Effect of Magneto-Electricity and on the Mechanical Value of Heat. Philos. Mag.* 1843 (mit andern Abhdl. 1840—1849 in: *Papers* I).

88. Kant, I., Gesammelte Schriften her. v. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1902 ff. (bes.: Bd. III u. IV. Kritik der reinen Vernunft. 1781. 1787. Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können. 1783. Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 1786).

89. —, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, her. m. e. Nachwort von A. Höfler. 1900. — Vgl. Cohen *23*. *27*, Görland *61*, Stadler *164*.

90. Kelvin, Lord, s. Thomson, W.

91. Kepler, J., *Opera omnia ed.* Frisch. 1858 ff.

92. Kerry, B., System einer Theorie der Grenzbegriffe. 1890.

93. Kirchhoff, G., Vorlesungen über mathematische Physik. I. Mechanik. 1883. 4. A. 1897.

94. Klein, F., Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. In Math. Ann. IV. VI. VII u. XXXVII 1871. 1873. 1874. 1890.

95. —, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie (2. Abdr.) 1893.

96. Kroman, K., Unsere Naturerkenntnis. Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. 1881; deutsch 1883.

97. Kronecker, L., Über den Zahlbegriff, s. Aufsätze *4*.

98. Lange, F. A., Geschichte des Materialismus und Kritik seiner Bedeutung in der Gegenwart. 2. Aufl. I. II. 1875. 1876. 7. Aufl. mit Einl. u. krit. Nachtrag von H. Cohen. 1902.

99. Lange, L., Über die wissenschaftliche Fassung des Galileischen Beharrungsgesetzes; und: Nochmals über das Beharrungsgesetz. Philos. Studien. 1885.

100. —, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs. Philos. Studien. 1886.

101. Laßwitz, K., Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. I. II. 1890.
102. Leibniz, G. W. von, Mathematische Schriften her. von C. J. Gerhardt. 1849 ff.
103. —, Die philosophischen Schriften her. v. C. J. Gerhardt. 1875 ff.
104. —, Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie übers. v. A. Buchenau, her. von E. Cassirer. I. II. 1904. 1906. (Vgl. Cassirer *17. 18*, Couturat *30.*)
105. Lipps, G. F., Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik. In Wundts Philos. Stud. IX—XI u. XIV. 1893—1895. (Vgl. Natorp *126.*)
106. —, Mythenbildung und Erkenntnis. Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. 1907.
107. Lodge, O., Elektronen oder die Natur und die Eigenschaften der negativen Elektrizität. Deutsch von Siebert. 1907.
108. Lorentz, H. A., Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. 1895. 2. A. 1906.
109. Mach, E., Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. 1872.
110. —, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. 1883. 3. Aufl. 1897.
111. —, Beiträge zur Analyse der Empfindungen. 1886. 5. A. Die Analyse der Empfindungen und das Verhältnis des Physischen zum Psychischen. 1906.
112. —, Die Prinzipien der Wärmelehre historisch-kritisch entwickelt. 1896. 2. A. 1900.
113. Maxwell, J. C., Theorie der Wärme (*Theory of Heat.* 1871, 9. *ed.* 1888) n. d. 4. Aufl. übers. v. Neesen 1878.
114. —, Substanz und Bewegung (*Matter and Motion.* 1873) deutsch v. Fleischl. 1881.
115. Mayer, J. R., Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur, 1842; Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel, 1845; Bemerkungen über das mechanische Äquivalent der Wärme, 1850; in: Die Mechanik der Wärme. 1876, 3. Aufl. 1893.
116. Mendelssohn, M., Abhandlung über die Evidenz in den metaphysischen Wissenschaften. Berlin 1764.
117. Mill, J. Stuart, System der deduktiven und induktiven Logik (1843) deutsch v. Schiel, 1849, und Gomperz, 1872. 1873.
118. Minkowski, H., Die Grundgleichungen für die elektrischen

und magnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. 1908, 53 ff.
119. —, Raum und Zeit. Vortr. geh. auf d. Naturf.-Vers. zu Köln 1908, in: Jahrb. d. Math.-Ver. 18, sep. 1909. — Vgl. Hilbert *83*.
120. Möbius, A. F., Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. 1827.
121. Mott-Smith, M. C., Metageometrische Raumtheorien. Eine philosophische Untersuchung. 1907.
122. Natorp, P., Descartes' Erkenntnistheorie. Eine Studie zur Vorgeschichte des Kritizismus. 1882. (Vgl. auch Arch. f. Gesch. d. Philos. X, 10 ff. 1896.)
123. —, Galilei als Philosoph. Eine Skizze. Philos Monatsh. XVIII, 193. 1882.
124. —, Über objektive und subjektive Begründung der Erkenntnis. Philos. Monatsh. XXIII, 257 ff. 1887.
125. —, Quantität und Qualität in Begriff, Urteil und gegenständlicher Erkenntnis. Philos. Monatsh. XXVII, 1 ff. 129 ff. 1890.
126. —, Bericht über deutsche Schriften zur Erkenntnistheorie, darin Rez. über O. Schmitz-Dumont *156*, Arch. f. syst. Philos. III, 457 ff.; über G. F. Lipps *105*, ebenda 467; G. Heymans *80*, 475; J. Petzoldt *142* u. a. 1897; über E. v. Hartmann *67*, Arch. f. syst. Philos. VI, 91 ff. 1900.
127. —, *Nombre, temps et espace dans leurs rapports avec les fonctions primitives de la pensée.* In: *Bibl. du Congr. internat. de philosophie.* I. 1900.
128. —, Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik. Arch. f. syst. Philos. VII, 177 ff. 372 ff. 1901 (mit Bezug auf Graßmann *62*, Whitehead *182*, Russell *153*).
129. —, Zur Frage der logischen Methode. Mit Beziehung auf E. Husserls Log. Untersuchungen (*84*). Kantstudien VI, 270 ff. 1901.
130. —, Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik. Unterr.-Bl. f. Math. u. Naturwiss. 1902, H. 1.
131. —, Platos Ideenlehre. Eine Einführung in den Idealismus. 1903.
132. —, Philosophische Propädeutik (Allgemeine Einleitung in die Philosophie und Anfangsgründe der Logik, Ethik u. Psychologie) in Leitsätzen zu akad. Vorlesungen. 1903; 3. Aufl. 1909.
133. —, Logik (Grundlegung u. logischer Aufbau der Mathematik u. math. Naturwissenschaft) in Leitsätzen zu akad. Vorl. 1904; 2. A. 1910.
134. —, Philosophie u. Pädagogik. Untersuchungen auf ihrem

Grenzgebiet. 1909. (Darin: Über Philosophie u. philos. Studium. Ein Gespräch.)

135. Neumann, C., Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. 1870.

136. Newton, I., *Philosophiae naturalis principia mathematica.* 1686. (Deutsch von Wolfers, 1872.)

137. Ostwald, W., Vorlesungen über Naturphilosophie. 1901 (2. A. 1902; 3. A. 1906).

138. Parmenides, s. Diels *37*.

139. Pasch, M., Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. 1882.

140. —, Vorlesungen über neuere Geometrie. 1882.

141. Petzoldt, J., Maxima, Minima und Ökonomie. Vtljschr. f. wiss. Philos. XIV, 1890, u. sep.

141[a]. —, Das Gesetz der Eindeutigkeit. Ebenda XIX, 146ff. 1895. Vgl. Natorp *126*.

142. Pietzker, F., Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. 1891.

143. Planck, M., Das Prinzip der Erhaltung der Energie. 1887. 2. A. 1908.

144. —, Zur Dynamik bewegter Systeme. Ann. d. Phys.[4] XXVI, 1ff. 1908.

145. —, Die Einheit des physikalischen Weltbildes. Vortr. 1909.

145[a]. —, Acht Vorlesungen über theoretische Physik. 1910.

146. Plato, *Opera* rec. J. Burnet. Oxford 1899ff. (deutsch v. Schleiermacher u. a.). Vgl. Cohen *21*; Hartmann *69*; Natorp *131*.

147. Poincaré, H., Wissenschaft und Hypothese. Deutsch v. F. u. L. Lindemann 1904, 2. A. 1906.

148. —, Der Wert der Wissenschaft, deutsch v. E. Weber m. Anm. u. Zus. v. H. Weber. 1906.

149. Poisson, D., *Traité de Mécanique.* 1811. 1833. Deutsch v. Stern. 1835.

150. De Portu, E., Galileis Begriff der Wissenschaft. Diss. 1904.

150[a]. Richarz, F., Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Aufl. 1902.

151. Riehl, A., Der philosophische Kritizismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft. I. II, 1 u. 2. 1876. 1879. 1887. 2. Aufl.: Der philosophische Kritizismus. Geschichte und System. I. 1908.

152. Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 1854.

153. Russell, B., *An Essay on the Foundations of Geometry.* 1897. Vgl. Natorp *128.*
154. —, *The Principles of Mathematics.* I. 1903. Vgl. Cassirer *19,* Couturat *31.*
155. —, *Mathematical Logic as based on the Theory of Types. Am. Journ. of Math.* XXX, 222ff.
156. Schmitz-Dumont, O., Naturphilosophie als exakte Wissenschaft. Mit bes. Berücks. d. math. Physik. 1895. Vgl. Natorp *126.*
157. Schoenflies, A., Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresber. d. Math.-Ver. VIII, 2. u. Erg.-Bd. II. 1900. 1908.
158. Schütz, J. R., Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr. 1897, 110ff.
159. Sigwart, Chr., Logik. I. II. 1873. 1878. 2. A. 1889. 1893.
160. Simon, M., Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. 1901.
161. —, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. 2. Aufl. 1908.
162. —, Über Mathematik. In: Philos. Arbeiten her. v. Cohen u. Natorp, Bd. II. 1909.
163. Spencer, H., *First Principles.* 1862. Deutsch v. Vetter, 1875.
164. Stadler, A., Kants Theorie der Materie. 1883.
165. Stäckel, P., s. Engel *44.*
166. Stallo, J. B., Die Begriffe und Theorien der modernen Physik übers. v. J. Kleinpeter, m. Vorw. von E. Mach. 1901.
167. Stolz, O., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. I. II. 1885. 1886.
168. — und Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. 1902.
169. Streintz, H., Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. 1883.
170. Study, F., Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen. Encykl. d. math. Wiss. I, 147ff. 1898.
171. Tait, P. G., s. Thomson, W.
172. Thomson, W. (Lord Kelvin) u. Tait, P. G., *Elements of Natural Philosophy.* 1894.
173. Thomson, Elektrizität und Materie. Übs. v. Siebert. 1904.
174. Unverzagt, K. W., Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen. 1876.
175. Veronese, G., Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Deutsch von Schepp. 1894.
176. Wald, F., Die Energie und ihre Entwertung. Studien über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. 1889.

177. Weber, H., Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. (Encykl. d. El.-Math. I.) 1903.
178. Weber, L., Über das Galilei'sche Prinzip. 1891.
179. Weber, W., Brief an Fechner, in Fechners Atomenlehre. 2. A., S. 88.
180. Weierstraß, K., (Über die Irrationalzahlen) in Kossak, Die Elemente der Arithmetik, 1872; Biermann, Theorie der analytischen Funktionen. 1887 u. a.
181. Wellstein, J., Elemente der Geometrie (in: Encykl. d. El.-Math. v. Weber u. Wellstein, Bd. II), 1905.
182. Whitehead, A., *A Treatise on Universal Algebra.* 1898. Vgl. Natorp *128.*
183. —, *On Cardinal Numbers. Am. Journ. of Math.* XXIV, 1902.
184. Wien, W., Über Elektronen. Vortr. 2. A. 1909.
185. Wohlwill, E., Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes. Zeitschr. f. Völkerpsychol. XIV. XV. 1883. 1884.
186. Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. I. 6. A. 1907.
187. Wundt, W., Die physikalischen Axiome. 1866.
188. —, Logik. Eine Untersuchung der Prinzipien der Erkenntnis u. der Methoden wissenschaftlicher Forschung. 3. A. I—III. 1906—1908.

Erstes Kapitel.

Das Problem einer Logik der exakten Wissenschaften.

§ 1. (*Mathematik und Logik.*) Das Problem einer logischen Grundlegung zur exakten Wissenschaft soll in diesem Kapitel nur erst als solches entwickelt und zur erreichbaren Bestimmtheit gebracht, es soll noch nichts, was zu seiner Lösung gehört, entscheidend aufgestellt werden. Einer solchen Vorbereitung bedarf es, weil schon die Aufgabe selbst, so wie sie hier verstanden wird, nicht allgemein als solche anerkannt ist.

Mathematik und jede exakte Wissenschaft, das will sagen, jede Wissenschaft, welche oder soweit sie an dem Charakter des Mathematischen teilhat, strebt, logisch zu verfahren, d. h. von keinen anderen als streng definierten Begriffen Gebrauch zu machen und das für sie Beweisbare zu beweisen. Aber nicht schon das macht sie zu einer der Logik unmittelbar zugehörigen Wissenschaft oder die Logik zu ihrem alleinigen Fundament. In diesem allgemeinen Sinne logisch verfahren möchte überhaupt jede Wissenschaft, wenn auch die Grade der erreichbaren logischen Strenge sehr verschieden sind; aber darum sind nicht alle Wissenschaften der Logik unmittelbar zugehörig oder ihrem wesentlichen Fundament nach logische. Das Unterscheidende liegt darin: ob die Grundbegriffe einer Wissenschaft selbst durch die Logik dargeboten, ob sie selbst zugleich Begriffe der Logik sind, und ob ihre ersten Grundsätze in den Gesetzen der Logik enthalten oder aus ihnen ableitbar, nicht bloß in irgendeinem losen, allgemeinen Sinne logisch, d. h. widerspruchsfrei und zusammenhängend sind. In dieser bestimmteren Bedeutung wird der logische Charakter behauptet von der Mathematik und allem, was in sonstigen Wissenschaften mathematisch ist, während er jedenfalls nicht in der gleichen strikten Bedeutung irgendeiner nicht mathematischen Wissenschaft zukommt.

Diese Auffassung von der wesentlich logischen Natur des Mathematischen vertrat unter den Alten Plato und die ihm gefolgt sind. Unter den Philosophen der neueren Zeit stehen Descartes und Leibniz ihr besonders nahe. Kant weicht von dieser Linie scheinbar ab, wenn er in der „reinen Anschauung“ einen nicht-logischen Faktor einführt, der an der Begründung der Mathematik beteiligt sei. Aber als „reine“ Anschauung nähert sie sich doch wieder sehr dem Logischen und faßt sich mit diesem in enger Einheit zusammen, ja sie scheint sich auf der Höhe des Kantischen Systems ganz wieder ins Logische aufzuheben, indem die „Synthesis“, die anfangs den unterscheidenden Charakter der „Anschauung“ bezeichnen sollte, gerade zur Urfunktion des Denkens wird. Die nachfolgende, von Kant ausgegangene Philosophie, auch die gegenwärtige, nichts weniger als „orthodoxe“ neukantische Richtung hat an dem Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken mehr und mehr Anstoß genommen und endlich entschlossen mit ihm gebrochen. Vielleicht schon etwas zu entschlossen; denn daß in Kants Begriff der Anschauung sich ein keinesfalls zu vernachlässigendes Problem barg, davon werden wir uns bald überzeugen. Aber vorerst war es durch das eigene Prinzip der Kantischen Transzendentalphilosophie gefordert, daß man, was bei Kant zum wenigsten mißverständlich in die zwei Faktoren: reine Anschauung und reines Denken zerlegt wird, in strenger Einheit wieder zusammennahm und als ein Einziges, für das man den Namen des „reinen Denkens" unbedenklich festhalten kann, zu verstehen suchte.

Unter den Mathematikern etwa seit Kants Zeit findet man denselben Zwiespalt der Ansichten: eine ältere, deutlich von Kant beeinflußte Richtung, die aber nur noch wenig Anhänger zu zählen scheint, hält an einem Sonderanteil der Anschauung neben dem reinen Denken bei der Begründung der Mathematik, wenn nicht der ganzen, dann doch der Geometrie, noch immer fest; gerade die vorwärts strebenden aber, an der Spitze Frege, Dedekind, Cantor und schon früher Graßmann, im Ausland, um nur die jüngsten und eifrigsten zu nennen, Russell und Couturat, verwerfen diesen Dualismus ganz und arbeiten mit Anstrengung daran, den Bau der Mathematik rein auf logischem Fundament zu errichten. Einig sind beide Parteien über den reinen Apriori-Charakter der Mathematik; die empiristische, psychologistische und nominalistische Ansicht, wie sie etwa Helmholtz und Kronecker in den Aufsätzen für Zeller (1887) noch vertraten, ist von jener Seite (hier verdient besonders Frege Beachtung) in wuchtiger Beweisführung zurückgewiesen worden. Mit der rein logischen Begründung ist der Apriori-Charakter ohne weiteres gegeben, denn das reine Denken selbst auf Erfahrung gründen wollen hieße über den Sinn der Frage nicht im klaren sein.

Auch das gegenwärtige Buch unternimmt eine rein logische Begründung und behauptet damit den Apriori-Charakter der Mathematik, aber in einem anderen Sinne als die Vorgenannten. Es lehnt sich an die letzten Voraussetzungen von Kants Erkenntniskritik an, ohne dessen Unterscheidung von reiner Anschauung und reinem Denken im gleichen Sinne festzuhalten. Diese einzige Abweichung bedingt aber überhaupt eine durchgreifende Änderung der Disposition der erkenntniskritischen Grundbegriffe. Um die Art, wie hiernach die logische Begründung der Mathematik verstanden wird, zur Deutlichkeit zu bringen, scheint es geeignet, ein Bedenken gleich hier in Erwägung zu ziehen, das sich der Behauptung des rein logischen Ursprungs und Charakters der Mathematik sofort entgegendrängen muß, und dessen Erörterung uns in die Tiefe des Problems wie mit einem Schritt hineinführen wird.

§ 2. (*Irrtum des Formalismus.*) Soll sich die Mathematik rein auf logischen Grundlagen aufbauen, ist zugleich ihr Verfahren durchaus und nur logisch: gibt es dann überhaupt noch eine Grenze oder irgendeinen sachlichen Unterschied zwischen Logik und Mathematik? Soll etwa Mathematik geradezu Logik, Logik Mathematik sein?

Eine extreme Richtung, durch Russell und Couturat hauptsächlich vertreten, zögert nicht, diese Frage fast ohne Einschränkung zu bejahen. „Reine" Mathematik wenigstens arbeitet ausschließlich mit den Mitteln und nach den Methoden des reinen Denkens; „angewandte" ist genau in dem, was sie von der reinen unterscheidet, nicht mehr Mathematik. Die genannten Forscher, wie auch schon Frege, möchten hierbei die Arithmetik sogar ausschließlich auf die alte, jedoch mannigfach erweiterte und berichtigte Formallogik stützen. Hilbert [*81*, S. 266] findet sehr mit Recht, daß diese jedenfalls einiges Arithmetische schon voraussetzt und man also mit dieser Begründung in einen Zirkel gerät. Aber es ist weit mehr zu sagen: Die alte formale Logik ist, in der Gestalt der symbolischen Logik oder Logistik, überhaupt in einen Zweig der Mathematik verwandelt, von welchem zu deren sonstigen Disziplinen sozusagen ein stetiger Übergang angenommen wird.[1]) Ist also die Mathematik nicht eine, sondern die Logik geworden, eine Logik ganz in der Art und dem allgemeinen Sinne

1) Bezeichnend dafür besonders Whitehead [*182*], worüber Bericht des Verfassers [*128*]; und Russell [*154*].

der alten formalen Logik, nur mit sehr viel weiterem Umfang? Und ist eben damit die Logik völlig zur Mathematik geworden, nicht zu einer, sondern zu der ganzen? — Couturat [*31*, S. 230], der vielleicht am weitesten nach dieser Seite geht, äußert sich darüber immerhin zögernd. Auf der einen Seite sieht er in der Mathematik einen Teil der Logik: sie sei ganz logisch der Form nach, aber beschreibe in ihrem Inhalt nur einen Teil des Umfangs der Logik; auf der anderen Seite will er die Logik rein rechnerisch gestalten, macht sie also unleugbar zu einem Zweig der Mathematik. Wäre es dann nicht folgerichtig, die Verschiedenheit von Logik und Mathematik überhaupt zu verneinen? Denn wenn zugleich A in B und B in A ganz enthalten ist, so sind nach einem bekannten Satze der rechnerischen Logik beide notwendig identisch.

Die entscheidende Voraussetzung, die zu dieser vielleicht nicht erwarteten noch gewollten Konsequenz trieb, war die: daß die Logik selbst eine deduzierende Wissenschaft sei. Da nämlich für diesen Standpunkt nicht bloß die Mathematik eine deduzierende Wissenschaft, sondern alle reine Deduktion Mathematik ist, so ist es in der Tat unentrinnbar, daß unter der genannten Voraussetzung die Logik ganz zur Mathematik und die Mathematik ganz zur Logik wird.

Hier liegt nun, wie wir meinen, der Fehler und der Grund des Fehlers offen zutage. Logik soll selbst eine deduktive Wissenschaft sein; nun aber gehört zur Aufgabe der Logik auf jeden Fall die Aufstellung der Gesetze des deduktiven Verfahrens und die Rechtfertigung der von ihm beanspruchten notwendigen und allgemeinen Geltung. Kann aber die Aufstellung und Rechtfertigung eines logischen Verfahrens durch dies Verfahren selbst geleistet werden? Das ist in sich widersinnig, da das Verfahren der Deduktion als aufgestellt und gerechtfertigt schon vorausgesetzt werden müßte, um die verlangte Aufstellung und

Rechtfertigung in gültiger Weise leisten zu können. Der Kreisgang der Begründung ist offenkundig; wenn also die Logik, als deduktive Wissenschaft von der Deduktion, den Kreisgang der Begründung etwa als logischen Verstoß ergeben sollte, so würde sie damit sich selbst das Urteil sprechen.

Die Unmöglichkeit der Sache wird nur ersichtlicher, wenn man weiter prüft, wie hierbei das Verfahren der Deduktion selbst vorgestellt wird. Man setzt an die Spitze Definitionen, die ausdrücklich nur Vereinbarungen über den Gebrauch gewisser Symbole, nicht Urteile, die notwendigerweise wahr oder falsch wären, bedeuten. Man formuliert dann Grundsätze in Hinsicht dieser Symbole, d. h. gibt Vorschriften über die Zulässigkeit gewisser mannigfach wechselnder Zusammenstellungen derselben; Vorschriften, die, schon weil sie nur die Zusammenstellung von Symbolen unerklärten Sinnes betreffen, ebenfalls nicht Urteile sein können, welche notwendig wahr oder falsch wären. Auch für diese Zusammenstellungen wird in der Tat kein weiterer Sinn angegeben oder vermißt; sie unterliegen einzig der Beschränkung, daß sie sich nicht selbst aufheben dürfen. Fortan rechnet man, d. h. stellt jene Symbole nach den gegebenen Vorschriften anders und anders zusammen. Ein Verständnis dieses ganzen Tuns wird in keiner Weise geboten, ist auch gar nicht erforderlich, vielleicht eher störend; die Rechnung verläuft genau so und bleibt ganz so zwingend, wenn man nichts dabei versteht, außer daß den Regeln gemäß verfahren wird. Man könnte sich die aufgestellten Grundbegriffe durch Rechenmarken ersetzt denken und könnte einen Automaten ersinnen, in den man die Marken nach der durch die Grundsätze bestimmten Ordnung oben hineinsteckte, und der dann das Resultat, nämlich dieselben Rechenmarken oder gewisse von diesen nur in einer anderen Ordnung, unten herausfallen ließe. So könnte man im buchstäblichen Sinne Schlüsse „ziehen“.

Sei dies nun Wissenschaft oder Spiel, belehrend oder bloß unterhaltend, oder beides oder keins von beiden, für uns genügt zu erklären, daß wir die Aufgabe der Logik so nicht verstehen. Nämlich uns kommt es in der Logik zuerst und zuletzt auf Sinn, auf Verstehen an, während wir frank und frei bekennen, bei jenem ganzen Tun nicht viel oder wenig, sondern nichts zu verstehen. Denn weder, daß das Verfahren den aufgestellten Regeln entspricht, noch daß das Ergebnis manchmal (nicht immer) mit etwas, das wir anderweitig zu verstehen glauben, zusammentrifft, gibt uns ein Verständnis des Sinns dieses ganzen Tuns. Soll es überhaupt einen haben?

§ 3. (*Grund des Irrtums. Synthetische und analytische Richtung des Denkens.*) Da jene Philosophen aber doch von einer sinnvollen, vielleicht sogar richtigen Absicht ausgegangen sein werden, so verlohnt es sich wohl, den Gründen ihres Fehlgehens nachzudenken. Der Hauptgrund dürfte zu erkennen sein in dem dogmatischen Festhalten an dem überlieferten Schema der klassischen, d. h. Aristotelischen Logik: man müsse definieren und beweisen; definieren bis zurück zu gewissen letzten, nicht mehr zu definierenden Begriffen, beweisen bis zurück zu letzten, nicht mehr zu beweisenden Sätzen. Wodurch sind denn diese uns gewiß? Hier findet schon Aristoteles sich in offenbarer Verlegenheit. Bald gelten ihm die letzten Begriffe und Sätze als durch sich selbst evident oder durch ein Vermögen reiner Vernunft gegeben, bald als durch allgemeinste Erfahrung im Gebrauch bewährt und dadurch hinreichend gesichert. Daneben findet sich, versteckt und wenig beachtet, an einer Stelle [1]) vielleicht eine Ahnung des Richtigen. Da aber jene beiden Begründungsweisen offenbar unbefriedigend sind und eine dritte nicht klar erkannt war, so meinte man

1) S. des Verfassers „Platos Ideenlehre" [*131*], S. 373.

endlich für die letzten Ausgangspunkte auf irgendwelche Art von Evidenz oder Beweis, auf irgendeine fernere Sicherung ihres Erkenntniswertes überhaupt verzichten zu müssen; man glaubte genug zu tun, wenn man die letzten Begriffe und Sätze, d. h. Symbole und Regeln für deren Zusammenstellung, nur einfach angab, sie aber so zu fassen bemüht war, daß sie nach einem womöglich unfehlbaren Mechanismus genau die Konsequenzen hervorgehen lassen, um deren willen sie aufgestellt wurden. Ausdrücklich sollen (nach Couturat, S. 39) die Grundbegriffe und Grundsätze als solche (d. h. undefinierbar und unbeweisbar) allein gelten allemal in bezug auf ein bestimmtes System von Definitionen und eine bestimmte Beweisfolge; nie schlechthin. Man kann, ja soll „vom formalen Standpunkt" die Grundbegriffe als reine Symbole ansehen, „deren Sinn unbestimmt und gleichgültig ist, und die bloß der Bedingung unterworfen sind, den Grundsätzen zu genügen", d. h. nur nach den in diesen ausgedrückten Vorschriften zusammengestellt werden zu dürfen. Eben das ist es, was wir nicht mitmachen können. Uns bedeutet „Logos" genau den Sinn des Ausgesagten. Symbole unbestimmten und gleichgültigen Sinnes, mögen sie sonst welchen Wert immer haben, sind für uns alles, was man sonst will, nur nichts Logisches.

Der Grund des Fehlers liegt, wie gesagt, in jenem Aristotelischen Vorurteil. Es führt, wenn man die Konsequenz behaupten und den Zirkel der Begründung vermeiden will, in der Tat unentrinnbar zum sinnleeren Formalismus. Jenes Vorurteil aber hing eng zusammen mit dem Grundirrtum des naiven Realismus: daß die Dinge auf dem Wege der Wahrnehmung, als einer Art Abspiegelung der Gegenstände in unserer Vorstellung, gegeben und die ganze Leistung der Erkenntnis nur analytische Verarbeitung dieses seinem wesentlichen Bestande nach voraus gegebenen dinglichen Inhalts sei. Für diese analytische Verarbeitung, die so zu einem Verfahren mit Dingen, vertreten durch ihre ebenso dinglichen Symbole, wurde, gab der Apparat der Aristotelischen Syllogistik und gibt die umfassendere und — keiner leugnet es — genauer arbeitende Maschinerie der modernen Logistik geeignete Mittel. Aber so wird bei allem eben nichts verstanden; dieser ganze Mechanismus könnte sich genau so abspielen ohne jedes Verständnis.

Nun hat die analytische Funktion des Denkens, um die alle jene Logiker ausschließlich bemüht scheinen, allerdings ihr gutes logisches Recht und ihre sachliche Bedeutung. Allein wir halten an der Überzeugung fest, der Kant den fast sinnfälligen Ausdruck gegeben hat: „Wo der Verstand zuvor nichts verbunden hat, da kann er auch nichts auflösen.“ Also, folgert er, sei vielmehr Synthesis für das logische Verständnis des Erkennens notwendig das Erste, die Analysis von Bedeutung nur als deren reine Umkehrung. Die voraus gegebenen Dinge, soweit von solchen zu reden überhaupt Sinn hat, sind vielmehr voraus vollzogene, aber entfernt nicht immer rein und daher nicht immer richtig vollzogene Synthesen eines primitiven Verstandes. Zu deren Prüfung und Berichtigung sind die Regeln der Analysis brauchbar; ihr ursprünglicher Aufbau unterliegt den eigenen Gesetzen der Synthesis, die auch denen der Analysis schon zugrunde liegen und überhaupt nur logischen Sinn geben. Daraus begreift sich, daß sich auf dem Wege der Analysis zu richtigen Resultaten allerdings gelangen läßt. Dagegen muß jeder Versuch, die letzteren aus sich zu verstehen und zu rechtfertigen, ebenso gewiß mißlingen, und das verleitet dann zu der seltsamen Annahme eines mechanischen Verfahrens, wobei es auf Verständnis oder Rechtfertigung überhaupt nicht ankomme; eine Annahme, auf die ohne bittere Not gewiß kein Logiker oder Mathematiker verfallen wäre.

Es mußte mißlingen, die Analysis durch die Analysis selbst zu rechtfertigen. Dagegen ist die Absicht nicht widersinnig, die Synthesis zum Verständnis zu bringen und sicherzustellen auf dem Wege der Synthesis selbst. Man muß den Weg der Erkenntnis von vorn an gehen, so erkennt man ihn zugleich; während man mit der Analysis am Ende zu beginnen versucht, das doch für das Verständnis nichts ist, wenn nicht der ganze Gang vom Anfang bis zu dem gedachten Ende, d. h. aber, der Gang der Synthesis zuvor beschrieben worden ist.

Gleichwohl bleibt es in einem Sinne richtig, daß man in der Logik nicht sofort am Anfang der Erkenntnis steht, sondern eben, um über den gesetzmäßigen Gang der Synthesis selbst zur Klarheit zu kommen, auf diesen Anfang erst durch Analysis zurückzugehen hat. „Im Anfang war die Tat“: das gilt auch von der Tat der Erkenntnis, welche Wissenschaft heißt. Gesetzmäßiges, synthetisches Denken muß längst am Werk und zu förderlichen Ergebnissen in gewissem Umfang schon gelangt sein, bevor auch nur die Frage auftreten kann nach den Gesetzen dieses synthetischen Denkens, wodurch Wissenschaft überhaupt möglich ward. Nur an dem schon vorliegenden „Faktum“ der Wissenschaft kann Logik die Gesetze des Wissenschaffens selbst aufweisen, denn nur an ihm kann sie die Gesetze, von denen sie spricht, in ihrer Wirksamkeit beobachten und ihre Realität, d. h. ihre Leistungskraft, einen Sachsinn zu begründen, gleichsam auf der Tat betreffen. Hierbei tut die Analyse guten Dienst und heißen wir alle ihre Hilfsmittel, so abstrus sie scheinen mögen, willkommen; aber zu keinem anderen Zweck als: die zugrunde liegenden Synthesen aufzudecken. Denn das Denken schafft zwar (in den Wissenschaften) nach sicheren Gesetzen der Synthesis, aber in weitem Umfang ohne dieser Gesetze sich zugleich bewußt zu sein. Sein Interesse sind unmittelbar nicht sie, sondern das, was an Erkenntnisgehalt durch ihre Kraft zutage gefördert wird. Es ist je auf seinen besonderen Gegenstand gerichtet; es ist ein ganz neues Stadium der Reflexion, nicht nach dem jedesmaligen Gegenstand, sondern nach den Gesetzen zu fragen, wonach dieser und überhaupt irgendein Gegenstand der Wissenschaft sich zum Gegenstand erst gestaltet. Diese neue Art der Reflexion ist es, die wir Logik nennen. So ist keine Gefahr mehr, daß die Logik mit der je auf ihren Gegenstand direkt gerichteten Wissenschaft (z. B. Mathematik) etwa ganz in eins zusammenfließt, trotzdem alle Arbeit der Wissenschaft, und zwar aller Wissenschaft, logisch, d. h. durch die Gesetze der Logik und keine anderen zuletzt bestimmt ist.

Doch diese Beschreibung der Aufgabe der Logik der Wissenschaft und ihres Verhältnisses zur Wissenschaft selbst, insbesondere der Mathematik, ist noch bei weitem nicht radikal genug. Wir bedienten uns dabei der Entgegensetzung von Synthesis und Analysis, wie sie im philosophischen Sprachgebrauch allerdings geläufig ist, und wie sie in fast sinnfälliger Weise von Kant beschrieben wird. Aber diese Entgegensetzung bedarf selbst noch der weiteren Aufhellung. Das zu lösende Problem ist damit in seiner ganzen Schwere kaum erst angedeutet, keineswegs schon endgültig formuliert, geschweige aufgelöst.

§ 4. (*Genetische Ansicht der Erkenntnis. Faktum und Rechtsgrund. Der Prozeß; die Methode; der Logos selbst.*) Also was ist Synthesis? Zunächst nur ein Ausdruck der Abwehr einer bloß analytischen Begründung der Erkenntnis. Der Fehler der Analysis ist, daß sie die Erkenntnis bestenfalls in Tautologie verwandelt. Also scheint Synthesis vielmehr Heterologie bedeuten zu müssen: Nicht „*A* ist *A*“, sondern „*A* ist *B*“. Das Verschiedene gerade müsse identisch gesetzt werden können, das Identische different, sonst sei kein Fortschreiten möglich; Erkenntnis aber sei Fortschritt, nicht Stillstand oder gar Rückgang; sofern beides Sinn habe, dürfe es nur etwas bedeuten wollen in Zurückbeziehung auf die Kontinuität des Fortgangs und diene nur, diesen zum deutlichen Bewußtsein seiner selbst und zur Versicherung seiner Gesetze zu bringen. Hier liegt in der Tat der Kern des Problems: an die Stelle der ontischen muß die genetische Ansicht der Erkenntnis treten.[1]) Das ist der geklärte Sinn der Behauptung ihrer synthetischen, nicht ursprünglich analytischen Begründung. Aber auch dieser genetische Sinn des Erkennens bedarf wiederum der Erklärung.

Das Faktum sei vorauszusetzen, nach dem Rechtsgrund zu fragen; das war der für die Problemstellung seiner „transzendentalen" Logik leitende Gedanke Kants. Aber das gibt zu Zweifeln Anlaß. Was ist das Faktum der Wissenschaft? Soll sie fertig, soll ihr Werk bis zu einem bestimmten Punkte „getan", wohl gar abgeschlossen sein? Als Wissenschaft könnte sie fertig doch nur sein, wenn ihre Sätze bewiesen, also von jedem, der überhaupt die Fähigkeit dazu hat, als richtig anzuerkennen sind. Wieso bedürfte sie dann noch einer ferneren, nicht in ihr selbst liegenden, von außen erst hinzukommenden Rechenschaft? Das leuchtet nicht ein.

Nahe verwandt und vielleicht durchsichtiger ist die Meinung Platos vom Verhältnis der Logik zur Wissenschaft. Nach ihm geht die direkt auf den Gegenstand gerichtete, z. B. mathematische Wissenschaft von gewissen Voraussetzungen (Hypothesen) aus, die sie, ohne selbst weiter von ihnen Rechenschaft zu geben, gleichsam versuchsweise zugrunde legt. Von diesen geht sie in sicherem Verfahren abwärts zu den Folgerungen und beweist also ihre Sätze, in dem bestimmten, aber auch nur in dem Sinne, daß sie den ursprünglichen Voraussetzungen entsprechen und somit richtig sind, sofern die Voraussetzungen es sind. Die Rechenschaft von den Voraussetzungen selbst fällt einer anderen, fundamentaleren Wissenschaft zu; sie heißt bei Plato Dialektik; aus ihr ist die Logik erwachsen.

1) Vgl. zu den folgenden Ausführungen des Verfassers Schrift: Platos Ideenlehre [*131*], S. 366ff.

Nach dieser Vorstellung wird das sichere Fußen auf dem Faktum der Wissenschaft nach einer Seite verständlich. Faktisch gesichert, keinem Zweifel ferner unterworfen ist, daß unter den und den Voraussetzungen die und die Folgerungen gelten müssen. So bleibt die Wissenschaft in ihrem Bereiche autonom. Aber zugleich bleibt dieser Bereich streng begrenzt. Die Gültigkeit ihrer letzten Voraussetzungen steht innerhalb der direkt auf den Gegenstand gerichteten Wissenschaft überhaupt nicht zur Frage. Alle ihre Sätze sind nur konditional gemeint. So versteht es sich, daß die Begründung der letzten Voraussetzungen selbst als eigentümliche Aufgabe für eine andere Wissenschaft, für eine Wissenschaft überhaupt anderer Art oder Stufe übrig bleibt.

Allein so bezögen sich die Behauptung des Faktums und die Forderung der Rechenschaft genau genommen nicht auf dasselbe. So ist das Verhältnis bei Kant nicht gedacht, sondern es soll dasselbe sein, was durch die Wissenschaft als Faktum gegeben, unter dem höheren Gesichtspunkt der Philosophie aber (hier der Logik) Problem sei: „Erfahrung" als Wissenschaft ist das Faktum, nach dessen „Möglichkeit" in der transzendentalen Logik gefragt wird.

Daß diese Auffassung den Kern der Sache wirklich trifft, wird klar durch eine Erwägung, die auf der Höhe seiner Philosophie auch Plato erreicht, die ihre volle Bedeutung aber erst in der modernen Neugestaltung der exakten Wissenschaften entfaltet hat, und die gerade entscheidend wurde für Kants Umwandlung der alten Logik in die transzendentale.

Es war Platos tiefste Entdeckung: daß die Erkenntnis der Wissenschaft in einem unendlichen Prozeß der „Begrenzung des Unbegrenzten" bestehe; daß es in ihr also keine absoluten Anfangs- noch Endpunkte gebe, sondern (wie im „Parmenides" einmal ganz scharf bestimmt wird) diesseits jedes (relativen) Anfangs ein früherer Anfang, jenseits jedes (relativen) Abschlusses ein fernerer Abschluß, und auch innerhalb jedes Zentrums, in dem der Gedanke sich feststellen möchte, ein wiederum zentraleres zu suchen und sicher auch zu finden sei. So kann von keinem „Faktum" mehr im Sinne fertigen Wissens die Rede sein; jede Erkenntnis vielmehr, die eine Lücke des bisherigen Wissens schließt, wird neue, größere Probleme hervortreiben; ja es wird, nach dem Gleichnis Spencers, wie bei einer Kugel, deren Radius ins Unendliche wächst, mit dem Umfang des gewonnenen Wissens (dargestellt durch das Wachstum des Inhalts) zugleich der Umfang der weiter zu lösenden Fragen (dargestellt durch die Grenze gegen den umgebenden Raum, also die Oberfläche der Kugel) sich vergrößern. „Verstehen" heißt fortan nicht: mit dem Gedanken zum Stillstand kommen, sondern im Gegenteil: jeden scheinbaren Stillstand wieder in Bewegung aufheben. „Da steht mir der Verstand still," sagt die populäre Sprache, um auszudrücken, daß man nichts mehr versteht; sogar sie hat also ein Bewußtsein davon, daß Verstand Bewegung, Stillstand Nichtverstehen bedeutet. Der Fortgang, die Methode ist alles; im lateinischen Wort: der Prozeß.[1]) Also darf das „Faktum" der Wissenschaft nur als „Fieri" verstanden werden. Auf das, was getan wird, nicht was getan ist, kommt es an. Das Fieri allein ist das Faktum: alles Sein, das die Wissenschaft „festzustellen" sucht, muß sich in den Strom des Werdens wieder lösen. Von diesem Werden aber, zuletzt nur von ihm, darf gesagt werden: es ist.

Gerade dadurch nun wird jenes Argumentieren aus Voraus-

---

1) Daß der Prozeßcharakter des Erkennens der echte Sinn der „Synthesis a priori" sei: darin möchte das eigentliche Motiv der Ansicht von Poincaré zu erkennen sein, wenn dieser besonders im „rekurrierenden Verfahren" den Ausdruck des synthetischen Apriori sieht. Wiss. u. Hyp., S. 13ff. (Darum versagt sowohl die analytische wie die empirische Begründung vor dem Unendlichen.)

setzungen, in welchem Plato den stets bedingten Charakter der direkt auf den Gegenstand gerichteten Wissenschaft präzisiert, von einer neuen Seite und in einem sehr vertieften Sinne verständlich. Nicht um beliebige, um irgend willkürliche Voraussetzungen kann es sich handeln, sondern nur um genau die Voraussetzungen, welche erforderlich sind, um das X — den nicht bestimmten, aber zu bestimmenden Gegenstand — der Erfahrung in einem unendlichen Prozeß, also nie in schlechthin abschließender Weise, Schritt um Schritt zur Bestimmung zu bringen. Um im Unendlichen dieser Aufgabe: der Gegenstandsbestimmung in der Erfahrung, überhaupt irgendwie Fuß zu fassen, um zu irgendeiner Begrenzung dieses Unbegrenzten zu gelangen, „setzt" man notwendig irgendetwas zum einstweiligen Anfang und geht von da weiter, so weit als eben von diesem Anfang an sich sicher gehen läßt, stets aber mit dem Vorbehalt, hinter diesen Anfang zurückzugehen, sobald Anlaß und Möglichkeit dazu sich bietet; eben damit aber auch über jeden scheinbaren Abschluß, bei dem das Denken sonst zum Stillstand kommen würde, wieder hinauszudringen. Denn jeder radikalere Anfang führt auch zu weiteren und tieferen Entwicklungen. So mag es innerhalb der Wissenschaften einen Rückgang ins Unendliche von Voraussetzungen zu stets fundamentaleren Voraussetzungen immer gleich bedingter Geltung geben, und bleibt doch und gerade nun jene von Plato geforderte Erhöhung des Standpunktes der Betrachtung über diesen ganzen Gang vom Bedingten zum Bedingenden, vom bloß voraussetzlich Geltenden zu immer fundamentaleren Voraussetzungen gefordert, damit man schließlich zum nicht mehr bloß voraussetzlich Gültigen, zum Platonischen „Anhypotheton" gelange. Was anderes könnte dies sein, als das Gesetz dieses ganzen Prozesses, das Gesetz, welches die Richtung dieses ganzen Ganges der Erkenntnis ins Unendliche vorausbestimmt, in Platos Sprache das Gesetz des „Logos" selbst, das Urgesetz „des Logischen", oder das

Gesetz des reinen Denkens? Es ist identisch mit dem Gesetze der Methode, welche Plato durch das Beiwort der dialektischen in der Tat deutlich genug als Prozeß kennzeichnet. Denn die Dialektik Platos ist nur die in der Tiefe erfaßte sokratische Kunst der Unterredung, d. h. der Entwicklung eines Gedankens von der Frage nicht zur abschließenden Antwort, sondern zu nur immer radikaleren Fragen; die Eröffnung des Weges des Fragens, zu unbegrenzter Vertiefung des Problems. So wird es verständlich, inwiefern dasselbe, was für die Wissenschaft sicheres Faktum ist — nämlich nicht die einzelne Position, sondern das Ganze ihres Ganges — unter der höheren Betrachtung der Logik Problem wird, ohne übrigens damit von der Sicherheit, die im inneren Bereiche der Wissenschaft ihm zukam, irgendetwas einzubüßen.

§ 5. (*Der Gegenstand als unendliche Aufgabe. Der Zusammenhang.*) Gegen diese ganze „genetische" Ansicht der Erkenntnis hat freilich der Dogmatismus auch in seinen durchdachtesten Formen sich allzeit gesträubt. Aristoteles spricht es in aller Unbefangenheit oftmals aus: solle etwas uns begründet sein, so dürfe die Begründung nicht ins Unendliche gehen; also müsse irgendein Letztes sein, für das eine Begründung nicht weiter zu fordern sei. — Ganz recht: wir können, mit endlichen Kräften des Verstehens, nur einen endlichen Weg vollendet haben. Aber folgt daraus, daß der Weg selbst notwendigerweise endlich ist? Übrigens trifft auch das nicht zu, daß der Weg des Erkennens, wenn unendlich, damit unserer Erkenntnis, als endlicher, in jedem Sinne verschlossen bleiben müßte. Sondern es kann geben und gibt wirklich eine Art der Erkenntnis des Gesetzes des unendlichen Prozesses der Erkenntnis, der Unendlichkeit ihrer Aufgabe selbst und der ins Unendliche einen und identischen Bahn ihres Fortgangs. Nur daß diese unendliche Aufgabe je abschließend gelöst, daß die unendliche Bahn je durchmessen wäre, ist und bleibt ausgeschlossen.

Nun sitzt dieser, in Aristoteles sich so naiv aussprechende Absolutismus freilich dem Menschen überhaupt tief im Blut. Erkennen möchte man doch das, was „ist". Dies Sein wandelt die genetische Ansicht der Erkenntnis in ewiges Werden. Aber das Werden, meint man, sei bloß subjektiv: uns wird es, an sich aber ist es. — Wäre es immerhin so, so hülfe dies Ansichsein eben uns, unserer Erkenntnis nichts; wir hätten es nicht, könnten es nie haben, es bliebe das ewig Gesuchte. Also gälte für uns nach wie vor nur der Fortgang ins Unendliche. Doch braucht man sich auf diese subjektivistische oder doch subjektivistisch scheinende Ansicht überhaupt nicht zurückdrängen zu lassen. Vielmehr das Werden — ist, der Gang — besteht, die Entwicklung ins Unendliche findet statt, so objektiv wie nichts anderes. Subjektiv, bloß für uns gültig, sind im Gegenteil alle willkürlichen Abschlüsse, die uns Stillstand vortäuschen, wo in der Wahrheit der Sache ewiger Fortgang ist. Mathematik ist gewiß eine so objektive, von jeder Willkür bloß subjektiver Voraussetzungen freie Wissenschaft wie irgendeine; ihr Objekt ist, nach Plato, das Immerseiende. Und doch entwickelt sie — vielmehr es entwickelt sich — ohne Ende weiter dies ihr immerseiendes Objekt. Das Unendliche selbst, in Gestalt des Überendlichen, ist für sie, und das „Unendlich hoch Unendlich" und der ganze, selbst unendliche Fortgang durch die Reihe der Unendlichen. Das alles besteht kraft der sicher gegründeten Begriffe der Mathematik, die eben nur Begriffe von den reinen Methoden, von dem gesetzmäßigen Gange des Denkens selbst sind und diesen Gang zur höchsten erreichbaren Klarheit bringen wollen. Dieser Gang ist kein Zeitgang, also gewiß kein psychologischer oder bloß historischer. Zeit ist selbst nur einer seiner Ausdrücke, und nicht der fundamentalste. Sondern in dem Sinne wie das Eins zugrunde liegt und das Zwei daraus hervorgeht; wie das Unendliche durch die Reihe der Endlichen aufwärts und dann der Überendlichen sich entwickelt, so ist die Entwicklung, der Prozeß oder Gang des reinen Denkens überhaupt zu verstehen. Man kann sich leicht überzeugen: das Eins vermag so wenig auf sich zu stehen wie das Zwei und Drei und Unendlich. Es ist der Anfang; aber es wäre nicht Anfang, wenn nicht auch das wäre, das von ihm anfängt: die Reihe; so wie das Endliche in seinem Begriff selbst, als Ende-setzen, schon hinüberweist auf das, worin es Enden setzt: das Unendliche. Aber darum gibt es doch dies Vorausgehen und Folgen, gibt es die Notwendigkeit dieser Anfangs- und Folgesetzung. Es kann eben die Reihe nur im Fortgang vom Früheren zum Späteren, das Unendliche nur als Entwicklung durch (allemal vergleichsweise) endliche Stufen gedacht werden, nicht nur individual-psychologisch für den einzelnen Erkennenden, oder historisch, d. h. gruppenpsychologisch, für die Kette der Geschlechter, durch die hindurch die menschliche Wissenschaft sich fortschreitend höher hinauf entwickelt; sondern an sich im logischen Bestande der Wissenschaft, und wenn man sie sich vollendet denken dürfte, besteht dieser Fortgang, und bleibt es also immer richtig, daß geradezu der Gegenstand nicht ist, sondern wird.

So kann also von keinem „gegebenen" Gegenstande mehr die Rede sein; also auch nicht von Erkenntnis als bloßer Analyse dieses Gegebenen. Gerade der Gegenstand vielmehr ist Aufgabe, ist Problem ins Unendliche. Und also ist Erkenntnis, als auf den Gegenstand gerichtet, notwendig Synthesis in Kants Sinne, d. h. Erweiterung, beständiger Fortgang. Die Behauptung, daß die Erkenntnis der Wissenschaft, zuerst also die mathematische, in bloßer Analyse bestehe, würde nicht nur das Absurde bedeuten, daß man in der Mathematik nie etwas zulernte, sondern ins Unendliche sich nur deutlicher auseinanderlegte, was man zuvor schon gewußt hat; dieser Einwand könnte etwa bloß psychologisch oder historisch scheinen; sondern es würde bedeuten, daß Mathematik, und so jede Wissenschaft, in einer geschlossenen Summe fertiger Wahrheiten bestände, die eines Tages bis zu Ende erkannt sein könnten. Natürlich hat man das nicht sagen wollen; man hatte sicherlich Erweiterung, auch unendliche Erweiterung im Sinne (so sehr deutlich Frege). Man meinte nur, auch die Analyse könne erweiternd sein (so Couturat). Aber das ist dann nur eine unnötige, sachlich nicht begründete Änderung der logischen Sprache. Jedenfalls ist das nicht die Analyse, von der Kant spricht und gegen die er seine Synthesis stellt. Es ist weder der Sinn der Analytik des Aristoteles, die durchaus eine in sich abschließbare, in begrenztem Beweisgang erschöpfbare Erkenntnis voraussetzt, noch ist es der Sinn der Wolffianer, gegen die zunächst Kant die Forderung der synthetischen Erkenntnis aufrichtete; man lese etwa die ausgezeichnet klare Abhandlung, mit der M. Mendelssohn 1763 in Wettbewerb mit Kant trat und nach dem Urteil der Preisrichter (nicht nach dem der Geschichte) ihn schlug. Danach ist die Wirkung der Analyse nach dem Satze des Widerspruchs analog der einer vergrößernden Linse, welche die Teile des gesehenen Objekts nur weiter auseinanderrücke, aber durchaus nichts Neues an ihm hervorbringe. Man sieht: der Gegenstand soll gegeben sein, Erkenntnis nichts weiter leisten, als dies Gegebene „deutlich zu machen“. Das ist die ganze Leistung des analytischen Denkprozesses im Grunde auch nach Aristoteles. Wer das Denken für erweiternd hält, erweiternd wohl gar ins Unendliche, der hat vielmehr im Sinne, was Kant Synthesis, nicht was er Analysis nennt.

Analytische Erkenntnis ist nach Kant die, welche allein auf dem „Satze des Widerspruchs“ beruht. Der Widerspruch kann aber unmöglich ein Prinzip der Fortschreitung sein, sondern allenfalls nur ein Prinzip der Auslese, wodurch sinnwidrig versuchte Fortschreitungen ausgeschaltet werden. Dessen bedürfte es gar nicht, wenn die Fortschreitung streng ihrem Gesetz gemäß geschähe. Der Widerspruch schafft also nichts, erhält auch nicht das Geschaffene. Auch vernichtet er nicht logisch Geschaffenes, sondern entlarvt nur den falschen Schein einer logischen Schöpfung, wo wirklich keine vollbracht ist; einen Schein, der beim logischen Schaffen als unlogisches Tun vielfach nebenher geht und sich miteinschleicht. Der Satz des Widerspruchs ist also wirklich, wie Kant es aufgestellt hat, allenfalls ein Prinzip der Verdeutlichung, nicht aber der Erweiterung der Erkenntnis. Sein ganzer Sinn und Gehalt steht überhaupt nicht auf sich selbst, sondern ruht zuletzt auf dem Gesetze der ursprünglichen Synthesis, dessen Fundamentalausdruck eher die Identität sein möchte. Zwar haftet auch an dieser der Schein der Tautologie; aber nur so lange als man versteht: das dem bereits gesetzten A hinterdrein kommende B werde erkannt als — nichts Neues, sondern wieder dasselbe. Aber die identisch gesetzten A und B (oder wenn man lieber will, A_1 und A_2) sind dabei doch zugleich als für das Denken irgendwie verschieden vorausgesetzt. Die Identität muß ja erst erkannt werden; als Identität des Verschiedenen aber ist sie ohne Zweifel „Einheit des Mannigfaltigen", also synthetische Einheit. So hat Kant die „Rekognition" (desselben als desselben, also eben die Identitätssetzung) geradezu als die fundamentalste Funktion der Synthesis aufgestellt. Dieser kantische Akt der „Wiedererkenntnis" erinnert merkwürdig an Platos Anamnesis. An beiden hängt der Schein, als ob das Wiederzuerkennende im Grunde schon voraus habe gekannt sein müssen (warum also nicht auch erkannt?), während beide doch gerade die ursprüngliche Anerkenntnis zum Ausdruck bringen wollen, vor der das Gesetzte überhaupt nicht „ist". Bei Kant aber spricht doch eben dies sich darin aus, daß er die Rekognition als den Urakt der Synthesis erklärt, die selbst der Urakt der Erkenntnis ist und den Gegenstand erst schafft. In der Tat: gerade die logische Identität wird im Denken erstmals gesetzt, für es erst geschaffen, da sie ja Identität des zugleich zu Unterscheidenden, und gerade der Verschiedenheit gegenüber und entgegen im Denken, als Denken aufzurichten und zu behaupten ist.

Ebenso aber ist die Verschiedenheit dem Denken nicht voraus gegeben, sondern gleichfalls, und zwar in strenger Korrelation zur Identität, als Denkinhalt, als Denken erst zu setzen; denn Denken heißt ebensowohl Unterscheiden wie Identifizieren. Als eine Verschiedenheit bestimmten Sinnes ist sie ja auch selbst wiederum Identität; es ist eins und dasselbe, in Hinsicht dessen *B* und *A* sich gegeneinander unterscheiden, auf das sie eben damit gleicherweise, also identisch bezogen sein oder vielmehr in Bezug treten müssen, um sich zu unterscheiden. Der Grund der Verschiedenheit, der Differenzierung, des Gegeneinander, das zugleich Füreinander ist, muß in dem zugrunde liegenden Einen, Selbigen, erkannt werden; so in der Einheit des Denkweges der Grund der Verschiedenheit und zugleich strengen Korrelativität der analytischen und synthetischen Richtung dieses Weges; der Entgegensetzung und Zusammengehörigkeit von Bejahung und Verneinung, also der Identität und Verschiedenheit überhaupt. Das Ursprüngliche ist somit nicht Bejahung noch Verneinung, nicht Identität noch Verschiedenheit (geschweige Widerspruch), nicht Synthesis noch Analysis, sondern Zusammenhang; nicht durch hinterherkommendes Sichvertragen und Vereinbaren, sondern durch wurzelhafte, durch Ursprungseinheit. Das lag in Kants Synthesis allerdings zugrunde; die Synthesis sollte den Ursprung der Erkenntnis bedeuten; aber zum wenigsten ist „Synthesis“ dafür nicht der bezeichnendste Ausdruck, schon weil er auf den Gegensatz der Analysis hinweist, welcher Gegensatz dann wieder nicht das Letzte sein könnte, sondern selbst auf eine ursprünglichere Einheit zurückwiese, aus der er erst hervorginge. Übrigens verdient beachtet zu werden, daß Kant von seiner vielgestaltigen Synthesis als das Ursprünglichere und überhaupt Ursprüngliche die „synthetische Einheit" (Einheit der Synthesis, das heißt was ihr Einheit gibt) unterscheidet, die als „Funktion", als „Handlung" ihm also erst das Letztbestimmende, Schöpferische des Denkens eigentlich darstellt. Damit kommt er der Fassung des fundamentalen Prinzips des Logischen bereits ganz nahe, für die H. Cohen den Ausdruck des „Ursprungs" geprägt hat.

§ 6. (*Das Prinzip des Ursprungs.*) Nahe genug liegt es ja nun, diese Ursprungseinheit also überhaupt an die Spitze zu stellen, sie dem ganzen Aufbau der Logik zugrunde zu legen. Was anderes könnte man in der Tat der Erkenntnis zugrunde, oder, wie Kant vorzieht zu sagen: „zum Grunde" legen als — den Grund selbst, im vertieften Sinne des Ursprungs?

Gewiß, man muß ihn zum Grunde legen, sofern es eben der Grund ist. Nur diesen Grund, wir haben ihn nicht voraus in irgendwie fertiger Gestalt, es gilt vielmehr ihn erst zu entdecken, das heißt gerade im ernsten Sinne ihn zum Grunde erst zu legen, als Grund erst zu setzen. Die Logik kann nach ihm, eben sofern es der Ursprung alles Logischen sein soll, nur zurückfragen. Also kann und muß man ihn gewiß an den Anfang der Logik stellen, aber nur im Sinne der Frage, der universalen Aufgabe der Logik, nicht als hätte man an ihm voraus ein lösendes Prinzip. Die logische Frage ist die Frage des Ursprungs; aber aus diesem Quell wie mit untergehaltenem Becher (da er doch ewig fließe) schöpfen können wir nicht. Denn, stets inmitten nicht des Faktum, sondern des Fieri der Erkenntnis, stehen wir eben nicht beim Ursprung, sondern haben erst den Weg zu ihm hinauf zu erfragen. Nur daß, da dieser starke Strom der Erkenntnis fließt, auch ein Quell sein müsse, aus dem er fließt, und zu diesem Quell auch hinaufzusteigen möglich sein müsse, das darf man getrost an den Anfang stellen.

Doch dürfen wir uns selbst hierbei noch nicht beruhigen. Das Gleichnis des Quells weist schon auf die Schwierigkeit: mit welchem Recht fordert man einen Quell? Zieht nicht ein Strom seine Wässer aus tausend Quellen, aus einem Quellgebiet, sehr viel weiter als welches er selbst einnimmt? Welche Verwirrungen hat nicht in der Philosophie die Suche nach „dem" Prinzip geschaffen, welches, der Zahl nach eines, das All der Dinge oder wenigstens der Erkenntnis aus sich sollte hervorfließen lassen! Solch Metaphysiker verfährt im Grunde nicht klüger als jener Knabe, der mit der Hand die Donauquelle zuhielt und dachte: nun wird die ganze Donau austrocknen. So dürfen wir also den Ursprung nicht verstehen, als eine einzige Stelle, wo das All gleichsam seinen Mund öffne, um sein Geheimnis uns zu verraten. Gerade die Forderung der Einzahl des Prinzips würde den Ursprung zum bloßen Anfang verflachen. Und seine Annahme bliebe gerade dann willkürlich. Denn anfangen läßt sich, wo man nur will; kraft des ursprünglichen Zusammenhanges aller schöpferischen Faktoren des Denkens würde man gleich zwingend von jedem richtig getroffenen Punkte zu den anderen kontinuierlich übergehen können. Aber eben deshalb ist der eine so wenig wie der andere Anfang der alleinige und ganze Ursprung. Die Einheit des Erkenntnisgrundes kann nicht den dürftigen Sinn einer logischen Eins haben, von der aus und mit der dann weiter zu zählen wäre; sondern diese Einheit kann nur die jenes allbefassenden Zusammenhanges sein, durch die jedes herausgehobene einzelne Element des Denkens die anderen alle zwingend herbeiführt und scheinbar aus sich heraus setzt. Dann aber ist um so klarer, daß man mit dieser Einheit nicht, als ob sie gegeben sei, beginnen kann; sondern beginnen läßt sich mit ihr nur in dem Sinne, daß das Ganze der logischen Aufgabe damit voraus bezeichnet sei. Das ist immerhin nicht wenig, denn die Aufgabenstellung bleibt leitend für den ganzen Aufbau des logischen Systems. Aber der

Gedanke, die Forderung des Systems, die Frage nach ihm ist selbst nicht das System, auch nicht sein erstes Glied, sondern liegt ganz ihm voraus; sie gehört also nicht eigentlich selbst schon ins System.

Selbst die bestimmtere Bezeichnung dieser Aufgabe hat nicht geringe Schwierigkeit. Es zeigt sich beinahe unmöglich, von der Aufgabe Bestimmtes zu sagen, ohne daß man, nicht nur etwas von dem, sondern im Grunde alles vorwegnimmt, was die Logik als Ganzes erst zu entwickeln hat. So wird im Wort „System" der „Zusammenstand" der Faktoren geradezu schon als perfekt hingestellt, und doch ist gerade dies erst die letzte, ja überhaupt nicht abschließend lösbare, weil unendliche Aufgabe. Als solche sollte es eher „Systase" heißen: daß nichts isoliert bleiben, alles mit allem sich in Einheit und Zusammenhang fügen, zu ihr (eben in der Erkenntnis) „zusammentreten", daß ein durchgängiger Wechselbezug sich im Rückgang zum gemeinsamen Ursprung erst knüpfen müsse. Gerade dann aber müßte man offenbar wiederum, sobald der Sinn dieser Forderung des Zusammenhanges näher bestimmt werden soll, sozusagen alles das, was die Logik erst zu entwickeln hat, voraus- und zusammennehmen; so wie wir soeben zur Forderung des Ursprungs erst gelangten von der Identität und Verschiedenheit aus. Denkt man sich die Totalität der Aufgabe oder der Bahn der Gedankenbewegung, so setzt man als mindestes jene Doppelrichtung des Erkenntnisweges voraus, die man von jeher durch den Gegensatz der Richtungen zur Peripherie und zum Zentrum versinnlicht hat; die Richtung der Vereinheitlichung und der Vermannigfaltigung, der Synthese und der Analyse, damit zugleich das Gegenverhältnis von Erkenntnis und Gegenstand, des A und X der Gleichung der Erkenntnis. Darin liegen zunächst die Verhältnisse verborgen, und kaum verborgen, die Kant unter dem Titel der „Modalität" zusammenfaßt; es würde sich aber leicht zeigen lassen, daß darin zugleich die „Relation", und in dieser wieder die Bestimmtheiten der „Quantität“ und „Qualität“ vorausgesetzt sind; kurz es ist, so scheint es, alles Logische in den so gedachten Ursprung schon hineinversteckt und nur darum hinterher wieder herauszuholen.

In Cohens Bemühen, der Logik den sicheren Ausgangspunkt im Begriff oder vielmehr Urteil des Ursprungs zu geben, versteckt sich nicht etwa diese Schwierigkeit, sondern tritt sie in lehrreicher Offenheit zutage. Von Nichts müßte man ausgehen, weil eben nichts, bevor es im Denken erzeugt ist, vorausgesetzt werden darf. Aber aus Nichts käme auch nichts. Also muß dies „sogenannte“ Nichts doch ein Etwas sein; das Ursprungs-Etwas wird es genannt. Aber damit scheint, dem Worte nach, die Forderung wieder zurückgenommen zu werden, daß man nicht ein Etwas schon zugrunde legen dürfe, jedes Etwas vielmehr erst zu begründen sei. In anderer Weise läßt sich die Schwierigkeit so aussprechen: soll der Ursprung Etwas — das Etwas, oder welches auch immer im besonderen — aus sich hervorgehen lassen, so muß dies voraus schon irgendwie in ihm gelegen haben; aber damit scheint dann eben das, was mit dem Ursprung ausgedrückt werden sollte: die reine Erzeugung des gedanklichen Inhalts, wieder verloren zu gehen. Wir sehen, es ist dieselbe Schwierigkeit, die in Platos Anamnesis, in Kants Rekognition zum Ausdruck kam. Das Nichts, das die reine Erzeugung des Erkenntnisinhalts vorauszusetzen scheint, ist in der Tat auch nach Cohen nur „relatives Nichts“, es ist vielmehr der Hinweis auf das gegenüberstehende Andere und zwar Radikalere zu jedem gesetzten oder zu setzenden Einen; der Ursprung reduziert sich gänzlich auf die Möglichkeit des Überganges, des logischen Fortganges bzw. auch Rückganges, und damit auf die durchgängige Kontinuität des Zusammenhanges, als Zusammenhanges der Begründung; wie denn am Ende auch als der faßlichste Sinn des Cohenschen Ursprungs die Denkkontinuität sich herausstellt. Sie wird geradezu als das „den

Ursprung Bedingende" bezeichnet (S. 76). Der Zusammenhang, die Doppelrichtung des Denkens auf Vereinigung des zugleich Geschiedenen, Differenzierung des zugleich Geeinten, in der Differenz doch als Einheit sich Erhaltenden, das ist es wohl, was zuletzt zugrunde liegt. Es ist im Grunde nur ein anderer Ausdruck jenes Urgesetzes des Denkens, welches voraus schon (in der Einleitung der Cohenschen Logik, S. 52) als das der „Erhaltung der Vereinigung in der Sonderung, der Sonderung in der Vereinigung" bestimmt worden war. Unsere allgemeine Erinnerung gegen jede Aufstellung eines Prinzips (in der Einzahl) wird dadurch, wie wir sehen, nur bekräftigt. Vom Ursprung, vom Urquell des Logischen, ließe sich eben gar nichts aussagen ohne vorgreifenden Bezug auf das, was daraus fließen oder entspringen, vom Grunde oder Prinzip nichts ohne Bezug auf das, was darauf und darin gegründet werden soll. Mit der Sonderung und der Vereinigung und deren wechselseitiger Erhaltung ist ja offenkundig genug sozusagen alles vorweggenommen: Identität und Verneinung, Einheit und Mehrheit, Quantität und Qualität, nicht minder Relation, Beharrung und Veränderung, Bewegung, vollends (wie schon oben bemerkt) die Modalität, auch die Idee als unendliche Aufgabe, kurz, was man nur will.

§ 7. (*Die Korrelation der logischen Grundmomente.*) Aber es ist eben die Einheit von diesem allen, die Einheit durch Korrelation. Diese ist in der Tat, als das Prinzip der Prinzipien, in bestimmter Überordnung gegen die ganze Reihe der einzelnen, zu einander korrelativen Grundmomente des Logischen zu denken; freilich, wie wir erwarten mußten, ohne jede Möglichkeit einer Absonderung auch nur in dem Sinne, wie diese Momente selbst sich trotz ihrer Korrelativität dennoch begrifflich von einander müssen sondern lassen.

Die Relation und zwar Korrelation ist zugleich der geklärte Sinn der „synthetischen Einheit" Kants. Der Denkbezug und zwar Wechselbezug ist es, der das sonst Auseinanderbleibende im Denken zueinandertut, eben damit aber zugleich auseinanderhält, da es ohne Eines und Anderes kein Zueinander gäbe. So allein ist Erkenntnis als Erweiterung, als Fortgang, und zwar unendlicher, und nicht Stillstand, als Hinausgehen über jedes Gegebene, das heißt im Denken (auf abgrenzende Weise) zuvor schon Gesetzte, „möglich", d. h. verständlich. Analyse, Abstraktion wird dann Herauslösung aus dem korrelativen Zusammenhang, der damit aber nicht etwa zunichte gemacht, sondern nur zum Zweck der Schritt um Schritt vorgehenden Betrachtung der Einzelmomente beiseite gesetzt wird, schließlich nur, damit immer neue Zusammenhänge auch innerhalb jedes Einzelgliedes des für diesmal außer Betracht gelassenen zutage treten. So erklärt sich die Meinung, daß gerade die Analyse erweiternd sei. Mendelssohns Gleichnis ließe sich auch so deuten: das Mikroskop gerade erweitert und gibt Neues zu erkennen. So ist also wirklich alles Zusammenhang, also Synthese, und verbleibt doch und eben damit der Analyse ihr nicht minder umfassendes Recht, aber nur als einem Momente der Synthese selbst, die in Wahrheit die Analyse vollständig mitumfaßt. Denn der Zusammenhang bedeutet ebensogut die Wahrung der logischen Sonderrechte jeder Einzelposition gegenüber der Verbindung in höheren logischen Einheiten, wie umgekehrt. Vereinigung und Sonderung selbst sind zueinander streng korrelativ; die Sonderung aber weist auf die Einheit, als die des Ursprungs, vielmehr zurück. Der Ursprung der Vermannigfaltigung wird in der Einheit gesehen; der Ursprung ist nichts als die geforderte letzte Einheit, nämlich Zusammenhangs-Einheit. Also verbleibt der Analyse ganz die von Anfang an ihr von uns zugewiesene Aufgabe: die zugrundeliegende Synthese aufzudecken, sie zu „beschreiben", in dem gediegenen Sinne, wie man sagt „einen Kreis beschreiben",

d. h. die logischen Konstituentien einzeln aufzuweisen, um in ihrer Vereinigung das ganze Gebild vielmehr aufzubauen, zu konstruieren.

So meinen wir das, was mit der Zentralstellung des Prinzips des Ursprungs bezweckt wird, voll zur Geltung zu bringen. Seine Stelle vertrat in meinen früheren Entwürfen zur Logik (*125, 127, 133*) der schlichte Kantische Terminus der „synthetischen Einheit". Inwiefern in diesem der volle Sinn des Cohenschen Ursprungs liegt, wurde gezeigt. Nur von einem „Urteil" des Ursprungs, als einem der logischen Grundurteile, in auch nur scheinbarer Koordination mit elf anderen, möchte eben darum nicht zu reden sein. Dann müßte das Urteil überhaupt im Grunde schon vorausgestellt sein. Aber das Urteil wird nach der hier vertretenen Auffassung vielmehr erst fertig durch die Vereinigung sämtlicher Grundkonstituentien des Logischen, deren jedes für sich eben darum nicht ein Urteil, sondern nur ein Konstituens des Urteils heißen soll. Zwar folgeweise läßt jedes von diesen sich auch in Form eines Urteils aussprechen, aber nur hinterher; primär ist von Faktoren, oder besser noch (mit Kant) von Funktionen (Einzelleistungen) des Urteils zu reden. Doch das ist nicht der schwerste Anstoß, der am „Urteil des Ursprungs" zu nehmen ist. Vertritt der Ursprung die ursprüngliche Korrelation aller Denkelemente, so vertritt er ja eben damit auch den Zusammentritt aller Konstituentien nicht zu einem, sondern zu dem Urteil, d. h. der Ursprung ist eigentlich selbst das Urteil des Urteils. Es ist auch nicht wesentlich die Koordination mit den übrigen logischen Grundurteilen, was wir anfechten, denn diese ist für Cohen selbst in der Tat nur scheinbar; seine ganze Anordnung der Grundelemente des Denkens will vielmehr als „konzentrische" verstanden sein, so daß die Anfangsstellung des Ursprungsurteils vielmehr Zentralstellung wird. Aber auch diese scheint immerhin noch eine Art der Aussonderung sein zu sollen, die ich nicht als begründet zu erkennen vermag. Nicht auf den Punkt des Zentrums kann es ankommen, sondern allein auf den Bezug zum Zentrum, vielmehr auf die Wechselbeziehung zwischen Zentrum und Peripherie, oder wiederum genauer: die Wechselbeziehung der zentralen und peripherischen Richtung des Erkennens. Diese enthält aber vielmehr schon das Ganze der Gesetze des Kreises, der den Inbegriff des Logischen darstellt. Das ist dann schon nicht mehr ein, sondern das Konstituens. So möchte ich mir Cohens Grundgedanken, sei es nun deuten oder berichtigen, oder, um den unvorgreiflichsten Ausdruck zu wählen: mir zugänglich machen; das aber erfordert freilich, daß ich das Äußere seiner Disposition verlasse, denn in eine Reihe mit irgendwelchen besonderen Konstituentien will sich dieses Prinzip nun nicht mehr stellen lassen. Es ist in der Sache dasselbe, wenn wir von der Methode, vom Prozeß, vom Logischen selbst, als der voraussetzungsfreien Voraussetzung redeten, oder endlich, was mit jeder dieser Fassungen im Grunde wiederum sich deckt, von der notwendigen Korrelation der logischen Grundmomente; welches vielnamige Eine also nicht, als erstes der Reihe, an die Spitze der logischen Konstituentien, sondern, als die geforderte durchgängige Einheit des Logischen überhaupt, dieser ganzen Reihe voranzutreten hat.

§ 8. (*Rückblick. Der Gegenstand als Allgemeinausdruck des Problems der Erkenntnis.*) Wir blicken noch einmal auf den bis hierher durchlaufenen Weg zurück, um volle Klarheit darüber zu gewinnen, wie wir zu allen diesen Aufstellungen gekommen sind, die eigentlich sämtlich nur die Forderungen, oder verschiedene Ausdrücke der Forderung des Logischen überhaupt bedeuten wollen.

Zur Forderung einer zentralen Einheit, die zugleich den Grund und Quell unendlicher peripherischer Erweiterung und Differenzierung enthalte — zur Entgegensetzung von Hypothesen und Anhypotheton, Ideen und Idee der Idee — der unendlichen Stufenfolge der Erkenntnisentwicklung und der ihr notwendigen Richtungseinheit — zur Kontinuität und Korrelativität, und was sonst alles sich hier bereits anmeldete und vorläufig, unter allem Vorbehalt genauerer Bestimmung und Sicherung, zugelassen wurde: zu diesem allen führte uns auf der einen Seite eine hier nicht genauer beschriebene, aber tatsächlich in der Entwicklung der Wissenschaften sozusagen unter allgemeinem Konsens vollzogene Induktion nicht sowohl aus dem Faktum, als vielmehr dem Fieri der Wissenschaften; eine Induktion, die doch, abgesehen davon, daß sie nie vollendet sein kann, schon darum für sich nichts begründen kann, weil sie selbst wahrlich nicht weniger als alle jene Voraussetzungen der Begründung bedarf und voraussichtlich zu dieser Begründung sie alle nötig haben wird; auf der anderen Seite einzelne Vorausnahmen ebenfalls historisch und insofern faktisch vorliegender logischer Theoreme: für welche Vorausnahmen ich keinen besseren Grund anzuführen weiß, als daß sie in langer Beschäftigung den intensiv an den Problemen Arbeitenden sich mehr und mehr bewährt haben; was natürlich auch nicht als absoluter Beweis kann gelten wollen. Die Ungenauigkeit und also Unzulänglichkeit solcher Begründung liegt also unverhüllt zutage, soll zutage liegen. Aber sie ist im Anfang überhaupt nicht zu vermeiden, und sie braucht uns so lange nicht zu drücken, als wir erst bei der Hinleitung zur logischen Untersuchung, beim Aufweis des logischen Problems stehen, also noch nichts Einzelnes mit dem Anspruch definitiver Geltung auftritt. Nur weniger hoch und allgemein, weniger zentral und damit radikal wird das Problem nicht fassen dürfen, wer nicht den Vorwurf tragen will, an der gewaltigen, in Wissenschaft und Philosophie alter wie neuer und neuester Zeit in dieser Richtung geleisteten Arbeit kenntnis- und prüfungslos vorbeigegangen zu sein. Allgemein muß man sich darüber klar sein, daß, wo man zum letzten Ursprung der Erkenntnis kommt, eine andere Art der Begründung nicht gefordert werden kann, als daß er sich tauglich erweist, den Aufbau der Erkenntnis in seiner Gesetzmäßigkeit verständlich zu machen; das aber kann allein die Ausführung lehren.

Dieser Schwierigkeit der letzten Begründung ist, man mag die Probleme herumwenden, so viel man will, auf keine Weise auszuweichen. Will man sich auf die Evidenz berufen, so scheint leider nichts so wenig evident zu sein wie die letzten Prinzipien, da um nichts so viel Streit ist. Will man beweisen, so überzeugten wir uns schon zu Anfang, wie jeder Versuch eines deduktiven Beweises in einen unvermeidlichen Zirkel führt; ein induktiver Beweis aber würde nicht nur als logisches Verfahren an demselben Fehler kranken: die letzten Prinzipien, die er beweisen möchte, vielmehr voraussetzen zu müssen; sondern er könnte überdies, wenn er noch so sehr auf den ganzen bisherigen Verlauf der Forschung sich berufen dürfte, doch nie sicher sein, nicht durch deren weiteren Gang widerlegt zu werden.

Vielleicht denkt man einen apagogischen Beweis in der Art führen zu können, daß man zeigt: ein jeder Versuch, gewisse Voraussetzungen selbst aus weiter zurückliegenden logisch entweder als wahr oder als falsch zu beweisen, würde die Voraussetzung ihrer Wahrheit schon einschließen; welcher Voraussetzung also auf keine Weise ausgewichen werden könne. Selbst dabei würde man zwar den Zwang zu ihrer Anerkennung vielleicht eingestehen müssen, aber diesem Zwange innerlich doch, wenn auch vergebens, widerstreben, wenn nicht diese selben Voraussetzungen zugleich im faktischen Gebrauch des Denkens sich fortdauernd bewähren und fruchtbar erweisen; eine Art der Bewahrheitung, die zwar nur soweit Gewißheit gibt, als sie allemal reicht, aber doch an aller der Sicherheit teilnimmt, die den Sätzen der Wissenschaften in deren eigenem Gebiete erreichbar ist.

Immer erscheint ein solches Vorgehen künstlich und indirekt. In einer mehr direkten Form aber erreicht man dasselbe, indem man vom Begriff der Frage, des Problems den sicheren Zugang zur Gewißheit der Grunderkenntnisse zu gewinnen sucht. Das lag z. B. in Descartes' Ausgang vom Zweifel. Nicht zweifeln läßt sich mit Sinn an dem, was schon vorausgesetzt sein muß, damit überhaupt der Zweifel und also die Frage Sinn habe. Man kann nicht weiter zurückfragen hinter das, was selbst Voraussetzung jedes sinnvollen Fragens ist. Man kann nicht mit Sinn fragen: Warum überhaupt ein Warum? Warum überhaupt Frage? oder: Welchen Sinn hat überhaupt ein Sinn?

Diese Erwägung ist unanfechtbar richtig; aber doch würde man sich täuschen, wenn man glauben würde, auf diese Weise der Vorwegnahme des zu Begründenden überhaupt zu entgehen. Eben die Frage schließt im Grunde alles schon in sich. Sie stellt uns mitten hinein in den Prozeß der Erkenntnis. Die Frage besteht auf der je erreichten Stufe des Prozesses; sie schließt in sich: rückwärts ein Wissen, ohne das zur Frage selbst die erforderlichen Voraussetzungen fehlen würden; vorwärts ein Nichtwissen; in der Mitte das Wissen des Nichtwissens, in dem besonders deutlich die Forderung und damit Vorwegnahme des Wissens liegt und welches die ganze Eigenheit des Fragens eben ausmacht. Es ist nichts anderes als der logische Zusammenhang, der in der Frage vermißt, gefordert, also an sich und überhaupt vorausgesetzt wird; ja nicht bloß überhaupt, sondern auch in Beziehung auf das bestimmt gestellte Problem. Er soll allemal genau die Lücke schließen, die sein Fehlen uns bemerklich machte.

Dieses merkwürdige Grundphänomen: daß Frage ist, und was noch merkwürdiger: daß sie stets die Antwort antezipiert, ist bekannter unter einem anderen Namen, der scheinbar vielmehr das, wonach in der Erkenntnis die Frage ist, bezeichnet, in Wahrheit aber doch nur ihre Frage selbst bestimmt zum Ausdruck bringt: unter dem fortwährend von uns schon verwendeten Namen des Gegenstandes. Selbst das Wort „Objekt“, wörtlich „Gegenwurf“ oder in schon freierer Wiedergabe: „Vorwurf“, ist fast die bloße Übersetzung des griechischen „Problema“. Daß der Gegenstand außerhalb der Erkenntnis zu liegen scheint, doch aber ihr angeeignet werden soll, erklärt sich genau im Sinne der Antezipation. Er kann, wenn er Gegenstand für die Erkenntnis, ihr Problem sein soll, nicht schlechthin außer ihrem Bereiche gesucht werden. Damit lösen sich die bekannten Einwürfe der Skepsis; soll der Gegenstand sozusagen das x der Gleichung der Erkenntnis sein, so muß er, obwohl als das Gesuchte, doch gänzlich aus ihrem eigenen Gesichtspunkt bestimmt sein. So wie das x, y usw. der Gleichung nur Sinn hat für die Gleichung und in ihr, auf Grund des Sinnes der Gleichung selbst, stets in Beziehung zu den bekannten Größen, d. h. den Konstanten, nämlich den Sinn der Variabeln, als der „Wurzeln“ der Gleichung (Werte, welche sie „erfüllen“), so und nur so wird das große X der Erkenntnis, der Gegenstand, verständlich. Nach ihm könnte gar nicht die Frage sein, anders als vom Standpunkte der Erkenntnis selbst, gemäß den Urbeziehungen, die überhaupt eine Erkenntnis „möglich machen“: als das Unbestimmte zwar, aber in Sinne des zu Bestimmenden, im Bereiche der Bestimmungsmöglichkeit überhaupt also Liegenden, wenn auch innerhalb dieses Bereiches nicht weiter fixiert, ja auch nicht absolut zu fixieren, sondern in letztem Betracht stets variabel zu halten: damit der Fortgang der Erkenntnis nie abgebrochen sei. Liegt also in der Frage, im Problem der Gegenstand als das X der Erkenntnis, so liegt darin alles: die Grundbeziehungsarten, die überhaupt eine Erkenntnis ermöglichen, sind darin vorausgenommen, sind im „Vorwurf“ der Erkenntnis schon vorgezeichnet, „entworfen“. Das Objekt der Erkenntnis wird Projekt, der Gegenwurf Vorwurf. Vorausgesetzt ist also eben der Prozeß, der Gang der Erkenntnis im ganzen, seiner Richtung nach: die Methode. Und weil nun diese, als Richtung, notwendig ins Unendliche fortbesteht, so darf auch der Gegenstand nie als erschöpfend erkannt, als endgültig bestimmt gedacht werden, sondern, wieviel auch an ihm schon mag bestimmt worden sein, doch immer weiter bestimmbar und zu bestimmen. Als Aufgabe der Erkenntnis, die nicht Stillstand, sondern ewigen Fortgang bedeutet, wird der Gegenstand zur unendlichen Aufgabe, und jede endliche Bestimmung des Gegenstandes zum bloßen Einschnitt in das Kontinuum des Fortganges. Aber die unendliche Aufgabe ist unendliche Projektion.

Eben damit entdeckt sich der Gegenstand als das genaue Korrelat des „Ursprungs". Was jener als Forderung an die Erkenntnis ausspricht, will dieser aussprechen, nicht als die Möglichkeit nur, sondern die Sicherheit der Erfüllung der Forderung, in dem Sinne nämlich, in dem diese Erfüllung überhaupt nur gedacht werden darf: als ewiger Fortgang, nicht endgültiger Abschluß. Beide Ausdrücke bringen also nur nach zwei verschiedenen, aber sich genau entsprechenden Gedankenrichtungen denselben Radikalismus der Logik zum Ausdruck. Die Wurzel *(radix)* ist der Ursprung, und die Wurzel der Gleichung der Erkenntnis ist der Gegenstand. Der Schritt von der Wissenschaft zur Logik drückt sich in beiden Richtungen gleichartig aus: von den Gegenständen ist zurückzufragen zu dem Gegenstande, wie von den Prinzipien, die je eine bestimmte Frage oder einen bestimmten Inbegriff von Fragen lösen mögen, zu dem Prinzip, dem Prinzip der Prinzipien, das heißt dem Ursprung. Das ist der immer gleiche und selbige Hinausschritt von den Erkenntnissen zu der Erkenntnis, von den vielen Densetzungen zu der Setzung des Denkens überhaupt, womit genau die Aufgabe der Logik bezeichnet ist: als der Lehre vom Logos selbst, nicht aber von allem Logischen, denn das reicht so weit wie überhaupt die Wissenschaft.

Zweites Kapitel.

Das System der logischen Grundfunktionen.

§ 1. (*Die Aufgabe des Systems der logischen Grundfunktionen. Das Urteil.*) In der Forderung der Einheit des Prinzips des Logischen liegt schon die Forderung des Systems der logischen Grundfunktionen. Der Urpunkt des Denkens kann nach den früheren Darlegungen nur der Punkt sein, zu dem alle seine mannigfaltigen Richtungen konvergieren, aus dem wir vielmehr sie ursprünglich ausgehend denken. Nicht gerade in endlicher Zahl müssen sie sich erschöpfen lassen, wohl aber in einem Inbegriff; d. h. es muß sich ein gesetzlicher Zusammenhang konstruieren lassen, kraft dessen man absieht, wie in ihrer unendlichen Entwicklung der Bereich des reinen Denkens durchmessen wird. Denn die Einheit des Denkens ist Einheit des Zusammenhanges, welcher Zusammenhang, wie sehr immer einer Entwicklung ins Unendliche fähig, dennoch ein geschlossener sein muß, weil nur so das Denken seine Einheit wahren kann. Denken aber heißt zur Einheit bringen.

Das also ist die begründete und notwendige Forderung des Systems der logischen Grundfunktionen. Mindestens seit Kant ist diese Forderung gestellt; und wenn weder er noch einer der wenigen seiner Nachfolger, welche diese Aufgabe nach ihrer ganzen Strenge begriffen und an ihr sich gemüht haben, ihr in völlig überzeugender Weise zu genügen vermochte, die Forderung bleibt; eine Logik, die unter irgendeinem Vorwande ihr ausweicht, wird als Logik nicht bestehen können. Sie mag viel Logisches wie durch gut Glück treffen, aber eben nicht d a s Logische, nicht den Logos selbst. Das aber ist, wie schon gesagt, das Einzige, was eine Logik als abgesonderte Wissenschaft rechtfertigt. Denn Logisches ist in den Wissenschaften, vor allem der Mathematik, in solchem Reichtum vorhanden, daß man es dem Wissenschaftler, besonders dem Mathematiker nicht verdenken kann, wenn er so lange daran genug hat, als nicht die Logik etwas anderes, Radikaleres zu bieten hat: das Grundgesetz des Logischen. Wie also ist zu diesem zu gelangen?

Die historische Tradition glaubt das Logische zu fassen in drei wesentlichen Stücken: Begriff, Urteil, Schluß. Das war der Ausgang auch für Kant, ja es gibt kaum eine Logik seit Plato und Aristoteles, die nicht irgendwie hiervon anfinge. Sei es nur ein möglicher, nicht der unerläßlich notwendige Anfang, so muß es doch förderlich sein, zu prüfen, wie weit von diesem Punkte aus sich kommen läßt.

Die Frage ist — nicht nach den Grundgesetzen des Denkens, als psychischer Tätigkeit, sondern nach den Gesetzen, denen das Gedachte, rein als solches, unterliegt. Das Gedachte, das überhaupt Denkbare, scheint nun sich zu decken mit dem möglichen Inhalt der Aussage. Der Titel der Logik selbst führt darauf, denn Logos ist der Gedankeninhalt der Aussage, oder die Aussage selbst hinsichtlich ihres gedanklichen Inhalts. Wenn es nun etwa eine durchgehende Form aller Aussage gibt, so ist zu vermuten, daß in dieser die Urform des Denkinhaltes sich, wenn auch nicht unmittelbar und rein ausdrücken, doch irgendwie spiegeln oder andeuten wird. Daher versteht es sich, daß gelegentlich schon Plato, bestimmter Aristoteles vom grammatischen Gefüge des Satzes als der sprachlichen Form der Aussage seinen Ausgang nahm, um daraus die Grundform des Gedachten, alles Gedachten herauszuarbeiten. Es war nun leicht zu beobachten, daß jeder Satz, der einen bestimmten Sinn (d. h. eben ein Gedachtes) „setzt“ oder zu verstehen gibt, zum wenigsten, und in jedem Fall ursprünglich, zweiseitig ist, also eine Beziehung oder Verknüpfung darstellt zwischen zwei Faktoren, welche in der, selbst von logischer Erwägung diktierten Sprache der Grammatik Subjekt und Prädikat heißen. Die Beziehung selbst findet nicht notwendig, aber tatsächlich in der griechischen, der deutschen, überhaupt allen Sprachen unseres Kulturbereichs noch ihren besonderen Ausdruck in der Kopula. In dieser stellt sich am deutlichsten als Urform des Denkens dar eine Wechselbeziehung zwischen zwei Terminis, indem, wann immer etwas mit bestimmtem Sinn ausgesagt, d. h. gedacht sein soll, Etwas von Etwas ausgesagt sein muß. Das, wovon ausgesagt wird, wird in eben dieser Aussage und für sie als zugrundeliegend (ὑποκείμενον, *subjectum*) angenommen; auf welcher Grundlage dann das, was davon ausgesagt wird (das κατηγορούμενον, *praedicatum*) gleichsam weiterbaut. Beide zusammen nennt Aristoteles zutreffend ὅροι, Termini, ein Ausdruck, der in der Mathematik die Glieder des Verhältnisses bezeichnet. Es ist also erkannt, daß jeder Aussageinhalt, folglich jedes Gedachte eine Relation zwischen zwei Terminis setzt, und zwar in einer Fortschreitung, indem allemal auf ein gegebenes Fundament etwas Weiteres im Denken sich baut und so der Bereich des Gedachten sich beständig erweitert. Diese Relation, durch welche die als Termini darin eingehenden gedanklichen Einzelmomente gleich Fäden eines Gewebes sich zusammenflechten (συμπλοκή, Verflechtung, schon bei Plato; *connexio*), muß also wohl den Grundakt des Denkens irgendwie enthalten. Durch sie charakterisiert sich das Urteil als allgemeine Form des Gedachten. Die Termini aber heißen bei den Logikern Begriffe. Wie dann weiter Urteile sich verflechten zu Schlüssen, Schlüsse zu Beweisen, Beweise zu Wissenschaften, Wissenschaften der letzten Forderung nach zur einen Wissenschaft, das darf für jetzt beiseite bleiben. Zu dem allen wird ja der Anfang nicht bloß, sondern der Ursprung in jener Grundrelation zu suchen sein, die sich voll und deutlich schon im einfachen Urteil darstellt, also zunächst an ihm weiter zu ergründen ist.

§ 2. (*Der Grundakt des Bestimmens als Urgestalt des Urteils.*) Ist die Deduktion bis dahin schwerlich anzufechten, so liegt doch schon in diesem ersten Ansatz der Logik die Möglichkeit einer Abbiegung, der denn auch Aristoteles und die ganze von ihm ausgegangene, d. h. die das Abendland bis heute überwiegend beherrschende Logik verfallen ist. Nämlich es scheinen bei dieser Darstellung des Urteils die Termini, die Begriffe, immer voraus schon gegeben sein zu müssen, die Leistung des Denkens im Urteil also bloß darin zu bestehen, diese gegebenen Elemente richtig ihrem eigenen Sinn gemäß untereinander zu verknüpfen, so daß der ganze Erkenntnisgehalt des Urteils im Grunde voraus schon in den Begriffen gelegen hätte. Aber dann lag in den Begriffen überhaupt die Erkenntnis; nicht das Urteil würde sie erst schaffen, wie doch die ursprüngliche Annahme war, sondern sie allenfalls entgegennehmen, anerkennen und zum künftigen Gebrauch bereitstellen. Das Urteil wird dann Tautologie, Identität oder Nichtwiderspruch das oberste, im Grunde einzige Prinzip des Logischen. Der Fortgang der Erkenntnis, der Prozeßcharakter des Denkens geht verloren. Und doch war er in der Verflechtung, auch in dem Terminus der Grundlage, in dem der Vergleich des Aufbauens liegt, zum wenigsten geahnt, bei Plato sicher mehr als nur geahnt.

Was sollen die voraus gegebenen Denkelemente, die Termini des Urteils, die Begriffe denn sein? Jedenfalls Bestimmtheiten. Aber Denken heißt überhaupt Bestimmen. Also kann die Bestimmtheit jedenfalls nicht immer wieder, und nicht im ursprünglichen Fall, vor dem Denken voraus dem Denken, zu denken gegeben sein, sondern nur das Denken selbst kann sie vollziehen. Dann aber kann die Grundleistung des Denkens nicht beschrieben werden als Urteilen, wenn darunter verstanden wird: gegebene Bestimmtheiten nur, ihrem eigenen Inhalte gemäß, miteinander richtig verbinden oder voneinander scheiden. Sondern es muß ein Grundakt des Denkens angesetzt werden, in dem überhaupt irgendwelche Bestimmtheit für das Denken zuerst entsteht, ein Grundakt also des Bestimmens.

Aber dieser wird dem Urteilen selbst zuletzt zugrunde liegen; es wird selbst in seiner ursprünglichsten Funktion diesen Grundakt des Bestimmens bedeuten müssen. Unter welcher Voraussetzung wird denn dieser sich als Urteil, d. h. als Relation zwischen zwei Terminis, darstellen? Unter der einzigen Voraussetzung, daß nicht zwischen zwei voraus gegebenen und bestimmten, oder zwischen einem gegebenen und einem nicht gegebenen, sondern erst zu setzenden Denkelement, außerdem auch eine Beziehung gesetzt, oder vielmehr als in ihnen schon liegend bloß zur Kenntnis genommen wird; sondern es müssen im ursprünglichen Fall beide Elemente, die als Subjekt und Prädikat sich ausdrücken, und zwar in genauer Korrelation zueinander (welche Korrelation also die Verbindung des Subjekts mit dem Prädikat durch die Kopula ausdrücken würde) im Akte dieses Denkens erstmals gesetzt werden, voraus, abgesehen von diesem Denkakt aber für das Denken noch gar nicht vorhanden gewesen sein. Denn es sollen Bestimmtheiten sein; voraus aber, vor seiner eigenen bestimmenden Leistung, gibt es für das Denken keine Bestimmtheit.

Also vielmehr durch die Relation müssen die Termini erst im Denken gesetzt sein, nicht durch die Termini die Relation. Wenigstens erst der abgeleitete Fall wird es sein, daß zwischen zwei, durch ursprünglichere Denkakte voraus geschaffenen, insofern gegebenen Bestimmtheiten eine in diesen mitgegebene, nämlich in ihrer Erzeugung zugleich gesetzte Beziehung nur ans Licht gestellt oder hervorgehoben wird. Dieser abgeleitete Akt ist es, der bei Kant Analysis, analytisches Urteil heißt. Aber dieser ist nach ihm nur möglich durch den voraufgehenden, zugrunde liegenden Akt der Synthesis oder des synthetischen Urteils: der Verstand könne eben nur auflösen, was er selber zuvor verbunden hat. Es können daher „keine Begriffe dem Inhalte nach analytisch entspringen“, sondern „die Synthesis eines Mannigfaltigen . . . bringt zuerst eine Erkenntnis hervor . . . sie ist dasjenige, was eigentlich die Elemente zu Erkenntnissen sammelt und zu einem gewissen Inhalte vereinigt; sie ist also das Erste, worauf wir achtzugeben haben, wenn wir über den ersten Ursprung unserer Erkenntnis urteilen wollen.“

§ 3. (*Urteil und Begriff; Verhältnis beider zum Urakt des Erkennens.*) Also das ursprüngliche Urteil ist Synthesis, nicht Analysis; durch es wird ein „gewisser Inhalt,“ wird irgendwelche Bestimmtheit des Denkens erst ursprünglich geschaffen. Dieser Einsicht war man auf der Spur, wenn man meinte, das Verhältnis zwischen Urteil und Begriff geradezu umkehren zu sollen: nicht das Urteil setze zuvor gegebene Begriffe nur in Beziehung, sondern aus Akten des Urteilens erst gehen Begriffe hervor.

Aber wie dachte man hierbei das Urteil selbst? Welches sollten seine Elemente sein, da doch ein Urteil als solches notwendig zweigliedrig ist? Allzu unbefangen sprach Kant von einem Mannigfaltigen der Sinnlichkeit a priori, welches die transzendentale Logik als Stoff „vor sich liegen“ habe, das aber noch vom Denken „auf gewisse Weise durchgegangen, aufgenommen und verbunden“ zu werden nötig habe, wenn daraus Erkenntnis werden solle: „diese Handlung nenne ich Synthesis.“ Er spricht daneben auch von „Vorstellungen“. So bezeichnen auch später Logiker wie Sigwart mit dem Namen der Vorstellung das, was vor der logischen Bearbeitung und für sie gegeben sei. Aber was man über diese Vorstellungen, es sei nun richtig oder nicht, zu sagen weiß, scheint uns Psychologie zu sein, nicht Logik.

Jedenfalls sind es fertige Elemente von „gewissem Inhalt“, die man voraussetzt, also primitive Erkenntnisse. Also beschreibt man uns alles eher als den Ursprung der Erkenntnis überhaupt; während aus Kants sonst gewiß nicht zulänglichen Bestimmungen wenigstens das hell hervorleuchtet, daß nach dem Urakt der Erkenntnis zu fragen ist, aus dem überhaupt erst ein gewisser Inhalt, d. h. irgendwelche Bestimmtheit, dem Denken hervorgehe. Woraus hervorgehe? Die einzig folgerichtige Antwort lautet: aus dem noch in keiner Weise Bestimmten. Dieses ist, rein logisch, überhaupt keiner anderen Charakteristik fähig als im Vorblick auf die Bestimmung, zu der es gebracht, die an ihm durch das Denken vollzogen werden soll, das heißt, es ist allein zu charakterisieren als das X, welches sich bestimmen soll zum A, B und so fort. Mag es für die Psychologie einen Sinn haben, es noch sonstwie, als Vorstellung, Empfindung oder was auch immer, zu benennen; Logik hat nur zu reden von Inhalt und Inhaltsbeziehungen, also, da hier noch kein bestimmter Inhalt vorausgesetzt werden darf, von dem Inhalt, der werden soll: von dem zu Bestimmenden, welches durch nichts weiter zu bezeichnen ist als durch den vorgreifenden Bezug auf die an ihm zu vollziehende Bestimmung: als das X zu diesem A. So bleibt die Zweiseitigkeit des Urteils gewahrt, aber nicht als Beziehung zwischen beiderseits Bestimmtem: A sei B (was logisch in der Tat keinen Sinn hat); sondern ein zu bestimmendes X wird bestimmt zum A, und dann etwa zum B und so fort.

Damit wird das, was in der herkömmlichen Darstellung verschwand: der Prozeßcharakter des Denkens, zu sicherem Ausdruck gebracht. Das schwebte wohl dunkel vor in der Voranstellung des Urteils vor dem Begriff. Aber diese Umstellung konnte so lange zu keiner Klarheit gebracht werden, als man dabei fortfuhr, das Urteil als Verknüpfung voraus gegebener Elemente zu verstehen, die nur nicht schon fertige Begriffe, sondern bloße Anlagen zu Begriffen sein sollten.

Das sind sehr deutlich die Sigwartschen „Vorstellungen". Das führte dann unvermeidlich auf den Abweg der psychologischen Beschreibung, einen Abweg, der schon von Aristoteles nicht vermieden wird und schon bei ihm über den Mangel einer befriedigenden Rechenschaft von der letzten Grundgestalt des Logischen vergebens hinwegzutäuschen sucht. Man wird vielleicht entgegnen, auch unser X, als das noch nicht Bestimmte, erst zu Bestimmende, sei am Ende nichts mehr als der Begriff (die Bestimmtheit) in Potenz. Aber es ist nicht ein psychologisches Datum: Vorstellung, die einen bestimmten Inhalt zwar haben, an dem aber keiner bewußt sein soll (denn dann wäre es schon, was daraus erst werden soll: Begriff); sondern dieses X ist nur der reine Ausdruck für das Stadium der Frage, welches Stadium ein aufweisbares und zwar das hier entscheidende Moment des Denkprozesses selbst, und zwar in jedem eigentlichen Denken, darstellt, eben das Moment, wodurch überhaupt das Denken ein Procedere ist: das Urmoment der Richtung auf die erst zu vollziehende Bestimmung. Darin liegt zugleich — wir dürfen uns hier auf die Erörterungen des ersten Kapitels beziehen — der Hinweis auf die Denkkontinuität, auf die geforderte Korrelation aller ursprünglichen Denksetzungen zueinander, und damit auf die unendliche Entwicklungsfähigkeit des Denkens, auf das Denken als Werden, als Bewegung, nicht unbewegliches Sein.

Hiernach ist ebensowenig zu sagen, daß das Urteil in irgendeiner fertigen Gestalt dem Begriff voraufgehe, wie umgekehrt. Sondern beide, Begriff und Urteil, entspringen in einem und demselben ursprünglichen Akt, der überhaupt der Grundakt des Erkennens ist. Begriffe existieren nur im Urteil; aber auch im Urteil wird stets eine Denkbestimmtheit A, als primitiver Begriff, gesetzt, in Beziehung auf ein dadurch zu begreifendes X, das heißt, jedes Urteil ist ursprünglich Setzung eines Begriffs in Beziehung auf ein zu Begreifendes. Urteil und Begriff sind also im Urakt des Erkennens überhaupt eins. Begriffe sind „Prädikate möglicher Urteile“ nach Kant, und als solche stets bezogen auf „irgendeine Vorstellung von einem noch unbestimmten Gegenstande“, so wie der Gesichtspunkt auf ein zu Betrachtendes, das unter diesem Gesichtspunkt, in diesem „Betracht“ eben unserem Blicke sich erst bestimmt. Wie also der Gesichtspunkt nichts ist außer der Betrachtung, aber auch keine Betrachtung zu irgendwelcher Bestimmtheit gelangt anders als durch irgendeine Bestimmtheit ihres Gesichtspunkts, so verhalten sich zueinander im Urakte des Erkennens der Begriff und das Urteil. Also ist es gleichgültig, im strengen logischen Sinne der Äquivalenz, ob man die logischen Grundmomente aufweist als Momente am Begriff oder am Urteil. Wir betrachten beide nicht als voraus gegeben, sondern sie sollen uns miteinander erst hervorgehen aus der Zusammennehmung aller der Grundfunktionen, die in dem eben beschriebenen Urakte des Denkens eingeschlossen liegen und aus ihm durch ihn selbst sich entfalten müssen. Erst folgeweise werden dann auch diese Grundmomente sich als Momente am Begriff und Urteil nachweisen lassen.

Somit war es an sich zwar kein unrechter Gedanke, daß die von der Logik etwa schon genügend festgestellten logischen Einteilungen der Begriffe und Urteile zu einem „Leitfaden der Entdeckung“ dienen könnten für die ursprünglichen Funktionen des Denkens, aus denen überhaupt Erkenntnis, eben als Begriff und Urteil, erwachse. Aber indem nun Kant sich dieser Wegleitung anvertraute, erwies sich, daß er die überlieferten Einteilungen sich erst mannigfach zurechtrücken mußte, um das System der Grundleistungen der synthetischen Einheit (denn das sollten seine Kategorien und Grundsätze sein) daraus zu erhalten. Damit wird aber dieser ganze Weg schlüpfrig und ungewiß. Wir können daher selbst einem Kant auf diesen Weg nicht folgen, zumal das Vertrauen zur logischen Überlieferung der Jahrtausende, das in Kants Zeit noch leidlich feststand, seitdem mehr und mehr erschüttert ist, und vor allem das jetzt offen zutage liegt, daß die wirkliche, schöpferische Logik, nämlich die der Wissenschaften, eine weit andere ist und in die überlieferten Formen sich schon längst nicht mehr pressen läßt.

§ 4. (*Der Grundakt der Erkenntnis als synthetische Einheit.*) Um so sicherer bleibt das Allgemeine stehen, daß jener Grundakt des Erkennens, auf den die vorigen Erwägungen führten, von Kant zutreffend bestimmt worden ist als Akt synthetischer Einheit, d. h. als Grundkorrelation von Sonderung und Vereinigung. Direkt aus dieser werden die Grundkonstituentien der Erkenntnis herzuleiten sein, welche dann auch als die des Begriffs und Urteils sich erweisen müssen. Die Logik hat also Begriff und Urteil selbst aus den Grundfunktionen der synthetischen Einheit erst aufzubauen, nicht sie als gegeben vorauszusetzen, um aus ihnen die Grundfunktionen des Erkennens hinterher zu entnehmen. Auch die entscheidende Bewährung ihrer Aufstellungen wird nicht darin liegen, daß die überlieferten Formen des Begriffs und Urteils, sondern daß die inhaltlichen Grunderkenntnisse der Wissenschaften sich daraus verstehen lassen. Nicht das Hauptgeschäft der Logik, sondern eine bloße Nebenaufgabe, eine erwünschte fernere Bestätigung wird es sein, wenn es gelingt, auch die bekannten und erprobten Formen des Begriffs und Urteils, die ja zum inhaltlichen Bestand der Wissenschaft auch gehören, nämlich als analytische Gegenbilder der ursprünglich synthetischen Prozesse des Erkennens begreiflich zu machen.

Auf die Synthesis und die synthetische Einheit kam Kant, wie man weiß, vom „synthetischen Urteil“ her. Auch das dürfen wir nicht unbesehen hinnehmen. Sehr unverständig zwar hat man das synthetische Urteil angegriffen, wenn man etwa behauptete, daß in der Mathematik, vor allem der Arithmetik, und so überhaupt in der Erkenntnis man es nur mit Analyse voraus gegebener, wohl gar willkürlich aufgestellter Begriffe nach dem Satze des Widerspruchs zu tun habe. Hiergegen Kant in Schutz zu nehmen ist geringe, fast überflüssige Mühe. In den sonst nicht immer glücklich gewählten Beispielen faßt Kant regelmäßig solche Fälle ins Auge, wo nicht ein allererster Begriff gewonnen, sondern an schon gegebenen Begriffen neue, nicht voraus schon darin mitgesetzte Beziehungen erst vollzogen werden sollen, z. B. Summierung. Hierbei unterscheidet aber Kant scharf das Stadium der Forderung von dem der Erfüllung; diese sei durch die bloße Forderung noch nicht gewährleistet. Das ist aber genau richtig. Schreibe ich hin $1 - 1$, $1 - 2$, $1 : 1$, $1 : 2$, und gar $0 : 0$, oder $\sqrt{2}$, $\sqrt{-1}$, oder die Formel einer unendlichen Reihe und so fort, so sind damit Beziehungen, die sonst schon bekannt waren, unter ebenfalls schon bekannten Terminis ausgesprochen, aber ausgesprochen zunächst nur im Sinne der Forderung, welche Forderung damit nicht auch schon erfüllt oder ohne weiteres erfüllbar ist. Das genaueste Verständnis, was damit gefordert ist, belehrt nicht darüber, ob die Forderung überhaupt erfüllbar ist, und ob auf nur eine oder mehrfache, etwa gar unendlichfache Weise. Nur eine als zulässig erst zu beweisende Weiterentwicklung bisher bekannter Rechenoperationen entscheidet darüber; ja es kann notwendig werden, deren ganz neue einzuführen, z. B. die Grenzmethode und damit Differentiation und Integration. Die Null und die negative Zahl war nicht gegeben durch die ursprüngliche, von 1 beginnende Zahlreihe, die gebrochene nicht durch die ganze, die irrationale nicht durch die rationale, die imaginäre nicht durch die reelle. Es bedurfte, wenn die geforderte neue Zahl aus einem unmöglichen zum möglichen und wirklichen arithmetischen Begriff werden sollte, einer gänzlichen Neuschöpfung, die man vielleicht Jahrhunderte lang nicht wagte, und ohne das unabweisliche Bedürfnis der unbeschränkt allgemeinen Durchführung auch der schon bekannten Rechenoperationen niemals gewagt hätte.

Bleibt somit Kant völlig im Recht mit der Behauptung, daß jede rechtschaffene Erkenntnis, gerade auch und zuerst die mathematische, Neuschöpfung von Begriffen und nicht bloßer Rückgang auf voraus schon Bekanntes sein müsse, so erschließt sich die ganze Tiefe seiner Entdeckung der synthetischen Natur der Erkenntnis doch erst in jener Frage nach dem ersten Ursprung irgendwelcher Bestimmtheit überhaupt, auf die nun sein Begriff der Synthesis die Antwort gibt. Es muß ja wohl jede Neuschöpfung der Erkenntnis auf deren ersten Ursprung zurückgreifen. Denn da das neu zu Erkennende aus dem bisher Erkannten nicht geschöpft werden kann, woher anders sollte es fließen als aus eben dem Quell, aus dem auch alles zuvor Erkannte zuletzt entsprungen war? Also aus keinen voraus gegebenen, gleichsam feststehenden Denkpunkten und mit diesen zugleich gegebenen, ebenso festen Lagen solcher Punkte gegeneinander, sondern aus dem Quell einer unerschöpflichen Denkbewegung, aus dem Quell der Methode allein kann das synthetische Urteil, das eigentliche Urteil überhaupt als synthetisches, sich erzeugen. Allerdings stumpft Kant selbst die Schärfe dieser radikal idealistischen Einsicht wieder ab, wenn er den Urakt der Synthesis beschreibt als die „Handlung, verschiedene Vorstellungen zueinander hinzuzutun“ und „ihr Mannigfaltiges“ zu einer Erkenntnis zu begreifen. Danach scheinen die letzten Elemente, in der fragwürdigen Gestalt von „Vorstellungen“, doch wieder vor der Erkenntnis, selbst vor dem Urakt des Erkennens, dem Akte der Synthesis, voraus gegeben sein zu sollen. Aber hier ist nun Kant sehr leicht aus seinen eigenen Voraussetzungen zu korrigieren. Man braucht nur zu fragen: sollen diese Elemente vor dem Grundakt der Synthesis voraus einen „gewissen Inhalt“ schon haben oder nicht? Aber die Synthesis soll ja vielmehr das sein, was sie „zu einem gewissen Inhalte erst vereinigt". Also waren sie vordem — Vorstellungen zwar, aber ohne gewissen Inhalt? Vorstellungen, in denen — nichts Bestimmtes vorgestellt war? In der Tat darin liegt's: nichts Bestimmtes. Die Bestimmtheit des „Was", das ist genau, was der Urakt der Erkenntnis als Akt des Bestimmens erst zu erbringen hat.

Was sollte das voraus Gegebene der Erkenntnis denn sein? Kant nennt es, wie gesagt, mit psychologischen Namen: Vorstellung, Empfindung; im abstraktesten, in der Tat nicht mehr psychologischen, sondern rein inhaltlichen Ausdruck aber: ein Mannigfaltiges. Indessen, darf es auch nur als Mannigfaltiges überhaupt voraus schon gedacht werden? Oder wäre etwa das keine Bestimmtheit, daß es ein Mannigfaltiges, d. i. Mehreres und Mehrerlei ist? Sozusagen alle die Bestimmtheiten, die durch die logischen Grundfunktionen, Kants Kategorien, erst gewonnen werden sollen, liegen darin; in jedem Fall die der Quantität und Qualität. Es ist vielmehr dasjenige *X*, welches als Mannigfaltiges, ebenso wie andererseits als Einheit, durch das Denken erst zu bestimmen ist.

Darum hat es jedoch mit der „Einheit eines Mannigfaltigen" als der Urform der Bestimmung übrigens seine volle Richtigkeit; Denken ist Vereinigung, sagten wir; dann aber zugleich Sonderung; denn wo nicht ein Mehreres, also die Möglichkeit einer Sonderung, da bestände auch nicht die Möglichkeit einer Vereinigung. Aber dies darf nun nicht so verstanden werden, daß das Mannigfaltige als solches gegeben und nur die Einheit dieses Mannigfaltigen durchs Denken erst hineinzubringen wäre; sondern vielmehr so, daß in jedem Urakte des Denkens, als Akt der Bestimmung, ein *X* sich bestimmt als Eines und doch Mannigfaltiges, Einheit eines Mannigfaltigen, Mannigfaltiges einer Einheit. Denn diese, wie überhaupt alle — unter diesen noch sehr unbestimmten, unsicheren, allem Folgenden eigentlich vorgreifenden Hauptbenennungen des Einen und Mannigfaltigen sich bergenden — Grundmomente des Denkens werden sich in gleicher Weise zueinander streng korrelativ erweisen.

Keinesfalls darf jetzt mehr die Rede sein von einem Mannigfaltigen der Sinne, welches durch das Denken, als hinterherkommenden zweiten Akt der Erkenntnis, synthetisch zu vereinigen sei. Wie sollte das Mannigfaltige der Sinne in die Einheit eines Begriffs kommen? Die beiden Grundmomente, Einheit und Mannigfaltiges, wären dann überhaupt nicht homogen, eben nicht beiderseits Denkmomente; also auch ihre Verknüpfung nicht rein im Denken, als Denken vollziehbar; sondern das Denken müßte, um die synthetische Einheit vollziehen zu können, erst in Verbindung treten mit einem ihm Äußeren, Fremden, dem „Sinn“; oder es müßte ein Drittes über der Sinnlichkeit und dem Denken sein, welches zwischen beiden die Verbindung erst herstellte. Aber so ist es in Wirklichkeit nicht, sondern in einem und demselben ursprünglichen Akte des Denkens entspringt mit dem Bewußtsein der Einheit zugleich das der Mannigfaltigkeit, als beiderseits gleich sehr gedankliche und in ihrem gedanklichen Bestand streng aufeinander bezogene Bestimmungsweisen.

Damit aber entfällt nun ganz die Frage nach einem dem Denken und zu denken „Gegebenen“. Es kann überhaupt nicht mit Sinn gefragt werden, was das Nichtgedachte, Nichterkannte vor seinem Gedacht- oder Erkanntwerden sei. Es gibt für das Denken kein Sein, das nicht im Denken selbst gesetzt würde. Denken heißt nichts anders als: setzen, daß etwas sei; und was außerdem und vordem dies Sein — sei, ist eine Frage, die überhaupt keinen angebbaren Sinn hat. Die Forderung eines Sinnes ist schon die Forderung der Rechtfertigung aus dem Denken, als Denkgehalt. Es wird damit nicht nur nichts erklärt, sondern für die Logik überhaupt nichts Verständliches gesagt, daß man es psychologisch benennt als Vorstellung. Logisch jedenfalls ist nichts vor dem Denken. Unser X will nur eben dies in Erinnerung halten: daß jede Bestimmung, die dem Denken gelten soll, erst ursprünglich im Denken gesetzt werden muß, nicht vor ihm voraus schon dagewesen sein kann. Jede Beschreibung eines Hervorgehens des primitiven Denkinhalts aus etwas, das dem Denken schlechthin voraus läge, ist somit aus klar einzusehender Notwendigkeit abzuweisen als ein leeres Spielen mit Worten. Beschreiben kann man es doch immer nur in Begriffen des Denkens. Die Annahme einer solchen Genesis muß in der Logik so verpönt sein wie die einer Schöpfung aus Nichts, eines Hervorgehens von Sein aus absolutem Nichtsein in der Naturwissenschaft. Auch hier handelt es sich in der Tat, ja hier mehr als irgendwo sonst um eine angebliche Herkunft des Seins aus absolutem Nichtsein. Denn das ursprünglichste Sein ist das logische, das Sein der Bestimmung. Ließen dagegen wir alle Bestimmtheit ursprünglich hervorgehen aus dem abgesehen von dieser Bestimmung noch nicht Bestimmten, also insofern freilich aus einem Nichtsein, nämlich dem Nochnichtsein dieser Bestimmtheit, so ist das im Grunde nur ein anderer Ausdruck für jene Platonische Einsicht: daß vor jedem gesetzten Anfang ein noch früherer Anfang, über jedes gesetzte Ende ein ferneres Ende, innerhalb jedes Zentrums der Betrachtung ein wiederum zentraleres zu suchen bleibe; es ist nur der Ausdruck des ewigen Prozeßcharakters der Erkenntnis.

§ 5. (*Das System der logischen Grundfunktionen als Entwicklung des Uraktes der synthetischen Einheit.*) Die Aufgabe des Systems der logischen Grundfunktionen bestimmt sich nun hierdurch näher als die der allseitigen Entwicklung jener letzten logischen Grundfunktion: der Einheit des Mannigfaltigen, der Vereinigung, die zugleich Sonderung, der Sonderung, die zugleich Vereinigung ist. Auch in der soeben wieder angezogenen Platonischen Beschreibung des ewigen Prozesses der Erkenntnis liegt dies zugrunde: ein

Procedere, ein Fortgang im Denken, eine διάνοια, ein „Durchdenken“, Durchgehen oder Durchlaufen im Denken (*discursus*) fordert in jedem Fall ein Anfangen und Enden, weil eben ein Auseinanderstellen gesonderter Denkpunkte und zwar in einer Fortschreitung. Indem aber das Procedere selbst sich diesen seinen Einzelstationen (wörtlich „Stillständen“) notwendig überordnet, so wird eben damit jeder gesetzte Endpunkt wieder zum Anfangspunkt eines neuen, und so auch umgekehrt jeder Anfangspunkt zum Endpunkt eines voraufgehenden Schrittes auf dem Wege des Denkens. Und damit werden alle diese gleichsam doppelt gerichteten, wie mit doppeltem Vorzeichen versehenen Denkpunkte zu bloßen Durchgangspunkten, und das zugrunde Liegende vielmehr die Wegrichtung der Erkenntnis, in der das Plus und Minus, in strenger Korrelation aufeinander bezogen, in Eins gedacht werden müssen. Darin liegt schon die gemeinsame Grundbeziehung, in der die andererseits in ihrer Diskretion betrachteten Punkte stetig, mithin zentral zusammenhängend zu denken sind. Aber auch ein jedes solches jeweiliges Zentrum ist wiederum nicht absolut zu setzen, sondern es gibt auch wieder eine Über- und Unterordnung solcher Denkzentren, an sich ohne Beschränkung. Absolut könnte allenfalls nur genannt werden die zentrale Richtung der Erkenntnis überhaupt, die aber wiederum untrennbar eins ist mit ihrem Korrelat, der peripherischen Richtung; denn alle Diskretion der Denkpunkte ist nur Diskretion des Kontinuierlichen, wie alle Kontinuität des Denkens nur Kontinuation des Diskreten, genauer: Diszernibeln.

Nichts Oberflächlicheres darf unter der synthetischen Einheit als dem logischen Grundakt verstanden werden. Dann wird man sich leicht darüber verständigen, daß eine fernere Vergewisserung, warum nun dies das Letzte sei, wovon auszugehen, nicht mit Sinn verlangt werden kann. Die Forderung eines Letzten oder je nach Auffassung

Ersten (πρῶτον, ἀρχή, *principium*) ist selbst die Forderung dieser zentralen Vereinigung; der Ursprung, der Grund, das Fundament, welchen Ausdruck immer man wählen mag für das Letzte, wonach in der Erkenntnis die Frage ist, hat selbst keinen anderen angebbaren Sinn; ja ein Sinn überhaupt, der Sinn insbesondere alles Fragens führt auf nichts als dies. Denn Fragen heißt im Denken vereinigen wollen, was sonst auseinanderklaffen würde; es heißt Zusammenhang suchen und fordern, einen Zusammenhang, von dem also stets vorausgesetzt wird, daß er an sich vorhanden sei. Er wird als vorhanden vorausgesetzt, weil man nicht denken kann, ohne das vorauszusetzen, was überhaupt den Sinn des Denkens ausmacht.

Das Wollen, Fordern, Suchen darf hierbei nicht stören. Erkennen zwar ist an sich nicht Wollen; es setzt, rein als solches, ein Sein und nicht ein Sollen. Aber Erkenntnis selbst ist ebenso zweifellos Aufgabe. Auch läßt sich voraus absehen, daß zwischen Sein und Sollen wieder dieselbe strenge Korrelation walten wird wie zwischen den Momenten des Seins für sich und denen des Sollens für sich. Und zwar wird schließlich das Sollen dem Sein, die „Idee" (Kantischer Bedeutung) dem bloßen „Begriff" der Erkenntnis in bestimmtem Sinne sich überordnen, so wie wir soeben sahen, daß das Kontinuum der Richtung (worin eben das Sollen schlummert) sich überordnet den bestimmten Denkpunkten, die das Sein im Unterschied vom Sollen zu vertreten scheinen. Aber die rein logische Betrachtung darf und muß als solche beim Sein stehen bleiben. Sie hat vom Denken oder Erkennen als Aufgabe zwar zu reden, aber stets in strenger Unterordnung unter das, was in logischer Bedeutung ist. Das Sollen braucht gerade darum der Logik nicht fremd zu bleiben, weil in rein logischer Betrachtung sich festhalten läßt und festgehalten werden muß, daß das Sollen selbst ist, die Aufgabe selbst besteht.

So viel mag und darf über diese sehr fundamentale Frage an dieser Stelle und für die gegenwärtige Absicht hinreichend sein. Nun aber sind wir vorbereitet zu der Aufgabe, den gesetzmäßigen Stufengang des Prozesses, in dem die reine Erkenntnis sich entwickelt, zu bestimmen. Dieser wird nicht einfach sein, aber aus einfachsten Grundelementen sich ins Unendliche weiter entfalten.[1])

I. Die Quantität.

§ 6. (*Die Stufen der Quantität.*) Quantität und Qualität sind als Grundmomente, und als die ersten, unerläßlichsten, am Begriff und Urteil wie an jeder Erkenntnis irgendwelches Gegenstandes seit alter Zeit anerkannt. Weshalb konnte gerade über diese beiden kein Zweifel sein? Darum weil sie nur den ursprünglichen Prozeß der synthetischen Vereinigung eines Mannigfaltigen überhaupt nach seinen zwei untrennbar zusammengehörigen Seiten, gleichsam nach außen und nach innen, oder in peripherischer und zentraler Richtung, darstellen.

Man erinnert sich, daß Kant extensive und intensive Größe dadurch unterscheidet, daß bei jener die Teile dem Ganzen, bei dieser das Ganze den Teilen vorhergehe; d. h. er bezieht jene auf die äußere Sonderung und erst nachkommende Vereinigung, diese auf die innere, wurzelhafte Einheit, die in das Mannigfaltige sich erst auseinanderlege; dementsprechend vertritt jene ihm zugleich die Diskretion, diese die Kontinuität. Ausdrücklich aber ist diese Qualität, nämlich die Kontinuität, für Kant nur Qualität an Größen überhaupt, d. h. an eben dem, was andererseits unter den

---

1) Ein schlichtes Grundschema des Stufenganges der Synthesis der Quantität und Qualität habe ich in einer Abhandlung d. J. 1890 [125] zuerst vorgelegt; der entsprechende Stufengang der Relation und Modalität ist zuerst aufgestellt in der Abhandlung [127] 1900, dann in den Leitsätzen der Propädeutik und der Logik [132, 133].

Begriffen der Quantität zu denken ist. Daher stellt sich ihm der Stufengang der Qualität an der Größe, geradezu als Bestimmung der Größe selbst, aber als intensiver nicht extensiver, stetiger nicht diskreter dar. Das Ineinander von Quantität und Qualität ist also schon bei ihm sehr eng. Das Quantum ist nur Quantum des Quale, das Quale nur Quale des Quantum; erst beide zusammen begründen die Größe, als den allgemeinen Gegenstand der Mathematik.

Um so unerläßlicher war für ihn die genaue Korrespondenz ja Kongruenz auch des beiderseitigen Stufenganges. Den Stufengang eines synthetischen Prozesses überhaupt aber unterstellt er, wie man weiß, einem allgemeinen Gesetze, wonach der Stufen in jedem Falle drei sein und die dritte allemal entspringen müsse aus einer Verbindung der zweiten mit der ersten, welche Verbindung nicht durch die bloße Zusammennahme der beiden ersten Akte schon gesetzt sei, sondern noch einen eigenen „Actus des Verstandes" erfordere. Nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, denen, wie die Ausführung selbst zeigen wird, eine zwingende Notwendigkeit innewohnt, ergibt sich der folgende Aufbau des Stufenganges der quantitativen in genauer Beziehung zu dem der qualitativen Synthesis.

Die Quantität überhaupt entspringt daraus, daß an der logischen Grundkorrelation der Einheit und des zu vereinigenden Mannigfaltigen dies letztere ins Auge gefaßt, und zur Klarheit gebracht wird, in welcher Gestalt es eben als Mannigfaltiges und zwar zu vereinigendes Mannigfaltiges notwendig zu denken sei. Ein Mannigfaltiges besagt: eine Mehrheit unterscheidbarer Momente. Die Unterscheidbarkeit gehört als solche zur Qualität; aber sie setzt, nach der Seite der Quantität, die Mehrheit. Diese beiden Auffassungsweisen: Unterscheidbarkeit und Mehrheit, sind zueinander so streng korrelativ, daß jeder Versuch mißlingen muß, sie voneinander loszureißen. Das hindert indes nicht die abstrakte Sonderung der rein quantitativen Bestimmung der Mehrheit als Mehrheit (wenngleich des Unterscheidbaren) von der qualitativen der Unterscheidbarkeit als Unterscheidbarkeit (wenngleich des Mehreren). Auseinanderhaltung ist beides; rein im quantitativen Sinn aber ist Auseinanderhaltung nur Setzung des Einen und Anderen (Anderen im Sinne des Zweiten).

Darin sind nun die folgenden drei Momente unmittelbar eingeschlossen, als zu jeder Quantitätsauffassung unerläßlich:

1. Eine Mehrheit ist als solche notwendig Mehrheit aus Einheiten. Die Einheit im Sinne des numerisch Einen, des Einzelnen der Zahl nach, ist also der unvermeidliche Ausgang, das unerläßliche Fundament jeder quantitativen Setzung. Es bedeutet den Einsatz des quantitativen Verfahrens selbst, als des Verfahrens der Diskretion. Was in jedem Falle als Eines gelte, ist hierfür gleichgültig. Eine (der Zahl nach) ist die Welt, eins das Atom, oder was sonst man als Letztes (der Teilung) oder Erstes (der Zusammensetzung — auch das gilt hier gleichviel), als letzte Eins gleichsam, mit der die Natur zähle, ansetzen mag. Stellt man ein solches auf, so ist solche Hypothesis selbst diktiert durch das Gesetz jenes Denkverfahrens, welches vorschreibt, von irgendetwas als Erstem zu beginnen, einen Anfang überhaupt zu setzen, d. h. aber in quantitativer Hinsicht: ein letztes Eines, etwas, dem unser Gedanke diesen Charakter der Einsheit erteilt. Von jeder Besonderheit solcher Hypothesen ist hier gänzlich abzusehen, es kommt für jetzt einzig an auf das ὑποτίθεσθαι, das Grundlegen selbst, das Setzen des Einen „zum“ Grunde, zum Fundament und somit zum Ausgang der quantitativen Setzung überhaupt. Die Notwendigkeit dieses Setzens der Einheit aber liegt klar zutage in der Notwendigkeit eines Anfangens, eines Beginnens oder Einsetzens, wofern überhaupt ein Procedere möglich sein soll.

2. Im Anfang liegt aber sofort auch der Hinweis auf den Fortgang. Das wäre kein Anfang, der nicht etwas anfinge: eben das Verfahren, also Fortfahren. Bedeutete also unsere erste Forderung, daß man jedenfalls *A* sagen muß, so besagt die zweite, daß, da man *A* gesagt, man auch *B* sagen muß. Damit ist nicht nur ausgesprochen, daß die Setzung des Einen ein allgemeines, immer wieder zu Gebote stehendes Verfahren des Denkens ist (als solches war es schon auf der ersten Stufe zu verstehen); sondern es ist die Erneuerung der Setzung jetzt in dem bestimmteren Sinne gemeint, daß zum Einen, d. h. indem es gesetzt bleibt, im Verhältnis zu ihm, ein Anderes, sein Anderes, d. h. zwar wiederum Eines, aber als Neues, mithin Zweites, als nicht mehr Erstgesetztes, sondern Zugesetztes gedacht werden soll, und zu diesem dann ebenso ein ferneres, und so immer ein ferneres. Diesen bestimmteren Sinn also erhält jetzt die Mehrheit. Wohl der bezeichnendste Ausdruck dafür ist die Reihe oder Reihung, Auf- und Aneinanderreihung. Diese ist als solche unbeschränkt, zufolge der Immer-wieder-Anwendbarkeit dieses zweiten Grundverfahrens des Denkens, des Verfahrens der Zusetzung; aber in dieser Unbeschränktheit freilich zugleich unbestimmt. Der sehr positive Sinn und die entscheidende Notwendigkeit dieses Denkschrittes liegt also in der Notwendigkeit des Fort- und Übergangs, der durch das Denken als Procedere, nachdem ein Anfang einmal gesetzt, unerläßlich gefordert ist.

So haben wir Einheit und Mehrheit, damit die Einheit als Einheit der Mehrheit, die Mehrheit als Mehrheit von Einheiten; beide Verfahren zueinander streng korrelativ; wie wir überhaupt diese Korrelativität unter sämtlichen reinen Denkfunktionen, je nach ihrer Ordnung und wechselseitigen Stellung, erwarten müssen. Damit aber ergibt sich nun schon von selbst

3. auch der letzte notwendige Schritt des quantitativen

Verfahrens: die Zusammennehmung allemal einer bestimmten, durch diesen neuen Akt eben sich bestimmenden Folge von Einzelsetzungen zu einem Ganzen, d. h. wiederum einer Einheit, aber im neuen Sinn der Einheit aus den Mehreren, ihrer Vereinigung in einem Totale. Die Reihe ginge als solche unbestimmt weiter; in dieser Unbestimmtheit verbliebe die Mehrheit bloß als solche. Daß sie Einheiten in sich schließt und auch selbst in ihrem unbestimmten Fortgang eine gedankliche Einheit doch darstellt, ergäbe noch nicht dies Dritte, um das es sich jetzt handelt. Es ist ein sicherer Unterschied: Mehrheit überhaupt und eine Mehrheit, nämlich eine im Unterschied von einer anderen, also eine wie auch immer bestimmte. Damit ist die weitergehende Forderung gestellt: es solle nicht nur jedes Einzelne für sich, auch nicht bloß mehrere Einzelne der Reihe nach gesetzt werden, auch nicht nur, allemal indem man zum Anderen übergeht, das Erstgesetzte in Gedanken aufbehalten bleiben; sondern es solle auf jeder erreichten Stufe des Prozesses die ganze Reihe der bisherigen Setzungen als ein fortan Bestimmtes, ein nunmehr gesicherter Besitz der Erkenntnis zum Bewußtsein gebracht, dem Erkenntnisschatze des Bewußtseins einverleibt, der Gewinn gleichsam gebucht werden. Damit wird das Procedere selbst erst völlig bestimmt, daß man auf jeder erreichten Stufe sich versichert: bis soweit ist jetzt der Weg durchschritten. Es wird gleichsam ein Einschnitt gemacht, ein Haltpunkt markiert, ein erreichtes Ziel konstatiert, nicht um bei ihm dauernd stehen zu bleiben, sondern des bis dahin Gewonnenen gerade als fester Grundlage für den weiteren Fortschritt des Denkens sich zu versichern.

Durch diesen Akt entsteht offenbar aus der unbestimmten Menge das bestimmte Soviel. Mit diesem schiene dann schon die Zahl eingeführt; wir verbleiben aber für jetzt bei dem unvorgreiflicheren Terminus des Ganzen, als des Totales aus den Einzelposten. In der Zahl hat sich dies seinen wissenschaftlichen Ausdruck geschaffen; aber dieser Ausdruck, das ganze System von Ausdrücken, welches dazu erfordert wird, kann nicht hier schon vorausgesetzt oder an dieser Stelle eingeführt werden. Nicht die Summen selbst, das Zwei, Drei usf., sondern bloß das Allgemeine des Verfahrens, worauf die Summenbildung freilich beruht, als eines notwendigen und allgemeinen Verfahrens des Denkens überhaupt, war hier herauszustellen und zu formulieren. Sein entscheidendes Merkmal liegt in dem Ab- und Zusammenschluß des erst unbestimmten, unabgeschlossenen Stufenganges zu einem nunmehr bestimmten Ganzen dieses Ganges, allemal soweit er vollbracht ist. Das Vollbringen, Vollenden, das allein ist das hier Entscheidende.

Kant hat es gerade an diesem Beispiel ganz deutlich gemacht, was er bei der Verbindung der zwei ersten Leistungen eines synthetischen Prozesses in der dritten, dennoch selbständigen, im Sinn hatte. Nicht überall, wo die Begriffe der Menge und der Einheit gelten, sei darum auch die bestimmte Vielheit möglich, nämlich nicht im Unendlichen (Kr. § 11, 1); also sei dazu noch ein eigener „Actus des Verstandes“ erforderlich. Vielleicht ist diese Erklärung material anfechtbar; vielleicht ist das Unendliche einer echten Summation fähig, die hier den vortrefflichen Namen der Integration führt. Aber ohne weiteres wenigstens scheint diese nicht zulässig. Ein Hauptsatz der Aristotelischen und von daher der ganzen abendländischen Philosophie bis tief in die Neuzeit hinein war, daß das Unendliche als solches überhaupt keiner Bestimmtheit des Abschlusses fähig sei. Das kann hier noch nicht entschieden werden. Aber auch, wo an der Zulässigkeit des Abschlusses gar kein Zweifel ist, wie bei dem einfachen $1 + 1$, ist ein eigener „Actus des Verstandes“, ein eigener Denkschritt für diesen Ab- und Zusammenschluß notwendig anzusetzen. Das bloße Nebeneinanderstellen der Einheiten, auch mit dem Merkmal, daß sie in einer Reihe sich aneinanderschließen sollen, gäbe noch nicht diese neue Bestimmtheit, diese neue Einheit der Bestimmung, welche die Summe Zwei bedeuten will. Es ist unbedingt nicht dasselbe: Eins und Eins bloß nebeneinandergestellt, nicht zu einer neuen gedanklichen Einheit (der Zweiheit) vereinigt, und dieselben in dieser Vereinigung, als dieser Verein (*unio*) gedacht. Und dieser Unterschied ist nicht ein bloß psychologischer, sondern ein Unterschied im Inhalt des Gedachten. Auch die Forderung dieser Vereinigung ist nicht identisch mit ihrem Vollzug. Es ist nicht selbstverständlich, daß Eins und wiederum Eins überhaupt auf irgendeine, und daß sie nur auf eine einzige Weise, nicht mehrfach, zu einer neuen Gedankeneinheit, der Summe Zwei, vereinigt werden können. Die Ausdrucksweise: Eins und Eins gibt oder macht Zwei, welche die Summe als aus den Summanden erst resultierend darstellt, ist insofern sachlich wohlbegründet. Doch, wie schon gesagt, es sind hier die Fragen, welche unmittelbar den Aufbau der Mathematik angehen, noch nicht zu entscheiden, da sie in den folgenden Kapiteln im gehörigen Zusammenhang behandelt werden sollen.[1])

---

1) Kant hat sich die zutreffende Formulierung der Stufen der quantitativen Synthesis erschwert durch die nicht einwandfreie Parallelisierung mit der überlieferten Unterscheidung der Urteile der Quantität nach. Unabhängig davon aber hat er die Stufen richtig bestimmt: in den Prolegomena (§ 20, mit Anmerkung), wo er das „besondere" Urteil ersetzt durch das „plurative" („Vielheit ohne Allheit"); ebenda (§ 21), wo er für die dritte Stufe den Ausdruck des „Ganzen" verwendet; und in der „Kritik" (§ 11), wo erst Einheit und Menge unterschieden, dann für die dritte Stufe die Bezeichnung „Allheit" zwar festgehalten, aber durch die bestimmte Zahl erläutert wird. Wichtig und richtig ist es auch, daß in den Proleg. (§ 21) die Einheit erklärt wird durch den Begriff des Maßes. Darin liegt, daß die Einheit nicht isoliert gedacht werden soll, sondern nur als das Eine des Vielen, das dadurch gemessen wird. Darin kommt die Korrelativität aller drei Stufen zum bestimmtesten Ausdruck: das Gemessene ist gegenüber dem Maß Ganzes gegenüber den Teilen.

Man sieht nun schon, wie die drei Stufen der Quantität zusammen einen Kreislauf beschreiben, der sich der Möglichkeit nach ins Unendliche fortsetzt: die bestimmte Vielheit (Zweiheit, Dreiheit usf.) stellt auch wieder ein Eines dar (einen Zweier, Dreier usf.), von dem in neuem Fortgang zu neuen Abschlüssen zu gelangen ist, und so auf immer höheren Stufen weiter. Diese unbeschränkte Fortsetzbarkeit des ganzen dreistufigen Verfahrens der quantitativen Synthesis ist der nächste, unbestreitbare, insoweit rein quantitative Sinn des „Unendlichen". Aber schwerlich wird dessen ganzer Begriff hierin schon erschöpft sein. Schon als ein Charakteristikum nicht eines Einzelschritts, sondern des ganzen Verfahrens unterscheidet es sich von einer bloßen Quantitätssetzung. Ohnehin muß klar sein, daß das Unendliche, indem es über alle endliche Bestimmtheit und Bestimmbarkeit hinausgeht und sie überbietet, auch über die bloße Quantität hinausgeht und in die Qualität hinübergreift. Auch hiervon wird an späterer Stelle (Kap. IV) genauer zu reden sein.

II. Die Qualität.

§ 7. (*Die Stufen der Qualität.*) Was die Qualität überhaupt bedeutet, ist oben schon gesagt worden. Sie vertritt die synthetische Einheit als Einheit nicht im Sinne peripherischer Umfassung, sondern zentraler Vereinigung, vielmehr ursprünglichen Einsseins. Die Einheit wird also hier nicht als aus einer voraus gegebenen, wäre es selbst durch ein anderes reines Denkverfahren (das der Quantität) gegebenen Mannigfaltigkeit erst hervorgehende oder herzustellende gedacht. Immerhin unserer logischen Reflexion entsteht sie erst in schrittweis vordringender Selbstvertiefung des Denkens. Insofern hat der Ausdruck der Vereinigung wohl seine Berechtigung. Und da die Reflexion, als „Umbiegung", also Umkehrung des Erkenntnisweges, notwendig von Außen nach Innen, von der Oberfläche zur Tiefe, von der Peripherie zum Zentrum führt, so muß sie, zumal von der Quantität herkommend, den Gang der qualitativen Synthesis zunächst als Rückgang auf das Zentrum beschreiben; Voraussetzung ist dabei doch, daß das im Denken Zentrale das an sich Zugrundeliegende sei. Der Stufengang der qualitativen Synthesis selbst, der, wenn unser allgemeiner Ansatz richtig ist, dem der Quantität parallel, nicht bloß korrespondent, sondern kongruent sein muß, darf verstanden werden als der jener Entwicklung, in der das Denken sich selbst, seinen eigenen Ursprung erst entdeckt. War nun das Verfahren der Quantität, im Hinblick auf das der Qualität, Diskretion des Kontinuierlichen, so wird das der Qualität, im Hinblick auf das der Quantität, Kontinuation des Diskreten sein. Also kann und muß die Anordnung der Quantitätsstufen zugleich als Leitfaden dienen für die Aufstellung des Stufenganges der Qualität.

1. Wenn allgemein der Mehrheit die Verschiedenheit entspricht, so ist damit unabweislich gegeben, daß der numerischen Einheit, als dem quantitativ Einzelnen, ein qualitativ Eines oder Einzelnes gegenüberstehen muß: das Einerlei oder das Identische, hier rein als Ausdruck derjenigen qualitativen Bestimmtheit, die, als Basis der Relation der Vergleichung, für diese so unerläßlich ist wie die numerische Einheit als Basis der Relation der Zählung für die letztere. Was in jedem Fall als Identisches gesetzt wird, ist hierbei so gleichgültig, wie bei der ersten Stufe der Quantität es gleichgültig war, was als Eines gezählt wird; worauf es ankommt, ist nur, daß eine jede Erwägung der Qualität unumgänglich die einfache Identität zugrunde, recht eigentlich zum Grunde legt. Sicher liegt in dem Urteil der Identität stets der Hinweis auf ein wenigstens mögliches Anderssein; aber das Anderssein selbst setzt ein Sosein voraus; es setzt, wie schon der Ausdruck des Anderen verrät, es sogar zweimal voraus: das Andere ist das Andere

des Einen und ist selbst wiederum Eines, d. h. qualitativ: für sich ein Identisches. Die Termini der Vergleichung bestehen allerdings nur in der Relation (der Vergleichung selbst), aber als Termini sind sie für die Vergleichung selbst unerläßlich.

2. Der Identität gegenüber aber begründet die Reihe einfacher Identitätssetzungen, in welcher diese nicht bloß nebeneinander, sondern im Verhältnis und zwar qualitativen Verhältnis gegeneinander gesetzt werden, die Verschiedenheit als qualitative Mehrheit; die qualitativ Einfachen also zugleich im Verhältnis gegeneinander; also qualitative Auseinanderhaltung, die Setzung des qualitativ Anderen zum qualitativ Einen, die sich als Mehrerleiheit zur Mehrheit so verhält, wie die Identität als Einerleiheit zur quantitativen Einheit. „Ein und dasselbe" verbindet unsere Sprache ebenso wie die griechische und alle anderen. Ganz so entsprechen sich Mehrheit und Verschiedenheit. Das „Andere" bedeutet uns beides: das Zweite der Quantität, das Verschiedene der Qualität nach. Bedingung der quantitativen Auseinanderhaltung als Mehreres ist wenigstens die Möglichkeit qualitativer Sonderung als durch irgendein Merkmal (sei es auch nur das Sichbefinden an anderer und anderer Stelle im Raum oder der Zeit, oder bloß im idealen Felde der Logik) Verschiedener; aber Bedingung der qualitativen Auseinanderhaltung als Verschiedener ist ebenso wenigstens die Möglichkeit quantitativer Sonderung als mehr denn Eins und somit außereinander Liegender. So hat die Verschiedenheit auch teil an dem Charakter der Unbestimmtheit, der an der Mehrheit hervorzuheben war; positiv aber vertritt sie nichts Geringeres als den Fort- oder Übergang zu etwas Neuem(wie eben in der Quantität die Mehrheit).

3. Daher bleibt es auch nicht der Wahl überlassen, sondern ist zwingend notwendig, daß ebenfalls das Dritte sich in der Qualität wiederfinde: die Wiedervereinigung des durch die Verschiedenheit bloß Auseinandergehaltenen und

in unbestimmter Reihe Zusammengestellten in einer übergreifenden, hier aber qualitativen Einheit. Verschiedenheit scheidet nicht bloß, sondern verbindet auch wieder. Verschiedenheit fordert Unterscheidung, das heißt Scheidung unter einer höheren Einheit, nämlich Einheit des Gesichtspunktes. Unterscheiden heißt aber schon beziehen, vergleichen; nicht bloß auseinander- sondern auch wiederum zusammenhalten. Überhaupt läßt sich nichts im Denken auseinanderhalten, ohne daß es zugleich zusammengehalten wird; man hätte sonst Eines allein und das Andere allein, aber nicht Eines als vom Anderen unterschieden, also im Gegenverhältnis zu ihm. Selbst die bloße Aussage der Verschiedenheit setzt Vergleichung voraus; Vergleichung aber erfordert einen gemeinsamen Gesichtspunkt, unter dem man vergleicht, also einen gegenüber dem Verglichenen höheren Punkt, von dem aus beides gemeinsam sich dem Blick des Denkens gleichsam unterbreitet; eine höhere Einheit der Betrachtung, in der die vorher Geschiedenen sich dem Denken wieder vereinen, so wie vom höheren Standort das aus niederen Standorten getrennt Gesehene in ein Bild, in eine „Schau" (εἰς μίαν ἰδέαν, sagt Plato) zusammengeschaut wird. Diese Wiedervereinigung ist ganz analog der Vereinigung der Mehreren in der neuen quantitativen Einheit des Totale. Auch würde ein Totale nie zustandekommen ohne gleichzeitig qualitative Vereinigung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt („Merkmal"). Dieser stellt also notwendig dar eine neue qualitative Einheit des qualitativ Mehreren, oder Einerleiheit des Mehrerlei, Identität des Verschiedenen. Sie ist in der Logik am bekanntesten unter dem Namen der Gattung. Diese vertritt deutlich die dritte Stufe des Prozesses der qualitativen Setzung. Denn das entscheidende Moment im Begriff der Gattung ist nicht die äußere Umfassung (die Einheit des Begriffsumfangs), sondern die innere, zentrale Vereinigung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt des Denkens (dem „Gattungsmerkmal“, als der Einheit des Begriffsinhalts), das heißt in einer neuen, man pflegt zu sagen, höheren Identität.

Hierbei wird nun aber eben jene Unterscheidung wichtig, die wir Kant betonen sahen: daß in der Qualität die Totalität als das Zugrundeliegende, die darin eingehenden Elemente als nur in ihr nicht bloß bestehend sondern entstehend, als Diskretion des ursprünglich Kontinuierlichen betrachtet werden, wogegen in der Quantität die Teile vorhergingen und das Ganze nur als Ganzes aus den Teilen gesetzt wurde. Die „komprehensive“, das Mannigfaltige innerlich in sich begreifende Einheit der qualitativen Allheit ist nicht, wie die bloß „kompositive“ (äußerlich aus den Teilen sich zusammensetzende) der quantitativen Allheit, vielmehr Ganzheit, das Nachfolgende, sondern das logisch Voraufgehende, Ursprüngliche. Damit wird die qualitative Einheit Ureinheit, das „Genos“ wird als das Erzeugende, die Einheit als das, woraus die Vielheit erst hervorgehe, also als Ursprungseinheit gedacht. Der prägnante Sinn der Ursprungseinheit aber ist, wie wir wissen, die Kontinuität, die zentrale, zentrierende Kraft des Denkens. Die bloß quantitativ verstandene Allheit ist nur peripherische Umfassung; diese aber hat ihren Grund und Quell zu suchen in der zentralen Vereinigung, welche durch die qualitative Allheit allein geleistet wird. Die logische Allheit, die Allgemeinheit des Begriffs und Urteils, beruht ganz auf dieser qualitativen Allheit, nicht auf der quantitativen, überhaupt fälschlich so benannten „Allheit“, mit der Kant sie in eine keineswegs überzeugende Beziehung gesetzt hat.

Also entsprechen sich die beiderseits drei Stufen des Prozesses der quantitativen und qualitativen Synthesis übrigens zwar so genau, wie wir erwarten mußten, aber mit diesem wesentlichen Unterschiede, der eben die quantitative Richtung der synthetischen Einheit als peripherische von der qualitativen als zentraler aufs tiefste unterscheidet. Zusammen stellen beide die Grundform aller logischen Entwicklung, alles Denkfortschritts: als zugleich peripherische Ausbreitung und zentrale Vertiefung, und zwar Ausbreitung kraft der Vertiefung, in ihrer Reinheit dar. Das an sich Erste aber ist die Ursprungseinheit der dritten Qualitätsstufe; denn durchaus wird im Denken der Umfang der Betrachtung bestimmt durch den Inhalt, die Weite des Gesichtskreises durch die Höhe des Gesichtspunktes, nicht umgekehrt.

Diese notwendige Entsprechung der Quantität und Qualität findet sich deutlich ausgesprochen schon bei Aristoteles (Metaph. X, 3): Was immer verschieden ist (διαφέρον), ist notwendig in etwas (in bestimmter Hinsicht) verschieden (τινὶ διαφέρον), also ist ein Identisches, worin sie sich unterscheiden; dies ist die Gattung (γένος). Die Verschiedenen sind also nicht bloß jedes ein Anderes (ἕτερα), sondern auch — nämlich unter dem gemeinsamen Gesichtspunkt ihrer Unterscheidung — wiederum dasselbe. Demgemäß stellt dann Aristoteles oft das quantitativ und qualitativ Eine und Andere einander parallel.

Eine solche Entsprechung ist nicht bloß ein empfehlender Vorzug, es wäre nicht nur gleichsam ein Schönheitsfehler des Systems der logischen Grundfunktionen, wenn sie mangelte; sie ist vollends nicht (wie man es Kant oft vorgeworfen hat) eine bloße logische Spielerei, etwa vergleichbar den Zahlenspekulationen der Pythagoreer, sondern sie muß dem, der über den Sinn der Quantität und Qualität und ihren gemeinsamen Ursprung im Grundprozess der synthetischen Einheit sich klar geworden ist, als unerläßlich notwendig einleuchten. Ein Einzelnes ist überhaupt notwendig ein einzelnes *A*, ein Mehreres notwendig zugleich Unterscheidbares; es kann kein numerisch Eines gesetzt werden ohne zugleich qualitative Einheit (Identität) dessen, was als Eines gesetzt werden soll; keine Mehrheit ohne irgendeine inhaltliche Verschiedenheit, die das Mehrere auseinanderhält und es hindert, in Eins zusammenzufließen. Daß aber ebenso das Dritte, die Wiederzusammenfassung des auf der zweiten

Stufe Gesonderten in höherer Einheit, auf beiden Seiten, der quantitativen und qualitativen, nicht bloß gleich notwendig, sondern auch notwendig miteinander gegeben ist, folgt schon eben hieraus. Wenn aber die Vereinigung in der bloßen Quantität etwa auch unterbleiben zu können schiene, so zeigt sie sich dagegen in der Qualität durchaus unerläßlich. Ein jedes ist überhaupt, was es ist, nur dadurch, daß es sich unterscheidet; es unterscheidet sich nur, indem es sich vergleicht, also unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt der Vergleichung fällt; und zwar ergibt diesen identischen Gesichtspunkt notwendig allemal der höhere, das heißt ursprünglichere, fundamentalere Begriff, aus dem die Unterschiede erst resultierend gedacht werden; z. B. Blau unterscheidet sich von Rot usw. als Farbe, Farbe von Ton usw. als Qualität, Qualität von Quantität usw. als Denkrichtung überhaupt.

III. Die Relation.

§ 8. (*Sinn und Aufbau der Relation als Ordnungssynthese; „Natur“.*) Mehr als die beiden eng zusammengehörigen Grundverfahren der Quantität und Qualität gibt die synthetische Einheit unmittelbar nicht her. Was anders sollte aus ihr fließen als ein Gesetz für das Denken des Mannigfaltigen einerseits, der zentralen Vereinigung oder vielmehr Ureinheit dieses Mannigfaltigen andererseits? Auch mag der Denkgegenstand in Quantität und Qualität zunächst erschöpft scheinen. Selbst für die Veränderlichkeit des Gegenstandes ist darin die wesentliche Grundlage schon gegeben; die Größe, in ihrer gesetzmäßigen Erzeugung aus der qualitativen Einheit der Kontinuität gedacht, ist schon damit die Veränderliche. Was also fehlt noch, und wie ist über das bis dahin Erreichte überhaupt hinauszukommen?

Wir haben vielleicht den Gegenstand, aber noch nicht die Gegenstände, nämlich nach ihren gegenseitigen Verhältnissen der Abhängigkeit, das heißt nach der Art, wie sie nicht bloß jeder für sich als bestimmt überhaupt gedacht, sondern als in einer Erfahrung sich untereinander bestimmend erkannt werden. Erfahrung mag noch so sehr auf dem Denken beruhen, sie ist doch etwas mehr als nur überhaupt Denken; jedenfalls mehr als das Denken, welches nur Denken der Quantität und Qualität wäre.

Nicht als hätte die Logik hier nun doch zum „gegebenen" Wirklichen zu flüchten; das hieße den Weg des reinen Denkens schlechthin verlassen. Sondern was Erfahrung mehr enthält gegenüber dem Denken, wie wir es bis dahin kennen lernten, dem Denken der Quantität und Qualität, muß in seiner Möglichkeit doch wiederum als Denken, als eine höhere Stufe, gleichsam eine höhere Potenz des Denkens sich verstehen lassen. Wirklichkeit selbst, Gegebenheit ist Denkbestimmung, und zuletzt Leistung reinen Denkens. Aber auch noch nicht diese (die erst die Modalität zu vertreten hat) steht hier in Frage, wohl aber die bisher noch nicht erbrachten methodischen Vorbedingungen dazu.

Diese können nur gesucht werden, nicht in der einfachen, sondern in der gegenseitigen Bestimmung; in wechselseitigen Abhängigkeitsbeziehungen also, gemäß welchen Gegenstände der ersten Stufe (d. h. quantitativ-qualitativ bestimmte) sich gegenseitig bestimmen. Also nicht mehr in einer einfachen Synthese, sondern in einer neuen Synthesis von Synthesen, oder synthetischen Einheit synthetischer Einheiten. So sieht man eher ab, wieso hier etwas Neues hervorgehen kann; gibt die einfache Synthese nichts weiteres her als Quantität und Qualität, so kann doch die Synthesis der Synthesen zu etwas führen, das in der einfachen Synthesis noch nicht lag.

Kant gebraucht nun für diese neue Richtung der Denkbestimmung den Terminus der Relation. Er versteht diese aber sichtlich als Relation von Relationen, Synthesis von Synthesen. Beziehung überhaupt ist auch die Quantität, desgleichen die Qualität, ja jede synthetische Einheit, mithin jedes Urteil (vgl. Kant, Kr. § 19). Denken heißt überhaupt Beziehen. In einem anderen Ausdruck aber, den Kant für seine „Relation" gebraucht, dem der „dynamischen Verknüpfung", kommt es zu voller Deutlichkeit, welche bestimmte Art der Relation hier gemeint ist: die Relation gesetzmäßiger Abhängigkeit, die Funktionalbeziehung. Die Kantische Relation wird, nach ihrer rein logischen Bedeutung, in der Tat vollständig dargestellt durch die Funktion.

Kant führt nun hier wiederum sein dreigliedriges Schema durch, auch hier in nicht voll überzeugender Parallele mit den Urteilsarten: dem kategorischen, hypothetischen und disjunktiven Urteil. Wir werden seinem Ergebnis im ganzen nahe bleiben, aber gelangen dazu auf schlichterem Wege, indem wir direkt die Funktionalbeziehung untersuchen und entwickeln, durch welche die Abhängigkeiten quantitativ-qualitativ bestimmter Gegenstände (also Größen) in strengem Stufengang sich bestimmen müssen, um die Einheit eines dynamischen Zusammenhanges zu ermöglichen.

Aufgabe ist: Ordnung des Einen nach (d. h. gemäß) dem Anderen, wodurch ein System von Ordnungen, das heißt eine Gesamtordnung entstehe. Eine solche ist, in der Sprache der Mathematik: die Funktion, in der Sprache der Naturwissenschaft: das Gesetz. Die Glieder, unter denen solche Ordnung herzustellen, sind, wie gesagt, Ergebnisse einfacher, quantitativ-qualitativer Synthesen, also Größenreihen, je für sich aufgebaut nach den Gesetzen der quantitativ-qualitativen Synthesis. Die Ordnung dieser Reihen aber, gemäß welcher sie sich untereinander bestimmen, wird dann bestehen müssen in solchen Beziehungen unter ihnen, welche eine gesetzmäßige Verknüpfung von Glied zu Glied der verglichenen Reihen herstellen. Man kann es füglich bezeichnen als Ordnungssynthese, wobei zu denken ist nicht bloß an eine irgendwie geordnete Fortschreitung von Glied zu Glied in jeder Einzelreihe; dazu würde die quantitativ-qualitative Synthesis für sich ausreichen; sondern vielmehr daran, daß die Art der Ordnung, die an sich auf vielfache Weise möglich ist, für jede Einzelreihe sich bestimme durch eine gesetzmäßige Beziehung zu irgendwelchen, schließlich allen parallelen Reihen; das heißt, es wird die Ordnung in jeder Einzelreihe determinierbar, indem sie an die Bedingung einer bestimmten gesetzmäßigen Beziehung zu den Parallelreihen gebunden wird. Es wird damit das methodische Mittel geschaffen, die an sich grenzenlos mögliche Anwendung der quantitativ-qualitativen Synthesis auf engere und schließlich eine engste Bedingung einzuschränken, indem die Einfügung jeder Einzelreihe in die Kontinuität eines schließlich durchgängigen gesetzmäßigen Zusammenhanges, in dem alles mit allem stehe, gefordert ist. Diese letzte Forderung einer allseitigen Bestimmung, das heißt einer solchen, die nichts unbestimmt läßt, geht über das bloß Mathematische schon hinaus; sie ist streng genommen auch nicht mehr zum Verfahren der Relation zu rechnen, sondern gehört schon zur Modalität; aber die Methode der Relation, die als solche rein mathematisch ist, nämlich die der Funktion, gibt die Mittel des reinen Denkens, wodurch diese Forderung allein erfüllbar, ja selbst nur als Forderung klar verständlich wird. Darauf beruht, nach Kants Entdeckung, nichts geringeres als überhaupt der Begriff einer Natur, nämlich die Möglichkeit, Natur als System von Gesetzen (dynamischen Verknüpfungen) überhaupt nur zu denken; so daß wirklich „der Verstand der Urheber“ der gesetzmäßigen Ordnung ist, die wir im Begriff einer Natur denken.

Ein „Gesetz“ bedeutet in der Tat genau, was wir mit dem von Kant hierfür gebrauchten Namen der Relation bezeichnen. Ein Gesetz spricht konditional: Wenn A, dann B; es bedeutet eine Ordnung des Einen nach (gemäß) dem Anderen nämlich einer Erscheinungsreihe, genauer einer Reihe gedanklicher Setzungen, in denen das Denken die Erscheinungen repräsentiert, nach der anderen; eine Ordnung, die sich von Glied zu Glied verschiedener, aber unter sich in Verknüpfung stehender paralleler Reihen muß durchführen lassen. Ein solcher Zusammenhang knüpft sich im Entwicklungsgange des Denkens anfangs nur zwischen einzelnen hervorstechenden Reihen von Erscheinungen; erst nach und nach erhebt sich das Denken zu der hohen Forderung eines einzigen, allbefassenden Zusammenhanges; freilich um sofort auch sich bewußt zu werden, daß dieser nur auf einzige Art möglich gedachte Zusammenhang der Natur für den endlichen Verstand nicht mehr als eine „Idee", das heißt der Ausdruck einer ewigen, nie abschließend lösbaren Aufgabe ist. Gefordert, und in der Forderung vorausgesetzt, ist er darum nicht weniger; sein Gedanke steht fest und dient als Maß, an dem die jeweils erreichte Erkenntnis der „Natur" (das heißt eben dieses verlangten durchgängigen Gesetzeszusammenhanges) sich bemißt: genau in dem Maße wird Natur, oder in anderer Wendung: Wirklichkeit erkannt sein, als eine einheitliche dynamische Verknüpfung erreicht, oder als für den ganzen Umfang des jeweils betrachteten Gebietes die Wahl zwischen verschiedenen möglichen Weisen funktionaler Verknüpfung ausgeschlossen oder doch verengt, also bestimmte Verknüpfungen, wenigstens bestimmte Weisen der Verknüpfung, festgelegt sind. Freilich aus jeder solchen Festlegung entspringen wieder neue Fragen; zu einem absoluten Abschluß wird hier, wie im ganzen, unendlichen Prozeß der Erfahrung, überhaupt nicht zu gelangen sein. Nach einem solchen ist aber auch vorerst nicht die Frage; sondern nach einer Methode fortschreitender Determination.

Eine solche wird sich nun notwendig wieder in einer Stufenfolge aufbauen, und diese wird den schon bekannten Stufenfolgen der quantitativen und qualitativen Synthesis notwendig analog sein, da sie gleich diesen nur beruhen kann auf dem Grundgesetze der synthetischen Einheit, als dem allgemeinen Gesetze der Entwicklung jedes synthetischen Prozesses. Wir werden demnach auch hier zunächst einen Ansatz, eine Erstsetzung brauchen, als Fundament, als Bezugsgrundlage und gleichsam als Maß für den ganzen Aufbau der Ordnungssynthese. Es wird zweitens ein in sich unbestimmter, aber auch unbeschränkter Fortgang vom Einen zum Anderen sich gestalten müssen, in dem besonders der Prozeßcharakter auch dieses dritten synthetischen Verfahrens sich darstellen wird; endlich drittens, da auf jeder erreichten Stufe ein Abschluß, im gleichen relativen Sinn wie in der Quantität und Qualität, notwendig ist, so wird auch ein Verfahren solches Ab- und Zusammenschlusses der bis dahin vollbrachten Einzelschritte der Ordnungssynthese zu einer (relativ) geschlossenen Gesamtordnung zu definieren sein, so also, daß (wie in der Quantität und Qualität) dieser Abschluß nie ein absolutes Ende, sondern nur einen Einschnitt bedeutet, indem das Ziel eines vollbrachten Schritts wieder zum Ausgang für einen neuen wird, und so an sich unbeschränkt weiter. Es braucht nun nur dies allgemeine Gesetz jeder Denkfortschreitung auf die besondere Aufgabe der Ordnungssynthese angewandt zu werden, so ergibt sich das folgende Schema ihres Aufbaues.

§ 9. (*Die Grundreihe. Das Denkgesetz der Substantialität.*) Die Möglichkeit einer Reihenordnung der verlangten Art erfordert als Erstes eine feste Grundreihe, als Fundament der ganzen Reihenordnung. Wie für die Quantität das erste Erfordernis die Einheit als Fundament aller Quantitätssetzung, als quantitative Grundsetzung und somit Maß, das heißt Bestimmungsmittel jeder quantitativen Mannigfaltigkeit; für die Qualität ebenso die Identität als qualitative Grundsetzung und somit Vergleichsgrundlage aller qualitativen Mannigfaltigkeit: so ist für die Ordnungs- oder Beziehungssynthese das erste Erfordernis eine feste Bezugsgrundlage, ein eigentliches *fundamentum relationis*, das heißt eine Grundreihe, die für die verlangten Ordnungen das einige und selbige, gleichförmige und stetige Maß darstelle; also die Aufstellung eines Stellensystems, einer Skala, in welche der Verlauf jeder der untereinander zu verknüpfenden Veränderungsreihen sich einzeichne.

Daraus versteht sich die uralte Forderung des Konstanten als Grundlage zu jeder Veränderung, nämlich ihrer Bestimmbarkeit. Ließe überhaupt nichts sich als konstant festhalten, so wäre alle Möglichkeit dahin, die Veränderung selbst zur Bestimmung zu bringen. Die gemeine Vorstellung nimmt im naiven Gefühl dieses Bedürfnisses einfach die gegebenen Dinge als wenigstens in den Grundbestimmungen fest und unveränderlich an, während doch alles und jedes an diesen vermeintlich gegebenen Dingen sich wandelbar erweist. Die Aussage selbst fordert (wie Aristoteles gesehen hat) in jedem Fall eine wenigstens für sie feste Bezugsgrundlage, ein ὑποκείμενον, *subjectum*, ein „Unterliegendes"; denn wenn nicht wenigstens in gewissen letzten Bestimmungen das fest wäre, wovon Aussage getan wird, welcher feste Sinn könnte der Aussage selbst verbleiben? Auf diese schlichte, doch nicht etwa bloß grammatische Erwägung wagte Aristoteles seinen Begriff der Substanz (οὐσία), als des ὑποκείμενον, geradezu als den Fundamentalbegriff seiner Metaphysik, seiner Lehre vom „Seienden als seiend" zu gründen. Und wenigstens nicht diese fundamentale Erwägung ist als solche grundlos. Nur allzu unbedenklich folgert dann Aristoteles von diesem unabweisbaren Bedürfnis der Erkenntnis auf die Notwendigkeit, daß dies Bedürfnis auch befriedigt sei. Zwar konnte er ja nicht übersehen, daß in unzähligen Fällen die vermeintlich festen Grundlagen unserer Urteile wirklich sehr variabel sind; aber dann mußten sie variabele Bestimmungen an anderen, beharrenden Subjekten sein, oder, falls ihre Subjekte sich wiederum variabel erwiesen, wieder an anderen, und so fort, keinesfalls aber ins Unendliche, weil dann überhaupt nichts bestimmt oder bestimmbar wäre. Aber ist diese uns so nötige Bestimmtheit des Subjekts der Aussage darum gegeben? Die sinnlichen Dinge jedenfalls geben uns invariabele Subjekte nicht, sondern solche müßten in jedem Falle erst wissenschaftlich konstruiert werden.

So sucht denn auch die Wissenschaft unveränderliche Grundbestimmungen. Doch sucht sie sie (wie Kant besonders schön ausgeführt hat) nicht mehr in sogenannten Dingen, sondern in beharrenden Relationen, die ihr fortan die Dinge vertreten müssen. So setzt sie hypothetisch irgendwelche Relationen als letzte: Massen, Energien oder was es sei. Erreicht sie damit je schlechthin Invariabeles? Im günstigen Fall erweisen solche Hypothesen sich für eine gewisse Zeit haltbar; aber sobald der Kreis der Erfahrung sich wieder erweitert — und wir haben ja in unserer Zeit solchen Umsturz, ja nicht bloß einen, sondern eine ganze Folge solcher Revolutionen erlebt —, so gerät das wie für Ewigkeiten fest Geglaubte von neuem ins Wanken. Aber unumgänglich bleibt doch, irgendein Letztes zu supponieren, ein Letztes nicht an sich, sondern für die Rechnung, die uns die Natur wissenschaftlich darstellt. Der logische Grund dieser Supposition ist zuletzt kein anderer als die Notwendigkeit, das Wirkliche auf einzige Art bestimmt zu denken; also muß es jedenfalls bezogen werden auf eine in einziger Art bestimmte Ordnung der miteinander in einer Natur zusammenstehenden Erscheinungsreihen. Daß eine solche empirisch gegeben weder ist noch je werden könnte, macht es nur um so fühlbarer, daß diese Ansetzung eine reine Denkleistung ist und kein Datum.

§ 10. (*Zeit und Raum. Beharrung und Bewegung.*) Hier nun entspringt uns zuerst der Begriff der Zeit, als einziger, für alles Geschehen unterschiedslos gemeinsamer und fundamentaler Ordnungsweise. Sie ist der nächste und deutlichste Ausdruck der durch das erste Relationsgesetz geforderten identischen Stellenordnung oder Skala, in welche der Verlauf aller einzelnen Veränderungen, deren Inbegriff das Gesamtgeschehen der „Natur“ darstellen soll, sich einzuzeichnen hat. Sie bedeutet also eben dies: daß eine gemeinsam zugrunde liegende gleichförmige Ordnungsfolge sein müsse, welche in den sich entsprechenden Stellziffern der Einzelreihen: $x_1\ x_2\ x_3 \ldots, y_1\ y_2\ y_3 \ldots, z_1\ z_2\ z_3 \ldots$ und so fort sich ausdrücken würde; durch deren Identität dann alle diese verschiedenen Reihen zugleich aufeinander in einer gemeinsamen Ordnung bezogen sein würden.[1])

Indem aber die verschiedenen Veränderungsreihen solcherart notwendig auf dieselbe einzige Grundreihe, eben die Zeitreihe, bezogen werden, so wird es dadurch möglich, daß zugleich das Miteinander dieser Reihen in eine einzige, gemeinsame Ordnung kommt. Durch die bloße Gleichzeitigkeit wäre das Miteinandersein noch nicht zureichend bestimmt, es würde keine bestimmte Auseinanderhaltung und wiederum Vereinigung des Auseinandergehaltenen, und das heißt eben: Ordnung des Miteinander, dadurch allein schon geschaffen, d. i. gesetzmäßig begründet. Also bedarf es noch einer wiederum gemeinsamen und identischen, zugleich homogenen und stetigen Ordnung des Gleichzeitigen, das, in seiner Gleichzeitigkeit, doch nicht gänzlich, der Stelle nach, in die das Denken es zu setzen habe, zusammenfallen darf, sondern ebensowohl geschieden wie in Verein gedacht werden muß; d. h. einer Ordnung

---

1) Zur Verdeutlichung diene das nachstehende Schema:

T	X	Y	Z	. . .	(Sim.)
1	x_1	y_1	z_1	. . .	
2	x_2	y_2	z_2	. . .	
3	x_3	y_3	z_3	. . .	
.	.	.	.	. . .	
.	.	.	.	. . .	
(Sukz.)	.	.	.	. . .	

des Miteinander, Raum genannt. Weshalb diese Ordnung nicht wiederum eindimensional ist, wie die der Zeit nach ihrer Herleitung es sein muß, und welche näheren Bestimmungen für sie gelten müssen, darf und muß späterer Erörterung vorbehalten bleiben; hier genügt es, voraus darauf hinzuweisen, daß und aus welchem letzten logischen Grunde beide Ordnungsweisen unerläßlich sind und erst zusammen die geforderte fixe Grundlage zur Möglichkeit der Bestimmung der Veränderungen in ihren wechselseitigen dynamischen Beziehungen liefern.

Die bestimmte Zuordnung aber bestimmter Raumpunkte zu bestimmten Zeitpunkten im Verlauf einer Veränderung ist es zugleich, welche den Verlauf dieser Änderung selbst, fundamental also als Bewegung (räumliche Änderung in der Zeit) definierbar macht. An diesem Grundbegriff der Bewegung läßt sich die notwendige Korrelation von Beharrung und Veränderung besonders schön erkennen. In der Bewegung beharrt gewissermaßen alles, so daß es kaum eine Paradoxie genannt werden kann, daß gerade in der Bewegung die Substantialität zum klarsten Ausdruck kommt. Läßt man einen Punkt sich über eine Fläche bewegen, so bleibt erstens der Punkt selbst, der die Fläche durchmißt, in dieser Bewegung, der Voraussetzung nach, ein und derselbe bewegte Punkt; es bleibt zweitens die Bahn, die er durchmißt, fest an ihrer Stelle; er nimmt sie nicht mit, sondern „legt sie zurück". Der Ort selbst ist ja unbeweglich, er hat überhaupt keine andere Funktion als zu stehen, wo er steht. Aber was heißt es, daß der Punkt die Reihe der Örter durchläuft? Unser Gedanke vielmehr durchläuft die Bahn, ordnet von Punkt zu Punkt des Denkens ein sonst nicht existierendes, nur in unserem Gedanken gesetztes identisches X den festbleibenden Punkten der Bahn für die ebenfalls dem Gedanken festbleibenden Zeitpunkte (welche beide ebenso nur in unserem Gedanken bestehen) in wiederum fester Weise zu. Eben der

Gedanke entschwindet dabei nicht sich selbst. Wir könnten gar nicht eine Bewegung von P_1 nach P_2 denken, wenn nicht in unserem Gedanken das Vergangene aufbehalten bliebe, d. h. jene Zuordnung bestimmter Reihen von Raumpunkten zu entsprechenden Zeitpunkten, wie die Zuordnung der Werte der Koordinaten zueinander in der Entwicklung einer Funktion, sich feststellte. So wird die Veränderung selbst, die Bewegung „festgestellt"; und da wir anders als in diesem Gedanken die Bewegung gar nicht haben, so steht also nunmehr die Bewegung selbst. So mag es Parmenides, wenn auch dunkel, vorgeschwebt haben, wenn er den seltsamen Satz aufstellte: daß im reinen Denken und folglich im Sein es überhaupt nur Stillstand, nicht Werden und Vergehen noch Veränderung (Bewegung) gebe; wie er übrigens auch geradezu erklärt, daß das Vergangene ihm, dem Denken, und also dem Sein, nicht vergangen, das Kommende nicht erst kommend (oder jenes nicht mehr, dieses noch nicht da), ebenso das Ferne nah, das Außereinander im Raume räumlich wie in der Zeit zeitlich allgegenwärtig sei. Denn im Gedanken gebe es überhaupt kein Nichtsein, sondern nur Sein, jenes Sein, das er ganz allgemein dem Denken gleichsetzt, genauer jedoch dem Gedachtsein, dem festen Bezug des Denkens (οὕνεκέν ἐστι νόημα, „um deswillen das Denken ist"). Mit Grund, denn Sein bedeutet Bestimmtheit, also Feststellung im Denken. Nur denken läßt sich, daß etwas sei, und nur daß etwas sei, will sich denken lassen. Aber so hebt doch eben diese Voraussetzung die Bewegung nicht auf; sondern, da die Zuordnung der Raumpunkte zu den Zeitpunkten, welche die Bewegung definiert, selbst zu dem gehört, was dem Denken sich feststellt und damit ihm ist, so ist also die Bewegung, so kommt gerade sie dem Sein und das Sein ihr zu, ja dieses ist wohl gar ursprünglich durch sie zu definieren. Das ist es, was Parmenides nur darum nicht erkennen konnte, weil er einseitig nur auf dies einzige Erfordernis des Denkens, das Festbleiben der gedanklichen Bestimmung, sein Augenmerk gerichtet hielt.

Diese bloße Festlegung ist aber eben nicht schon das Ganze. Es fördert ebensowenig, einseitig an der Kehrseite dieser Betrachtung zu haften, nämlich daß vielmehr alles im Fluß der Veränderung sei. Gewiß bedeutet schon die Zeit selbst den Verfluß des Geschehens; sie hält selbst in diesem Fluß nicht an, sondern läuft immer vorwärts; und daß der pure Raum etwa beharre, ist schon darum ein nichtiger Satz, weil dieser pure Raum für sich überhaupt nichts ist, weder das beharren noch das wechseln könnte. Die Stellenordnung des Raumes beharrt freilich als Denkgrundlage dem Gedanken; aber eben nur als Grundlage zur Bestimmung eines anderweitigen Inhalts, eines Inhalts, der selbst in keiner Weise beharrt. Also hat freilich Heraklit soviel Recht wie Parmenides. Aber auch wenn man jeden von beiden dahin brächte, einzuräumen, daß der andere ebensoviel Recht habe wie er, wäre damit noch nicht alles gesagt. Gewissermaßen beharrt, gewissermaßen ändert sich alles; es fragt sich nur, welchermaßen das Eine und das Andere gilt und in welcher wechselseitigen Beziehung. Hierauf antwortet uns das Gesetz der Korrelativität, das sich auf diese wie auf alle ursprünglichen Denkbestimmungen erstreckt. Es wird die Beharrung ebenso nur bestimmbar in bezug auf die Veränderung, wie umgekehrt. Das wahre Fundament der Relation ist also weder die Beharrung allein noch vollends die Veränderung, sondern das Grundverhältnis des Beharrlichen und Veränderlichen. Beharrung bedeutet in Hinsicht der Zeit: Dauer. Wenn aber nichts sich änderte, wäre überhaupt keine Zeit bestimmbar, auch nicht eine Zeit des Sichgleichbleibens, der Dauer. Umgekehrt wäre keine Veränderung bestimmbar, wenn nichts beharrte. Beharrung also und Veränderung sind zueinander streng korrelativ, wie Plato klar gesehen hat. Beide bedeuten in der Tat: Identität und Nichtidentität des Zeitinhalts im Unterschied der Zeit selbst. Wie nun Identität nur bestimmbar ist im Gegenverhältnis zur Verschiedenheit, Verschiedenheit nur im Gegenverhältnis zur Identität, so Beharrung nur im Gegenverhältnis zur Veränderung, Veränderung nur im Gegenverhältnis zur Beharrung. Durch diese Einsicht hat Plato gleichzeitig Parmenides und Heraklit korrigiert. Also nicht Beharrung allein gilt oder Veränderung allein, sondern Beharrung und Veränderung, Beharrung für Veränderung, Veränderung des Beharrlichen. Auch daß und wie beide gleichermaßen in den Grundmethoden des Denkens wurzeln, hat Plato klar gesehen. Die Beharrung ist zuletzt die der Voraussetzungen des Denkens, der Wechsel: Wechsel der Prädikate im Urteil. Aber auch die Subjekte können dabei nicht unterschiedslos dieselben bleiben, denn unterschiedslos demselben Subjekt könnten nicht die an sich einander kontradizierenden Prädikate mit gleicher Wahrheit beigelegt werden. Aber dasselbe Subjekt in einem anderen Zeitpunkt ist in der Tat nicht mehr dasselbe, da die Beziehungen zu allem anderen von Moment zu Moment veränderlich sind und ohne diese Beziehungen, anders als durch sie es selbst nicht definiert ist. Noch mehr ergab sich für Plato durch die Untersuchung der Bestimmtheiten selbst, welche wechselnd bald diesem bald jenem Subjekt zufallen, also vom Einen zum Anderen gleichsam wandern. Nämlich es ergab sich, daß bei allem Ortswechsel die Bestimmtheiten selbst, welche sukzessiv anderen und anderen Orten zugeordnet werden, zuletzt dieselben bleiben müssen, also ein gewisser Grundbestand sich muß definieren lassen, der im beständigen Wechsel der Bezugsorte sich ebenso unzerstörlich erhalte wie andererseits die Bezugsorte selbst, das System der Stellen, zwischen denen die Inhaltsbestimmtheiten wandern, d. h. der Raum. Hiermit ist erstens die Grundlage für Zeit und Raum, wesentlich in dem Sinne, wie wir sie aus den Gesetzen der Relation herleiten konnten, und es ist zweitens das Grundgesetz der Erhaltung erkannt, fast ganz so, wie es der modernen Voraussetzung der Erhaltung der Energie als logischer Kern zugrunde liegt. Wie dieses einfache Grundschema sich im Aufbau der Mechanik durchführt und bewährt, wird im letzten Kapitel zur Sprache kommen; es wird übrigens dem Kundigen schon hier absehbar sein.

Zu betonen ist indessen, daß die Gesetze der Relation nicht erst für den Aufbau der Mechanik, sondern schon für den der reinen Mathematik erforderlich sind. Es wäre gar nicht möglich, Natur selbst in Gesetzen von mathematischer Form darzustellen, wenn nicht eben die Grundform der Gesetzlichkeit für Mathematik und Naturwissenschaft schließlich dieselbe wäre. Es war zu reden von Zeit, Raum, Bewegung; das scheinen Naturbegriffe zu sein; es sind aber ebensowohl Begriffe reiner Mathematik. Ist Zeit nichts anderes als identische Stellordnung, so wird die Zeit rein mathematisch zum „Parameter"; nicht anders die Raumkoordinaten. Und ist Bewegung nichts als Zuordnung bestimmter Raumpunkte zu bestimmten Zeitpunkten, so ist auch sie damit rein mathematisch dargestellt, ohne Widerspruch damit, daß Mathematik „Wissenschaft des Immerseienden" ist; denn die Zuordnung selbst, welche die Bewegung zu Begriff bringt, steht und bewegt sich nicht. So hatte Galilei recht, den Übergang von der Mathematik zur Mechanik streng stetig, Mechanik als bloß erweiterte Mathematik zu verstehen. Erst die Forderung der „Wirklichkeit" begründet den radikalen Unterschied; diese gehört aber erst der Modalität an.

§ 11. (*Kausalität und Wechselwirkung.*) Unschwer sind jetzt schon die beiden Richtungen, in denen auf der gegebenen Basis der Grundreihe die Ordnungssynthese sich weiter durchführen muß, zu erkennen. Nämlich sie muß, wie Kant richtig gesehen hat, sich durchführen als Ordnung nach den beiden oben schon unterschiedenen Momenten der Sukzession und Simultanëität.

Das erstere betrifft die Folge der Momente von Glied zu Glied zunächst einer einzelnen Veränderungsreihe, dann einer folgenden und so fort, so daß sie sich auf das ganze System der in Erwägung kommenden Reihen nach und nach ausdehnt. Und zwar ist in dieser Richtung gefordert, daß allemal, wenn ein voraufgehendes Glied gegeben, ein folgendes von ihm aus nach einem Gesetz bestimmbar sei. Die andere Richtung der Durchführung der Ordnungssynthese betrifft dagegen die gesetzmäßige Verknüpfung der Parallelreihen unter sich, also nach ihrer Simultanordnung. Die erstere Richtung der Ordnungssynthese begründet somit eine einseitige, die letztere eine wechselseitige Abhängigkeit. Kant hat mit vollem Recht beide bestimmt auseinandergehalten und dafür zwei verschiedene, doch eng zusammengehörige Grundsätze (und entsprechende Kategorien) angesetzt: Kausalität und Wechselwirkung. Man mag sagen: beide drücken dasselbe nur nach zwei Seiten aus; denn der Zustand eines Veränderlichen zu gegebener Zeit läßt sich nur definieren durch seine dynamischen Beziehungen zum Ganzen, dem es sich gesetzmäßig einordnet. Aber dann setzt man das fertige System der koordinierten Reihen schon voraus, während es sich gerade fragt nach den Einzelschritten des Verfahrens, zu diesem geforderten System erst zu gelangen. Da aber ist offenbar, daß man von irgendeiner einzelnen Reihe, deren Gliedfolge die Reihe der Zeitmomente darstellen soll, ausgehen und von dieser erst Schritt um Schritt weitergehen muß zur Ordnungsbestimmung zunächst einer der ersten zugeordneten Einzelreihe, und so fort, so daß allemal eine folgende Reihe nach einer vorher schon bestimmten in entsprechenden Stufen sich ordnet. Hierbei ist die Frage des Denkens allemal auf die zu bestimmende Einzelreihe gerichtet, und ist diese zunächst für sich ihrer Gliedfolge nach zu bestimmen. Der Stein wurde eine gewisse Zeit von der Sonne beschienen, davon wurde er warm; d. h.: im Momente 1 zeigte er einen bestimmten Wärmegrad, im Momente 2 einen anderen, höheren; woher kam diese Änderung des Zustandes in dem übrigens der Voraussetzung nach identisch bleibenden Subjekt; d. h., rein methodisch gesprochen: wonach ist diese Änderung auf gesetzmäßige Weise bestimmt? Das Gesetz der Kausalität antwortet hierauf nur, daß eine Ursache dafür sein mußte, d. h. etwas, irgendein Umstand oder eine Summe von Umständen (Bedingungen) im Zeitpunkt 1, welche diese Änderung bis zum Zeitpunkt 2 zum Ergebnis haben mußten, d. h. aus welchen dieses Ergebnis für den Zeitpunkt 2 nach einem Gesetze bestimmt ist. Fragt es sich dann aber weiter, welcher Art solche bestimmenden Momente seien, so kommen, wie das Beispiel klar zeigt, unumgänglich die Beziehungen zu anderen parallelen Veränderungen in Frage. Die Sonne traf vorher den Stein nicht, sei es weil die Achsendrehung der Erde noch nicht die dazu erforderliche Lage der Sonne gegen den Stein herbeigeführt hatte, oder eine Wolke den Zutritt der Sonne zum Stein hinderte oder dergleichen. Kurz es mußte etwas, nicht im Stein für sich genommen, sondern in sonstigen, aber ihn irgendwie mitberührenden Umständen sich geändert haben. Das Gesetz der Kausalität sagt nur: Unter gleichen Bedingungen im Zeitpunkt 1 gleiches Ergebnis im Zeitpunkt 2; es sagt für sich nichts darüber, welche und welcher Art diese Bedingungen seien; es behauptet nur eine Gesetzmäßigkeit der Zuordnung überhaupt eines Consequens zu einem Antecedens, eine Gesetzmäßigkeit also, die als solche und unmittelbar nur die Ordnung der Sukzession betrifft. Die Einwendungen dagegen mißverstehen nur den Sinn des Behaupteten; in der Sache nimmt jeder es so an.

Sofern nun aber nicht bloß die gesetzmäßige Ordnung in einer Einzelreihe zur Frage steht, und nur in Rücksicht auf diese die Parallelordnung der übrigen Reihen in die Erwägung miteintritt, sondern es auf das Verhältnis von Reihe zu Reihe, nämlich allemal in den korrespondierenden Gliedern, mithin auf die Simultanordnung der parallelen Veränderungsreihen ankommt, zeigt sich freilich, daß in dieser erst die Forderung der Kausalität sich wirklich erfüllt. Für eine Einzelreihe von Veränderungen möchte es genug sein, die Folge von Moment zu Moment nach einem bloß auf diese (und die feste Maßreihe) bezüglichen Gesetz zu bestimmen; in der Vergleichung der koordinierten Veränderungsreihen dagegen ergibt sich sofort, daß das Gesetz der Ordnung für jede Einzelreihe nicht anders bestimmbar ist als durch die gesetzliche Beziehung zuletzt unter allen koordinierten Reihen; daß jede von diesen für jede mitbestimmend und durch sie wiederum mitbestimmt gedacht werden muß. Daraus entsteht dann erst eine einzige Gesamtordnung, ein System, das allerdings auf jeder erreichten Stufe nur eine gewisse Zahl von Veränderungsreihen umfassen wird, aber der Forderung nach auf sämtliche parallelen Reihen, die miteinander in einer Existenz oder „Natur" begriffen gedacht werden sollen, sich erstreckt. Das ist der Kantische Grundsatz der Wechselwirkung, in welchem der Begriff der „Natur" als eines dynamischen Systems, d. h. eines einzigen allbefassenden Funktionalzusammenhanges des Geschehens sich vollendet.

IV. Die Modalität.

§ 12. (*Sinn und Begründung der Modalität.*) Es könnte scheinen, als ob mit der Wechselwirkung das System der logischen Grundfunktionen seinen Abschluß schon erreicht hätte. Nachdem aber bis soweit der Kantische Aufbau des Kategoriensystems sich im ganzen bewährt hat, dürfen wir nicht unterlassen, auch noch die letzte Art von Kategorien, die er aufgestellt hat, mit den zugehörigen Grundsätzen in

Prüfung zu ziehen. Sie heißen: Möglichkeit, Wirklichkeit (oder Dasein) und Notwendigkeit; die zugehörigen Urteilsarten — die Entsprechung ist in diesem Fall ganz direkt und einwandfrei — heißen das problematische, assertorische und apodiktische Urteil; die Grundsätze der Modalität aber sind fast nur Definitionen dessen, was Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit in Hinsicht des Erfahrungsgegenstandes bedeuten.

Nun konnten wir bis dahin alles aus der einzigen Grundfunktion der synthetischen Einheit herleiten. Hier scheint dieser Weg der Begründung verschlossen; die einfache Synthesis gab die Quantität und Qualität, die Synthesis der Synthesen die Relation; woher noch etwas Ferneres kommen sollte, sieht man nicht ab. Und dem entspricht, daß Kants Modalitätsstufen wirklich nicht neue Grundbestimmungen des Gegenstandes liefern, wie doch Kategorien sollten. Liegt es nicht also nahe, zu folgern, daß mit den je drei Stufen der Quantität, Qualität und Relation das System der logischen Grundfunktionen vollendet, für etwas Weiteres weder Bedürfnis noch Grundlage vorhanden sei?

Aber doch gibt es zu denken, daß man in der Logik stets auf diese Begriffe: Möglichkeit, Wirklichkeit, Notwendigkeit Gewicht gelegt und gerade eine spezifisch logische Bedeutung in ihnen gesucht hat. Gehören sie dem Gegenstande direkt vielleicht nicht an, dann um so mehr dem Denken, dem Erkennen — immerhin des Gegenstandes. Dies nun betont gerade Kant: die Modalitätsstufen betreffen direkt nicht den Gegenstand, wohl aber sein Verhältnis zur Erkenntnis, ihre Gegenständlichkeit. Nachdem wir uns aber überzeugt haben, wie sehr der Gegenstand überhaupt nur in der Gesetzlichkeit des Denkens, des Erkennens wurzelt, hat es wohl Sinn, dies Verhältnis auch noch besonders ins Auge zu fassen. Da nun der Prozeß der Erkenntnis der der synthetischen Einheit ist, so wird durch die Natur dieses

Prozesses auch das gesuchte Verhältnis von Erkenntnis und Gegenstand zu definieren sein.

Das vor allem hat Kant über jeden Zweifel hinausgehoben: es ist nicht ein Merkmal des Gegenstandes, abgesehen von seinem Verhältnis zur Erkenntnis, bloß möglich zu sein oder wirklich oder notwendig. Er könnte, als Gegenstand, allenfalls nur dasein, existieren, während Möglichkeit etwas weniger, Notwendigkeit etwas mehr als nur Dasein zu bedeuten scheint. Dieses Weniger und Mehr findet bloß im Denken, im Erkennen statt; aber doch in dem auf den Gegenstand, auf die Gegenständlichkeit gerichteten Denken und Erkennen. Übrigens auch wenn wir Existenz (Dasein, Wirklichkeit) dem Gegenstande beilegen, ist das gewissermaßen Tautologie; daß dem Gegenstande Existenz zukomme, besagt nichts mehr, als daß ihm die volle Gegenständlichkeit zukommt. Dies besonders auszusprechen hat nur dann Sinn, wenn man als Gegensatz im Gedanken hat den Gegenstand als bloß gedachten, dessen volle Gegenständlichkeit wenigstens noch fraglich, d. h. nur erst möglich sei. Es ist so, und: Es ist wirklich so, besagt dem Gegenstand nach völlig dasselbe; aber den letzteren Ausdruck wird man wählen, wo Veranlassung ist, das Verhältnis zur Erkenntnis zu betonen: zuvor stand es nicht fest, daß dies der Gegenstand sei, nunmehr steht es fest. Also die Feststellung ist es, worauf es ankommt. Dem Gegenstand ist es nichts Neues, zu existieren, aber uns, der Erkenntnis ist es etwas Neues, daß uns dies feststeht, während es zuvor nicht feststand. Also wird es in der Modalität sich handeln um die gesetzmäßigen Bedingungen, gemäß welchen eine auf den Gegenstand bezügliche Aussage auszusprechen ist mit dem Geltungswert des bloß Möglichen (der Hypothese), oder der feststehenden Tatsache, oder des nach einem Gesetz Notwendigen. So erfahren die Prädikate des Gegenstandes (wie Kant betont hat) keine Veränderung oder Vermehrung, nur unser Urteil über die Gegenständlichkeit „modelt“ sich in diesen drei Stufen; dies rechtfertigt die Bezeichnung dieser Stufen als solcher der Modalität.

So wird die Bedeutung dieser Kantischen Kategorien klar; es wird klar, wie sie, trotzdem sie dem Gegenstande keine neuen Bestimmungen beifügen, dennoch vom Gegenstande ausgesagt werden. Nämlich sie bezeichnen die Stufe der Erkenntnis in Hinsicht ihrer Gegenständlichkeit. Der Gegenstand, um den es sich handelt, ist eben der der Erkenntnis; sein Gegenstand-sein unterliegt selbst dem Gesetze der Erkenntnis. So ist gerade die Modalität der scharfe und abschließende Ausdruck der „Idealität" des Gegenstandes für die Erkenntnis.

Es ist sehr bemerkenswert, daß es innerhalb der bloßen Mathematik diesen Unterschied der Modalität nicht gibt. Zwar reden die Mathematiker von einer Existenz ihrer Begriffe (etwa des Irrationalen, des Imaginären), aber diese Existenz unterscheidet sich in nichts von der Möglichkeit und der Notwendigkeit. Was als mathematischer Begriff möglich, ist damit für die Mathematik sofort auch existent und sofort auch notwendig. Ist der Begriff erwiesen als in den Methoden der Mathematik begründet, so ist er damit gesichert nicht als bloß möglich, sondern mit dieser Möglichkeit für die Mathematik auch existierend, und mit dieser Existenz für sie zugleich notwendig. Dagegen in der Naturwissenschaft ist es wahrlich ein Unterschied, ob ein Satz ausgesprochen wird als bloß mögliche Hypothese, oder als erwiesene (wenn auch noch nicht weiter abgeleitete, deduzierte) Tatsache, oder endlich als aus allgemeinen Gesetzen folgende und aus diesen notwendige Tatsache. Man kann daher sagen, daß erst die Modalität den Schritt von der bloßen Mathematik zur (wenn noch so mathematischen) Naturwissenschaft vollziehe. Quantität, Qualität und Relation beschreiben nur die Instrumente, definieren nur das Verfahren des Aufbaues des Gegenstandes, aber stellen noch nicht ihn selbst dar; die Modalität gibt die allgemeinen methodischen Bedingungen an, auf Grund dieser Verfahrungsweisen nun den Gegenstand selbst, als den der Naturwissenschaft, aufzustellen. Somit beschreiben gewiß auch sie bloß ein Verfahren; etwas anderes als die reinen Verfahrungsweisen des Denkens hat die Logik überhaupt nicht zu entwickeln; aber das Verfahren kommt hier zum Abschluß, indem es das Verfahren wird, direkt den Gegenstand aufzustellen. Als allgemeines, gesetzmäßiges Verfahren übrigens muß die Modalität auch einer mathematischen Darstellung fähig sein, und sie ist es in der Tat. Die Gesetze des Beweisens, die ganz der Modalität angehören, des Beweises der Gewißheit nicht nur und der Notwendigkeit, sondern auch der Wahrscheinlichkeit, d. h. der Grade der Möglichkeit, lassen sich in rein mathematischer Gestalt entwickeln. Die Logistik als Kalkül des Beweisens bestätigt genau diese Auffassung der Modalität. Was wir an ihr auszusetzen haben, ist nur, daß sie „die" Logik zu sein behauptet, während es nur ein Teil der logischen Aufgabe, und nicht der fundamentalste, ist, den sie in anerkennenswerter Strenge und Vollständigkeit bearbeitet. Ja wir müssen unseren Begriffen gemäß sagen, daß zwar die Aufgabe ihr von der Logik diktiert, ihre ganze Arbeit aber mathematisch ist, übrigens auch innerhalb der Mathematik eine vergleichsweise untergeordnete Provinz darstellt.

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich nun auch die Frage beantworten, woher der Stufengang der Modalität stammt, nämlich wie er zum logischen Urprozeß, dem Prozeß der synthetischen Einheit, sich verhält. Er soll darstellen den Stufengang des Prozesses der Erkenntnis; der Erkenntnis natürlich des Gegenstandes; Gegenstand heißt ja nur: das was erkannt werden soll, von welchem also ein anderer Begriff sich gar nicht geben läßt als eben der der allgemeinen Aufgabe der Erkenntnis. Ist es nun sicher, daß der Gegenstand der Erkenntnis allgemein (weil die Erkenntnis selbst) in keinem anderen Prozeß sich entwickelt als in dem der synthetischen Einheit, so kann der allgemeine Stufengang der Gegenstandserkenntnis kein anderer sein als der Stufengang des Prozesses der synthetischen Einheit überhaupt, nicht irgendeiner besonderen Richtung desselben, sei es einer der bisherigen oder einer neuen, diesen etwa koordinierten.

Dieser Schluß scheint so naheliegend und zwingend, daß man sich nur wundert, nicht bei Kant selbst die Modalitätsstufen geradezu als die Stufen des synthetischen Prozesses überhaupt ausdrücklich bezeichnet zu finden. Denn daß es nur der Prozeß der Erkenntnis des Gegenstandes ist, der in diesen Stufen sich ausdrückt, ist gerade Kants entscheidende Entdeckung. Die Erkenntnis des Gegenstandes als Prozeß zu begreifen, das war die große Leistung der transzendentalen Methode Kants; und eben diese allgemeine Einsicht ist es, die sich abschließend in der Lehre von der Modalität ausdrückt. Es sind also nicht neue Leistungen der synthetischen Einheit, die in den Modalitätsstufen formuliert werden, sondern es ist die Gesamtleistung des synthetischen Prozesses der Gegenstandserkenntnis, wie er in der Quantität, der Qualität und der Relation nach seinen Grundrichtungen sich auseinanderlegte. Und zwar läßt sich unschwer erkennen, daß die drei Stufen der Modalität genau das Gemeinsame des dreistufigen Ganges jedes dieser synthetischen Prozesse zum Ausdruck bringen, nämlich in Hinsicht des Beitrags jeder Stufe zur Gestaltung des Gegenstandes in der Erkenntnis. Während also die Quantität und Qualität zusammen den einfachen Prozeß der synthetischen Einheit nach seinen beiden Grundrichtungen ausdrücken, die Relation die synthetische Einheit der synthetischen Einheiten und die dadurch ermöglichte Fortführung des Prozesses auf immer höheren Stufen darstellt, beschreibt die Modalität den allgemeinen Stufengang des synthetischen Prozesses unterschiedslos für die einfache Synthesis und die Synthesis der Synthesen, hinsichtlich des Beitrags, den eine jede Stufe dieses Prozesses für das, worauf der ganze Prozeß zielt: für die Erkenntnis des Gegenstandes, liefert.

Auf dieser Grundlage lassen sich die Stufen der Modalität nun mit Sicherheit ableiten und in ihrer Bedeutung erkennen.

§ 13. (*Der Stufengang der Modalität.*) Erstens: die Möglichkeit ist nach dieser Auffassung nichts als der logische Ausdruck des Ansatzes, es sei so, den man wagen muß, um nur überhaupt einen Anfang der Erkenntnis zu gewinnen; welcher also damit noch nicht gelten will, sondern in der Durchführung des damit nur eingeleiteten Erkenntnisprozesses erst sich zu erproben hat und, je nachdem er in dieser Probe besteht oder nicht, geltend bleibt (dann aber nicht mehr als bloß möglich), oder einem anderen Platz machen muß. Denn was sein kann, kann auch nicht sein; das heißt, wovon gesetzt werden kann, es sei, kann auch gesetzt werden, es sei nicht, solange nämlich nicht die Entscheidung im einen oder anderen Sinn gefallen ist, mit der dann sofort das Stadium des bloß Möglichen überschritten ist. Die Möglichkeit steht sehr nahe der Frage, aber sie geht über diese hinaus, indem sie den Prozeß zur Entscheidung der Frage wenigstens einleitet. Was als möglich angesehen wird, wird damit allerdings zur Frage gestellt, aber es wird zugleich schon der erste Schritt zur Beantwortung der Frage getan. Dieser besteht darin, daß man setzt, es sei so; so muß dann dieser Ansatz in der Durchführung sich bewähren, oder aber seine Undurchführbarkeit sich herausstellen.

Nun zeigt es sich, daß dies wirklich die erste Stufe in jeder der drei Richtungen des Prozesses der synthetischen Einheit war: daß ein Ansatz gemacht wird, der erst in der Durchführung sich zu bewähren hat. So ist in der Quantität die Einheit nichts für sich Bestimmtes; sie hat als richtig angesetzte Einheit sich darin erst zu bewähren, daß sie sich tauglich erweist, eine Vielheit dadurch zu messen. So ist die qualitative Einheit der Identität, solange sie nicht begründet ist in der höheren Identität der Gattung, noch nicht endgültig bestimmt, gleichsam nur ein vorläufiger Stützpunkt für das Denken; sie verlangt erst gesichert zu werden, indem sie sich begründet in dem Kontinuum der Gattung. So ist endlich in der Substanz eine als fest gedachte Grundbestimmung dessen, wovon die Aussage gelten, insbesondere woran der Verlauf der Veränderung sich bestimmen soll, erst gefordert, nicht schon gegeben. Gerade die Festigkeit dieser Ansätze ist nur provisorisch; erst die Durchführung des Verfahrens (im letzten Fall also des Relationsverfahrens, das heißt die Erkenntnis der Gesetzlichkeit der Veränderung selbst) kann den Ansatz entweder rechtfertigen oder berichtigen. Allgemein also: der Ansatz für den Gegenstand wird dahin gemacht, daß er sein solle: quantitativ einer, qualitativ einer, substantiell einer; diese allgemeine Forderung ist als Forderung gerechtfertigt durch den Sinn des synthetischen Verfahrens, durch die Notwendigkeit für es als Verfahren, als Procedere, von irgendeinem vorläufig fest gedachten Punkte auszugehen, mit dem „Satz" eines solchen (Thesis) selbst einzusetzen; aber der besondere Ansatz hat sich in jedem Fall erst zu rechtfertigen, nämlich in der weiteren Durchführung des quantitativen, des qualitativen, des Relationsverfahrens. Im Hinblick auf diese Durchführung wird die „Thesis" zur „Hypothesis".

Die zweite allgemeine Stufe ist nun eben die Durchführung des durch die erste nur eingeleiteten Prozesses: die zum Versuch gesetzte quantitative Einheit hat sich zu erproben in der Durchführung der Mehrheitssetzung (Zählung, insbesondere als Messung); die zum Versuch gesetzte qualitative Einheit im Verfahren der Vergleichung (die auch wohl qualitative Messung genannt werden könnte); die Voraussetzung eines bestimmten Grundbestandes in der Veränderung im Verfolgen des Gesetzeszusammenhanges von Veränderungsreihe zu Veränderungsreihe; einem Messen wiederum anderer Art: die Ordnung in jeder folgenden Reihe geschieht „nach Maßgabe" der voraus aufgestellten Ordnung in einer anderen Reihe.

War nun der allgemeine Ausdruck der ersten Modalitätsstufe die Hypothese, so ist jetzt die Frage, ob das bloß als Hypothese, das heißt als möglich Gesetzte wirklich „stattfinde", ob es „Tatsache" sei, ob es existiere, das heißt also: ob der Ansatz sich bewährt, die Aufstellung stehen bleibt im Fortgang des Prozesses der Gegenstandserkenntnis. Der Ausdruck nun für die Erkenntnis des Gegenstandes als stets im Gange befindlichen, nie abgeschlossenen Prozesses ist Erfahrung. Also ist es begründet, den Tatsachenbeweis, den Existenzbeweis gleichzusetzen dem Erfahrungsbeweis. Besonders das Experiment gehört ganz hierher, welches den Erfahrungsbeweis zwar nicht erschöpft, aber in schärfster Zuspitzung darstellt. Das Experiment antwortet stets auf eine voraus gestellte Frage, das heißt, entscheidet eine voraus hypothetisch gesetzte Möglichkeit. Der Weg des Experiments, das *Fiat experimentum*, das ist daher das deutlichste Zeugnis des allgemeinen Sinns der zweiten Modalitätsstufe.

Worin aber die Entscheidung der Wirklichkeit liegt, ist besonders am Verfahren der Relation klar geworden. Es ist die fortschreitende Determination der das wirkliche Geschehen der Absicht nach darstellenden Gedankenverbindung. Das nur Mögliche ist stets in irgendeiner Hinsicht nicht determiniert, fordert also eben die weitere Determination. Die Ergänzung der Möglichkeit zur Wirklichkeit, das *complementum possibilitatis*, ist nichts anderes als die Determination des zuvor nicht Determinierten; diese Determination, insbesondere nach dem Verfahren der Relations-Synthese (die aber die Synthesis der Quantität und Qualität als Voraussetzung in sich schließt), ist somit das Ganze des Wirklichkeitsbeweises. In der Natur dieses Verfahrens liegt freilich, daß es abschließend nie sein kann. Aber es definiert doch einen sicheren Fortschritt; es determiniert sich auf jeder folgenden Stufe des Prozesses etwas, das auf der vorigen nicht determiniert war, es schließt damit der Kreis der Möglichkeiten sich enger und enger, und bald wird die Stufe erreicht, wo eine weitere Determination aus den Datis (d. h. aus dem Problem) nicht mehr vollziehbar, aber nach der gegebenen Problemlage auch nicht gefordert ist. Dann spricht man von „festgestellter" Tatsache. Daß solche Tatsachen aber nie absolut feste sind, sondern in weiteren Zusammenhängen immer wieder fraglich werden können, ist oft bemerkt und wird hernach noch besonders beleuchtet werden.

Die dritte Stufe eines jeden synthetischen Prozesses aber betraf allemal den Abschluß des durch die erste nur eingeleiteten, auf der zweiten Schritt um Schritt weiter verfolgten Verfahrens, sozusagen den Rechnungsabschluß, der aber nur zur sicheren Grundlage dienen soll für neue Prozesse von gleichem allgemeinem Stufengang. Die zweite und dritte Stufe unterscheiden sich also als der Weg, insofern man im Gange ist, ihn zu verfolgen, und der vorläufig erreichte Haltpunkt, auf dem man stillsteht, nicht um darauf stehen zu bleiben, sondern des Gewonnenen sich zu versichern und auf der soweit gesicherten Grundlage dann weiterzuschreiten. So ist die bestimmte Vielheit (der dritten Quantitätsstufe) nur das bis dahin erreichte Ergebnis der Zählung, welches zugleich zum Ausgang dient für weitere Zählung; so die in der Gattung gegründete Unterscheidung das vorläufige Ergebnis der qualitativen Vergleichung, welches zugleich das Fundament bildet für weitergehende Vergleichung und Unterscheidung; und so vertritt die Wechselwirkung den Abschluß der Kausalreihen in einem System, in dessen Ansatz ein bestimmter Kreis von Fragen abschließende Beantwortung gefunden hat, und welches dann zum Fundament dient zur Aufsuchung neuer Systemzusammenhänge, und so der Möglichkeit nach unbeschränkt weiter.

Wird also im zweiten und dritten Stadium zusammen das im ersten nur hypothetisch, also nur fragweise Gesetzte zur Entscheidung geführt, so wird in diesen beiden Modalitätsstufen das Verfahren des wissenschaftlichen Beweises wurzeln. Es wird daher aller wissenschaftliche Beweis, nämlich der Wirklichkeit, also Erfahrungsbeweis, in diesen zwei Stufen verlaufen, deren deutliches Unterscheidungsmerkmal sein wird, daß der Beweis der ersten Art unabgeschlossen bleibt, der der zweiten Art zu einem Abschluß führt, der nur nicht als absoluter mißverstanden werden darf. Dem entspricht nun die geltende Unterscheidung des induktiven und deduktiven Beweises (wobei die sogenannte vollständige Induktion vielmehr zur Deduktion zu stellen ist). Induktion heißt wörtlich Hinleitung, Deduktion Herleitung. Der Prozeß, der auf den Sachverhalt, nämlich den Satz der Wirklichkeit hinleitet, ist kein anderer als der Experimentalbeweis der zweiten Modalitätsstufe; der Erfahrungsbeweis eben hinsichtlich des charakteristischen Umstandes, daß er als solcher stets unabgeschlossen, in der Durchführung begriffen, aber noch bis zu keinem endgültigen Abschluß durchgeführt sei. Sein angestrebtes Ziel aber ist der Gewinn eines solches Abschlusses, nämlich in einem neuen Obersatz, aus dem die fragliche Tatsache sich herleiten, deduktiv „folgen“ soll. Also zielt jede Induktion wenigstens zuletzt auf Deduktion. Das Folgen aber aus dem Obersatz (der allgemeineren Erkenntnis) ist der Sinn der wissenschaftlichen „Notwendigkeit“. Der deduktive Beweis, die Aristotelische Apodeixis ist es, wonach Kant das apodiktische Urteil benannt hat, welches sich deckt mit dem Urteil der Notwendigkeit. Die Notwendigkeit der Tatsache bedeutet nichts anderes als ihre Feststellung im Gesetz. Führt also die Induktion durch Tatsachen zum Gesetz, als dem Allgemeinausdruck eines geschlossenen Bereiches von Tatsachen, so leitet die Deduktion, indem sie scheinbar den umgekehrten Weg des Gedankens beschreibt, aus dem erkannten Gesetz die Tatsachen ab und bestimmt sie damit als nicht bloß tatsächlich gewiß, sondern notwendig.

§ 14. (*Die Wirklichkeit der Tatsache in idealistischer Auffassung. Tatsache und Wahrnehmung.*) So ergibt sich uns der Aufbau der Modalitätsstufen einfach und durchsichtig genug. Doch fordert noch ein Bedenken Beschwichtigung. Die zweite Stufe der Modalität heißt bei Kant Wirklichkeit; wir aber fanden als haltbaren Sinn dieser zweiten Stufe nur ein Verfahren fortschreitender Determination. Deckt das den Begriff der Wirklichkeit? In diesem wird allerdings eine Determination gedacht, aber nicht eine unbestimmt weitergehende, sondern gerade eine abschließende. Wirklichkeit bedeutet eine Bestimmtheit, so daß nichts unbestimmt bleibt. Unbestimmtheit ist eben bloße Möglichkeit. In anderer Wendung: die Möglichkeit ist vielfach, sie läßt stets eine Wahl, Wirklichkeit ist schlechthin einzig, sie wird gedacht als auf einzige, jede Wahl ausschließende Art bestimmt. Diese Einzigkeit spielt eine große Rolle in Kants Erfahrungslehre; auf ihrer Forderung beruht besonders seine Unterscheidung der Anschauung vom Begriff; Anschauung heißt ihm „die Vorstellung, die nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann". Zeit und Raum sind in solchem Sinne „wesentlich einige" Vorstellungen, darum Anschauungen; es gibt nur eine Zeit, nur einen Raum, so wie es nur eine Erfahrung gibt, „in welcher alle Wahrnehmungen als in durchgängigem und gesetzmäßigem Zusammenhange vorgestellt werden". Offenbar gilt ihm die Einzigkeit der Zeit und des Raumes für notwendig als Bedingung der Einzigkeit der Erfahrung; wie könnte der Zusammenhang der Erfahrung ein einziger sein, ohne daß die einzige Zeit und der einzige Raum ihm zugrunde läge? Unser Begriff einer unendlich fortschreitenden Determination scheint nun gerade diese

Forderung der Einzigkeit nicht zu befriedigen. Auch die Notwendigkeit hilft diesem Mangel nicht ab, da alle in den Grenzen möglicher Erfahrung erreichbare Notwendigkeit nur bedingte, nie absolute, also wirklich abschließende Notwendigkeit sein kann. So wird die Notwendigkeit selbst wieder Hypothese, so daß die Modalität wiederum einen Kreislauf beschreibt, ebenso wie es in jeder der drei anderen Richtungen des synthetischen Prozesses sich ergab. Je für eine gegebene Begrenzung unserer Erfahrung (d. h. des gestellten Problems) mag ein bestimmter Zusammenhang als notwendig (nicht anders möglich, einzig möglich) erkennbar sein; aber sobald der Bereich der Erfahrung (der Problembereich) sich auch nur in Gedanken, hypothetisch erweitert, ergeben sich neue, offene Möglichkeiten, der Schein des geschlossenen Zusammenhanges also hebt sich immer wieder auf. So wenig wie also eine Erweiterung des Erfahrungskreises sich je ausschließen läßt (die vielmehr stets sogar als notwendig gedacht werden muß), so wenig kann eine abschließende Notwendigkeit, also Wirklichkeit im Sinne vollendeter Bestimmtheit (die nichts unbestimmt ließe), je erreicht sein.

Soll man nun für diese Forderung der Einzigkeit, die demnach durch unsere drei Modalitätsstufen nicht befriedigt wird, etwa noch ein weiteres Denkgesetz aufstellen? Aber nach anderen Denkgesetzen, als die für „mögliche Erfahrung" zureichen, war überhaupt nicht die Frage. Im Verfahren der empirischen Erkenntnis, im ewigen Prozeß der Erfahrung kann, ja darf die Forderung der Einzigkeit nie in abschließender Weise erfüllt gedacht werden. Die Forderung selbst besteht darum nicht weniger zu Recht, eben als Forderung. Aber damit steht sie auch schon an der Grenze der Logik, die allein das Sein zur Frage hat; welche Grenze überschritten wird, sobald ein Sollen gesetzt wird oder auch nur in Frage kommt. Vollständige Bestimmung ist allerdings gefordert, sofern überhaupt Bestimmtheit gefordert ist. Der Forderung der Bestimmtheit wäre schlechthin erst genügt durch eine Erkenntnis, die selbst schlechthin zu gelten beanspruchen dürfte. Unsere Erkenntnis indessen vermag eben dieser Forderung nicht schlechthin, sondern immer nur bedingterweise zu genügen. Eben darum ist auch ihre Gegenständlichkeit selbst nur bedingte, nie absolute Gegenständlichkeit; das „Ding an sich", der Gegenstand, wie er schlechthin bestimmt wäre, bleibt einer „möglichen Erfahrung", die vielmehr in einem ewigen Prozeß fortschreitender Bestimmung besteht, unzugänglich.

Es ist also, sofern es sich um „mögliche Erfahrung" handelt, auf die Forderung der Einzigkeit im absoluten Sinne ganz zu verzichten. Sie kann nur das unendlich ferne Ziel bedeuten, dem unsere Erkenntnis in unendlicher Entwicklung, „asymptotisch", sich nähernd gedacht wird. Damit aber vollendet sich die idealistische Konsequenz dieses ganzen gesetzlichen Aufbaues der „Möglichkeit der Erfahrung". Es schwindet jede Hoffnung, absolute Tatsachen in wissenschaftlicher Erkenntnis je zu erreichen; aber auch jedes Bedürfnis, solche erreichen zu müssen. Denn Wirklichkeit ist nie gegeben, sondern ist die ewige Aufgabe, die in wirklicher Erfahrung stets nur relativer Lösungen fähig ist.[1])

Man sagt: Tatsachen beweisen. Was beweisen sie? doch wohl den Inhalt voraus formulierter Sätze, das heißt, versuchsweise vollzogener, also hypothetischer Begriffsverknüpfungen. Die „Tatsachen" geben in jedem Fall nur Antwort auf die Fragen, die von der Erkenntnis, ihren eigentümlichen Begriffen gemäß, voraus gestellt sind; sie entscheiden nur über voraus erdachte Möglichkeiten. Und wodurch beweisen Tatsachen? Wiederum nur durch die Verknüpfung, die sie in unseren Gedanken herstellen, indem sich zeigt, daß diese und diese möglichen Verbindungen von Denkelementen sich

---

1) Zu den folgenden Ausführungen vgl. des Verfs. „Sozialpädagogik", § 5.

festhalten und durchführen lassen, gegenteilige nicht. Nicht die Tatsache — als ob sie erst unabhängig feststände — gibt die bestimmte Verknüpfung der Denkbestimmungen, die ihren Inhalt auszudrücken versucht, sondern vielmehr diese Verknüpfung von Denkbestimmungen gibt, ja ist die Tatsache, und nicht fester, als diese Verknüpfung der Denkbestimmungen, steht die Tatsache.

Dieser idealistischen Ansicht gegenüber wird man sich stets auf die Wahrnehmung berufen. Die „Tatsache" meine zuletzt das Datum der Wahrnehmung. Aber nachdem sich Erfahrung uns aufgelöst hat in den unendlichen Determinationsprozeß des Denkens, wird die Wahrnehmung sich der gleichen Betrachtung fügen müssen, da Wahrnehmung nichts ist als ein nur engerer Ausdruck für Erfahrung. Was unterscheidet Wahrnehmung von bloßer Denkbestimmung? Schlechterdings nichts Inhaltliches; denn was wir auch immer als Inhalt gegebener Wahrnehmung aussagen mögen, ist als Aussageinhalt notwendig Denkbestimmung, den Gesetzen synthetischer Einheit in aller und jeder Richtung unterworfen. Es muß sich fügen den Gesetzen der Quantität, Qualität und Relation; irgendein Inhalt, der aus diesem dreifachen Verfahren des Denkens herausfiele, könnte auch durch Wahrnehmung niemals „gegeben" werden. Als unterscheidendes Merkmal des Gegebenen wird regelmäßig genannt: die Determination des Jetzt und Hier. Aber diese Determination unterliegt schlechterdings den Gesetzen der Relation; auch ist sie gar nicht anders möglich als durch die Determination des Zeit- und Rauminhalts; Zeit und Raum für sich enthielten gar kein Prinzip einer solchen Determination. Alle Möglichkeit der Determination des Zeit- und Rauminhalts aber ist gänzlich beschlossen in den Gesetzen der Quantität, Qualität und Relation. Man kann nicht umgekehrt sagen, das Hinzutreten der Zeit- und Raumdetermination determiniere den Inhalt. Auch wenn man das unmittelbar Wahrgenommene das letzte Positive oder Gegebene nennt, so hat man nichts gesagt, als daß die Wahrnehmung eben vollständige Determination fordere. Diese „Positivität" oder Gegebenheit ist selbst nicht positiv oder gegeben, sondern ewig nur gefordert. Sie ist genau der Ausdruck der Forderung, welche die Kategorie der Existenz vertritt und formuliert. Der Ausdruck des Positiven weist auf die Bejahung einer gestellten Frage, auf die „Feststellung" des im Denken erst gleichsam widerruflich Gesetzten; also in jeder Weise auf die zweite Stufe der Modalität, die ihren Grund und ihre Wurzel nirgends anders als im Gesetze des synthetischen Prozesses hat. Es drückt sich darin nur aus das Erfordernis jener Determination, welche die Tatsächlichkeit eben bedeutet. Die Tatsache im absoluten Sinn ist aber erst das Letzte, was die Erkenntnis zu erreichen hätte, in Wahrheit nie erreicht; ihr ewiges *X*. Dies Letzte hat man zum Ersten, dies *X* zur bekannten Größe, das ewig Gesuchte, nie Erreichbare zum Gegebenen gemacht. Woher dieser befremdliche Fehlgriff? Weil allerdings die Notwendigkeit dieser Determination der Tatsache, nämlich als Forderung, selbst *a priori* feststeht, so antezipiert man ohne Bedenken im Begriff der Tatsache als des Gegebenen das, was vielmehr erst das letzte Resultat der Erkenntnis wäre.

Die Wissenschaft ist sich dieses Sachverhalts auch mehr und mehr bewußt geworden. Je ernster sie es damit nahm, die Tatsache in ihrer vollen Konkretion, und nichts als die Tatsache, erfassen zu wollen, um so sicherer mußte sie sich überzeugen, daß sie nicht zu fassen ist, daß genau die Tatsächlichkeit stets Problem, stets in gewissem Sinne Hypothese bleibt, das heißt, daß das Urteil darüber, was Tatsache sei, in jedem Augenblick der Berichtigung gewärtig sein muß.

Wird man dem nun noch entgegengehalten: Aber die Tatsachen müssen doch an sich bestimmt sein, wenngleich nicht für uns? Darauf ist längst der Sache nach geantwortet;

doch mag es gut sein, gerade hier zum Schluß die Antwort zu wiederholen: Erstens, die Erkenntnis muß doch die Bestimmung der Tatsache stets von sich aus erst leisten; ihr ist nichts bestimmt, was sie selbst nicht bestimmt hat; zweitens aber: nur von einer schon erreichten Erkenntnis aus, oder in bloßer gedanklicher Vorausnahme ihres schließlichen Ergebnisses, vielmehr ihres ewig fernen Zieles, läßt sich mit Sinn reden von dem, was an sich bestimmt sei; und drittens, da unsere Erkenntnis stets bedingt und begrenzt bleibt, so würde, was immer wir vom Standpunkt unserer Erkenntnis über das Ansichsein des Gegenstandes aussagen möchten, doch immer so bedingt und in seiner Geltung begrenzt bleiben wie unsere Erkenntnis überhaupt.

Nur auf solcher Grundlage und in solchem Sinne ist „exakte Wissenschaft" möglich. Auch haben wir nunmehr die Voraussetzungen, zwar nicht in absoluter Vollständigkeit, aber wenigstens in erschöpfendem Grundriß beisammen, deren wir zum logischen Aufbau dieser exakten Wissenschaft bedürfen; zu diesem Aufbau wenden wir uns jetzt.

Drittes Kapitel.

Zahl und Rechnung.

§ 1. (*Die Grundreihe.*) Die Zahl stellt sich schon historisch dar als zugleich das reinste und das einfachste Gebilde des Denkens, welches die Wissenschaft als exakte begründet hat. An ihr hat von den Pythagoreern an die Logik der Wissenschaft sich orientiert, an ihr den Begriff der „reinen" Erkenntnis zuerst gewonnen und immer neu befestigt. Sie gibt zugleich das erstaunlichste Beispiel für die unbeschränkte Entwicklungsmöglichkeit, die den reinen Urbegriffen des Denkens innewohnt. Daher würde sie das tiefste Interesse des Logikers auch dann fordern, wenn sonst aller Gebrauch, der von den Zahlen und Zeichen der Arithmetik und Algebra gemacht wird, ihn gleichgültig lassen dürfte.

Die erste Vorbedingung für das logische Verständnis der Zahl ist aber die Einsicht, daß man es bei ihr nicht irgend mit gegebenen Dingen zu tun hat, sondern mit reinen Gesetzmäßigkeiten des Denkens, das heißt mit reinen Grundbeziehungen, die nicht von den Dingen, auf die sie hernach Anwendung finden mögen, abhängen und an ihnen erst Bestand gewinnen, sondern an sich Bestand haben müssen, um bestandhafte Dinge mitaufbauen zu können. Die Zahl von den Dingen abzuleiten ist, wenn unter Ableiten Begründen verstanden wird, ein offenbarer Zirkel. Denn die Begriffe von Dingen sind komplexe Begriffe, in die als einer der unerläßlichsten Bestandteile die Zahl miteingeht. Einzahl oder Mehrzahl oder sonst irgendeine Bestimmung der Zahl kann von Dingen, die in Einzahl oder Mehrzahl usw. vorhanden sind, hinterher zwar abstrahiert werden, aber nur weil sie in deren Begriff voraus mitgesetzt war; unmöglich kann ihr Begriff in dieser Abstraktion erst seinen Ursprung haben.

Was heißt es aber, daß die Zahl ihren Ursprung im reinen Denken hat? Vom Denken als Tun oder psychologischem Vorgang hat die Logik nichts zu sagen. Dem Inhalte nach aber ist Denken: Setzen von Beziehung, nichts anderes. Beziehung fordert Termini; aber auch nicht diese gehen der Beziehung voran, sondern die Beziehung setzt auch erst die Termini. Nichts also als dies: das Setzen von Beziehung, mit welchem zugleich die Termini der Beziehung gesetzt werden, legen wir zugrunde. In jedem Fall muß alles, was hieraus folgt, an der Zahl sich darstellen, da die Zahlsetzung Setzung von Beziehung ist. Zeigt sich nun aber, daß dies allein genügt, um die Zahl mit allen ihren Gesetzen aufzubauen, so ist nach keiner ferneren Grundlage zu suchen. Es kann ja für das Denken nichts geben, das ursprünglicher wäre als es selbst, das Denken, das heißt das Setzen von Beziehung. Was man auch sonst als Grund der Zahl in Anspruch nehmen möchte, würde eben dies, das Beziehungsetzen, einschließen und kann als Grund der Zahl nur darum erscheinen, weil es den wahren Grund, das Beziehungsetzen, als Voraussetzung enthält.

Eine Beziehung nun fordert, wie gesagt, Bezugspunkte, Termini, und im ursprünglichen Fall deren zwei. Etwas wird zu Etwas in Beziehung gesetzt. Und die Termini unterscheiden sich: das, worauf Beziehung stattfindet, wird eben damit als das Vorhergehende, Frühere (πρότερον, *prius*), als Grundlage der Beziehung gedacht; es muß gesetzt sein, damit in Bezug auf es das Andere, somit als das jenem Folgende, Spätere (ὕστερον, *posterius*) gesetzt werden könne. Beziehung schließt also notwendig ein: Grundsetzung und Gegensetzung; Setzung des Einen, nicht als Absolutes, von der Beziehung „Abgelöstes“, für sich Stehendes, sondern eben Bezugsgrundlage für ein Anderes: das Andere dieses Einen.

Das Verhältnis der beiden Termini, durch das sie in Beziehung stehen, schließt somit zugleich dies beides ein: Sonderung, ja Ausschließung (das Eine ist nicht das Andere, das Andere nicht das Eine; beide werden, eben als das Eine und das Andere, in geschiedene Denkpunkte gesetzt), und wiederum Vereinigung in einem Denkinhalt, denn Beziehen heißt: in einem Denken vereinigen.

Diese Vereinigung ist noch nicht sofort das, was den Begriff eines Ganzen oder Vereins (*totale*, *unio*) ausmacht, aber sie ist die hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser neuen, den vorigen eng verknüpften Setzung des Denkens. In der Relation des Zusammen liegt noch dies Neue: daß die Zwei, sofern in Beziehung und zwar in eine Beziehung gesetzt, wiederum Eins sind, das heißt wiederum in einer neuen Beziehung dieselbe Funktion übernehmen können wie ein Terminus der ursprünglichen Beziehung; also das durch diese Beziehung geschaffene Ganze, der Verein der bezogenen Termini, kann wiederum Bezugsglied werden für eine neue Beziehung, kann wieder auf andere bezogen oder für andere Bezugsgrundlage werden.

So ergibt sich der Begriff eines neuen „Einen“, den ursprünglichen darin gleichartig, daß es selbst Terminus von Beziehung sein kann, aber darin von ihnen unterschieden, daß es eine Einheit aus anderen Einheiten darstellt, diese also als Bestandteile (Elemente) in sich vereint. Es sind aber genau nicht bloß zwei, sondern bisher drei Bedeutungen des „Einen“ zu unterscheiden:

1. das Eine gegenüber dem Anderen, im Unterschied von ihm; das in der jedesmaligen Beziehung Erstgesetzte;

2. das Eine in der abstrakten Bedeutung, in der das Andere auch wieder Eines ist, also der Begriff des Einen

unterschiedslos dem Einen in erster Bedeutung und allemal seinem Anderen zukommt;

3. das Eine aus jenen beiden, der Verein beider.[1])

Die zweite Bedeutung mag als die leerste erscheinen. Doch fordert die anscheinende Gleichgültigkeit der Einheit dieser Bedeutung gegen die Stellung als Grund- oder Gegenglied in der Relation, und ebenso als Element oder Verein aus Elementen, besondere Aufmerksamkeit. Wären die Termini unabhängig von der Relation überhaupt, das heißt absolut, so wäre diese Indifferenz freilich auch gegeben. Aber diese Absolutheit wurde schon als trügerisch erkannt; die Termini bestehen für das Denken überhaupt nur in der Relation und durch sie. Aber um solche zu sein, brauchen sie nicht mehr zu sein als Inhalte oder Setzungen des Denkens überhaupt, und als solche können sie ebensowohl Grundglied wie Gegenglied, Element wie Verein von Elementen sein. Doch damit ist der Kern des Problems noch nicht getroffen. Sondern das Gegenglied einer Relation kann, nicht in derselben, aber in einer neuen Relation, die Funktion des Grundglieds, das Grundglied nicht in derselben, aber in einer neuen Relation die des Gegenglieds, das Totale die des Elements, das Element die des Totale übernehmen. Sei eine Relation Q zu P gegeben, wo P das Grundglied, Q das Gegenglied sei, so kann in einer neuen Relation Q Grundglied werden, welches dann ein ferneres Glied als Gegenglied fordert, etwa R; es kann andererseits P in einer neuen Relation als Gegenglied auftreten, welches dann ein ferneres Glied als Grundglied fordert, etwa O; und das nicht, indem die ganze Reihe dieser Glieder (wie in unserer Bezeichnung das Alphabet) schon als gegeben angenommen wird, sondern indem sämtliche Glieder durch die immer gleichartig sich wiederholende

1) Diese drei Begriffe des Einen unterscheidet schon Plato, Parm. 153—154; vgl. „Platos Ideenlehre“ S. 252.

Beziehung erst gesetzt werden. So ergibt sich eine beiderseits offene Gliederreihe, etwa darzustellen durch eine Reihe

$$\ldots \frown | \frown | \frown | \frown | \frown | \frown \ldots,$$

worin jedes Einzelglied zugleich doppelter Beziehung (in unserer Darstellung vor- und rückwärts), nämlich als Grundglied zu einem Gegenglied oder Gegenglied zu einem Grundglied, fähig ist. Es kann ebenso irgendein Verein von Terminis als Terminus eines neuen, übergeordneten Vereins dienen, und umgekehrt ein Terminus eines gegebenen Vereins als Verein neuer, untergeordneter Termini, und so unbeschränkt weiter, so daß wiederum jeder Terminus diese doppelte Beziehung: als Teil eines Ganzen oder Ganzes aus Teilen, zuläßt.

Noch etwas Weiteres schließt sich gleich hier an, das sich in der Folge wichtig erweisen wird. Eine gegebene Beziehung ist als solche in Gedanken umkehrbar, das heißt mit jeder Beziehung unter zwei Terminis sind in Wahrheit zwei Beziehungen gesetzt; jeder Beziehung Q zu P entspricht eine Beziehung P zu Q. Es ist z. B. schon eine Beziehung von P auf Q, daß P Grundglied ist zum Q als Gegenglied. Man darf hierbei nur nicht in den Mißverstand verfallen, als ob dasselbe in einer und derselben Relation zugleich Grund- und Gegenglied sein könne; sondern die Beziehung ist allemal eine neue, in der das Gegenglied einer erstgesetzten Beziehung Grundglied, das Grundglied Gegenglied wird. Aber wo immer die eine Beziehung stattfindet, findet auch die andere statt, und wegen dieses ständigen Zusammengehens der zueinander reziproken Beziehungen bezeichnet man kürzehalber diese doppelte Beziehung als eine, gleichzeitig doppelt gerichtete, etwa so wie man in der Geometrie den Plus- und Minus-Sinn in den Begriff einer einzigen „Richtung“ zusammenfaßt.

Das Gemeinsame in beiden zuletzt betrachteten Fällen ist, daß dieselbe gedankliche Setzung als Ausgangs- und als Bezugsglied, als Teil und als Ganzes fungieren kann; stets aber nicht in einer und derselben, sondern in verschiedener Relation. Dies erklärt den Schein einer absoluten Unabhängigkeit der Termini von der Relation. Die scheinbare Bezugslosigkeit ist in Wahrheit doppelte, überhaupt mehrfache Beziehbarkeit, die daher rührt, daß durch irgendeine Beziehung sofort weitere Beziehungen mitgesetzt werden und so das Gebiet des Denkens wie durch Selbsterzeugung sich ständig erweitert. Im ersten der eben betrachteten Fälle entstanden die verschiedenen Relationen durch Nocheinmalsetzen der gleichen Beziehung auch in der gleichen Beziehungsrichtung, im zweiten Fall durch Umkehren der Beziehungsrichtung.

Auf diesen Grundlagen lassen sich nun schon einige einfachste Grundeigenschaften der Zahl ableiten.

§ 2. (*Ordnungszahl und Anzahl.*) Unsere Reihe enthält zunächst die Voraussetzungen für zwei Hauptfunktionen, die an der Zahl wohl zu unterscheiden sind, die Funktionen der Ordnungsbestimmung und der Bestimmung des Wieviel, oder Ordnungszahl und Anzahl.

Daß dies beides begrifflich verschieden, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zahlsetzung die Möglichkeit für die andere zugleich gegeben ist. Zunächst der Unterschied: das Erste, Zweite usw. existiert in einer und derselben von einem bestimmten Gliede an gerechneten Reihe nur je einmal; dagegen ist jedes von diesen der Anzahl nach Eines, ein beliebiges von ihnen mit einem beliebigen anderen zusammen sind zwei usw., also die Anzahlen 1, 2 usw. existieren in derselben Reihe unendlich vielmal. Ferner in den Zwei ist das Eins (der Anzahl nach), in den Drei sind die Zwei und ist das Eins eingeschlossen usw.; dagegen steht das Zweite dem Ersten, das Dritte dem Zweiten und Ersten usf. (sowie umgekehrt) ausschließend gegenüber. Indessen wo ein Erstes, da gibt es notwendig auch der Zahl nach Eines; es ist ja eben ein Erstes, nur eines; und wo ein Zweites, da gibt es (weil jedenfalls auch ein Erstes) notwendig Zwei, wo ein Drittes, auch Drei, weil ja auch ein Erstes und Zweites; und umgekehrt: wo Eines, da ist dieses zugleich das Erste; wo Zwei, da gibt es, in jeder beliebigen Anordnung, ein Erstes und Zweites, wo Drei, ein Erstes, Zweites und Drittes usf.

Man sagt wohl: die Anzahl, zum Beispiel Drei, sei von der Reihenfolge unabhängig; drei bleiben drei, gleichviel was als erstes, zweites, drittes gesetzt wird. Das ist richtig, wenn man von zu zählenden Dingen ausgeht. Aber es ist hier gar nicht zu fragen nach Dingen, die als 1, 2 oder 3, oder als 1. 2. oder 3. gezählt würden, sondern rein nach diesen Setzungsweisen selbst, als 1, 2, 3 oder als 1. 2. 3., und deren Gesetz. Da aber ist notwendig, sobald die Sonderung und Gegenüberstellung der Einzelglieder ins Auge gefaßt wird, allemal Eines das Erste, Eines das diesem Folgende d. i. Zweite, Eines das wieder diesem Folgende d. i. Dritte usf.; also es besteht notwendig die Folge des 1. 2. 3. usf., wo immer 1, 2, 3 usf. gesetzt sind. Und ebenso gilt das Umgekehrte.

Man glaubt die Anzahl unabhängig von der Ordnungsbeziehung aufzustellen auf Grund der „ein-eindeutigen Entsprechung" unter den Elementen je zweier Klassen (Inbegriffe, Mengen, Mannigfaltigkeiten). Die hohe Bedeutung, welche dem Begriff der Zuordnung innewohnt, daß nämlich dadurch endliche und unendliche Mengen von Anfang an unter einen Gesichtspunkt gebracht werden, ist unbestritten und unbestreitbar; es wird im nächsten Kapitel davon zu reden sein. Auch ist richtig, daß die ein-eindeutige Entsprechung nicht eine voraus feststehende Reihenordnung jeder der verglichenen Mengen verlangt. Aber diese Entsprechung ist gar nicht vollziehbar, ohne daß eben damit eine Reihenordnung hergestellt wird. Mit allem Grund spricht man von Zu-ordnung, worin schon die Unumgänglichkeit der Befolgung einer Ordnung, wofern die durchgängige, kein Glied auslassende Entsprechung vollzogen und gewiß werden soll, sich ausdrückt. Es sind also die Momente der Anzahl und Reihenfolge allerdings begrifflich scharf auseinanderzuhalten; aber ein Irrtum wäre es, daß die Erkenntnis der einen sich vollziehen ließe, ohne daß die Erkenntnis der anderen, wenigstens der Grundlage nach, zugleich damit vollzogen würde. Man setzt eben tatsächlich und unvermeidlich, indem man je Eines je Einem entsprechen läßt, die Einzelglieder auseinander, und zwar in einer Folge, ohne deren Innehaltung die Vergewisserung, daß kein Glied ausgelassen und keines mehrfach gesetzt ist, unmöglich wäre. Das auf jeder Stufe schon Gezählte ist eben damit das Voraufgehende, das noch nicht Gezählte das Nachfolgende, und ohne solchen stufenmäßigen Fortgang ist die ein-eindeutige Entsprechung nicht in Gedanken vollziehbar, also nicht erkennbar. Diese Betrachtung gilt natürlich auch für unendliche Mengen, z. B. für die Zuordnung zwischen den ganzen positiven und den geraden Zahlen. Man muß die ersteren, und damit auch die letzteren, indem jeder ganzen Zahl ihr Doppeltes entsprechend gesetzt wird, um sie in ihrer Allheit zu denken nach irgendeinem System, (dem Dezimalsystem oder einem anderen) der Reihe nach gesetzt denken.

Nach dem allen ist es ein unfruchtbarer Streit, welche von beiden Funktionen der Zahl die ursprüngliche, welche von der anderen abhängig und bloß folgeweise durch sie mitgesetzt sei. Die Wahrheit ist, daß beide zueinander streng korrelativ sind. Gewiß, wenn ich nicht Drei habe, habe ich auch kein Drittes. Aber auch mit dem Dritten werden die Drei erst fertig. Sobald man sich die Zahl im Entstehen denkt, tritt notwendig die Funktion der Aufeinanderfolge (das Aristotelische „Früher und Später") voran; läßt man sie fertig sein, geht man vollends von Mengen vorhandener Dinge aus, so erscheint die Aufeinanderfolge gleichgültig und sekundär. Genau um diesen Unterschied des genetischen und ontischen Sinnes der Denksetzung handelt es sich. Wir erklären: beide sind berechtigt und beide sind notwendig. Die Denkbewegung aber, das Denkverfahren, das Procedere ordnet sich — dafür dürfen wir uns jetzt einfach auf das Ergebnis der beiden vorigen Kapitel berufen — in letztem Betracht notwendig über jeder Art des Denkens, die beim fertigen Sein zum Stillstand gekommen ist. Vor allem: der Prozeß allein begründet die Kontinuität; die Kontinuität des Denkens aber ist, wie wir uns überzeugten, das Letzte, worauf alles Fragen schließlich zurückgeht. Nur um sie selbst aufzuhellen und zu scharf bestimmtem Begriff zu bringen, ist allerdings der Denkstillstand ebenso notwendig, der in dem Kontinuum die Diskretion vollzieht.

In dem dreistufigen Gange des synthetischen Prozesses, wie wir im vorigen Kapitel ihn konstruiert haben, vertritt die erste und dritte Stufe vorzugweise die Diskretion, obgleich immer in Rückbeziehung auf die Kontinuität des Denkens; die zweite vorzugsweise den Denkfortschritt, obgleich immer als Fortschritt von Denkpunkt zu Denkpunkt. Nur für einen Augenblick kann es paradox erscheinen, daß in der Fortschreitung, die doch die Glieder auseinanderstellt, die Kontinuität, in dem Anhalt des Denkens dagegen, in dem das vorher Auseinandertretende sich erst zusammenschließt, die Diskretion sich darstelle. Denn es ist klar, daß in letztem Betracht Kontinuität nur der Bewegung des Denkens zukommen kann, Diskretion ein Anhalten beim jedesmal erreichten Punkt verlangt. Erst in sekundärer Betrachtung sind gerade im Fortschreiten die Einschnitte, gleichsam die Meilensteile zu beachten, an denen die Fortschreitung selbst zur Bestimmung kommt, und wird umgekehrt beim Anhalt, weil er den Sinn des Rückblicks auf den vollzogenen Denkfortschritt und der Bergung des dadurch Gewonnenen erhält, innerhalb der jedesmal gesetzten Grenzen der kontinuierliche Zusammenhang des Ganzen zu einem vorzüglich wichtigen Moment. Es soll ja allemal die dritte Stufe des Prozesses die erste und zweite in sich vereinigen; die erste Stufe aber vertritt am reinsten die Sonderung, die zweite den Übergang und damit die Kontinuität des Denkprozesses, die dritte also die Vereinigung von Sonderung und Kontinuität. Der Zusammenschluß soll ja nicht Abschluß sein im Sinne des *Ne plus ultra*, sondern gerade im Sinne des *Plus ultra*; es ist ein Anhalten, nur um weiterzuschreiten; der Endpunkt wird zugleich Punkt des Übergangs. Der Unterschied der zweiten und dritten Stufe des Prozesses aber ist das Fundament für den Unterschied der beiden Funktionen der Zahl als Ordnungszahl und Anzahl. Die Anzahl wird so zugleich Maßzahl, die Zahl das Bestimmungsmittel der Größe.

So wird es ganz klar, daß diese beiden Funktionen der Zahl, so eng sie, und in beiden die Momente der Diskretion und der Kontinuität, miteinander verflochten sind, doch dem Begriff nach immer deutlich geschieden bleiben. Der Unterschied ist kein geringerer als der zwischen Zeit und Raum, der, wie sich künftig zeigen wird, auf nichts als diesem letzten Unterschied der beiden Grundmomente des Denkens: Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zugleich zu Vereinigenden, Vereinigung des zugleich zu Sondernden) beruht. Die Aufeinanderfolge in der Zahl, das Aristotelische πρότερον καὶ ὕστερον (Vor und Nach, oder Nacheinander) ist darum noch nicht die Zeitfolge; aber es ist an der reinen Zahl der Ausdruck desselben fundamentalen Merkmals jedes Denkprozesses, welches in anderer, hier uns noch nicht angehender Entwicklung des reinen Denkens (oder des Prozesses der synthetischen Einheit) die zeitliche Setzung begründet. Ebensowenig ist die Zahl als Inbegriff (Totale) schon räumliche Vereinigung; aber sie drückt an der reinen Zahl (die der räumlichen ebenso wie der zeitlichen Setzung logisch voraufgeht) dasselbe fundamentale Merkmal des Denkprozesses aus, das in jener anderen Entwicklung des Denkens die räumliche Setzung begründen wird. So behält der Widerspruch vieler Mathematiker gegen die Ansicht, daß die Zahl die „Anschauung" von Zeit oder Raum (oder beider) zur Voraussetzung habe, völlig recht, und wird doch auch das gesunde Motiv dieser Meinung klar, der nicht bloß Kant gehuldigt hat, sondern an der nicht wenige bedeutende Mathematiker bis heute, auch unabhängig von Kant, festhalten.

§ 3. (*Kritische Anmerkung*). Der regelmäßige Fehler der Grunddefinitionen der Zahl, wie man sie bei den Arithmetikern findet, besteht darin, daß man von gegebenen Mengen von Dingen ausgeht. Nur beispielsweise nenne ich die Arithmetik von Stolz (1885), die vielleicht als Ausdruck der herrschenden Meinung der Mathematiker über diesen Punkt — oder dessen, was bis vor nicht langer Zeit die herrschende Meinung war — angesehen werden darf. Er definiert: Zwei Vielheiten heißen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läßt und keines von dieser unverbunden bleibt; wobei besonders bewiesen wird, daß die Reihenfolge, in der man die Glieder einer jeden der verglichenen Vielheiten je einem der anderen Vielheit zuordnet, für das Ergebnis (Gleichheit oder Ungleichheit) gleichgültig ist.

Aber indem man Vielheiten von „Dingen" vergleicht, fällt man aus der Betrachtung des reinen Denkverfahrens schon heraus. Es wären statt Vielheiten von Dingen vielmehr Folgen von Setzungen und zwar beziehentlichen Setzungen zu vergleichen. Dann sind aber die Einzelglieder durch nichts mehr unterscheidbar als durch die Reihenfolge, in der sie gesetzt werden. Zähle ich Dinge, z. B. die Fenster eines Saales, so sind diese noch durch irgendwelche sonstigen Merkmale unterschieden; z. B. eins liegt gegen Osten, eins gegen Westen, die anderen, in der und der

Aufeinanderfolge, dazwischen. Aber das reine Verfahren der Zählung weiß von solchen Unterschieden nichts, darf nichts davon wissen, es kennt nur Eins, Eins, Eins usf. und kann unter diesen nicht anders unterscheiden als nach der Folge, in der sie gesetzt werden: Eines als Ausgangsglied, Eines diesem zunächst, Eines wiederum diesem usf. Es kann also in verschiedenen Zählungen — sofern solche überhaupt zulässig sind — immer nur das erste Glied dem ersten, das zweite dem zweiten usf. entsprechen. So bleibt für einen Beweis der Gleichgültigkeit der Reihenfolge für die Anzahl überhaupt kein Raum; die Identität der Anzahl der Glieder bis zum jedesmaligen Schlußglied (dieses eingeschlossen) ist ohne weiteres gegeben.

Vielleicht denkt man, auch wenn die Glieder verschiedener Reihen bloß durch die Stelle in der Reihe unterschieden werden, könne man doch etwa das erstgezählte einer Reihe z. B. von drei Gliedern dem drittgezählten der zweiten, das zweite der ersten dem ersten der zweiten zuordnen, wo dann zu beweisen bleibe, daß das drittgezählte der ersten Reihe nun notwendig dem zweitgezählten der zweiten zufällt und kein Glied der anderen Reihe mehr übrig bleibt. Aber das ist leerer Schein. Indem ich die Ordnung der Glieder der zweiten Reihe verändere, mache ich das vorher dritte Glied zum ersten, das vorher erste zum zweiten, und damit das vorher zweite zum dritten, und so entsprechen sich wieder richtig das erste und erste, zweite und zweite, dritte und dritte Glied eben dieser Zählungen. Das Glied, das ich zuerst in Vergleichung ziehe, ist eben damit das erste, da nur nach der Reihenfolge dieser meiner Setzungen hier die Frage ist.

So kann man gar nicht dazu kommen einen Satz aufzustellen: „Die Anzahl ist unabhängig von der Reihenfolge der Glieder", solange man rein mit dem Zählverfahren selbst, nicht mit abzuzählenden Dingen zu tun hat. Im Zählverfahren selbst und durch es ist die Folge der Glieder bestimmt und wird nur dadurch der Inbegriff oder Verein der Einzelglieder bestimmbar, daß die Reihenfolge es ist. Es ist nichts wesentlich anderes, was ich auf solche Art bestimme, nur daß ich das eine Mal das letzte Glied, stets aber im Verhältnis zu allen vorausgegangenen, das andere Mal die Gesamtheit der Glieder bis zu diesem letzten, dieses eingeschlossen, ins Auge fasse. Es bleibt immer ein Unterschied der Betrachtungsweise, aber beide Betrachtungsweisen entsprechen sich genau und gehen streng miteinander. Deshalb findet auch die Arithmetik wenigstens der endlichen Zahlen keine Veranlassung, Ordnungszahl und Anzahl gesondert zu behandeln.

Der Fehler ist aber bei den Arithmetikern fast durchgehend, daß man, statt von der Zahl, von zu zählenden Dingen spricht. Dieser Fehler wiederholt sich in der seltsamen Forderung der Gleichartigkeit oder Abstraktion von den qualitativen Verschiedenheiten der zu zählenden Dinge. Wie sind es überhaupt noch „Dinge", wenn von aller Verschiedenheit abgesehen wird? Man wird vielleicht sagen, es bleibe als unterscheidend die Stelle in Zeit oder Raum. Aber auch Zeit und Raum dürfen nicht vorausgesetzt werden, wenn nach den Gesetzen der reinen Zahl die Frage ist; denn umgekehrt sind Zeit und Raum nicht ohne die Voraussetzung der Zahl erklärbar. Nicht Gleichartigkeit ist zu fordern, sondern jede Nachfrage nach qualitativer Gleichheit oder Verschiedenheit des Gezählten, weil überhaupt nach dem Gezählten, ist bestimmt auf Seite zu stellen. Gleichartig sind die reinen Setzungen unserer Grundreihe, sofern sie nichts als die Setzung überhaupt vertreten, bei der von gar keiner anderen Verschiedenheit, als daß sie eben eine, eine andere und wieder eine andere sind, die Rede ist und sein darf. Diese Gleichartigkeit genügt, nach keiner anderen ist überhaupt zu fragen, wenn nach der Zahl die Frage ist und nicht nach dem Gezählten.

In dieser Grundvoraussetzung treffe ich besonders mit

G. F. Lipps [*105, 106*] zusammen. Er legt, ähnlich wie wir, eine Normalreihe zugrunde, d. h. eine Reihe fixierter Zeichen, deren Glieder lediglich „Träger von Merkmalen der Reihenform" sind; welche also rein das Verfahren der Zählung und was aus diesem folgt, nichts darüber, vor allem keinerlei Merkmale zählbarer Dinge darstellt. Dieser Reihe schreibt er die folgenden Eigenschaften zu:

1. Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit. — Diese folgt für uns aus der rein logischen Begründung und also reinen Methodenbedeutung der Zahl.

2. Einzigkeit. — In der Tat, da unsere Reihe nur der Ausdruck des Zählverfahrens, das Verfahren als solches aber nur in der Einzahl vorhanden ist, so ist unsere Reihe selbst (vielmehr das, was sie bezeichnet) nur einfach existierend zu denken.

3. Sie geht aus von einem Anfangsglied, ist dagegen ins Unendliche fortsetzbar, weil Ausdruck des immer gleichen, stets wieder zur Verfügung stehenden Verfahrens der Setzung des Anderen zum Einen. — Für uns ergab sich sofort die beiderseitige Unendlichkeit. Es gibt kein absolutes Anfangsglied, sondern man kann von jedem Glied anfangen und dann vor- und rückwärts schreiten.

4. Alle Glieder sind gleichwertig (äquivalent), denn sie sind durch nichts als ihre Stelle verschieden. — Aber man wird sie nicht ohne weiteres „vertauschbar" nennen dürfen. Die Vertauschbarkeit hat wohl einen Sinn, der aber nicht primär ist. Zunächst ist es vielmehr die ganze Funktion jedes Einzelgliedes der Reihe, eine Stelle, unvertauschbar mit jeder anderen, zu bestimmen. Sie austauschen zu wollen, würde voraussetzen, daß sie noch etwas anderes als Stellzeichen wären. Aber etwas anderes sind sie für uns bis dahin nicht.

5. Die Reihe ist homogen, d. h. sie besitzt kein ausgezeichnetes Glied außer dem Anfangsglied. — Diese Ausnahmestellung wäre bedenklich; sie besteht für uns von

Anfang an nicht, da wir kein absolutes Anfangsglied anerkennen.

6. Jedes Glied involviert die ganze Reihe, denn das Verfahren ist, als gesetzmäßiges, von seinem Anfang an, und so von jedem beliebigen Glied rückwärts bis zum Anfangsglied und vorwärts ins Unendliche bestimmt. — Wir haben statt dessen zu sagen: rückwärts und vorwärts ins Unendliche, da das Verfahren nicht bloß von seinem (etwa absoluten) Anfang, sondern von jedem (willkürlich wählbaren, also relativen) Anfang an rückwärts und vorwärts bestimmt ist.

Die Sonderstellung der Eins ist es also, welche die Aufstellung von Lipps von der unsrigen unterscheidet. Dieser und im engen Zusammenhang damit der ganz eigenartige arithmetische Begriff der Null fordert aber überhaupt noch eine besondere Betrachtung, mit der zugleich der Aufbau der gebräuchlichen Zahlreihe und die Erklärung der gewöhnlichen Rechnungsarten sich füglich einleiten läßt.

§ 4. (*Die Null und die Eins. Der Ableitungsversuch Freges.*) Fast jeder bisherige Versuch eines logischen Aufbaues der Zahlgesetze ging von dem Fundamente der Zahleinheit aus. Überaus selten aber findet sich auch nur ein Ansatz dazu, für diesen Begriff selbst eine zwingende logische Begründung zu geben. Geradezu der einzige ernstere Versuch einer solchen Begründung ist der von G. Frege, den Russell und Couturat im wesentlichen reproduzieren. Mit und vor der Eins aber will Frege die Null begründen. Der Versuch ist scharfsinnig und auch, wenn er nicht geglückt sein sollte, der Prüfung wohl wert.

Die Schrift Freges: „Die Grundlagen der Arithmetik", ausdrücklich als logisch-mathematische Untersuchung bezeichnet, hat beträchtliche, von den Logikern der Mathematik nicht sogleich nach Gebühr gewürdigte Verdienste. Sehr treffend ist vor allem die Widerlegung der von J. Stuart Mill versuchten Begründung der Zahl auf Induktion, die Abwehr überhaupt jeder Herleitung der Zahl aus Eigenschaften zu zählender Dinge; nicht minder treffend die Ablehnung der unklaren Begründung auf „Anschauung“, der entschlossene Rückgang allein auf die eigenen Gesetze des Denkens, der „Idee“; die Zurückweisung aber auch eines Formalismus, der „so tut, als ob Forderung schon Erfüllung wäre“, indem er z. B. fordert, daß Subtraktion, Division, Radizierung immer ausführbar sei, und damit dann genug getan zu haben glaubt. „Warum fordert man nicht auch, daß durch beliebige drei Punkte eine Gerade gezogen werden kann?“ Daß Frege den Aufstellungen Kants nicht voll gerecht wird, ist dem Mathematiker nicht zu verargen, vielmehr anzuerkennen, daß er dabei teilweise im Recht ist oder Richtiges wenigstens im Sinne hat. So lehnt er das „synthetische Urteil a priori“ zwar ab, aber indem er, nach Kantischen Worterklärungen nicht ganz ohne Berechtigung, unter Synthesis Vereinigung eines sinnlich gegebenen Mannigfaltigen versteht. Aber nach Kants definitiver Festsetzung ist die Synthesis gerade die Urfunktion des Denkens; also ergibt sich die hier freilich notwendige Korrektur aus dem richtigeren und entscheidenden Ansatz bei Kant selbst. Frege seinerseits behauptet, daß das arithmetische Urteil „analytisch“ sei, will aber damit ersichtlich nur sagen, daß es reine Denkleistung sei; aber nicht bloß „erläuternd“, sondern „erweiternd“. Die Folgerungen, sagt er (S. 101), sind „in der Definition enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause“. Nun, diese Entwicklung wie der Pflanze aus dem Samen (der doch nicht die Pflanze ist), genau dies ist es, was in Kants Sprache Synthesis heißt. Und daß Frege wirklich (in Kants Sinn) synthetische Urteile meint, bestätigt im besonderen vieles, so die Bemerkung gegen Mill (S. 31): Zwei und ein Paar seien keineswegs dasselbe, wie Mill sonderbarerweise zu glauben scheine. Das heißt in Kants Sprache: das Additionsurteil ist synthetisch. Zwei Einer „sind“ ein Zweier, nicht als ob die Begriffe identisch oder der zweite aus dem ersten analytisch herauszuholen wäre, sondern sie sind äquivalent: Was immer als zwei Einer, dasselbe kann als ein Zweier gedacht werden, aber in einer anderen, neuen logischen Auffassung, die zur vorigen korrelativ, also stets mit ihr, nicht aber in ihr selbst gesetzt ist.

Den Grundfehler in Freges Begründung der Zahl aber sehe ich nicht in diesen Allgemeinheiten, über die es bei der Gleichheit der Grundlage unserer Anschauungen leicht sein sollte sich zu verständigen, sondern in folgendem. Indem er die Zahl, richtig, auf reine Grundgesetze des Denkens zurückführen will, glaubt er diese, wenigstens die fundamentalen und für seinen Zweck ausreichenden, aus der überlieferten Logik einfach entnehmen zu können. Ob deren Aufstellungen aber, ihre Richtigkeit übrigens vorausgesetzt, nicht die Zahl, vor allem die Zahleinheit, offen oder versteckt schon einschließen, hat er nicht untersucht. Ohne Zweifel ist dies der Fall. Frege stützt sich nämlich auf die überkommenen Begriffe von Essenz und Existenz; diese sieht er an als mit jedem Akte des Denkens unvermeidlich gesetzt und darum selbst nicht weiter reduzierbar. Aber zum wenigsten was damit vorausgesetzt wird, müßte genauer angegeben werden. Ich finde darüber bei ihm nur eine Andeutung (S. 77, Anm. **): „Begriff ist für mich ein mögliches Prädikat eines singulären, beurteilbaren Inhalts, Gegenstand ein mögliches Subjekt eines solchen.“ Hier ist im singulären Urteils-, also Erkenntnisinhalt die Einzahl ersichtlich vorausgesetzt. Allgemeiner: es wird als bekannt und gegeben vorausgesetzt, was es heißt: „*X* fällt unter den Begriff *A*“. Vorausgesetzt wird dies aber durchaus im Sinne der traditionellen Logik, d. h. im Sinne des Aristoteles, nach welchem das Enthaltensein unter einem Begriff zweifellos das Verhältnis des (gegebenen!) Einzelnen zum Allgemeinen bedeutet. Also vorausgesetzt wird auf jede Weise das Einzelne, d. h. in der Einzahl Gedachte, aus dem es dann freilich leicht ist den Begriff der Einzahl selbst analytisch herauszuholen. Diesen Fehler, der in einer einfachen *petitio principii* besteht, teilen alle Ableitungen der Zahl aus dem Begriff der Zugehörigkeit von Gegenständen zu Klassen (Mengen, Gesamtheiten). Unvermeidlich werden dabei die Gegenstände von Anfang an als (in letztem Betracht) einzelne, d. h. je einer der Zahl nach, gedacht.

Das ist nun nicht bloß überhaupt eine Erklärung desselben durch dasselbe, sondern Frege tut damit im Grunde eben das, was er vermeiden wollte: er setzt die fertigen Dinge voraus, um an diesen, als ihnen anhängende Eigenschaften, die Zahlbeziehungen aufzuweisen. Gewiß nicht im rohen empiristischen Sinne; nicht die vorhandenen Dinge setzt er voraus; aber doch im Begriff ist ihm das Ding, unter dem Namen des Gegenstandes, voraus fertig. Darin aber ist unvermeidlich die Zahl, jedenfalls die Einzahl, schon mitgesetzt. D. h. er ist der reinen Denkfunktion, welche die Zahl ausdrückt, wohl auf der Spur, aber weiß sie von den übrigen reinen Denkfunktionen, mit denen zusammen sie das Ding oder den Gegenstand erst aufzubauen hat, nicht rein abzulösen und in die wahre logische Beziehung zu setzen, jene Beziehung, die wir ihrem allgemeinen Charakter nach als Korrelation, nicht Identität, bereits erkannten. Es drückt sich dies bei Frege auch darin aus, daß er die Zahl — nach wieder sehr treffender Zurückweisung jeder subjektiven Begründung auf psychologische Vorgänge — auf etwas wie Platonische Ideen, nämlich objektive Denkinhalte stützt. D. h., er sucht die Denkinhalte zwar, wie Plato, rein, aber, wie Plato in seiner Frühzeit, einseitig ontisch, nicht genetisch zu erfassen. Die reinen Denkgebilde sind ihm ein- für allemal fertig, er kennt keine Erzeugung reiner Denkinhalte und keine sich entwickelnden Beziehungen, sondern nur stehende unter stehenden Denkpunkten. Damit mußte der synthetische Sinn des Denkens, den er in der Auffassung des arithmetischen Urteils als erweiternd, nicht bloß erläuternd, doch im letzten Grunde anerkennt, wo nicht gänzlich wieder verloren gehen, doch seine volle Entfaltung nicht erreichen.

Was nun ist nach Frege die Zahl, zunächst die Einheit? Nicht eine Eigenschaft von Dingen; eine seltsame Eigenschaft in der Tat, die unterschiedslos allem zukäme, eine Unbegrenztheit des Umfangs also besäße, die jede Bestimmtheit des Inhalts ausschlösse. Sie ist also auch nicht als Gemeinsames aus vielen oder allen möglichen gegebenen Dingen herauszuholen, also im herkömmlichen Sinn durch „Abstraktion" des Gemeinsamen aus vielem Gegebenen zu „definieren". Leibniz zwar habe eine solche Definition versucht: „Eins ist, was wir durch einen Akt des Denkens zusammenfassen." Aber diese Definition sei ein Zirkel, weil in dem „einen" Akt des Denkens der Begriff „Eins" schon vorausgesetzt sei. Allerdings sei es Sache unserer Auffassung, welchen Gegenstand wir als einen ansehen wollen; aber gerade darum könne der Begriff des Einen nicht eben hiervon abhängen. — In der Sache ist das gewiß richtig. Aber vielleicht darf man annehmen, daß Leibniz gerade dies hat sagen wollen: die Einheit liege allein in der Art der Setzung, nicht im Gegenstande unabhängig von der Art seiner Setzung; was abgesehen von der psychologischen Wendung des Ausdrucks (der von Akten spricht) genau richtig ist. — Auch nicht die Abstraktion von den Verschiedenheiten der Dinge oder die Fiktion ihrer völligen Gleichheit könne den Begriff des Einen ursprünglich geben; denn mit Verschiedenheiten existierender Dinge habe die Zahl überhaupt nichts zu tun. Übrigens setze Mehrheit Verschiedenheit voraus; wie namentlich Jevons die Einheit auf die Identität, die Mehrheit auf die Verschiedenheit habe zurückführen, in der Mehrheit nichts als die „leere Form der Verschiedenheit" sehen wollen. — Dies alles ist richtig und vorzüglich klar entwickelt; doch kündigt sich in der letzten Wendung der Hauptfehler bereits an, dem

Frege dann verfällt. Es sind gewisse Beziehungen (Korrelationen!) der Zahl zu anderen Kategorien, besonders denen der Qualität, von ihm erkannt; aber diese Erkenntnis hat ihn dazu verleitet, jene auf diese zurückführen zu wollen. Neben der Qualität ist es die Existenz, mit der Frege die Zahl zusammenbringt. Einheit wird Existenz in der Einzahl; diese nähere Bestimmung der Existenz soll dann in der Identität liegen: Einheit sei Existenz als Identisches. Der sehr sichtbare Fehler dieser Ableitung soll sogleich aufgedeckt werden; das positiv Bedeutsame aber sei voraus anerkannt: Frege empfindet, daß die Zahl etwas Gleichartiges hat mit den reinen Begriffen der Qualität (Identität und Verschiedenheit) und ferner mit dem Begriff der Existenz; überhaupt also mit Kantischen „Kategorien", d. h. solchen Begriffen, die in ihrem Zusammenwirken den Gegenstand vielmehr erst ursprünglich aufbauen, als aus den fertigen Gegenständen hinterher zu schöpfen sind. Er empfindet auch einen notwendigen Zusammenhang unter den Begriffen dieser Art oder einigen derselben, und gerade den hier wichtigen. Aber er versucht dann, eine bestimmte Gruppe dieser Begriffe, eben die, welche die Zahl direkt begründen, die der Quantität, auf gewisse andere, anscheinend fundamentalere, nämlich die der Qualität und der Existenz, zurückzuführen. So ist das Ergebnis zwar falsch, aber es werden auf dem Wege zu ihm wichtige Dinge, wenn auch nicht bis aufs letzte ergründet, doch in Sicht gebracht und nach wichtigen Seiten beleuchtet.

§ 5. (*Fortsetzung.*) Wir sind nun vorbereitet, Freges Erklärungen der Null, der Eins, und dann der übrigen Zahlen in direkte Prüfung zu nehmen. Seine Erklärungen der Null und Eins lauten:

A) „Einem Begriff kommt die Zahl Null zu, wenn allgemein, was auch *a* sei, der Satz gilt, daß *a* nicht unter diesen Begriff fällt." D. h. der Begriff Null (= Keines) wird reduziert auf die logische Kategorie des „allgemein verneinenden Urteils“.

B) „Wenn 1. dies nicht der Fall, und wenn 2. aus den Sätzen: ‘*a* fällt unter *B*’ und ‘*b* fällt unter *B*’ allgemein folgt, daß *a* und *b* dasselbe sind, so kommt dem Begriff *B* die Zahl Eins zu.“ — Also der Begriff der Einheit wird reduziert auf den der Identität.

Nun sind wirklich (um bei dem letzten zu beginnen) die Begriffe des Einen und des Identischen zueinander streng korrelativ: was immer als identisch, läßt sich in gleicher Hinsicht als Eines auffassen, und was als Eines, in gleicher Hinsicht als identisch; aber doch ist keiner von beiden Begriffen auf den anderen reduzierbar. Der Versuch der Reduktion ist denn auch offenbar mißglückt. Identität soll Einzahl besagen. Welche Identität? Man hat mit Grund mehrere Begriffe von Identität unterschieden; einer von diesen und der einzige hier brauchbare ist — die numerische Identität. In dieser aber ist eben die Zahl, nämlich Einzahl, als unterscheidendes Merkmal von Anfang an mitgesetzt; also ist es leerer Schein, wenn man sie aus ihr herleitet. Nicht Identität eines Denkinhaltes schlechtweg, sondern numerische Identität, oder Identität des Exemplars, d. i. des Einzelnen, schließt die Zahleinheit ein; aber sie begründet sie nicht, sondern wird vielmehr, als numerische, durch sie erst begründet. Oder in anderer Wendung: Frege versteht von Anfang an unter Identität: Identität in der Existenz, nicht in der Essenz. Nun ist das in der Existenz Identische gewiß als solches notwendig in der Einzahl zu denken, aber eben indem die Einzahl als begriffliches Moment darin eingeht. Überhaupt ist die Existenz nichts weniger als der ursprünglichste unter den reinen Begriffen, sondern vielmehr der komplexeste von allen. Die Existenz, der Gegenstand als existierend ist es genau, der durch die Gesamtheit der Kategorien erst aufgebaut wird.

Bei dem allen bleibt hoch verdienstlich, daß die Einheit aufgewiesen werden soll in den Urbeziehungen, die das Denken eines Gegenstandes überhaupt ausmachen; also in dem, was Kant die synthetische Einheit nennt. Nur wird der Rückgang auf diese, hauptsächlich infolge der Isolierung, in der das Problem ins Auge gefaßt wird, nicht richtig vollzogen. Unmittelbar in der Funktion der synthetischen Einheit selbst, in der Grundkorrelation des Einen und Mannigfaltigen, der Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zu Vereinigenden, Vereinigung des zu Sondernden) liegt beides: die Einheit und Mehrheit der Quantität und der Qualität, die sich untereinander aufs engste verflechten, aber zugleich doch in aller Bestimmtheit begrifflich auseinandertreten.

Frege kennt die Kantische „synthetische Einheit" nur in der viel zu engen Form der Subsumption: „X fällt unter den Begriff A". Diese setzt er als Letztes voraus, wohinter nicht weiter zurückzugehen möglich sei, da bei allem Denkgebrauch, d. h. bei allem Gebrauch von Begriffen und Urteilen, dies schon vorausgesetzt werde. Gewiß ist die Subsumption sehr fundamental; aber doch nicht fundamentaler als alle anderen Urausdrücke der synthetischen Einheit, von denen sie nur einen darstellt. Und zwar ist sie einer ihrer Ausdrücke nach Seite der Qualität. Diese ist korrelativ zur Quantität; aber nicht sind darum die Bestimmungen der Quantität aus denen der Qualität herauszuholen. Auch die traditionelle Logik unterscheidet doch Inhalt und Umfang des Begriffs; und wenngleich der Umfang in bestimmtem Sinne vom Inhalt abhängt, so bleiben beide immer begrifflich verschieden als die einander korrespondierenden Grundrichtungen der im Begriff sich darstellenden synthetischen Einheit. Die Zahl aber gehört ohne Zweifel unmittelbar der Umfangsbestimmung an, ihr Begriff kann daher aus Inhaltsbestimmungen als solchen nicht geschöpft werden; vielmehr fordert es die Reinheit der logischen Darstellung, daß, sofern es um Umfangsbestimmungen sich handelt, von allen Inhaltsbestimmungen vorerst abgesehen wird.

Man könnte etwa sagen: die Zahleinheit sei die Umfangsbestimmung, welche der Inhaltsbestimmung der Identität entspricht. In der bei den Schullogikern beliebten graphischen Darstellung begrifflicher Verhältnisse wird der Fall der Identität zweier (!) Begriffe veranschaulicht durch das Zusammenfallen zweier (!) Kreise, durch das sie in der Tat — vielmehr einer werden. Interessant ist hierbei, daß von der Zweiheit ausgegangen, die (der Identität entsprechende) Einheit also als Grenzfall der verschwindenden Zweiheit (die eben mit der Verschiedenheit verschwindet) aufgestellt wird. Im Grunde ist es bei Frege dasselbe: die zwei Dinge a und b werden der Zahl nach eines im Falle ihrer Identität. Frege merkt gar nicht, daß er also die Zweiheit voraussetzt und die Einheit zu einem besonderen Fall, einem Grenzfall der Zweiheit macht; während er sich sonst gewiß darüber klar ist, daß vielmehr die Zweiheit nur unter Voraussetzung der Einheit aufgestellt werden kann.

Wie durchweg die Umfangsbeziehungen der Begriffe, die den Inhaltsbeziehungen zwar entsprechen, aber doch dem ganzen Begriff nach von ihnen verschieden sind, als richtiger Kern seiner Begründung zugrunde liegen, bei der mangelnden Unterscheidung der Umfangs- und Inhaltsbeziehungen aber alles Abzuleitende versteckt schon vorausgesetzt wird, das wird noch deutlicher an seiner Ableitung der Nullzahl. Diese ließe sich füglich in folgende Fassung bringen: „x fällt unter A in der Nullzahl, wenn von allen x richtig ist, daß sie nicht A sind," das heißt, wenn ich recht verstehe: die Null wird erklärt als der Umfang der Begriffe, die keinen Umfang haben. Denn ohne Zweifel soll Null nicht eine Inhalts-, sondern Umfangsbestimmung sein, aber den Umfang solcher Begriffe bezeichnen, unter die — nichts fällt, d. h. die keinen Umfang haben.

Gibt es Begriffe ohne Umfang? Frege bemüht sich, es glaubhaft zu machen. Es müsse den Begriff des Widersprechenden, z. B. des kleinsten Bruchs, doch geben, damit von ihm ausgesagt werden könne, er sei widersprechend, nur entspreche ihm eben kein Gegenstand; er sei also zwar ein Begriff, aber ohne Umfang. — Schließlich ist die logische wie jede Terminologie bis zu gewissem Grade der Willkür anheimgegeben; aber zweckmäßig ist es wohl nicht, Begriff zu nennen, wodurch nicht etwas begriffen wird. Ich verstehe unter Begriff eine vollziehbare Denkeinheit; der Widerspruch aber ist im Denken unvollziehbar. Die Aussage, daß etwas ein Widerspruch sei, setzt nicht den Begriff dieses Widersprechenden voraus, sondern nur die Frage, ob aus gegebenen begrifflichen Elementen (z. B. Bruch und Kleinstes) eine Denkeinheit (die dann dargestellt sein würde durch einen Begriff „kleinster Bruch") vollziehbar sei oder nicht.

Aber gäbe man auch die Existenz des Begriffs des logisch Nichtexistierenden zu, so gibt es jedenfalls nicht einen Umfang solcher Begriffe, da das Nichtexistierende eben keinen Umfang hat. Will man darauf antworten: eben dies, keinen Umfang haben, bedeute den Umfang Null haben? Ich fürchte, daß man damit auf leeres Wortgefecht hinauskäme. Der Streit erledigt sich dadurch: der arithmetische Begriff der Null kann nicht der des logischen Nichts, des im logischen Sinne Nichtexistierenden sein; denn der Null kommt ohne Zweifel Existenz (im logischen Sinne) zu. Nicht erst die physikalischen Anwendungen (der Wärmegrad Null, die Geschwindigkeit Null) oder auch die geometrischen (Punkt als Nullwert der Strecke usw.) lassen die Null als sicher existierenden Begriff erkennen, sondern ganz ebenso ihr Gebrauch in der reinen Arithmetik. Die Differenz $1 - 1 = 0$ ist sicher nicht „null und nichtig" im Sinne logischer Nichtexistenz, sondern sie existiert so sicher wie die Differenz $\gtrless 0$, deren Grenze sie darstellt.

Nur weil der Begriff Null existiert, läßt sich der Umfang von Begriffen, denen kein Gegenstand entspricht, als Umfang Null symbolisch bezeichnen; nämlich es läßt sich ein Umfang Null als Grenze setzen, bei der der Umfang von Begriffen verschwindet. Mit anderen Worten, es kann das logische Feld frei gelassen werden für mögliche Besetzung mit existierendem Inhalt, während noch keine bestimmte Besetzung mit solchem angenommen wird. So wird der logische leere Raum zum „seienden Nichtsein", ganz wie der leere Raum, in den Demokrit seine Atome setzte. Dies Nichtsein ist aber vielmehr ein sehr bestandhaftes Sein; nicht „null und nichtig", nicht logische Nichtexistenz, die, wenn sonst ein zulässiger und brauchbarer Begriff, jedenfalls nicht einen Umfang, auch nicht einen „Umfang Null" begründen könnte, sondern rein in der Qualität verbliebe.

Diese kritische Erwägung führt nun auf ein Ergebnis, zu dem wir auf Grund unserer eigenen Ansätze allerdings ganz direkt gelangen konnten: die Null bedeutet nicht Nichtsetzung, sondern die Setzung der Bezugsgrundlage zu jeder Zahlrelation[1]). Eins, Zwei usf. sind von Anfang an zu verstehen in Relation zur Bezugsgrundlage Null. Die Null bedeutet den Denkpunkt, von dem aus irgend ein Denkschritt oder eine Folge von solchen (mit 1, 2 . . .) gezählt wird. Daher „zählt" sie selbst freilich nicht als Schritt; sie ist aber darum nicht überhaupt nichts, sondern eine unerläßliche Vorbedingung oder Grundlage aller Zahlsetzung, im eigentlichen Sinne der Setzung von Denkschritten. Auch wenn man die Null als verschwindende Zahl denkt, so verschwindet sie nicht ins logische Nichts, sondern sie bleibt beim Verschwinden jedes von Null verschiedenen Zahlwertes stehen als Bedingung, als Ausgang, von dem jeder mögliche, von Null verschiedene Wert zu rechnen ist. Unter dem Begriff des Stetigen wird in der

1) Diesen Sinn der Null kennen auch Arithmetiker wie Gergonne, nach Simon [*161*], S. 109 und 71, [*162*], S. 25.

Tat jeder endliche Wert von Null an sich erzeugend gedacht. Was dies in logischer Strenge besagt, ist hier noch nicht zu erörtern; jedenfalls aber setzt es, wenn es in irgendeinem Sinne gelten soll, voraus, daß der Nullwert als Grenze so sicher existieren muß, wie der von ihr an stetig wachsende oder bis zu ihr stetig abnehmende (positive oder negative, endliche oder unendliche) Zahlwert, der nicht Null ist.

Nachdem wir Freges Ableitung der Null und der Eins nicht zugeben konnten, ist natürlich auch seine Ableitung der übrigen Zahlen für uns nicht annehmbar. Er sagt weiter:

C) Die x sind Zwei, wenn sie 1. nicht Null sind (nach der ersten Definition), 2. nicht Eins (nach der zweiten), sondern Verschiedenes, z. B. a, b..., und wenn 3., gesetzt daß eines der Verschiedenen a ist, das Übrige, d. h. das von diesem Verschiedene, identisch (also nach der zweiten Definition Eins) ist. — Man könnte dafür offenbar das ganz Gewöhnliche sagen: Zwei sind Eins und Eins. Im Begriff des von a Verschiedenen, als des Übrigbleibenden, ist dieses im Grunde schon als Eines, und als das Andere d. i. Zweite zum a (als dem Einen im Sinne des Ersten) gedacht. Es ist also auch hier nur Schein, daß die Zahlbestimmung (hier die Zweiheit) auf etwas anderes (Verschiedenheit und Identität) zurückgeführt wäre; die Verschiedenen mußten schon zwei sein, um verschieden sein zu können. In gleicher Weise erfolgt dann die Definition der Drei, Vier usw., die allgemeine Definition des Folgenden und damit der Folge der endlichen Zahlen überhaupt. Die Verwendung der Negation in allen diesen Definitionen hat nur den begründeten Sinn, daß in der Vernein~~ig~~ung allerdings auch Auseinanderstellung, also der Begriff des Anderen gegenüber dem Einen liegt. Aber der quantitative und der qualitative Sinn des Einen und Anderen sind und bleiben einer auf den anderen unreduzierbar, obgleich zueinander streng korrelativ.

§ 6. (*Dedekind und andere. Relativität der Eins und Möglichkeit verschiedener Zählungen.*) Von Frege unterscheidet sich Dedekind [*33*] schon dadurch, daß er weit entschiedener die „freie Schöpfung“ oder „Erzeugung“ der Zahlbegriffe anerkennt. Ihr Ausdruck ist die „Abbildung eines Systems in sich selbst“, d. h. die immer gleichartige Wiederkehr derselben Beziehungsart, gemäß welcher allemal einem Element im System ein folgendes entspricht. Hierbei wird von aller besonderen Beschaffenheit der Elemente abgesehen, nur ihre Unterscheidbarkeit überhaupt festgehalten und ausschließlich die Beziehung ins Auge gefaßt, in welche die Elemente durch die „ordnende Abbildung“ (d. h. jene immer gleiche Beziehung von Element zu Element) zueinander gesetzt sind (§ 73). Allerdings wird das Grundelement Eins wieder einfach vorausgesetzt; es soll sich von den übrigen Elementen dadurch unterscheiden, daß es selbst zu keinem anderen (voraufgehenden) in jener Beziehung steht, durch welche von ihm an alle weiteren mit ihm selbst und untereinander zusammenhängen oder eine „Kette“ bilden (s. bes. 134 a. E., neben 44, 57, 58). Den Vorzug gegenüber Frege erkennen wir darin, daß die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied als das erzeugende Prinzip der Zahl bestimmt erkannt ist. Die Subsumption unter Begriffe wird ersetzt durch die Zugehörigkeit von „Dingen“ (die nicht mehr bedeuten als Setzungen des Denkens überhaupt) als Elemente zu einem „System“ (Inbegriff, Mannigfaltigkeit, Gesamtheit, d. h. der Sache nach: zu einer Ordnung), sofern sie „unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt“ werden (2). So kann der Fehler den Worten nach derselbe zu sein scheinen wie bei Frege. Aber jener gemeinsame Gesichtspunkt ist eben nur der der Ordnung selbst. Hiermit ist die Quantität 1. rein abgelöst von der Qualität, während sie bei Frege ganz auf diese zurückgedeutet wurde, und es ist 2. der reine Relations-Charakter der Zahl, ungleich bestimmter als bei Frege, als entscheidend erkannt. Unbefriedigend bleibt, abgesehen davon, daß die Null, die negative Zahl, überhaupt die sogenannten Erweiterungen der Zahl nicht ausdrücklich erklärt werden, hauptsächlich, was ebenso bei Frege, bei Hilbert und allen anderen unbefriedigend ist: die Sonderstellung der Eins, die auch hier nicht begründet, sondern einfach definitorisch aufgestellt wird. Da sie nach Dedekind (97) die kleinste Zahl sein, nichts ihr voraufgehen soll, so muß wohl die Null keine Zahl sein, oder es muß der Begriff der Zahl sich, kaum aufgestellt, eine logisch nicht wohl verständliche Wandlung gefallen lassen. Die Eins als kleinste Zahl wäre ein Absolutes. Aber dann wäre auch die Zwei ein Absolutes und die Drei, überhaupt jede bestimmte Zahl. Es wäre die Zahl von der Zeit und dem Raum darin radikal verschieden, daß (wie übrigens Frege S. 19 f. geradezu ausspricht) die Zahlen nicht wie die Zeit- und Raumpunkte alle gleichartig sind, sondern „jede ihre Eigentümlichkeit hat". Zwar könnte man versuchen zu antworten, es bleibe selbst bei dem von der Eins ausgehenden Aufbau der Zahl die Gleichartigkeit in einem Sinne gewahrt; nämlich die Eins in der Bedeutung der Einer seien ebenso gleichartig wie die Punkte; wenn aber ihre Zusammenfassung zur Einheit, Zweiheit, Dreiheit usf. allerdings Verschiedenheiten begründe, so seien diese nicht größer als etwa die der Zusammenstellungen von Einzelpunkten zu Punktpaaren, Punkttripeln usf. im Raume oder auch in der Zeit. In der Tat aber wären nach jener Auffassung schon die Einer nicht durchaus begriffsgleich, da es einen Einer gäbe, dem kein anderer vorhergeht, einen weiteren, dem nur einer, einen, dem genau zwei vorhergehen usf. Wirklich vermieden wird also auch unter dieser Betrachtung die Ungleichartigkeit nicht; sie hat nur das Gute, zu zeigen, daß der Forderung der Gleichartigkeit eben doch nicht auszuweichen ist.

Dagegen besteht eine solche Ungleichheit bei unserem Aufbau von Anfang an nicht. Es fällt damit der absolute

Begriff der Eins ganz aus; jedes Glied der Reihe kann im bloßen Stellverhältnis nach Belieben als erstes gesetzt und dann das ihm folgende als zweites, das diesem folgende als drittes usf. gezählt werden. Damit aber ergibt sich die Möglichkeit unendlich vieler, immer nach demselben Gesetz sich aufbauender, nur dem Ausgangsglied nach verschiedener Zählungen und unerschöpflicher neuer Beziehungen unter diesen, welche, wie wir bald sehen werden, die erste Art der sogenannten Rechenoperationen begründen. Ihre Verschiedenheit ist, wie sich zeigen wird, schärfer zu bezeichnen als Verschiedenheit der Nullbeziehung. Andererseits begründet die Möglichkeit der Zusammenfassung irgendeiner Vielheit gegebener Einheiten zu einer neuen Einheit die Möglichkeit verschiedener Zählungen in einer zweiten Art: verschieden nach der Einheit, mit der gezählt wird. Diese begründet die andere Grundart von Operationen, welche wir die metrischen nennen werden: Multiplikation und Division, die sich dann weiter entwickeln zur Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung.

Zwar kann gegen die Aufstellung des Begriffs verschiedener Zählungen sich leicht der Zweifel erheben: ob denn nicht die Zahlreihe als Ausdruck des in sich einzigen Verfahrens der Zählung überhaupt schlechthin einzig sei. Diese Einzigkeit wurde von Frege besonders betont; auch Lipps gab sie als eines der charakteristischen Merkmale der Zahlreihe an, und wir haben sie unsererseits ausdrücklich anerkannt. In der Tat wird die Einzigkeit in einem Sinne mit allem Recht behauptet. Die Funktion der Null, der Eins usf. ist in allen verschiedenen Zählungen eine und dieselbe. Aber sie kann von Stelle zu Stelle der Grundreihe, oder von Vielheit zu Vielheit, sich übertragen und gleichsam wandern, so wie (um eine gerade von Frege herangezogene historische Vergleichung zu benutzen) die Platonische Idee, unbeschadet ihrer Identität und numerischen Einheit, doch wandern, d.h. ihre Funktion von Stelle zu Stelle (des Raumes und der Zeit) übertragen kann. Oder man denke (um etwas Moderneres zur Analogie zu wählen) an das Wandern der Energie in der Mechanik, die dabei doch immer dieselbe, nur einmal existierende, unvermehrbare und unverminderbare Größe bleiben soll. Man sieht wohl schon hier ab, daß das Wandern der Zahlfunktion beruhen wird auf dem Unterschied und Verhältnis jener in der Zahl jederzeit eingeschlossenen drei Momente: der zunächst unterschiedslosen Setzung von Einem und wieder Einem usf.; der Gliederung nach Grund- und Gegenglied; und endlich der Zusammensetzung. Auf diese Weise behält die Einzigkeit der Zahl ihren strengen Sinn und besteht doch die Möglichkeit immer neuer Zählungen, nicht je nachdem zählbare Gegenstände gegeben oder denkbar sind, sondern an und für sich nach den eigenen Gesetzen der Zahl. Hierbei hat die „Möglichkeit" nicht bloß den Sinn der Zulässigkeit zufolge der Widerspruchslosigkeit; sondern es gibt (im mathematischen Sinn des Existierens) alle diese unendlichen Zählungen von immer neuen Nullpunkten aus und mit immer neuen Einheiten, und es gibt eben damit die immer neuen Relationen unter diesen verschiedenen Zählungen. Die Rechenoperationen sind nichts als die Entwicklungen dieser unendlichen, existierenden Zählungen und Relationen unter solchen. Also reden sie alle von seienden Relationen, aber indem sie diese von den einfachsten an Stufe um Stufe entwickeln. Also widerspricht jenes Sein nicht dem Werden, der Erzeugung neuer und neuer Zahlwerte; wie es sich besonders zu erkennen gibt in der Unendlichkeit ihrer Entwicklung, die eine Erschöpfung der existierenden Möglichkeiten geradezu ausschließt, während es zugleich ausgeschlossen ist, anders als durch bestimmte Zwischenglieder von den einfachsten zu höheren und höheren Relationsarten logisch überzugehen.

Zur Betrachtung dieser Entwicklungen der Zahlbeziehungen, d. h. zur Ableitung der sogenannten Rechenoperationen schreiten wir jetzt.

§ 7. (*Zahlgleichung und Zahloperation.*) Alle Rechnung vollzieht sich in Gleichungen. Es scheint daher, als müsse man zuerst den Begriff der Zahlgleichheit aufstellen. Aber da stößt man sofort auf eine ernste Schwierigkeit. Was kann es heißen: zwei Zahlen sind gleich? Da die Zahlreihe, als Ausdruck des Zählverfahrens, schlechthin einzig ist, so wären gleiche Zahlen dieselben Zahlen, es hätte keinen Sinn, sie erst gleich zu setzen. Die Zahl 1, die Zahl 2 usf. existiert überhaupt nur ein einziges Mal, also hat es keinen Sinn, als Satz der Arithmetik aufzustellen: $1 = 1$, $2 = 2$ usf. So sagt man in der Tat auch nicht, sondern etwa $1 + 1 = 2$, $3 - 1 = 2$, $2 \cdot 1 = 2$, $4 : 2 = 2$. Man gelangt, scheint es, auf verschiedenen Wegen zu demselben Ziel; und man setzt die Operationen, die in sich durchaus verschieden sind, einander „gleich", sofern sie dieselbe Zahl zum Ergebnis haben: $1 + 1 = 3 - 1 = 2 \cdot 1 = 4 : 2$. Die Operationen sind in der Tat nur darin einander gleich, daß sie auf dasselbe Resultat Zwei führen, sonst sind sie durchaus verschieden. Ihre Gleichheit ist vielmehr Äquivalenz, wie auch von Leibniz an vielfach bemerkt worden ist.

Aber wir wissen noch gar nicht, was Zahloperationen sind. Man spricht von „Ableitung" einer neuen Zahl aus gegebenen. Aber Zahlen sind nicht Dinge, die der Veränderung unterliegen, die aus etwas etwas anderes werden können. Sie sind schlechthin, aus ihnen läßt sich nichts machen, mit ihnen läßt sich nichts tun; man kann sie nicht rücken noch wandeln, zusammen- oder voneinandertun, vermehren oder vermindern, vervielfältigen oder teilen, noch können sie verschwinden und gar mehr als verschwinden; sie sind in unveränderlicher Bestimmtheit. Schon Plato hat die Behandlung der Zahlen nach Art veränderlicher und verrückbarer Dinge weidlich verspottet: Waren die

Zwei etwa nicht Zwei, bevor man sie zusammentat? Soll aus Eins Zwei werden bald durch Zusammentun, bald im Gegenteil durch Trennen? Dergleichen mag von Dingen gesagt werden, die dem Werden und Vergehen und der Veränderung und Verrückung unterliegen, nicht aber von Zahlen, die doch Begriffe sein wollen.

Man hat, wie es scheint, die „Synthesis" psychologisch mißverstanden, als Zusammentun zwar nicht äußerer Dinge, aber wenigstens ihrer stellvertretenden Abbilder in der Vorstellung. Psychologisch hat es auch wohl Sinn, davon zu reden, wie Denkfunktionen sich verflechten, aus gegebenen, d. h. bereits eingeübten Verbindungen neue hervorwachsen oder schon gebildete wieder zergehen. So mag der Psychologe die Zahlgebilde (Summen, Produkte usf.) wachsen und sich entwickeln lassen. Aber mit dem allen hat die Logik der Zahl nichts zu schaffen. Für sie existieren auf der jetzt erreichten Stufe der Betrachtung nur Bestimmtheiten, welche sind, nicht werden. Es hat für sie keinen Sinn zu sagen, daß aus zwei Zahlen eine neue wird. Wieso wird sie, wenn sie doch zuvor schon ist? Denn wenn man von Rechnung spricht, setzt man die Zahlen doch schon voraus.

Auch scheitert man bei jedem Versuch der Durchführung sehr bald. Wenn es einen Sinn zu haben wenigstens scheinen kann: aus der Zwei und der Eins erzeuge sich die Drei, was soll es dagegen heißen, durch Wegnahme des Einen vom Einen erzeuge sich die Null; und gar durch Wegnahme der Drei von der Zwei die negative Eins? Was ist die Null, die negative Zahl, und ebenso der Bruch, die irrationale Wurzel, das Irrationale überhaupt, das Imaginäre? Man spricht von „Erweiterungen des Zahlbegriffs". Man will sagen: Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Aber worauf erweitert man sie? Auf Zahlen doch nicht? Wenigstens hatte man voraus keinen Begriff der Zahl gegeben, nach welchem dies alles Zahlen wären. Man verständigt sich, das Wort Zahl zu gebrauchen über den anfänglich definierten Sinn hinaus — ohne doch einen neuen Sinn dieses Wortes aufzustellen. Also sind es leere Symbole, mit denen man rechnet. Merkwürdig nur, daß dabei (oft, nicht immer) Ergebnisse herauskommen, die wieder einen den Anfangsdefinitionen entsprechenden Sinn geben und in der Anwendung sich als richtig erproben. Damit sind die Mathematiker lange zufrieden gewesen; sie vermißten gar nicht einen Sinn der Operation, wenn sie nur Resultate sahen. Aber gerade die großen Mathematiker haben sich dabei nie beruhigt, und allgemein darf gesagt werden, daß die heutige Mathematik gegen die Forderung einer logischen Durchdringung des Sinnes der arithmetischen Operationen nicht mehr taub ist. Nur finde ich nicht, daß eine befriedigende logische Erklärung der Rechenoperationen bis jetzt gegeben sei.

Man darf nicht hoffen, zu einer solchen anders zu gelangen, als indem man als erste Voraussetzung zugrunde legt, daß Zahlen schlechthin sind und, einmal ihren Begriff gesetzt, als eben das, als was sie gesetzt sind, gesetzt bleiben, unentstanden, unvergänglich, unveränderlich. Aber indem sie sind, verhalten sie sich irgendwie gegeneinander, und die vollständige Entwicklung dieser in und mit den Zahlen selbst gesetzten Verhältnisse, das und nichts anderes ist der Sinn der Rechnung. Das allein ist das Tun der Mathematik, daß sie diese Verhältnisse, die an sich in und mit den Zahlen selbst und gleich ihnen sind, nicht werden, in methodischem Fortschritt sich entwickelt. Was so keine überzeugende Erklärung fände, entzöge sich überhaupt klarem Begriff, dürfte also in einer Wissenschaft von der Zahl überhaupt nicht zugelassen werden. Doch wird sich zeigen, daß alle bisher mit Erfolg entwickelten Zahlgebilde auf diesem Wege ihre Erklärung wirklich finden.

Zunächst wird der Sinn der Gleichung, der so problematisch erschien, aus dieser Grundvoraussetzung sofort klar. Was gleichzusetzen, sind nicht Zahlen, als eine Art Dinge, sondern Relationen unter Zahlen, die selbst nichts als Termini von Relationen bedeuten. Auch eine Zahlrelation einer für sich stehenden Zahl gleichzusetzen, hat keinen aus sich klaren Sinn, sondern kann allenfalls nur als abkürzender Ausdruck zugelassen werden; an sich, nach genauer Logik, kann nur eine Relation einer Relation gleichgesetzt werden.

Daraus ergibt sich freilich die zunächst vielleicht befremdende Folgerung, daß arithmetische Gleichungen ihrem Begriff nach notwendig viergliederig sind, also eigentlich stets Proportionen darstellen. Dies wird sich uns aber in der Durchführung wirklich bestätigen. Wir beginnen, schon um uns vom Herkommen nicht zu weit zu entfernen, mit der Untersuchung der Addition.

§ 8. (*Die Addition.*) Was heißt $1 + 1 = 2$? Man darf nicht Anstoß daran nehmen, daß eine solche anscheinende Kinderfrage hier gestellt wird. So paradox es ist, eine logisch voll befriedigende Antwort auf diese Frage ist bisher auch bei den gelehrtesten Arithmetikern nicht zu finden. Schon oft aber hat die gründliche Lösung der denkbar einfachsten Fragen sich fruchtbar erwiesen für die Lösung viel größerer Fragen. Das ist auch nicht zu verwundern. In den Fundamenten steckt alles; ist in den Grundlagen der Wissenschaft nur das geringste, vielleicht in weite Konsequenzen hinein unschädliche Versehen begangen, irgendwo wird es doch, wenn auch vielleicht erst in fernen Ableitungen, sich verhängnisvoll erweisen. Also darf man es nicht scheuen, eine solche scheinbar einfachste Frage einmal scharf ins Auge zu nehmen.

Und da zeigt sich sofort, daß in diesem schlichten $1 + 1$ ein seltsames Problem liegt. Vorausgesetzt sei die Reihe der ganzen Zahlen: 1, 2, . . ., wobei die gewöhnliche Erklärung eintweilen gelten möge, daß 1 die (willkürliche) Anfangssetzung, 2 das diesem Anfang zunächst, 3 das wieder diesem zunächst Gesetzte bedeutet usf. Diese Reihe ist (wie allgemein anerkannt wird) einzig, unabänderlich. Es darf also stets nur gezählt werden: 1, 2, 3, 4, 5, ...; in welcher Reihe jedes folgende Glied durch das vorhergehende und alle vorhergehenden bis zur 1 zurück bestimmt ist. Woher nehme ich nun die Berechtigung zu sagen: Eins und Eins; also gewissermaßen zu zählen: 1, 1, da doch nach der Voraussetzung auf 1 jedenfalls 2 folgen müßte, und nie nochmals 1? Oder wie darf ich sagen $3 + 2$, also gewissermaßen zählen: 1, 2, 3, 1, 2, statt, was bisher einzig zulässig war: 1, 2, 3, 4, 5?

Aber indem die Frage bestimmt so gestellt ist, ist die Antwort fast schon gegeben. Nicht in einer und derselben Zählung kann ich zählen: 1, 2, 3, 1, 2. Aber ich kann eine erste Zählung mit der 3 abbrechen und eine neue beginnen; bei der ich aber die erste (bis zur 3) im Sinne behalte. Diese neue Zählung (1, 2) ist also nicht, wie die erste, voraussetzungslos, sondern, als neue, auf jene als voraufgehende zurückbezüglich.

In der Zahlgleichung $3 + 2 = 5$ sind es somit drei verschiedene Zählungen, die untereinander in eine noch näher zu untersuchende Beziehung treten:

$$\begin{array}{rl|l}
1, 2, 3 & & \ldots\ldots \\
 & 1, 2 & \ldots \\
1, 2, 3, 4, 5 & & \ldots
\end{array}$$

Also ist es, um das Problem der Addition aufzulösen, vor allem nötig, sich klar darüber zu werden, inwiefern, und zwar in reiner Arithmetik, nicht etwa in Anwendung auf Dinge, von verschiedenen Zählungen mit Fug geredet werden kann, da doch an sich die Zählung als Verfahren einzig, die Reihe der ganzen Zahlen, 1, 2, 3 ... nur einmal vorhanden ist. Dies ist nun in der Tat und bleibt so lange logisch ungerechtfertigt, als man die Zahl 1, und so folgerecht 2, 3 und jede Zahl, als Absolute ansieht, also nicht zugeben will, daß Zahlsetzung in jedem Fall relative Setzung, Setzung von Relationen ist. Die Relationen sind unveränderlich; aber nicht Zahlen als absolute Dinge. Wir haben ursprünglich nicht eine absolute Erstsetzung, dann Folgesetzung, Folgesetzung dieser Folgesetzung usf., sondern die Setzung von Etwas überhaupt in Beziehung zu Etwas, dann die Wiederholbarkeit dieser relativen Setzung, und diese von Anfang an in der doppelten Weise, daß die vorherige Grundsetzung Gegensetzung (zu einer anderen Grundsetzung), und daß die Gegensetzung Grundsetzung (zu einer anderen Gegensetzung) wird. Hiermit ist sofort gegeben, daß jedes Glied der ursprünglichen Reihe

$$\ldots {}^\frown \,|\, {}^\frown \,|\, {}^\frown \,|\, {}^\frown \,|\, {}^\frown \,|\, {}^\frown \ldots$$

die Funktion der Null, der Eins, und so auch der Zwei, der Drei usf. übernehmen kann. Damit ist die Möglichkeit immer neuer Zählungen und immer neuer Relationen unter solchen begründet. Es gibt, mit anderen Worten, nicht einen absoluten Begriff, z. B. der Eins, der Zwei, sondern Eins ist von Anfang an Eins gegen Null, d. h. Erstgesetztes von einer bestimmten, in der ursprünglich indifferenten Reihe willkürlich wählbaren Ausgangsstelle der Zählung aus, als der gleichfalls nie absolut, sondern stets nur relativ zu verstehenden Null, der Null für diese Zählung.

Die gewöhnliche Erklärung der Null läßt diese auf wunderliche Weise entstehen aus der im Grunde widersinnigen Forderung, Gleiches von Gleichem abzuzählen. Abzählen läßt sich nur, was zuvor zugezählt war; durch Abzählen wiedererhalten kann man nur, was man vor der Zuzählung hatte; soll also durch Abzählung Null herauskommen, so muß von Anfang an zur Null zugezählt worden sein. So ist es nun in der Tat. Die Null zählt nicht, erst die Eins zählt; aber die Null bezeichnet den Punkt, von wo aus (mit 1, 2, 3 . . .) gezählt wird. In die Zahlreihe, die das Verfahren der Zählung allgemein ausdrücken soll, ist sie eben deshalb einzustellen, aber, ebenso wie die 1, die 2 usf., nicht in irgendeinem absoluten Sinne (des absoluten Nichts der Zahl nach), sondern von Anfang an in dem relativen der Ausgangsstelle der jedesmaligen Zählung, welche Ausgangsstelle nämlich wechseln, d. h. auf jede Stelle der ursprünglichen, indifferenten Reihe

$$\ldots \frown | \frown | \frown | \frown \ldots$$

ihre Funktion übertragen kann.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich die folgende Erklärung der Addition. $+1$ heiße, nach auch sonst geltender Auffassung: „Eins zugezählt". Der Allgemeinausdruck dessen aber, wozu zugezählt wird, ist die Null; also würde der Ausdruck $+1$ vollständig lauten: $0+1$, d. h. „von Null aus Eins gezählt". Was heißt nun $1+1$? Der Analogie nach: von 1 aus 1 gezählt. Aber wie darf ich von 1, statt von 0 aus, 1 zählen? Darauf ist nun geantwortet: nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, in welcher die Eins der vorigen Zählung die Funktion der Null übernimmt; also:

$$\begin{array}{llll} 0 & 1 & \ldots & \\ & 0 & 1 & \ldots \end{array}$$

Hiernach ergibt sich dieser Sinn der Summation $1+1=2$: Von 0 aus 1 gezählt, und von dieser 1, als 0 einer neuen Zählung, wiederum 1 gezählt, ist „gleich", d. h. gilt gleichviel wie von der ursprünglichen 0 aus 2 gezählt.

Wir sagten nun: gleichgesetzt werden können ursprünglich nur Verhältnisse; eine Zahlgleichung müsse in Wahrheit eine Proportion darstellen. Wo ist hier die Proportion? Welches ist das vierte Glied? Die Antwort kann nach der eben gegebenen Erklärung nur lauten: Dies vierte Glied ist die Null der ursprünglichen Zählung. Von der Eins einer ersten Zählung als neuer relativer Null aus, in einer neuen Zählung also, Eins gezählt, ist in bestimmtem Sinne dasselbe oder gilt gleichviel wie in der ersten Zählung von der Null dieser Zählung aus Zwei gezählt. Also

$$1 + 1 = 0 + 2.$$

In welchem Sinne aber ist es dasselbe oder gilt es gleichviel? Der ganze Sinn des auf beiden Seiten der Gleichung Gesetzten ist verschieden; es kann gar nicht der Schein entstehen, als sei in diesem Urteil das Prädikat im Subjekt eingeschlossen und nach dem Satze des Widerspruchs daraus hervorzuholen. Die erste Stelle nach der ersten, sofern nach dieser die Zählung neu, also mit Eins, einsetzt, ist nicht 2, sondern 1; aber ihr entspricht die 2 der ursprünglichen Zählung, und diese Entsprechung ist es, welche die Gleichung aussagt. Allemal wenn in einer ursprünglichen Zählung 1, 2 gezählt wird, läßt sich auch in zwei verschiedenen Zählungen (nämlich der ursprünglichen, die bei 1 abbricht, und einer neuen, in welcher die Funktion der Null auf das vorher als Eins gezählte Glied übertragen wird) Eins und wiederum Eins zählen, und umgekehrt. Diese zwei Zählungen sind jener einen (und umgekehrt) substituierbar, sie sind einander gleichwertig, äquivalent, nicht aber gleich, sofern darunter verstanden wird: identisch.

Es mag diese Erklärung auf den ersten Anblick weniger einfach erscheinen als die sonst gebräuchlichen; daß sie aber in der Tat die gesamte Auffassung der arithmetischen Prinzipien vereinfacht, wird sich zeigen. Voraus schon sieht man den Gewinn ab, daß jetzt die Gleichheit unterschiedslos in allen Anwendungen, von den einfachsten bis zu den kompliziertesten, dasselbe bedeuten wird, nämlich Substituierbarkeit, Äquivalenz auf Grund einer bestimmten Korrespondenz (Korrelativität), und nicht bald dies, bald etwas ganz anderes: Identität.

§ 9. (*Die Subtraktion.*) Wenn aber bei dieser Erklärung der Addition irgend noch als störend empfunden werden möchte, daß sie nicht einfach sei, so schwindet dies Bedenken ganz, wenn wir nun zur Subtraktion übergehen. Die Einfachheit einer Voraussetzung ist nicht danach zu bemessen, wie vieler Worte man bedarf, um sie selbst zumal dem, dessen ganzer Gedankenrichtung sie fern lag, verständlich zu machen, sondern die Einfachheit muß sich erweisen in der Ableitung der Konsequenzen. Die Einfachheit unserer Voraussetzung wäre unmittelbar zutage getreten, wenn wir statt von der Addition von der Subtraktion ausgegangen wären.

Wir erklärten die Addition als Ausdruck eines Verhältnisses, genauer des Verhältnisses zweier Verhältnisse, und zwar Stellverhältnisse: die erste Stelle der neuen Zählung, die nach der 1 einer ersten Zählung einsetzt (d. h. diese zur Null macht), entspricht der zweiten der ursprünglichen (von der ursprünglichen Null ausgehenden) Zählung. Man gewinnt nun leicht einen anderen Ausdruck derselben Entsprechung, wenn man bloß die Frage anders richtet. In der Addition war die Frage: Der ersten Stelle nach der ersten entspricht welche Stelle der ursprünglichen Zählung? Antwort: die zweite. Lautet dagegen die Frage: Die zweite Stelle ist, von der ersten aus gezählt, die wievielte? (worauf zu antworten: die erste), so erhält man, als nur anderen Ausdruck desselben Sachverhalts, die Subtraktionsgleichung $2 - 1 = 1$.

Schon so erscheint die Subtraktion mit der Addition mindestens gleich ursprünglich; es ist kein Grund, sie dieser, als die indirekte oder inverse Operation der direkten, entgegenzusetzen; sondern jeder der beiden Ausdrücke verhält sich zum anderen als inverser, oder beide sind gegeneinander reziprok. Sobald man aber die Proportion vollständig ausschreibt, ergibt sich die Subtraktion als der unmittelbarere und durchsichtigere Ausdruck des ihr und der Addition gleichermaßen zugrunde liegenden Sachverhalts:

2 ist, vom Ausgangspunkt 1 gerechnet, 1, d. h. 2 verhält sich zu 1, als neuem Ausgangspunkt, wie 1 zum ursprünglichen Ausgangspunkt, also zur 0 der ursprünglichen Zählung: $2 - 1 = 1 - 0$. Das aber ist der ganz direkte Ausdruck der Gleichheit des Stellverhältnisses: die 2 hat zur 1 die gleiche Stellung wie die 1 zur 0. So ist das Verhältnis irgendwelcher zwei Zahlen, nämlich der Stelle nach (wobei vorerst stets von der in der Reihe späteren Zahl ausgegangen werde), ausdrückbar durch das Verhältnis irgendeiner bestimmten Zahl zu Null, auf Grund der Gleichheit, d. h. Äquivalenz des Stellverhältnisses.

Diese Erklärung konnte von unseren Voraussetzungen aus natürlich auch unmittelbar, ohne den Umweg über die Addition aufgestellt werden. Doch hat der Umweg den Nutzen, es ungleich deutlicher zu machen, daß es sich notwendig um verschiedene Zählungen handelt. In der Tat, nur indem ich die Stellen z. B. nach der 3 bis zur 5 zähle, kann ich den Satz aussprechen: 5 hat zu 3 die gleiche Stellung wie 2 zu 0. Also um die Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ einzusehen, muß ich eben das Verhältnis, welches die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$ ausspricht, mir zum Bewußtsein bringen. Es bleibt also dabei, daß beide Gleichungen denselben zugrunde liegenden Sachverhalt aussprechen, also logisch reziprok sind. Aber sofern dieser zugrunde liegende Sachverhalt, nämlich das Stellverhältnis, sich direkt in der Subtraktion ausspricht (das Minuszeichen kann geradezu als Ausdruck des Stellverhältnisses gedeutet werden), ist die Subtraktion der direkte, die Addition der inverse Ausdruck des zugrunde liegenden Sachverhalts. Für die Übertragung aus der einen Ausdrucksform in die andere gilt die Regel: daß der Stellproportion die Additionsgleichung aus den Summen der äußeren und inneren Glieder entspricht und umgekehrt; z. B. der Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ entspricht die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$.

Diese Erklärung der Subtraktion ist nun nicht bloß in sich äußerst einfach, da mit der Reihenfolge der Zahlen die Stellverhältnisse unter diesen, welche die Subtraktion unmittelbar begründen, ohne weiteres gegeben sind, sondern namentlich bietet sie die denkbar einfachste Lösung von Problemen, welche den Arithmetikern eine schier unglaubliche Mühe gekostet haben: den Problemen der Null und der negativen Zahl. Das hat uns als Schuljungen schon gequält, daß man in der Arithmetik nicht bloß, was schon schwer genug fällt, mit dem Nichts, sondern mit dem Weniger-als-nichts arbeiten und es in seinen Kopf bringen soll; daß es möglich sein soll, nicht bloß gleichviel von gleichviel, sondern mehr von weniger „abzuziehen". Hier versagt sofort jede Auffassung, die irgend noch Zahlen wie Dinge behandelt. Aber auch als inverse Operation zu der des Zusammentuns läßt sich die Subtraktion hier nicht mehr verstehen. Dagegen wenn es sich um eine Verhältnisgleichung handelt, so ist nichts einfacher, als daß ein Verhältnis als solches im Ausdruck umkehrbar ist. Keinem Schuljungen macht das Schwierigkeit, daß mit einem Mehr zugleich ein Weniger, mit dem So-viel-mehr das So-viel-weniger gegeben ist. Dem entspricht in unserer Deutung die doppelseitige Auffaßbarkeit des Stellverhältnisses. Ist die Stellung von 2 gegen 1 bestimmt, so ist es damit auch die Stellung von 1 gegen 2; ist jene auszudrücken durch die Stellung von 1 gegen 0, so diese folgerecht durch die von 0 gegen 1; diese beiden Ausdrücke sind zueinander einfach reziprok; wenn immer der eine, ist auch der andere möglich und begründet. In unserer Symbolik drückt sich dies einfach aus durch die Umkehrung der Proportion:

$$2 - 1 = 1 - 0,$$

$$0 - 1 = 1 - 2;$$

d. h. also nicht: 2 weniger als 1 ist 1 weniger als **keins**, sondern: 1 hat zu 2 dasselbe Stellverhältnis wie 0 zu 1.

Es ist dies sogar der denkbar direkteste Ausdruck dafür, daß man von 1 auf 2 in derselben Weise gelangt wie von 0 auf 1.

Hierdurch ist ohne weiteres auch die Bedeutung der Addition und Subtraktion für die Anzahl: eben der Begriff von 1 mehr, 1 weniger gegeben. Unsere Gleichungen können ebensowohl gelesen werden: 2 ist, gegen 1, 1 mehr, wie nach der Ordnungsfunktion der Zahl: eine Stelle weiter; 1 ist, gegen 2, 1 weniger, wie nach der Ordnungsfunktion: eine Stelle zurück. $1 - 0$ („wie sich der Stelle nach 1 zu 0 verhält"), heißt nach der Anzahl: eins mehr; $0 - 1$ (wie sich 0 zu 1 verhält): eins weniger. Man braucht dann nur noch durch Definition zu setzen: $1 - 0 = +1$ (was der oben gegebenen Erklärung des $+$ entspricht), $0 - 1 = -1$ (indem der ursprüngliche Ausgang der Zählung, sofern nichts anderes bestimmt ist, vorausgesetzt bleibt, also nicht hingeschrieben zu werden braucht, analog der Weglassung der 1 als Faktors), so hat man ohne weiteres die Begriffe der positiven und negativen Zahlen, im Unterschied von den absoluten, d. h. außer bestimmter Vergleichung (dem Stellverhältnis nach) gedachten. Der Unterschied liegt, wie man sieht, darin, daß bei den absoluten Zahlen oder „numerischen Werten" überhaupt nur an eine Zählung gedacht, bei den relativen verschiedene (dem Ausgangspunkt nach verschiedene) Zählungen in Betracht gezogen werden. Da aber die Zahlreihe Allgemeinausdruck des Zählverfahrens sein soll, so ist es gerechtfertigt, die Zulässigkeit relativer Zählungen in ihr von Anfang an mit zum Ausdruck zu bringen; dann treten an die Stelle der absoluten die positiven Zahlen, und die Null und die negativen Zahlen sind hinzuzufügen, so daß die Minusreihe über die Null hinaus in der von irgendeiner positiven Zahl zur Null beschriebenen Richtung weitergeht, wie es in der Arithmetik dargestellt zu werden pflegt. Die Null bildet den gemeinsamen Ausgangspunkt der Plus- und Minusreihe, weil sie die gemeinschaftliche Vergleichsgrundlage des Mehr und Weniger, d. h. weil sie stets den einen Terminus des Stellverhältnisses bildet. Zugleich dient die Null zum Ausdruck der Gleichheit, des Weder-mehr-noch-weniger: $1 - 1 = 0$, d. h. 1 ist gegen 1 weder mehr noch weniger. Das Verhältnis irgendeiner Zahl n zu 0 wie das der 0 zu irgendeiner Zahl n hat, wenn n sich der 0 unbegrenzt nähert, gleicherweise zur Grenze das Verhältnis 0 zu 0 oder ± 0.

§ 10. (*Kritische Anmerkung.*) Einige kritische Bemerkungen über sonstige Ableitungen der Addition und Subtraktion scheinen nicht überflüssig zu sein. Den vollen Gegensatz zu unserer Ableitung zeigt wiederum die (ältere) Arithmetik von Stolz [*167*]. Da wird durch ausdrücklich willkürliche Festsetzung dekretiert: Für den Fall, daß $a < b$ in der Subtraktion, soll ein und nur ein Ding (dafür hernach: Größe) existieren, das mit $(a - b)$ bezeichnet wird und der Gleichung genügt $(a - b) + b = a$. Das heißt, wenn ich recht verstehe: für den Fall, daß es keine Lösung der Aufgabe, b von a abzuziehen, gibt, setze man, es gäbe doch eine, und bezeichne das diese Lösung darstellende Ding, das es nicht gibt, mit dem genannten Ausdruck. „So wie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet ist," hieß es in jenem Buche, „besteht es aus zwei verschiedenartigen Teilen, der eine (die natürlichen Zahlen) hat eine reale Bedeutung, der andere existiert nur auf dem Papier." Von der Bruchzahl hieß es geradezu — dasselbe würde aber nach dem Gesagten von der negativen Zahl gelten —: sie ist nichts als dieses Zeichen. Diese Ungleichheit lasse sich indessen leicht heben; nämlich wie? indem man — auch die natürlichen Zahlen nur als ein System gesetzmäßig gebildeter Zeichen ansieht! Das heißt dann „Erweiterung des Zahlbegriffs". Man kann ebenso gut den Begriff des Messers erweitern auf Gegenstände ohne Heft und Klinge.

Worin liegt der ursprüngliche Fehler? Darin, daß man verlangt, Zahlen sollten Begriffe oder vielmehr Abbilder von Dingen, von existierenden Gegenständen sein; das versteht man unter: „reale Bedeutung haben“; statt daß es sich um reine Funktionsbegriffe handelt. Finden sich dann sogenannte Zahlen, welche jene Forderung offenbar nicht erfüllen (während es vielleicht ganz richtig gebildete Funktionsbegriffe sind), so erklärt man sie für etwas, was bloß auf dem Papier existiere.

Zwar trat neben diese „analytische“ Ableitung (die vielmehr nominalistisch heißen sollte) noch eine zweite, „synthetische“, die offenbar realistischer sein wollte. „Manchmal (!) lassen sich aus den natürlichen Zahlen von einer Benennung durch Hinzufügung einer weiteren Bestimmung zwei Reihen von benannten Zahlen ableiten, entspringend aus zwei Einheiten, welchen selbst, sowie je zwei Zahlen der beiden Reihen vom nämlichen numerischen Wert, die Eigenschaft beigelegt wird, daß sie bei ihrer Vereinigung einander vernichten.“ Solche Zahlen heißen entgegengesetzte Zahlen. Beispiele eines solchen Gegensatzes bieten dar: Vermögen und Schulden, die geradlinigen Wege vor- und rückwärts usw. Man nennt die beiden entgegengesetzten Einheiten 1 und $1'$, setzt durch Definition (dies ganz willkürlich!) die eine > 0, die andere < 0, so sind es dann die positiven und negativen Zahlen. Also man beobachtet an Dingen die Eigentümlichkeit, daß sie einander entgegengesetzt sein, d. h. „in der Vereinigung einander vernichten“ können (schon bei Dingen eine schwierige Sache), und überträgt diese vermeinte Eigenschaft von Dingen auf Zahlen, ohne irgendwelche Rechenschaft davon zu geben, wie aus der Natur der Zahl eine solche Eigenschaft etwa folge; wie zwei Zahlen es anfangen sollen, erstens sich, nachdem sie getrennt waren, zu vereinigen, zweitens in dieser Vereinigung und kraft ihrer einander zu vernichten. Rein formalistisch übrigens, ohne jeden Versuch einer Begründung, wird hierbei das Verhältnis zur

Null eingeführt. Es ist schwer zu verstehen, wie bei einer solchen Erklärung sonst logisch interessierte Mathematiker sich auch nur vorübergehend[1]) haben beruhigen können.

Hingegen protestiert z. B. schon Durège [*42*] nachdrücklich dagegen, daß man die Existenz und die Bedeutung der negativen Größen etwa in einem Gegensatz wie zwischen rechts und links, vorwärts und rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden, oder überhaupt in irgendeiner ihrer mannigfachen Anwendungen begründet sein lasse, und nicht lediglich in der Definition, durch die sie eingeführt werden. Allein für diese Definition genügt ihm als Begründung die einfache Forderung, daß den arithmetischen Grundoperationen allgemeine Anwendbarkeit zukomme; das von Hankel aufgestellte, neuerdings von den Arithmetikern mit Recht skeptisch angesehene Prinzip der „Permanenz der formalen Gesetze". Hankel selbst, ein feinsinniger, philosophisch und historisch gebildeter Mathematiker, betont wenigstens [*65*], daß doch eine Zahl heute nicht mehr, wie für die Pythagoreer, ein Ding, eine Substanz bedeute; die Frage nach der Existenz der Zahl könne nur auf das „denkende Subjekt" oder das „gedachte Objekt" (das Objekt als gedachtes!) bezogen werden. Er bringt in Erinnerung, daß nach Gauß die „Vernichtung in der Vereinigung", durch die allerdings auch er den Gegensatz des Plus und Minus erklärt, doch nicht Substanzen, sondern nur Relationen zwischen zwei Gegenständen betreffen sollte. Aber freilich Relationen von Gegenständen. Und Hankel selbst weiß sich schließlich nur zu helfen durch die Unterscheidung zwischen „formalen" (d. h. durch

---

1) S. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, 1892, z. B. S. 51. Durchweg ist diese jüngere Darstellung den neueren Anschauungen angepaßt. Es wurde dennoch auf das ältere Buch Bezug genommen, weil es typisch ist für eine Ansicht, die lange Zeit fast die allgemein herrschende war und auch heute wohl noch hier und da begegnet.

Willkürdefinition gesetzten) und „aktuellen" Zahlen, welche letzteren in „wirklichen Größen" (z. B. räumlichen) ihre Repräsentation finden; die Grenze zwischen beiden sei übrigens fließend. Solange es hierbei bleibt, wird man der Berufung auf Beispiele, wie rechts und links usw., offenbar nicht entgehen. Das einzig Förderliche liegt hier darin, daß doch wenigstens auf die Relation zurückgegangen wird. An dieser war der Gegensatz leicht aufzuzeigen; aber nicht als „Vernichtung in der Vereinigung", sondern als das einfache und klare Verhältnis der Reziprozität.

Lipps [*105, 106*] kennt die Reziprozität des Verhältnisses, aber benutzt sie nicht zur Aufstellung der Subtraktion sogleich in voller Allgemeinheit. Er rügt, daß man zur Begründung des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition nicht die homogene Beschaffenheit der Zahlreihe ausdrücklich herangezogen und zur Grundlage der Beweisführung gemacht habe. Dieser Vorwurf scheint mir namentlich Dedekind gegenüber nicht begründet, der die Homogeneïtät nicht bloß „unausgesprochen" zugrunde legt, sondern die Zahlreihe von Anfang an durch die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied in der Kette begründet und die Einzelglieder ausschließlich durch ihre Stelle in der Kette bestimmt, diese also von Anfang an als homogen vorausgesetzt hat.

Ausdrücklich auf die reine Verhältnisbetrachtung gründet dagegen die Addition wie die Subtraktion Simon [*161*], von dem ich die entscheidende Anregung zu meiner Auffassung empfangen zu haben mit Dank bekenne. Als Didaktiker und Methodiker des Mathematikunterrichts ist Simon davon durchdrungen, daß der mathematische Unterricht die eigentliche Denkschule sein müsse, und empfindet aus diesem pädagogischen Motiv stärker als die große Mehrheit der Mathematiker das Bedürfnis einer „erkenntniskritischen" Grundlage. Die reine Arithmetik ist ihm, wie Frege, nicht nur eine, sondern geradezu die reine Vernunftwissenschaft. Einheit und Vielheit, sagt er, sind „subjektive“ Begriffe, sie liegen nicht in den Dingen, sondern „in uns“. — Dieser Ausdruck ist vielleicht nur etwas zu sehr philosophisch. Aber es ist das Richtige gemeint: daß die mathematischen Begriffe Funktionsbegriffe, nicht Dingbegriffe sind. In der Begründung der Rechnungsarten nun geht Simon durchweg aus vom Gesichtspunkt der Vergleichung. Aus ihr entspringen die ersten allgemeinen Zahlbegriffe: mehr, gleichviel, weniger; diese zu präzisieren dient die Subtraktion, die also ebenso ursprünglich (er hätte sagen dürfen: ursprünglicher) ist wie die Addition. Nur sekundär kann die Vergleichung auch dargestellt werden als Trennung und als Verminderung; aber nicht nur bleibt die Vergleichung die Grundoperation, sondern der Gesichtspunkt der Trennung versagt schon bei der Subtraktion $a - a$, die Verminderung (die hier zur Not noch standhält) scheitert an der Subtraktion $a - b$ für den Fall, daß $b > a$. Unter dem Gesichtspunkt der Vergleichung dagegen ergibt sich unmittelbar: $8 - 5 = 3$ in der Bedeutung: 8 ist 3 mehr als 5; $5 - 8 = -3$: 5 ist 3 weniger als 8; beides ist miteinander gesetzt, denn die Relationen des Mehr und Weniger sind zueinander reziprok. Also bedeuten die positiven und negativen Zahlen einfach die „Abstufungen der Beziehungsbegriffe mehr und weniger“. Erst davon abgeleitet ist die Bedeutung der positiven und negativen als unter sich entgegengesetzter Zahlen. In voller Klarheit sagt Simon: die negativen Zahlen entspringen aus der Vergleichung, sind also Zahlen; ihr ursprünglicher Gegensatz (d. h. das Gegenseitigkeitsverhältnis der Begriffe mehr und weniger) hat den Gegensatz der Operationen erst zur Folge.

Das sind die wesentlichen Grundlagen der oben gegebenen Erklärung, welche denselben Grundgedanken nur mehr zu entwickeln bemüht war. Es bedurfte besonders noch der Erklärung, wie man zu den „Abstufungen“ des Mehr und

Weniger gelangt. Das kommt zur vollen Klarheit erst durch die Einführung des Begriffs verschiedener Zählungen oder den Begriff der „relativen“ Zählung, d. h. einer solchen, die eine andere sich voraussetzt, im Unterschied von der absoluten, d. h. keine andere voraussetzenden. Dies führt dann weiter zur Einführung der Null in unserem Sinne, und schließlich zum Ausgang von der reinen, von Anfang an zweiseitigen Relation überhaupt.

Auch nach Russells und Couturats Erklärung sind die positiven und negativen Zahlen (ebenso die Brüche) nicht sowohl Zahlen als vielmehr Operationen „oder besser Beziehungen“ zwischen den ganzen absoluten Zahlen, keineswegs mit diesen zu identifizieren. — Hieran ist nur mangelhaft, daß nicht erkannt ist, daß Zahlbegriffe überhaupt Beziehungsbegriffe, „absolute“ Zahlen nicht außer und vor aller Beziehung gegebene, sondern nur auf eine einzige, fest gedachte Bezugsgrundlage zurückbezogene sind. Sie stellen die Zahl in der Unbeweglichkeit des reinen Funktionsgesetzes, die relativen Zahlen in der ganzen Beweglichkeit der Funktion selbst dar; ganz wie Plato in der späteren, tieferen Entwicklung seiner Lehre die Idee in starrer Ruhe und in ihrer Selbstbewegung unterscheidet.

§ 11. (*Multiplikation.*) Mit der gewöhnlichen Erklärung der Multiplikation verhält es sich ähnlich wie mit der der Addition: sie lautet einfach, enthüllt aber bei näherer Prüfung kaum überwindliche Schwierigkeiten, die sich anfangs nur versteckten, weil man mit Zahlen wie mit Dingen umgehen zu können meinte.

Multiplikation, so sagen die Arithmetiker fast ausnahmslos, ist nur Summierung gleicher Summen, also nur eine verkürzte Form der Addition, für den besonderen Fall, daß die Summanden gleich sind.

An dieser Erklärung ist nicht bloß das auszusetzen, daß sie sogleich auf die Eins als Multiplikanden nicht zutrifft, denn Eins ist keine Summe; sondern wenn man auch den Weg fände, sie auf diesen Fall künstlich auszudehnen, jedenfalls rückt sie die Hauptsache aus den Augen: daß die Zahl hier, gegenüber der Addition und Subtraktion, in einer neuen Funktion auftritt, also, da die ursprüngliche Funktion der Zählung ohne Zweifel auch darin liegt, gleichzeitig in zwei verschiedenen Funktionen. Summen werden summiert, d. h. Zählungen werden gezählt. Bisher aber wußten wir nur, daß die Zahl zählt, nicht daß sie gezählt wird. Wir hatten es nur mit verschiedenen Zählungen, d. h. Weisen des Zählens zu tun; was gezählt wird, danach zu fragen war bis dahin überhaupt keine Veranlassung. Soll die Frage nachträglich beantwortet werden, so läßt sich nur sagen: Einheiten werden gezählt. Denn eine Vielheit entsteht durch wiederholte Setzung der Einheit, und das Wieviel dieser Einheiten bestimmen heißt Zählen. Kann man überhaupt etwas anderes zählen als Einheiten?

Nein: also, wenn man statt Einheiten, nämlich der ursprünglichen Einheiten, Vielheiten dieser ursprünglichen Einheiten zählt, so setzt man damit diese Vielheiten als neue Einheiten. Damit relativiert sich der Sinn der zu zählenden Einheit selbst, so wie bei der Addition und Subtraktion die Null sich relativierte. Diese Relativierung der zu zählenden Einheit ist die Grundlage der Multiplikation und Division.

Schon Aristoteles unterscheidet die zählende und die gezählte Zahl. Die Zahl als Zähler ist es, mit der wir im Stellverhältnis, daher in der Addition und Subtraktion, allein zu tun hatten. Sie tritt in ihrer Eigenheit besonders deutlich hervor in der Funktion der Ordnungszahl; obgleich es nicht richtig wäre, die Addition und Subtraktion ausschließlich auf die Ordnungsbedeutung der Zahl zu gründen; $+1$, -1 bedeutet, wie wir gesehen haben, ebensogut nach der Anzahl eins mehr, eins weniger, wie nach der Ordnungszahl eine Stelle weiter, eine Stelle zurück. Aber man zählt eben mit 1, 2 . . ., welche zunächst der Stelle nach, als voraufgehend und nachfolgend, sich unterscheiden, und erst dann auch die Vielheiten 1, 2, 3 . . . zu bezeichnen dienen. Aber eben Vielheiten von Einheiten, im Sinne der Einer; diese sind hier das Gezählte. Man sollte im Ausdruck bestimmt unterscheiden: die Eins als zählend, den Einer als das, was gezählt wird. Dies letztere ist zunächst und unmittelbar die Anzahl Eins, und nur sofern auch die Anzahlen sich selbst wiederum ordnen (nämlich in der Erzeugung der Vielheiten der Einer dem Zweier, dieser dem Dreier usf., als Teil dem Ganzen, vorhergeht), also die Ordnungszahlen sich den Anzahlen eindeutig zuordnen, dient der Ausdruck der Vielheiten 1, 2, . . . zugleich für die Ordnungszahlen.

Wie nun aber die Null, die Eins, und so jede Zahl im Stellverhältnis sich relativierte, d. h. in verschiedenen, aber aufeinander bezogenen Zählungen dasselbe bald als Stelle Null, bald als Stelle Eins, Zwei usf. fungierte, so relativiert sich ebenfalls die Einheit in der anderen Bedeutung, der des Gezählten, indem irgendeine Vielheit aus den ursprünglichen Einheiten wieder die Funktion jener Einheit übernimmt, aus der andere Vielheiten sich bilden lassen; damit ist dann die Möglichkeit der „Vervielfältigung“ (Multiplikation) gegeben.

Zunächst, wie im Stellverhältnis jede Stelle (1, 2, . . .) auszudrücken war durch ihr Verhältnis zur Ausgangsstelle Null, so ist in dem neuen Verhältnis, das wir jetzt zu betrachten haben, eine jede Vielheit auszudrücken im Verhältnis zu der Einheit, deren Vielheit sie ist:

$$1 = 1 \cdot 1 \text{ (1 Einer)},$$
$$2 = 2 \cdot 1 \text{ (2 Einer) usf.}$$

Und wie nach dem Stellverhältnis eine Gleichung von Verhältnissen (Stellproportion) sich ergab durch Vergleichung verschiedener, nämlich dem Ausgangspunkt nach verschiedener Zählungen, indem eine von o verschiedene Stelle einer ersten Zählung in einer neuen zur o gemacht und von ihr aus mit 1, 2, . . . gezählt, dann diese neue Zählung, unter Festhaltung und auf Grund ihrer Beziehung zur ursprünglichen, mit dieser verglichen wurde, so entsteht eine neue Gleichung von Verhältnissen (also Proportion) in jener anderen, noch unbenannten Funktion der Zahl durch Vergleichung verschiedener, nämlich der Einheit nach verschiedener Zählungen, indem eine von 1 verschiedene Zahl (d. h. Vielheit) der ersten Zählung, z. B. 2, in einer neuen Zählung als Einheit genommen und mit ihr weiter gezählt wird: ein Zweier, zwei Zweier usf., und dann solche verschiedene Zählungen, auf Grund der Beziehung, gemäß welcher jede folgende aus der vorigen abgeleitet (d. h. von ihr aus bestimmt) wurde, miteinander verglichen werden, z. B. 2 Einer sind 1 Zweier, 4 Einer sind 2 Zweier, d. h. den Vielheiten 2, 4, 6 . . . der Zählung mit der ursprünglichen Einheit entsprechen die Vielheiten 1, 2, 3 . . . der neuen Zählung, die mit der Zweiheit der ersten Zählung als neuer, abgeleiteter Einheit vollführt wird. Als neuer Einheit, denn anders als mit einer Einheit läßt sich nicht zählen; aber als Einheit fungiert jetzt die Zweiheit der ursprünglichen Zählung, genauer: die Einheit der neuen Zählung e n t s p r i c h t der Zweiheit der ursprünglichen.

Auch hier ist, wie bei der Addition, der Begriff einer neuen Zählung, also überhaupt verschiedener (hier: der Einheit nach verschiedener) Zählungen nicht zu entbehren. Es ist nicht anders als in verschiedenen Zählungen möglich, daß etwas „Ein Zweier", also zugleich Eins und Zwei sei. Die Zwei einer Zählung zur Eins machen kann man nicht, indem man in dieser selben Zählung verbleibt, sondern nur indem man eine neue Zählung aufstellt, die der ersten so entspricht, daß ihre Einheit der Zweiheit der ursprünglichen Zählung korrespondiert; in symbolischer Darstellung:

$$\begin{array}{cccccc} \| & \| & \| & . & . & . \\ | & | & | & . & . & . \end{array}$$

Wir nennen diese neue Funktion der Zahl die **metrische**, weil die Einheit die ihr entsprechenden Vielheiten **mißt**. Zwei sind zwei Einer, d. h. 2 gemessen durch 1, oder es sind 2, wenn das Maß 1 ist. Dieser Begriff des Maßes schließt nichts von Raum- oder Zeitbeziehung ein (während die Bezeichnung: geometrisches Verhältnis, geometrische Proportion, unnötiger und ungehöriger Weise Raumverhältnisse herbeizieht). Auch eine Strecke oder sonst ein räumliches oder auch zeitliches Gebilde ist Maß nur, sofern es zählt, d. h. als Einheit zu jeder Vielheit diese selbst mißt, und nicht, sofern es räumlich oder zeitlich ist.

Soll es aber ein Verhältnis (eben das metrische) sein, welches die Multiplikation ausdrückt, so muß die Multiplikationsgleichung eine versteckte Proportion sein, deren viertes Glied denn auch nicht schwer zu finden ist. Liest man $2 \cdot 3 = 6$: „2 Dreier sind 6", so fragt sich natürlich: was denn? und die Antwort lautet dann notwendig: 6 Einer. Umständlicher: mit der 3, als abgeleiteter Einheit, 2 gezählt, ist dasselbe, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Es ist dasselbe, d. h. keineswegs, es sei logisch damit identisch, sondern es sind gleichwertige, sich entsprechende, durcheinander ersetzbare Zählungsweisen; allemal wo die eine Art der Zählung möglich ist, ist es auch die andere.

Ich habe bei der Addition unterlassen, die besonderen Gesetze, welche die Arithmetik für diese Operationen aufstellt: das kommutative, assoziative und distributive Gesetz ausdrücklich abzuleiten, weil die Ableitung keine besonderen Schwierigkeiten bietet; hier bei der Multiplikation mag es dagegen am Platze sein, wenigstens das kommutative Gesetz, dessen Begründung den Arithmetikern oft unnötige Mühe gemacht hat, in aller Kürze abzuleiten. Völlig unbrauchbar ist für uns irgendeine Ableitung, die, statt in den Begriffen der Arithmetik zu verbleiben, auf räumliche Anschauung zurückgreift. Setzt man zwei Reihen von je drei Punkten untereinander

. . .

. . .

so sieht man freilich auf einen Blick, daß man hier ebensowohl, wenn man die horizontale Folge ins Auge faßt, drei Reihen von je zwei, wie, wenn die vertikale, zwei Reihen von je drei Gliedern, und dabei doch beide Male dieselben Punkte hat. So mag der Satz $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ manchem wohl gar als identischer erscheinen. Aber das ist eine handgreifliche *petitio principii*, daß man nach Belieben den Multiplikator zum Multiplikanden machen dürfe und umgekehrt; gerade dafür wird vielmehr der Beweis verlangt. Woher überhaupt die zweidimensionale Betrachtung, da man doch immer gesagt hat, daß die Zahlreihe nur eine Dimension habe? Stellt man die 6 Punkte vielmehr, wie es sich gebührt, in eine Reihe, so schwindet jeder Schein der Identität; man hat zwar noch dieselben 6 Punkte, aber es kann auch nicht einmal so scheinen, als ob mit der Auffassung derselben als $3 \cdot 2$ die andere Auffassung als $2 \cdot 3$ von selbst gegeben sei.

In den zwei Dimensionen bergen sich die zwei grundverschiedenen Funktionen der Zahl als zählende und als gezählte. Diese sind an sich schlechthin unvertauschbar; nicht sie werden vertauscht, wenn ich aus $2 \cdot 3$ $3 \cdot 2$ mache, oder, um den einfachsten Fall zu wählen, 2 Einer als 1 Zweier auffasse. Sondern die Glieder werden vertauscht. Das also steht zu beweisen, daß die Glieder gegeneinander ausgetauscht, das Gezählte zum Zählenden, das Zählende zum Gezählten gemacht werden darf.

Dies ist nun schon bewiesen für den Fall, daß der eine der beiden Faktoren 1 ist. Denn wir fanden als Grundlage der Multiplikation überhaupt: zwei Einer einer Zählung können in einer neuen Zählung als neue Einheit (nämlich als ein Zweier) gesetzt werden. Sie können so gesetzt werden, weil sie in der Tat auch wiederum Eines sind; wir dürfen in Zurückbeziehung auf das vorige Kapitel einfach sagen: zufolge der dritten Stufe des quantitativen Verfahrens, die eben darin besteht, die vielen Einheiten als eine Vielheit zu setzen. Auf dieser gegebenen Grundlage läßt sich nun leicht das kommutative Gesetz in voller Allgemeinheit beweisen. Nämlich es können die einander entsprechenden Einheiten der a Vielheiten b zu Vielheiten a verbunden werden: die ersten Glieder der a Vielheiten b sind a Glieder, die zweiten sind a, und so fort bis zu den letzten, d. h. $b$ten Gliedern, denn b Einheiten hat jede Vielheit b; also erhält man b Vielheiten a. Dazu ist kein Untereinanderschreiben, keine räumliche Anordnung irgendeiner Art erforderlich. Man kann ebensogut an zwei Takten von je drei Zeiteinheiten sich klar machen, daß in jedem Takt ein erster, ein zweiter, ein dritter Taktteil ist, also zwei erste, zwei zweite, zwei dritte, mithin dreimal zwei. Aber die Zeitanschauung ist als solche für den Beweis ebenso gleichgültig wie die Raumanschauung.

§ 12. (*Division.*) Wie der Gewinn unserer Erklärung der Addition sich bei der der Subtraktion zeigte, so zeigt sich der Gewinn unserer Erklärung der Multiplikation, indem wir das gleiche Erklärungsprinzip auf die Division übertragen. Die gewöhnliche Begründung der Division durch die Teilung als Umkehrung der Vervielfältigung führt zu einem reinen Ergebnis einzig für den Fall, daß der Dividend ein ganzes Vielfaches des Divisors ist. Aber auch wenn man sich gestattet, wie in einem ungenauen Haushalt Reste stehen zu lassen, so bleibt wenigstens gefordert, daß der Dividend größer als der Divisor sei. Eine Teilung des Weniger durch Mehr hat keinen Sinn, da das Mehrere im Minderen nicht einmal, geschweige mehrmals, sondern gar nicht enthalten ist und, was nicht darin ist, auch nicht herausgeholt werden kann. So reicht diese Erklärungsart nur für eine äußerst enge Auffassung der Division zu, und man braucht dann erst künstliche Hilfen, um die zu enge Auffassung hinterher so zu erweitern, wie es die Bewegungsfreiheit der Rechnung gebieterisch fordert.

Statt dessen gestattet unsere Auffassung der Multiplikation ohne weiteres aufzustellen: da jede Vielheit einer gegebenen Einheit auch wieder als Einheit zu einer neuen Vielheit verstanden werden kann, also der Begriff der zählbaren Einheit gleichgültig dagegen ist, ob die Einheit als ursprüngliche oder aus anderen Einheiten abgeleitete angesehen wird, so kann „die" Einheit sofort als aus irgendwelchen, beliebig vielen Einheiten durch Multiplikation gebildet, also nach gewöhnlicher Bezeichnung beliebig teilbar angesehen werden. Dasselbe gilt dann folgeweise für jede aus der gedachten Einheit dargestellte Vielheit.

D. h., die Division ist gegeben mit eben jenem Verhältnis von Vielheit und Einheit, welches nur in anderer Wendung die Multiplikation zum Ausdruck brachte. Und zwar zeigt sich sofort die Division als der direktere Ausdruck dieses Verhältnisses. $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$ heißt: mit der 3 als neuer Einheit 2 gezählt, gilt gleichviel, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Damit ist aber schon gesagt: 6 ist zur 3 (als relativer Einheit), was 2 zur ursprünglichen Einheit (nämlich das Doppelte); und eben dies spricht sich direkt aus in der Proportion (die in der Multiplikation also schlummerte) $6 : 3 = 2 : 1$. Nun gestattet jedes Verhältnis als solches eine Umkehrung; es gilt also ohne weiteres auch die Proportion $1 : 2 = 3 : 6$, womit die Division auch des Weniger durch Mehr, oder der B r u c h in voller Allgemeinheit gegeben ist.

Also nicht: 3 verändert durch 2 wird 6, und 6 umgekehrt verändert durch 2 wird wieder 3. Das ließe sich ohne geometrische oder sonstige existentielle Voraussetzungen überhaupt nicht verständlich machen, da Zahlen keine Veränderung vertragen, sondern als solche nur sind. Sondern 6 hat zu 3 die unveränderliche Relation, welche ausdrückbar ist durch die allgemeine Relation 2 : 1; ja man kann sagen 6 ist 2, wenn nämlich als (neue, relative) Einheit 3 angenommen ist; sowie in der Addition 5 2 ist, sofern von 3 als (neuer, relativer) 0 aus gezählt wird. Und so die Division: 3 hat zu 6, indem beide immer und ewig, unveränderlich sind, auch immer und ewig dasselbe seiende Verhältnis, nämlich das von 1 zu 2; was natürlich nur zutrifft, wenn man die 2 als neue Einheit versteht; denn ursprünglich gibt es ein metrisches Verhältnis nur zur Einheit, wie ein Stellverhältnis nur zur Null. Aber nachdem der Begriff der Einheit, ebenso wie vorher der der Null, sich relativiert hat, indem jede Vielheit wieder als Einheit verstanden werden, also umgekehrt die Einheit jede Vielheit vertreten kann, so läßt sich in dem Verhältnis 1 : 2 die 2 als neue Einheit verstehen, im Verhältnis zu welcher dann die 1 einen unterscheidenden Ausdruck braucht, in diesem Fall $^1/_2$. Die Einführung der Bruchzahl bietet jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr und behält nicht den mindesten Schein eines bloßen Kunstgriffs zur Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Ein Halbes ist ein genau so rechtmäßiger arithmetischer Begriff wie ein Doppeltes; beide beruhen genau auf derselben Grundlage: daß 2 Einer 1 Zweier, also 2 wiederum bezüglich 1, 1 bezüglich 2 ist, nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, die indessen zur vorigen in einer genau bestimmten Beziehung steht.

Wie im Stellverhältnis die Auffassung als Verbindung und Trennung oder Vermehrung und Verminderung sich leicht auf die reine Verhältnisbetrachtung zurückführt, so im metrischen Verhältnis die Auffassung als Vervielfältigung und Teilung. Dagegen ist das Umgekehrte nicht möglich, so daß man dann genötigt wird, den Begriff des Verhältnisses hinterher doch zu Hilfe zu nehmen. Dabei wird dann wohl ausdrücklich davor gewarnt, daß man nur ja nicht das Verhältnis mit dem Bruch verwechsle. Als ob es Sinn hätte, 6 in 2 Dreier zu teilen, wenn nicht 6 2 Dreier wären, d. h. 2 wären zur Einheit 3, oder zu 3 sich verhielten wie 2 zu 1. Mit dem Verhältnis 3 : 1 aber hat man ohne weiteres auch das Verhältnis 1 : 3, und dieses ist gleichbedeutend mit dem Bruch $^1/_3$; denn wie 3 : 1 das Verhältnis des Dreifachen zum Einfachen, so bedeutet 1 : 3 das Verhältnis des Einfachen zum Dreifachen, d. h. des Drittels zum Ganzen, da ja ein Dreifaches auch wieder Eines, dessen Einfaches also das Drittel dieser neuen, relativen Eins ist. Es ist dann ebenso leicht, zu den Verhältnissen 3 : 2, 2 : 3 zu gelangen, und so allgemein zum Verhältnis jeder rechtmäßig gesetzten Zahl zu jeder anderen. Auch daß Verhältnisse gezählt und alle Rechenoperationen auf sie angewandt werden, bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, da von Anfang an jede Zahl im metrischen Verhältnis zu 1 zu verstehen ist, also überhaupt in allen Rechnungen Verhältnisse mit Verhältnissen (metrischen wie Stellverhältnissen) wieder in (metrischen und Stell-)Verhältnissen betrachtet werden.

§ 13. (*Kritische Anmerkung.*) Man findet diese einfachste Auffassung der Multiplikation und Division am nächsten entsprechend bei Simon [*161*]. Er erklärt die Multiplikation (S. 73) dadurch, daß eine Mehrheit zur Einheit (Übereinheit) gemacht wird. $a \cdot b$ ist die Zahl, die so aus a „erzählt" ist wie b aus 1. Und entsprechend (S. 79): der Bruch ist keine benannte und keine unbenannte, sondern eine relative Zahl. „Es kann auch eine Zahl (verstehe: Vielheit) wie etwa 8 in unserem Geiste als Einheit gesetzt werden;" dann wird die frühere 1 zu $^1/_8$, der Bruch enthält also außer der reinen Anzahl (dem Zähler) noch eine Beziehung (Relation) seiner Einheit oder seines Nenners zur Haupteinheit. Bei der Regeldetri kann dann die Verhältnisauffassung keine Schwierigkeit mehr machen, da „den Schülern die Subjektivität der Begriffe Einheit und Vielheit in Fleisch und Blut übergegangen“ ist. Wir würden hier nur wieder statt „Subjektivität“ sagen: die Funktionsbedeutung der arithmetischen Begriffe.

Das Richtige liegt übrigens in diesem Fall so nahe, daß es nicht leicht ganz verfehlt werden konnte. Auch Stolz streift wenigstens daran. Er führt zwar den Bruch (wie schon erwähnt wurde) ganz formalistisch ein, als „Zeichen auf dem Papier“, aber begründet ihn wenigstens hinterher „synthetisch“ durch die Auffassung des Nenners als „Untereinheit“; die dann leider ihrerseits erst ihre Begründung finden soll durch die Voraussetzung, daß in der „Schar unter sich gleicher Dinge“ (von deren Betrachtung er nun einmal nicht loskommt) ein jedes sich in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zerlegen lasse. Schon Hankel hat gegen jede solche Auffassung mit vollem Recht eingewandt, daß doch diese Voraussetzung für Dinge nur in bestimmten Fällen zutreffe, so daß dem Begriff die für arithmetische Begriffe notwendige Allgemeinheit mangeln würde. Aber er wie Durège u. a. flüchtete deshalb wieder zur rein formalistischen Begründung aus dem Bedürfnis der Rechnung; er sprach von Zahlen als besonderen rein „mentalen“ Objekten, die mit Dingen, also auch mit dem Zählen (das man eben für ein Operieren mit Dingen hält) nichts zu tun hätten. So langt man glücklich bei Zahlen an, die mit dem Zählen nichts zu tun haben; während man doch denken sollte, daß sie überhaupt nichts als die Zählung selbst, als gesetzmäßige Funktion des Erkennens, zu entwickeln hätten. Das Beiwort „mental“ zu „Objekte“ ist also leider kein Hinweis auf den echten Begriff des Denkens als gesetzmäßiges Vorstellen, Gesetzesbewußtsein im Vorstellen, sondern es bleibt dabei, daß Zahlen Dinge sein sollen, wenn nicht äußere, dann Dinge des Geistes, die er sich gleichsam zum

Zeitvertreib macht, und die nicht etwa der Erkenntnis der Gegenstände dienen. Bedeutet Eins die Funktion der Einssetzung, dann folgt alles einfach und leicht; dann lassen sich auch 8 als 1, 1 als 8 setzen, aus dem einfachen Grunde, weil eine Vielheit auch wieder Eins ist, also die Einheit, als Funktion, auch eine Vielheit, und zwar jede, vertreten kann, womit alles gegeben ist, was man braucht.

Die scharfsinnige Erklärung, welche Lipps für die unbegrenzt teilbare Größe gibt (*106*, S. 127 ff.) darzulegen und im einzelnen zu prüfen, würde zu viel Raum in Anspruch nehmen. Lipps beweist mehr, als wir hier zu beweisen hatten; aber die Grundlage scheint mir von der unsrigen nicht wesentlich verschieden zu sein; alle seine Folgerungen würden sich aus unseren Voraussetzungen ebensowohl ableiten lassen. Er legt Gewicht darauf, daß die positiven reellen Zahlen nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen ableitbar oder auf sie reduzierbar seien, vielmehr beruhen auf der „ständig sich wiederholenden Entfaltung der Einheit zu der in ihr hervortretenden und mit ihr äquivalenten Vielheit" (S. 138). Dagegen ist nur zu sagen, daß schon der Aufbau der Reihe der ganzen Zahlen dieses selben Prinzips bedarf, daß also die positiven reellen Zahlen zwar nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen, wohl aber aus demselben Prinzip ableitbar sind, welches mit diesen zugleich schon gesetzt war. In der „Darstellung der Urreihe" bei Lipps (§ 3 und 4 desselben Kapitels) ist faktisch allemal einer Vielheit (a, b, c) eine Einheit (a) äquivalent gesetzt, also das angeblich neue Prinzip wirklich schon verwendet, nur in einer Einschränkung, für die von Anfang an keine Notwendigkeit vorlag. Eine sachliche Verschiedenheit prinzipieller Art gegenüber unserer Ableitung vermag ich nicht zu erkennen.

Nicht unbemerkt soll bleiben, daß Cantor (Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, § 3, vgl. § 4, Math. Ann. 46, 1895) die Multiplikation, um ihr allgemeine Anwendbarkeit auf seine Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten zu geben, auf die Kombination zurückführt. Nämlich jedes Element m einer Menge M läßt sich mit einem Element n einer Menge N verbinden zu einem neuen Element (m, n). Die Menge dieser Verbindungen (m, n) heißt die Verbindungsmenge von M und N (M, N), deren Mächtigkeit abhängt von den Mächtigkeiten von M $(\overline{\overline{M}} = a)$ und von N $(\overline{\overline{N}} = b)$; sie definiert das Produkt $a \cdot b = (M \cdot N)$. Einen ähnlichen Weg schlägt Whitehead (*183*) ein, dem Russell (*154*, § 115) und Couturat (*31*, S. 56) sich anschließen. In gewisser Weise liegt die Kombination auch in unserer Deutung der Multiplikation. Sollte dies aber so verstanden werden, daß überhaupt die Multiplikation auf die Kombination zurückzuführen sei, so würde darin, wie mir scheint, ein *Hysteron-proteron* liegen. Aus 3 Dingen m und 2 Dingen n sind 6 Kombinationen je eines m mit einem n möglich, weil dieser Kombinationen eben notwendig $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3$ sind; nicht aber ist $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3 = 6$ darum, weil aus 2 Gruppen von 3 und 2 Dingen 6 Kombinationen je eines Dinges der einen und eines der anderen Gruppe möglich sind. Man kann auf dies *Hysteron-proteron* freilich leicht kommen, wenn unter den Faktoren 3 und 2 Mengen von Dingen verstanden werden und das Produkt nun aus diesen Dingen, statt aus den reinen Zahlen, gebildet werden soll. Dann könnte das Produkt, da es doch einmal eine Zahl sein muß, nicht wohl etwas anderes sein als die Zahl der Kombinationen jener Dinge, die glücklicherweise sich deckt mit dem wahren Produkt der Zahlen. Daß das kommutative Gesetz bei dieser Ableitung keines Beweises bedürfe (wie Couturat meint), ist sicher irrig. Cantor wenigstens hat nicht unterlassen, den Beweis ausdrücklich zu führen. Es wird als Vorzug dieser Erklärung gerühmt, daß sie unterschiedslos auf endliche und unendliche Zahlen Anwendung finde, also schlechthin allgemein sei. Aber dieser Weite entzieht sich auch nicht die Erklärung der Multiplikation durch Zählung von Zahlen. Cantor verwendet in der Tat neben der soeben angegebenen auch diese in folgender Form: man ersetzt in einer Menge *N* jedes Element durch eine Menge äquivalent *M*; das Ganze der Elemente aller dieser Mengen ist dann das Produkt der Kardinalzahlen der Mengen *N* und *M*. Man darf wohl sagen, daß dies unsere Erklärung, nur in der Terminologie der Mengenlehre ausgedrückt, ist. Doch bedurfte es eben der Erklärung, warum und in welchem Sinne denn jene Substitution zulässig ist.

Zum Schluß sei nochmals betont, daß nach der hier entwickelten Auffassung die negative wie die gebrochene Zahl nicht eine künstliche Erweiterung der ursprünglichen als der „natürlichen" Zahlreihe darstellt, sondern nur den methodischen Gehalt, der in der Zahl von Anfang an lag, zur Entfaltung bringt. Die wesentliche Grundlage für ihre Einführung ist die Relativität der Zählung hinsichtlich des Ausgangspunktes, der Null, wie hinsichtlich der Einheit, mit der gezählt wird. Diese Relativität aber ist der Grundcharakter des synthetischen Denkens überhaupt. Die absolute Null und die absolute Eins sind bloße Hilfsmittel, um in der Unendlichkeit der Relationen, in die sich unsere Erkenntnis hineingestellt findet, überhaupt erst Fuß zu fassen. Ist dies einmal erreicht und damit die Möglichkeit geschaffen, die Relationen als solche zu sicherem Ausdruck zu bringen und ihre Gesetzmäßigkeit zu beherrschen, so darf die absolute Betrachtung als entbehrlich gewordenes Gerüst fallen. Die absolute Zahl ist provisorisch, die relative endgültig. Nur insofern gibt es eine Wandlung in den arithmetischen Grundbegriffen. Es ist keine andere, als die der große Urheber der Auffassung der Mathematik als Wissenschaft des Unwandelbaren, Plato, selbst vorgesehen, von der er gesprochen hat als von einem Wandel (κίνησις) der Begriffe, nicht der Dinge. Es ist genau die Relativierung gemeint, die sich uns direkt ergibt aus dem Prozeßcharakter der synthetischen Einheit überhaupt und nach allen Richtungen, in dessen klarer Herausstellung wir das unermeßliche, jedenfalls bisher bei weitem nicht nach allen Seiten ermessene Verdienst des Königsberger Plato sehen.

Auf eben dieser Grundlage werden nun auch die Probleme des Unendlichen und Stetigen sich bewältigen lassen.

Viertes Kapitel.

Unendlichkeit und Stetigkeit.

§ 1. (*Der methodische Sinn des Unendlichen.*) Das Merkmal der Unendlichkeit ist mit der Zahl, so wie wir sie konstruiert haben, in einem bestimmten Sinne schon gegeben. Die Zahl ist unendlich, sofern 1. die Setzung von Einem zu Einem usf. sich unbeschränkt wiederholt; 2. das Verfahren, durch Abschluß der in sich unbestimmten Reihe von Einheiten je auf erreichter Stufe die bestimmte Vielheit zu setzen, unbeschränkt fortbesteht. Diese Unendlichkeit erstreckt sich gleicherweise auf die Ordnungszahl und auf die Anzahl. Und sie gilt für alle bis dahin beschriebenen besonderen Weisen der Zahlsetzung: die Zahl ist unendlich in positiver wie negativer Richtung, in der Richtung der Vervielfältigung wie der Teilung. Denn jede Stelle der Zahlreihe ins Unendliche fungiert auch wieder als relative Null, jede bestimmte Vielheit ins Unendliche als relative Einheit, jede Einheit umgekehrt als irgendwie bestimmte Vielheit.

Diese Unendlichkeit der Zahl ist unangreifbar, weil sie nur der einfache Ausdruck des Funktionscharakters der Zahl ist. Es ist damit nichts anderes gesagt, als daß das Verfahren der Zahl mit allem, was es einschließt, eben als Verfahren ein für allemal, folglich immer wieder, an sich ohne Schranken gilt und Anwendung fordert; oder daß die Relationen der Zahl unbeschränkt fortbestehen. Es kann keine rechtmäßige Bedeutung oder Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik oder mathematischen Naturwissenschaft geben, die nicht auf dieser allgemeinen Grundlage ihre Erklärung fände. Denn der ganze Sinn der Zahl ist nur der eines Verfahrens gedanklicher Setzung, oder der Entwicklung von Relationen und Relationen von Relationen ohne Ende; es dürfen daher auf die Zahl keine anderen Prädikate angewandt werden, als die in der Gesetzmäßigkeit des Zählverfahrens begründet sind.

Eine Erschöpfbarkeit des Unendlichen in quantitativer Bedeutung zu behaupten oder zu verlangen, hat hiernach keinen Sinn, da das Merkmal der Unendlichkeit vielmehr die nie erschöpfliche Anwendbarkeit des Verfahrens und jedes Verfahrens der quantitativen Setzung bedeutet. Es ist daher mit dem Begriff des mathematisch Unendlichen nicht ein dinglich existierendes „Unendliches" gesetzt, das dem Verfahren der Zählung nur nicht erreichbar wäre. Wohl haben wir oft gesagt, das Verfahren der Zahl entwickle nur bestehende Relationen. Aber diese Relationen bestehen eben ins Unendliche fort; der Fortgang ins Unendliche selbst besteht. Aber es besteht darum nicht ein Ding „Unendlich" jenseits dieses Ganges. Wenigstens müßte eine solche Aufstellung, wenn sich für sie irgendein haltbarer Sinn und Grund ausfinden ließe, einer anderen Wissenschaft als der von der Zahl überwiesen werden.

Wir nennen diese Ansicht vom mathematisch Unendlichen kurz die „methodische". Sie möchte nicht verwechselt sein mit der alten Aristotelischen Unterscheidung, die sehr vielen bis heute als maßgebend gilt: der des potentiell und aktuell Unendlichen: ein Unendliches der Möglichkeit nach sei zulässig, in der Verwirklichung dagegen nicht. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß Aristoteles durch diese Unterscheidung sich sogar mit seiner eigenen sonstigen Fassung der Begriffe Potenz und Aktus in Widerspruch setzt. Möglich sollte allgemein nur heißen, was auch wirklich sein oder werden oder wenigstens gedacht werden kann. Das Unendliche aber kann nach Aristoteles eben nicht verwirklicht sein oder werden oder auch nur gedacht werden; also dürfte von ihm auch nicht gesagt werden, daß es der Möglichkeit nach bestehe. Die Schwierigkeit wird keineswegs behoben durch die Erinnerung, daß es sich beim mathematisch Unendlichen nie um ein vollendetes Sein, sondern um ein Werden, einen Wechsel oder Fortgang handle. In einer Aufeinanderfolge nämlich, meint Aristoteles, sei die Unendlichkeit unanstößig, indem eines immer an die Stelle des andern trete und diese Substitution immer stattfinde; dann sei in jedem gegebenen Stadium eben nur Eines verwirklicht und ergebe sich nicht der Widersinn der vollendeten Unendlichkeit (τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο λαμβάνεσθαι Phys. 206 a 28, πεπερασμένον 29, usw.). Dieser Widersinn trete dagegen unausbleiblich ein, wenn das Unendliche auf einmal miteinander verwirklicht sein sollte. Daher läßt Aristoteles die Unendlichkeit gelten für die Zeit, und so auch für die Zahl, indem er die Zählung als sukzessive Setzung versteht; ja für das „Denken" allgemein, offenbar, indem es immer sukzessiv eines an die Stelle des andern setze (οὐχ ὑπομένοντος τοῦ λαμβανομένου 208 a 20), welches Denken indes ihm für das Sein ganz und gar nichts beweist; denn nicht darum ist eine Sache so, daß wir sie so denken, sondern darum, daß sie so ist, haben wir sie so zu denken. Das Unendliche gilt aber eben deshalb nicht von Dingen, welche sind, nämlich auf einmal miteinander sind; daher vor allem nicht für die räumliche Ausdehnung des Universums. Das Argument der Atomisten, daß jede endliche Ausdehnung, eben mit ihren Enden, an eine fernere grenzen, die Ausdehnung an sich also unendlich sein müsse, gibt Aristoteles nicht zu: der Begriff des Begrenzten sei nicht an sich ein relativer, fordere nicht notwendig ein anderes, woran es grenze; und was solcher Subtilitäten mehr sind.

Von dieser Aristotelischen Auffassung ist die unsere wesentlich verschieden. Das Unendliche, von dem wir reden, gibt es, und zwar nicht zufolge einer Sukzession. Sprachen wir von einem Fortgang, von einem Verfahren der Setzung, so ist doch nicht die zeitliche Folge hierbei von irgendwelcher Bedeutung. Dies ginge allenfalls die Psychologie an; eine Grundlegung der Logik und Mathematik kann von der Voraussetzung zeitlicher Vorgänge schon darum nicht ausgehen, weil auf den Grundlagen, welche Logik und Mathematik aufzuzeigen haben, selbst erst der Begriff der Zeit sich aufzubauen hat. Worum es in Logik und Mathematik sich handelt, ist allein die Gesetzlichkeit ins Unendliche bestehender Relationen. Im Sinne der Aristotelischen Unterscheidung ist durchaus zu sagen, daß die Relationen der Zahl ins Unendliche sind, nicht werden; die Unendlichkeit der Zahlrelationen wäre also in Aristoteles' Sinn aktuelle, nicht potentielle Unendlichkeit zu nennen. Aber dieser ganze Modalitätsunterschied des Möglichen und Wirklichen hat in der Mathematik keine Stelle; diese hat also gar nicht zu reden von einem potentiell oder aktuell Unendlichen, sondern vom Unendlichen schlechtweg; wenn erforderlich, mit sonstigen Unterscheidungen, wovon bald zu reden sein wird. Damit fällt zugleich der bei Aristoteles keineswegs behobene Widerspruch weg, daß möglich genannt wird, was doch nicht soll wirklich sein oder werden oder auch nur gedacht werden können.

Näher steht der methodischen Auffassung des Unendlichen schon Descartes' Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten; aber zu reinerer Durchführung gelangt sie erst bei Kant. Zwar kann es bei diesem äußerlich noch an Aristoteles erinnern, wenn allgemein die Unendlichkeit erklärt wird als Unvollendbarkeit der „sukzessiven Synthesis" im Progreß der Komposition von den Teilen zum Ganzen wie im Regreß der Dekomposition vom Ganzen zu den Teilen; mit der Unterscheidung jedoch, daß im Regreß, weil hier das Ganze voraus gegeben, es möglich sei, ins Unendliche (*in infinitum*) zu gehen, während im Progreß es nur ins Unendliche (d. h. hier: ins Unbestimmte, doch unbeschränkt, *in indefinitum*) möglich sei, zu höheren Stufen fortzuschreiten. Aber eben damit ist für den Regreß das Infinite im bestimmten Unterschied vom bloß Indefiniten anerkannt; was in der bald zu berührenden Auffassung des Unendlichkleinen bei Kant seine Bestätigung findet. Übrigens ist die leise ins Psychologische abbiegende Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten für Kant offenbar von geringem Gewicht gewesen; denn andrerseits heißen ihm Zeit und Raum als unendlich dennoch „gegeben"; ihre Einheit liege zugrunde; irgendeine begrenzte Zeit- oder Raumvorstellung sei nur durch „Einschränkung der einigen zugrunde liegenden" Zeit- und Raumvorstellung möglich. Aber diese Einheit des Unendlichen ist „synthetische" Einheit, d. h. Einheit unendlicher Relationen kraft der Einheit des Gesetzes, nach welchem sie sich immer eine auf der anderen aufbauen oder auseinander entwickeln. Zeit und Raum sind nicht die leeren, unendlichen, absoluten, für sich bestehenden „Undinge", als welche einige Naturforscher Newtonscher Schule sie dachten, sondern beide sind nichts als Arten der Setzung „seiner Vorstellungen", sind daher selbst bloße „Verhältnisvorstellungen", durch die doch nicht eine Sache an sich erkannt werde (Allg. Anm. z. transz. Ästhetik II). Dasselbe gilt vollends von der Zahl, die als unmittelbarer Ausdruck des Verfahrens der Synthesis, zunächst der Quantität, von Kant ähnlich wie von uns gedeutet wird. Abgelehnt wird nur und mit Grund die Voraussetzung einer Abgeschlossenheit („Totalität") des Unendlichen in „vollendeter Synthesis", oder die Möglichkeit einer „Durchzählung" des Unendlichen, die das Unerschöpfliche erschöpft haben sollte. Gerade damit würde die Welt in Zeit und Raum, mithin diese selbst, und folgerecht auch die Zahl, zum „Ding an sich", d. h. aus einer reinen Verhältnisvorstellung zu einem Absoluten gemacht. In diesem

Absolutismus bleibt dagegen Aristoteles ganz befangen. Seine Ansicht ist in Kants Sinne schlechterdings dogmatisch, und zwar zwiespältig: dogmatisch im Sinne der Kantischen „Thesis“ (der Behauptung des endlichen Absoluten) in Hinsicht der räumlichen Ausdehnung, dagegen im Sinne der Antithesis (der Behauptung des unendlich Absoluten) in Hinsicht des zeitlichen Verlaufs des Weltprozesses; wogegen nach Kant die Totalität der Bedingungen im Unbedingten nur den Geltungswert einer „Idee“ beanspruchen darf, die keine weitere Funktion in der Erkenntnis zu erfüllen hat, als die Unendlichkeit der Aufgabe des empirischen Progresses und Regresses auszudrücken.

§ 2. (*Das aktuell Unendliche Georg Cantors.*) Tritt man mit den soeben entwickelten Vorbegriffen nun an Cantors Mengenlehre, als die moderne Gestalt der Mathematik des Unendlichen, heran, so findet man sich zunächst in einiger Verwirrung. Diese hat — das darf bei allem Dank und aller Bewunderung, die man dem schöpferischen Genie des Mannes schuldet, doch nicht ungesagt bleiben — ihren Grund zum großen Teil darin, daß Cantor, namentlich in seinen ersten Darlegungen, nicht bei seinem Leisten bleibt und rein als Mathematiker spricht, sondern das Geschäft des Metaphysikers der Unendlichkeitsbegriffe zugleich auf sich nimmt. Des Metaphysikers, nicht des Logikers, denn durch die Bezeichnung seines „Transfiniten“ als aktuell Unendliches, durch die Hereinziehung der Frage des Absoluten, durch das ganze Eingehen auf die alten scholastischen Kontroversen hinsichtlich des Unendlichen greift seine Behandlung der Frage[1]) offenbar und eingeständlich ins metaphysische Gebiet hinüber.

---

1) Math. Ann. 21, 1883, S. 545 ff.; Zeitschr. f. Philos. 88, 1886, S. 224 ff. und 91, 1887, S. 81 ff. Ich zitiere im folgenden die Annalen mit A., die Zeitschrift mit Z.

Cantor unterscheidet drei Begriffe des Unendlichen:

1. Das eigentlich Infinite, schlechthin Abgeschlossene, Absolute, das als solches keinerlei Determination zuläßt, nicht nur über jedes endlich Bestimmte, sondern auch über jedes bestimmbar Unendliche hinausliegt und nichts mehr über sich hat, eben deshalb aber „nur anerkannt, nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden" kann.[1]) Dieses hat sich uns bereits in Kants „Idee" aufgelöst, der nur regulative, nicht konstitutive Bedeutung zukommt.

2. Das uneigentlich, potentiell oder synkategorematisch Unendliche oder Indefinite, welches keine von der endlichen wesensverschiedene konstante, sondern die veränderliche, über alle endlichen Grenzen (richtiger würde es heißen: über jede endliche Grenze) hinaus wachsende oder abnehmende, d. h. beliebig groß oder beliebig klein anzunehmende, dabei aber immer endlich bleibende Größe bedeutet.[2]) Mit Unrecht nenne man es das „schlecht" Unendliche, da es in der Mathematik und Naturwissenschaft als höchst brauchbares Instrument bewährt sei. Nur glaube man ebenso mit Unrecht, mit diesem allein in der Mathematik auszukommen. Die bekannten, dies vertretenden Ausführungen Dührings u. a. beweisen nach Cantor nur a) daß eine bestimmte endliche Zahl, wenn noch so groß, nie unendlich ist, b) daß eine veränderliche, unbeschränkt wachsende oder abnehmende Zahl der Bestimmtheit ermangelt, die ihr ein Sein beizulegen gestatten würde.[3]) Nur diese uneigentliche Bedeutung des Unendlichen will aber Cantor selbst im sog. Unendlichkleinen oder Infinitesimalen finden. — Von diesen beiden Bedeutungen des Unendlichen also, von denen die eine rein metaphysisch ist, die Mathematik als solche nichts angeht, die andere in ihr

---

1) A. 21, 587, A. 2; Z. 91, 109.
2) Z. 88, 230.
3) A. 21, 582. 588 A. 4.

von wichtigem und unangefochtenem Gebrauch ist, unterscheidet er

3. die des aktuell, aber nicht absolut Unendlichen oder Transfiniten (Überendlichen), welches ein bestimmtes, konstantes, aber jenseits aller endlichen Größe liegendes Quantum bedeute. Es unterscheidet sich vom Absoluten, sofern es ein zwar Unendliches, aber doch noch Vermehrbares, das letztere dagegen unvermehrbar und mathematisch überhaupt undeterminierbar sei.[1]) Das Überendliche ist determinierbar. Es ist übrigens nicht einfach, sondern existiert in wiederum unendlichen Abstufungen, durch die man, nicht anders als durch die Reihe der endlichen Zahlen, „immer weiter, nirgends an eine unübersteigbare Grenze, aber zu keinem auch nur angenäherten Erfassen" eines Letzten, welches hier das Absolute wäre, gelangt.[2])

Cantor glaubt sich mit diesen Aufstellungen im Gegensatz zu allen älteren Fassungen des Unendlichkeitsbegriffs, besonders auch zu Kant zu befinden. Er hat also nicht bemerkt, daß gerade Kant eine der seinigen eng verwandte Unterscheidung macht zwischen dem echten mathematischen Begriff des Unendlichen, als dessen, was im Verhältnis zu einer beliebig anzunehmenden Einheit „größer als alle Zahl", oder der „Menge", die, unter Voraussetzug einer gegebenen Einheit, größer ist als alle Zahl; welches in der Mathematik gilt und mit welchem sie rechnet, trotzdem dabei „die sukzessive Synthesis der Einheiten in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann"; und dem unechten Begriff, den die Metaphysiker oftmals diesem echten, um ihn zu diskreditieren, untergeschoben haben: der Größe (oder Menge), über die keine größere möglich; welches auch er dem „Absoluten" gleichsetzt.[3]) Wenn Cantor an

1) Z. 88, 231.

2) A. 21, 587 A. 2.

3) Kritik, Antinomieen, Anm. z. 1. Thesis. So aber schon in vorkritischer Zeit, Diss. § 1**, und Neg. Gr., Einl., auch Metaph. An-

Kant tadelt, daß er das Absolute als die Grenze des Endlichen ansehe, während diese Grenze vielmehr das Transfinite sei [1]), so übersieht er, daß Kant das Absolute (die „Totalität der Bedingungen im Unbedingten") als wissenschaftlich setzbaren Abschluß und in diesem Sinne als Grenze überhaupt verwirft und ihm nur die Bedeutung einer Idee zugesteht, deren Funktion allein in der Erkenntnis der Unendlichkeit des empirischen Progresses und Regresses besteht. Diese Aufstellung ist vorsichtiger als die Cantors, der das Absolute als zwar nicht erreichbare, aber doch existierende Grenze der immer fortsetzbaren, notwendig fortzusetzenden Reihe bestimmbarer, teils endlicher, teils unendlicher Mengen doch setzt, also uns zumutet, ein absolut jenseits des unserer Erkenntnis Erreichbaren Liegendes doch als existierend zu denken und anzuerkennen. Das aktuell Unendliche oder Überendliche Cantors fällt dagegen ersichtlich unter Kants Begriff des mathematisch Unendlichen als des über jede Vielheit einer gegebenen Einheit Hinausgehenden, das sich freilich nicht „anschauen", nicht sinnlicher Erkenntnis zugänglich machen läßt, aber sich doch wohl muß denken lassen, da die Mathematik mit ihm arbeitet und sichere Resultate erreicht. Allenfalls hätte Kant dies echte mathematisch Unendliche noch bestimmter vom bloß Indefiniten (Hegels „schlechter" Unendlichkeit) unterscheiden dürfen. Aber ohne jeden Zweifel erkennt er ein nicht bloß indefinit Unendliches an, und zwar als den echten mathematischen Begriff des Unendlichen, da er das Infinitesimale ausdrücklich in diesem Sinne auffaßt und es nach dieser Definition wiederholt in Schutz nimmt

---

fangsgr. d. Naturwiss. 2. Hauptst. Lehrs. 4. Die Unterscheidung selbst rührt von Aristoteles her (Phys. 207a 1) — nur daß dieser sie im gerade entgegengesetzten Sinne anwendet, nämlich das οὗ ἀεί τι ἔξω für das Sein zu leugnen, das οὗ μηδὲν ἔξω zu behaupten, welches, als τέλειον, abgeschlossen, also begrenzt sein müsse.

1) Z. 88, 231.

gegen die ungegründeten Verdächtigungen der Metaphysiker, die ihm, weil sie es fälschlich mit dem Absoluten identifizieren, überhaupt die Existenz abstreiten oder wenigstens im Bereiche wissenschaftlicher Erkenntnis nur Endliches gelten lassen wollen.

Nun teilt zwar Cantor, wie schon bemerkt, gerade hinsichtlich des Infinitesimalen die von sehr vielen Mathematikern vertretene Auffassung, daß darunter nur eine beliebig kleine, doch immer endlich bleibende, veränderliche Größe zu verstehen sei. Er will[1]) den Beweis geführt haben, daß das Infinitesimale als aktuell Unendlichkleines nicht etwa notwendig seinem aktuell Unendlichgroßen entsprechend anzunehmen, sondern durch dieses vielmehr ausgeschlossen sei. Was er aber wirklich beweist, ist nur, daß das Infinitesimale, als dem sogenannten Archimedischen Prinzip, das heißt der Möglichkeit der Ausmessung durch eine gegebene endliche Einheit entzogene, dennoch endliche, „unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellbare“ Zahlgröße, als „Element“ oder integrierender Teil endlicher linearer Größen unmöglich sei; was, wenn der „Teil“ in Beziehung auf die gegebene Einheit verstanden wird, freilich keines Beweises bedurfte; denn daß eine Größe, die Teil einer endlichen Größe ist, nicht unendlich klein in dem Sinne sein kann, daß nicht durch irgendeine Vervielfältigung derselben die endliche Größe erreicht und übertroffen würde, ist durch den Begriff des Teils, als korrelativ zu dem des Vielfachen, ja ohne weiteres gegeben. Aber das Infinitesimale sollte schon bei den klassischen Begründern dieses Begriffs nicht ein „extensives“, durch die gegebene Einheit meßbares Quantum darstellen. Schon Galilei spricht von *infinita non quanta;* Leibniz behauptet das Infinitesimale als *praeter extensionem, imo extensione prius,* bei Newton sind die infinitesimalen „Momente“ nicht *quan-*

---

1) Z. 91, 112ff.

titates finitae, sondern *principia iamiam nascentia finitarum magnitudinum;* und Kant erklärt das Infinitesimale durch die intensive Größe, die den Grund der extensiven enthalte, aber nicht selbst extensiv sei.[1]) Gerade Cantor sollte einer solchen Auffassung nicht unzugänglich sein, da er sein aktuell Unendliches doch nicht durch Vervielfältigung der gegebenen Einheit, überhaupt nicht durch irgendein bloß quantitatives Verfahren, sondern durch den Übergang zu einem neuen „Universalbegriff" oder „Gesetz", unter ausdrücklichem Verzicht auf Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit erreicht. Was aber die Begründung der Analysis betrifft, so vertritt z. B. Enriques (*45*, S. 117 f.) die Ansicht, daß zwar der Aufbau der gewöhnlichen Analysis bei der Betrachtung von Größen, die dem Archimedischen Postulat genügen, stehen bleiben könne, daß aber bei besonderen Problemen, wie dem des Kontingenzwinkels, allgemein bei der Begründung der verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen, oder beim Vergleich der mehr oder weniger raschen Art, in der die Funktionen variierend einer Grenze zustreben, mit dieser Vorstellung nicht mehr auszukommen sei, sondern eine Betrachtung wie die Cantors vom aktuell Unendlichen notwendig werde. Aber auch Cantor selbst, der das Unendlichkleine durch das potentiell Unendliche erklären möchte, folgert andrerseits geradezu vom potentiell auf das aktuell Unendliche: das Gebiet der Veränderlichkeit könne nicht selbst wiederum veränderlich gedacht werden, es sei notwendig als „bestimmte aktuell unendliche" Wertmenge zu denken.[2]) Und diese „Gebiete der Veränderlichkeit" seien die eigentliche Grundlage der Analysis sowohl als der Arithmetik. Damit ist der Sache nach das Infinitesimale auf das Transfinite gestützt und aus dem Bereiche des bloß Indefiniten hinausgehoben.

---

1) Cohen [*22*] S. 46, 71, 85f., 111; in welchem Buche überhaupt reiches Material über diese Frage zu finden ist.

2) Z. 91, 116f.

Mit ganzer Entschiedenheit aber wird diese Auffassung vertreten durch den bedeutendsten Nachfolger, den Cantor gefunden hat: Giuseppe Veronese, der, an gewisse ältere Erwägungen von Stolz und P. du Bois-Reymond anknüpfend, die verschiedenen Ordnungen des Unendlichgroßen und Unendlichkleinen, unter ausdrücklicher Absehung vom Archimedischen Prinzip, aufgestellt und in grundsätzlicher Hinsicht, soviel ich erkennen kann, einwandfrei begründet hat. Nach ihm deckt sich das Prinzip des Archimedes geradezu mit der Voraussetzung der Endlichkeit, ist also das Absehen von diesem Prinzip (welches in der Tat keine absolute Denknotwendigkeit ausspricht) gleichbedeutend mit der Anerkennung der Existenz echter Unendlichkeiten. Diese beruht übrigens für ihn wie für Cantor einfach darauf, daß die Allheit z. B. der ganzen positiven Zahlen, obgleich ohne letztes Element, also im „potentiellen" Sinn unendlich, doch dem Begriff nach in eindeutiger Bestimmtheit gegeben ist und auch in einem zwischen zwei bestimmten Elementen begrenzten Intervall beschlossen gedacht werden kann und muß; so wie doch stets von den Mathematikern angenommen wurde, daß begrenzte Strecken unbegrenzt teilbar seien, also unendliche Teile an sich (für das Denken) enthalten. Soll das einmal gelten, so muß es auch in voller Allgemeinheit gelten; damit aber relativiert sich notwendig die Unterscheidung des Endlichen und Unendlichen, und es ergibt sich zwingend eine strenge Korrespondenz sogar unendlicher Ordnungen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen, so wie das Schema Veroneses (Grundl. S. 184) es darstellt. So wird Cantors Vorstellung in ihrer prinzipiellen Grundlage bestätigt und zu ihrer vollen Konsequenz erst entwickelt, damit aber zugleich überboten und in Hinsicht der Deutung des Unendlichkleinen berichtigt. Cantor blieb eben, wie es genialen Entdeckern sehr oft ergangen ist, noch mit einem Fuß in der alten Auffassung stecken, indem er sich einen absoluten Abschluß wenigstens nach unten denken zu müssen glaubte, für den doch ein logischer Grund, nachdem einmal das Recht des Hinausschritts ins Unendliche, überhaupt anerkannt ist, keineswegs besteht.

Nach diesem Blick auf die Geschichte unseres Problems, der für sich noch nichts entscheiden wollte, schreiten wir nun zur Untersuchung der Sache selbst.

Der Sinn und die unumgängliche Notwendigkeit des Hinausschritts zum Unendlichen wird durch nichts so eindringlich beleuchtet wie durch das bedeutende Problem des Irrationalen. Cantor bemerkt einmal, daß mit dem Irrationalen sein Transfinites stehe und falle. In der Tat so innerlich sind beide Probleme miteinander verflochten. Mit beiden hängt nicht minder eng das Problem des Infinitesimalen zusammen; alle diese Probleme vereinigen sich in dem ihnen gemeinsamen Grundmotiv der Stetigkeit.

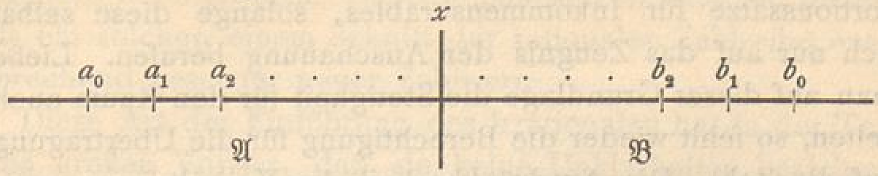
§ 3. (*Das Problem des Irrationalen.*) Die Untersuchung über das Irrationale hat sachgemäß den Ausgang zu nehmen von den unendlichen Reihen und deren Grenzwerten. Endliche auch rationale Werte lassen sich in unendlichen Reihen darstellen. Die Division $1 : 2 - 1$ ergibt die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$; umgekehrt zeigt man: Wenn $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots$, so ist $2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, also $= 1 + x$, mithin $x = 1$. Es scheint also die Gleichung zu Recht zu bestehen: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$. Es ist grundsätzlich dasselbe, wenn man den rationalen Bruch $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}\right)$ darstellt durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $(0{,}333\ldots)$. Was besagt hier die Gleichsetzung endlicher Ausdrücke $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ mit unendlichen Reihen? Wenn ich 1 halbiere und die Hälfte wieder halbiere und die Hälfte der

Hälfte usf., so ist durch Summierung der Hälfte und Hälfte der Hälfte usf., wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, die Eins nicht zu erreichen. Gerade das besagt die Unendlichkeit der Reihe, daß die Rechnung nie zum Abschluß kommt, sondern stets ein Rest bleibt, in diesem Fall $\frac{1}{2^n}$, was, wie groß auch n sei, niemals Null wird. Vernachlässigt man den Rest, so vernachlässigt man die Voraussetzung, daß die Reihe weiter gehe, d. h. man hebt die Unendlichkeit der Reihe in Wahrheit auf. Ebenso ist es beim periodischen Dezimalbruch. Die Unendlichkeit des Dezimalbruchs $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ hat nichts Geheimnisvolleres zum Grunde, als daß die Division von 3 in 10, aus der er entsteht, niemals aufgeht, nicht in 10 10^{tel} noch in 10 100^{tel}, 1000^{tel} usf., sondern stets als Rest $\frac{1}{10^n}$ läßt, was, in $\frac{10}{10^{n+1}}$ verwandelt und wieder durch 3 geteilt, $\frac{1}{10^{n+1}}$ als Rest läßt, und so stets wieder. Der Rest kann so lange nicht verschwinden, als 3 nicht in 10 aufgeht. So beschränkt aber der menschliche Intellekt auch sein mag, das darf er getrost behaupten, endgültig zu wissen, daß dies nie der Fall sein wird. Man kann daher ohne Widerspruch nicht die unvollendete und unvollendbare Reihe $0{,}333\ldots$ dem vollendeten Bruch $\frac{1}{3}$ gleichsetzen, wenn Gleichheit Identität des Wertbetrags bedeuten soll. Nun haben wir uns zwar längst dahin entschieden, allgemein unter Gleichheit nicht logische Identität, sondern Substituierbarkeit zu verstehen. Aber das entschuldigt nicht eine Ungenauigkeit, wie sie hier begangen würde, indem tatsächlich nicht gleichwertige Ausdrücke für einander substituiert werden würden. Daß die Ausdrücke wirklich nicht gleichwertig sein können, tritt sofort zutage, wenn man als Nenner, statt $1000\ldots$, vielmehr $999\ldots$ setzt. Nun geht die Teilung auf allen Stellen restlos auf, und man erhält als Quotient ohne jeden Zweifel $\frac{1}{3}$. Es kann aber dieselbe Zahl als Zähler zu verschiedenen Nennern gesetzt unmöglich denselben Wert darstellen. Man sagt daher richtiger: $\frac{1}{3}$ ist die Grenze der unendlichen Summe 0,333 . . ., d. h. die Summe der Zehntel, Hundertstel usw. bleibt stets unter dem bestimmten Wert $\frac{1}{3}$, so aber, daß mit der Vermehrung der Summanden die Differenz immer kleiner wird, kleiner als jede noch so kleine endliche Differenz. Diese Betrachtung findet allgemeine Anwendung auf alle periodischen Dezimalbrüche oder systematischen Brüche überhaupt.

Diesen Begriff des Grenzwertes dehnt man nun aus auf den Fall, daß ein rationaler Wert als Grenze der unendlichen Reihe nicht existiert. Dies gilt von allen nicht periodischen unendlichen Reihen der allgemeinen Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots,$$

wo c_0, c_1 usw. sämtlich positive ganze Zahlen kleiner als die ebenfalls positive ganze Zahl e sind; für $e = 10$ sind es die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche. Solche Reihen mögen sonst noch so regelmäßig gebaut sein, so daß nach festem Gesetz alle Glieder der Reihe ins Unendliche bestimmt sind, so existiert dennoch kein rationaler Grenzwert, wenn nicht die Reihe schließlich periodisch wird. Wohl aber ist es, wofern die Reihe nur überhaupt einem bestimmten Gesetz unterliegt, stets möglich, die verlangte, im rationalen Zahlgebiet nicht existierende Grenze so nahe, als man will, in rationalen Werten auszudrücken durch Systeme von Ungleichungen, nämlich Reihen einerseits wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner sind als der verlangte Wert, andrerseits abnehmender, die sämtlich größer sind, so daß die Differenz der von beiden Seiten sich einander nähernden Werte sich unter jeden gegebenen noch so kleinen endlichen Betrag verringert. In anschaulicher Darstellung



sei $\mathfrak{A} = a_0 a_1 a_2 \ldots$ eine unendliche Reihe nach bestimmtem Gesetz ableitbarer wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner als der gesuchte Grenzwert x sind, aber ihm unbegrenzt näher kommen, $\mathfrak{B} = b_0 b_1 b_2 \ldots$ eine dieser entsprechende Reihe abnehmender Werte $> x$, so wird die Differenz $b - a$ stets kleiner, und kleiner als jeder noch so kleine endliche Betrag. Wo nun dies der Fall ist, da nimmt man an (ohne es irgend beweisen zu können), daß ein eindeutig bestimmter Punkt x existiere, der die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ scheide. Den diesem Trennungspunkt entsprechend angenommen, nicht gegebenen Wert x setzt man dann als neue Zahl, die den gesuchten Grenzwert darstelle.

So der Tatbestand. Über die logische Begründung des Verfahrens sind die Meinungen noch immer nicht allseitig geklärt. Es ist im Grunde nur ein Ausdruck des Verzichts auf eine logisch zulängliche Begründung, wenn man einfach als „Axiom" aufstellt, daß im gedachten Fall der einzige Grenzwert „existiere". Es ist ebenso unbefriedigend, sich auf die Forderung der „Anschauung" zu berufen, daß auf der Geraden, welche die Zahlreihe repräsentiert, kein Punkt fehle, daß sie lückenlos, stetig zusammenhänge. Möchte diese Eigenschaft der Stetigkeit woraufhin immer von der Geraden im Raume gelten, so würde das nicht berechtigen, sie auf die Zahl zu übertragen; hat man doch durch viele Jahrhunderte hindurch die Zahl als diskretes Gebilde vom Raum als stetigem strengstens unterschieden. Aber Anschauung kann überhaupt nicht Stetigkeit begründen, auch nicht für den Raum oder etwa die Zeit. Stetigkeit kann nur durch einen Begriff eingeführt werden. Damit wird zugleich die Berufung hinfällig auf die geometrischen Beweise der Proportionssätze für Inkommensurables, solange diese selbst sich nur auf das Zeugnis der Anschauung berufen. Ließe man auf dieser Grundlage die Stetigkeit für den Raum auch gelten, so fehlt wieder die Berechtigung für die Übertragung auf die Zahl. Die Ausdrückbarkeit des Verhältnisses unter Inkommensurabelem durch die Zahl wird lediglich postuliert, während nach der Rechtmäßigkeit dieses Postulats eben die Frage ist. So bleibt hier logisch immer ein Sprung. Vielleicht ein geglückter, da nachher alles glatt verläuft und ein Widerspruch nicht zutage kommt. Aber ein geglückter Sprung ist immer noch ein Sprung; die Kontinuität des Denkens bleibt unterbrochen; die Stetigkeit der Zahl wird gewonnen auf Kosten der Stetigkeit des Denkens — deren genauer Ausdruck sie vielmehr sein müßte; denn eine andere Grundlage als die Gesetze des reinen Denkens darf die Zahl nicht kennen.

§ 4. (*Mathematische Lösungen. Dedekind.*) Die berühmte Erklärung des Irrationalen durch Dedekind (*32*) sucht ihren Vorzug darin, daß sie die Stetigkeit der Zahl weder schlechthin annehmen noch auf eine Forderung der Anschauung stützen, sondern wenigstens durch eine genaue Definition einführen will. Sie drückt die Tatsache der Nichtexistenz der Grenzwerte unendlicher systematisch gebildeter, aber nicht periodischer Reihen im System der rationalen Zahlen so aus, daß dies System „Lücken" habe. Die Tatsache aber, daß durch jede Reihe der beschriebenen Art, welche einen gesuchten irrationalen Grenzwert ausdrückt, eine Teilung des Systems der rationalen Zahlen auf die angegebene Weise hervorgebracht wird, wird damit ausgedrückt, daß jeder solchen Reihe ein „Schnitt" der rationalen Reihe entspreche. Indem nun einem jeden solchen Schnitt eine und nur eine neue „Zahl" entsprechend gesetzt wird, soll, indem man diese Werte dem System der rationalen Zahlen hinzufügt, das so erweiterte System (der „reellen" Zahlen) als stetig definiert sein. Die Irrationalzahl ist nunmehr nichts als ein solcher, einem Schnitt der rationalen Zahlreihe entsprechend gesetzter neuer Zahlwert.

Diese Art der Einführung des Irrationalen hat in der Tat den großen Vorzug, daß sie keine Unklarheiten bestehen läßt. Die Voraussetzung des Irrationalen und damit der Stetigkeit der Zahl wird nicht für denknotwendig ausgegeben, sondern offen eingestanden, daß man sie, als bloß nicht widersprechend, willkürlich einführt, weil man ohne sie nicht wohl auskommen kann. Besondere Aufmerksamkeit fordert hierbei die Verbindung, in welche das Problem des Irrationalen mit dem der Stetigkeit gesetzt wird. Den Worten nach wird erst durch das Irrationale die Stetigkeit eingeführt. Die stetige Zahlreihe wird definiert durch die auf die angegebene Weise vollzogene Erweiterung des Begriffs der Zahl auf die Grenzwerte unendlicher auch nichtperiodischer Reihen. Im Grunde aber dient vielmehr die Voraussetzung der Lückenlosigkeit der Zahlreihe, um die Setzung der neuen Werte, durch die allemal eine Lücke des Systems der rationalen Zahlen geschlossen wird, zu rechtfertigen. Daß aber so die Voraussetzung der Stetigkeit der Zahlreihe selbst einwandfrei begründet sei, wird sich schwerlich behaupten lassen.

Klargestellt ist: daß nicht etwa, wie früher vielfach angenommen wurde, so wie aus der Stetigkeit die Teilbarkeit ins Unendliche folgt, auch umgekehrt jene mit dieser gegeben ist. Das System der rationalen Zahlen ist „zusammenhängend", d. h. keine Differenz zweier rationaler Werte ist die kleinste, die im rationalen System existiert; aber dies System ist damit noch nicht „lückenlos", da es die irrationalen Werte, die man als reelle Werte doch irgendwie wird gelten lassen müssen, nicht enthält. Denn das ist überhaupt der Begriff des Irrationalen, daß kein rationaler

Wert ihm gleich, jeder entweder größer oder kleiner als er ist.

Klargestellt ist weiter — und darin dürfte der positivste Gewinn der Dedekindschen Betrachtung liegen: daß und wie, dem Gesetz gemäß, nach welchem der irrationale Wert durch Reihen rationaler Werte nicht ausgerechnet, aber in beliebiger Näherung berechnet werden kann, von jedem rationalen Wert sich ausmachen läßt, ob er größer oder kleiner als der fragliche irrationale ist. (Man beachte: ob, nicht auch, um wieviel; denn wenn auch das rational bestimmbar wäre, so würde damit der Wert selbst rational, gegen die Voraussetzung.)

Dagegen das einzige, was des Beweises bedurfte, ist durch jene Argumentation, soviel ich einzusehen vermag, nicht bewiesen. Der schließlich entscheidende Satz, auf den die Einführung des Irrationalen und damit der Stetigkeit sich stützen soll, lautet: daß einem jeden Schnitt des rationalen Systems ein und nur ein bestimmter Wert entspreche, durch dessen Hinzunahme allemal eine Lücke des Systems geschlossen werde; so daß, wenn man sich denkt, daß auf diese Art alle Lücken geschlossen wären, das ganze System damit stetig (lückenlos) würde. Die *petitio principii*, meine ich, sei hier offenkundig. Indem man setzt, daß jedem Schnitt eine Zahl entsprechen und damit das ganze System als lückenloses gegeben sein soll, macht man zwei Voraussetzungen. Erstens setzt man damit „den" Schnitt schon als eindeutig bestimmtes Etwas voraus; und es ist dann nur eine Sache der Benennung, die keiner anderen Forderung als der der Zweckmäßigkeit unterliegt, ob man dieses Etwas eine „Zahl" nennen will. Man setzt mit andern Worten die Lücken zwischen den Stellen der rationalen Reihe selbst als Stellen der erweiterten Reihe, und als solche bestimmt. Wie man aber dazu berechtigt sei, ist gerade die Frage. Man ist es jedenfalls nicht dadurch, daß die Differenz, innerhalb welcher der

Wert, wenn er existiert, liegen muß, sich beliebig klein annehmen läßt. Die immer engere Zusammenschiebung der beiderseitigen Grenzen definiert einen bestimmten Wert eben dann nicht, wenn die beiderseitige Näherung „unendlich" ist, d. h. immer fortgeht. Denn dies besagt ja, daß immer eine Differenz, also stets ein Spatium bleibt, innerhalb dessen insoweit kein Wert bestimmt, und ins Unendliche nur rationale Werte bestimmbar sind, die immer wieder ein ebensolches Spatium lassen. Man kann zwar beweisen, daß nicht zwei voneinander um einen endlichen Betrag verschiedene Werte x, x' einem solchen Schnitt entsprechen können, weil durch die unbegrenzt fortgehende Verringerung der Differenz der rationalen Werte jede endliche Differenz unterschritten werden würde. Aber damit ist noch nicht ein einziger Wert bestimmt, denn es bleibt immer ein Spatium, und durch ein Spatium wird nicht ein Punkt definiert, solange Punkt und Spatium begriffsverschieden sind. Man kann dasselbe auch so ausdrücken. Bewiesen ist: wenn ein bestimmter einziger Wert der verlangten Art existiert (z. B. $x = \sqrt{2}$), so teilt er die Reihe der rationalen Werte in einziger, nicht mehrfacher Weise. Aber bewiesen ist nicht, daß der Wert existiert.

Man setzt zweitens im Begriff der Lückenlosigkeit die Allheit der Schnitte als gegeben, die doch in keiner Weise gegeben ist. Die rationalen nebst den nichtrationalen, das müssen freilich wohl „alle" Werte sein. Aber während die Allheit der rationalen Werte durch sichere Definition gegeben ist, so ist die der irrationalen nur durch das negative Merkmal des nicht Rationalen gegeben; positiv kennt man gewisse Klassen irrationaler Werte (im allgemeinen die algebraischen), aber eine erschöpfende Definition „der" irrationalen Werte ist weder gegeben noch überhaupt möglich. Denn die unendliche nichtperiodische Reihe definiert eben nicht einen bestimmten Wert, sondern definiert nur ein Verfahren, den gesuchten Wert, falls er existiert, durch rationale Werte so annähernd, als man will oder braucht, auszudrücken, oder das Verhältnis des Mehr und Weniger zwischen dem verlangten irrationalen und jedem rationalen oder sonstigen irrationalen Wert bestimmbar zu machen.

Es scheint fast, als ob jener Begründungsweise eine Denkart insgeheim zugrunde läge, die ganz offen zutage liegt in P. du Bois-Reymonds Allgemeiner Funktionentheorie. Dieser führt die Unendlichkeit und Stetigkeit geradezu ein durch eine von ihm idealistisch genannte, in Wahrheit vielmehr im mittelalterlichen Sinne realistische Voraussetzung, der man auch sonst bei Arithmetikern nicht selten begegnet: daß die Objekte der mathematischen Wissenschaft an sich existieren, und diesen an sich existierenden Objekten Eigenschaften zukommen können, denen unser stets endliches Denken nicht gewachsen sei. Wollte man uns nur sagen, wie wir es anstellen sollen, ein nicht gedachtes Objekt existierend zu — denken. Was nicht durch mathematisches Denken gerechtfertigt werden kann, darf auch die Mathematik nicht setzen. Die Existenz mathematischer Objekte kann verständlicher Weise nichts anderes besagen, als daß sie in den Gesetzen des mathematischen Denkens begründet seien.

Es mag befremden, daß ich sagte, der Fehler sei, oder scheine wenigstens, derselbe in der Argumentation Dedekinds. Aber setzt nicht auch sie die Existenz des einzigen Wertes x, welcher der sich ohne Grenzen verengenden Lücke des rationalen Systems entspricht, vollends die Existenz „der" Schnittwerte überhaupt in gleicher Weise voraus: als Existenz mathematischer Objekte, die doch mit dem mathematischen Denken — welches stets im Endlichen verbleiben müsse — nicht erreichbar sei? Mit welchem Recht setzt man beides voraus? Mit dem Rechte des Bedürfnisses. Aber das ist die Bequemlichkeit der Willkürdefinitionen, durch die man ein logisches Genügen so lange nicht erzielt, als nicht das logische Mittel erfunden ist, aus Hunger Brot zu machen.

Das Bedürfnis ist gewiß unabweislich. Geometrie beweist, daß das Verhältnis zwischen Seite und Diagonale des Quadrats auszudrücken wäre gemäß einer Zahlproportion

$$1 : x = x : 2,$$

d. h. sie fordert die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, oder den Zahlwert $x = \sqrt{2}$. Eine existierende Größe verlangt eben einen Ausdruck in der Zahl; und sofern die Größe stetig sein soll, wie von der räumlichen, desgleichen der zeitlichen Größe, woraufhin immer angenommen wird, so ist dadurch die Zahlreihe selbst als stetige gefordert. Aber auch ohne jede Rücksicht auf das Bedürfnis der Geometrie, in reiner Arithmetik ist die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, ist überhaupt das Irrationale und um seinetwillen die Stetigkeit der Zahl unentbehrlich, wenn auch nur die einfachsten Rechnungsarten allgemeine Anwendbarkeit behalten sollen. Nur soll man nicht immer wieder die Unumgänglichkeit der Forderung verwechseln mit ihrem Erfülltsein.

§ 5. (*Lösungen von Weierstraß, Cantor, Pasch, Veronese.*) Trotz allem Gesagten lag in Dedekinds Erklärung der wahre logische Grund der Stetigkeit verborgen, aber eben verborgen; es war noch nötig, ihn ans Licht zu ziehen. Daß er nicht zutage kam, hatte seinen wesentlichen Grund darin, daß immer noch vom Endlichen, Diskreten, Rationalen als dem zweifellos Gegebenen und Bestimmten ausgegangen wurde und dann durch irgendeine bestimmte Beziehung unter Rationalem das Irrationale zur Bestimmung gebracht werden sollte. Das konnte ein für allemal nicht gelingen. Durch keine Kunst läßt sich aus Rationalem Irrationales, aus Diskretem Stetiges machen. Es muß vielmehr gezeigt werden können, daß der nicht rational, d. h. endlich und diskret bestimmte Wert in sich etwas ist und in sich bestimmt ist, ja aus dem Boden des Unendlichen, aus dem er erwächst, eine gediegenere Bestimmtheit zu schöpfen vermag, als die dem bloß endlich bestimmten Werte zukäme. Den rein mathematischen Ausdruck dieses richtigeren Weges sehe ich darin, daß Weierstraß und Cantor[1]) die konvergente unendliche Reihe selbst (bei Cantor: Fundamentalreihe) als in sich ebenso bestimmtes mathematisches Gebilde, wie die rationalen Zahlen, allem voraus aufstellen und von diesem dann beweisen, wie die Begriffe gleich, größer, kleiner, die arithmetischen Grundoperationen und damit alle Beziehungen des Mehr und Weniger im Stellverhältnis wie im metrischen Verhältnis auf sie, in Verbindung mit rationalen Werten wie unter sich, gegründete Anwendung finden. Und dasselbe leistet in vorzüglich durchsichtiger und einfacher Weise Pasch [*139*] durch den Begriff der „Zahlstrecke". Auf solche Weise wird — wie Cantor klar ausspricht[2]) — der Grenzwert der unendlichen Reihen nicht mehr „präsumiert"; es ist gar nicht mehr nötig, ihn zu präsumieren, denn es ergibt sich, daß die irrationale Zahl „vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste hat wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl, und daß man sie nicht erst durch einen Grenzprozeß zu gewinnen braucht, sondern vielmehr im Gegenteil durch ihren Besitz von der Tunlichkeit und Evidenz der Grenzprozesse allgemein überzeugt wird". Es ist mehr zu sagen: es ist nach dieser Betrachtungsweise überhaupt kein Grund mehr, zwischen der Reihe und ihrem Grenzwert zu unterscheiden; die Reihe stellt selbst, als in sich bestimmtes Gebilde, den neuen Wert dar; wie denn Pasch ausdrücklich die den irrationalen Wert definierende Reihe als Zahlstrecke ohne Begrenzung bezeichnet. Aber auch Cantor erwähnt mit Zustimmung, daß, durch ihn angeregt, Heine die Irrationalen einfach durch die Reihen selbst ausgedrückt habe.

---

1) A. 21, § 9 u. 10. 2) A. 21, 568.

Auf diese Weise bleibt kein Raum mehr für unsere vorigen Bedenken. Indem die konvergente unendliche Reihe in sich eindeutig bestimmt und damit zugleich alle Verhältnisse des Mehr und Weniger zu jedem gegebenen rationalen Wert (sowie der irrationalen untereinander) bestimmbar sind, ist allem genügt, was für den rechnerischen Gebrauch des Irrationalen erforderlich ist. Das in logischer Hinsicht entscheidend Wichtige aber ist, daß hiermit der Überschritt in eine neue Wertordnung vollzogen ist; nämlich es wird nicht mehr bloß eine unbeschränkt fortsetzbare Folge rationaler Werte, die man sich etwa in Aristoteles' Weise immer einen an die Stelle des anderen tretend zu denken hätte, sondern vielmehr die Allheit eines Wertgebietes gesetzt, kraft welcher die Reihe im Endlichen unbeschränkt fortschreitender Setzungen ein neues Ganzes als in sich so bestimmtes Denkgebiet setzt, als nur irgend die rationalen Werte bestimmt gedacht werden mögen. Das ist der neue Denkschritt, vor dem man zurückscheute und der doch unerläßlich war, wenn die „Existenz" des Irrationalen legitim begründet und nicht erschlichen werden sollte.

Auch hier aber blieb es Veronese vorbehalten, die (soviel ich sehe) letzte Präzision, die durch rein mathematische Mittel erreichbar war, zu erreichen. Er zeigt überzeugend[1]): Aus den im rationalen Bereich geltenden Gesetzen folgt nicht, daß ein Wert außerhalb des rationalen Bereiches existieren muß, „es sei denn, man wüßte schon", daß er existiert. Daher kann die Existenz solcher Werte nur durch eine neue „Hypothese" (seine Hypoth. VI, § 96) eingeführt werden, die aber, im Einklang mit der Aufstellung der ins Unendliche fortgehenden Reihe von „Unendlichen", unangreifbare Berechtigung hat. Denn diese gestattet ohne weiteres, Werte, die durch keine auch unbegrenzte Folge rationaler, d. h. durch die gegebene Einheit bestimmbarer

1) Grundz. [*175*], Einl. § 96, Bem. I.

Werte punktuell bestimmt sind, als dennoch punktuell bestimmt zu setzen. Eben diese allgemeine Voraussetzung ermöglicht aber auch, einen schärferen Begriff der Stetigkeit zu geben. Nach Veronese ist auch das durch die Einstellung der in Bezug auf die gegebene Einheit irrationalen Werte geschaffene System nur relativ, eben in Bezug auf diese Einheit stetig, während dasselbe System in Bezug auf eine andere, im Verhältnis zu jener unendlich kleine Einheit wiederum unstetig sein kann. Im absoluten Sinne ist das, einem in Bezug auf die gegebene Einheit unbegrenzt kleinen Segment XX' entsprechend gesetzte „Element" (der Grenzpunkt) vielmehr ein „Segment" (Grenzsegment), das nur in Bezug auf diese Einheit einem Element gleichzusetzen ist. Erst wenn die Veränderlichkeit nicht bloß in Bezug auf eine bestimmte gegebene, sondern in Bezug auf jede Einheit verstanden würde, würde das Grenzelement absolut einzig, d. h. die Differenz XX' absolut Null werden. Indessen ist nicht nur kein Grund, ein letztes, absolut Unendlichkleines zu setzen, sondern es ist, zur Wahrung der Gleichmäßigkeit, sagt Veronese, vielmehr anzunehmen, daß die Reihe der Ordnungen der unendlich kleinen Gebiete selbst unbegrenzt sei.[1]) Es ist[2]) nur eine im Interesse der Gleichförmigkeit der Ausdrücke gewählte Redeweise, wenn die Null als das absolut Unendlichkleine in Bezug auf die absolute Einheit (d. h. in Bezug auf jedes beliebige Segment als Maßeinheit) bezeichnet wird; in Wahrheit darf von gar keinem absolut Unendlichkleinen die Rede sein. Indem also die Definition der Stetigkeit durch die Einstellung der Reihenzahlen ausgedehnt wird auf die unendlichen Ordnungen unendlichkleiner Einheiten, erhält erst die Stetigkeit selbst absoluten Sinn.[3])

Diese ganz radikale Fassung des Begriffs des mathema-

1) § 100, Bem. I, 5); ebenda Hyp. VII. 2) Ebenda, Def. I. 3) Hyp. VIII und Def. I, § 101.

tisch Unendlichkleinen und damit des Stetigen erscheint nicht bloß zulässig, sondern notwendig, sobald nicht mehr durch das sogenannte Archimedische Prinzip (Ausmeßbarkeit der Größe durch irgendeinen Teil) die absolute Grenze der zulässigen Zahlsetzungen bestimmt sein soll. Dies Prinzip bedeutet eben die stillschweigende Voraussetzung des Beharrens auf der endlichen Teilung. Es war aber die Voraussetzung auch der Dedekindschen Erklärung; einzig durch das Überschreiten dieser Voraussetzung war über Dedekind wirklich hinauszukommen und damit das Irrationale als rechtmäßiges mathematisches Gebilde zu begründen. Also hat Cantor richtig gesehen, daß die Anerkennung des Irrationalen in seiner strengen Bedeutung die des Transfiniten einschließt. Jene Voraussetzung hat in der Tat keine Notwendigkeit mehr, sobald man nicht, nach der alten Aristotelischen *petitio principii*[1]), das Endliche als das allein Existierende von vornherein annimmt. Das „Archimedische Prinzip" ist also wirklich, wie bereits oben gesagt wurde, eigentlich die Definition der Endlichkeit einer Größe.

Das Irrationale ist, in Bezug auf die gegebene Einheit, d. h. aber rational, nur auszudrücken durch die Konvergenz unendlicher nichtperiodischer Reihen. Was heißt es denn, das Irrationale rational ausdrücken? Es heißt, es einem Maßstab unterwerfen, der auf es, eben als das Irrationale, nicht paßt. Dieser Ausdruck ist notwendig, um das Irrationale mit dem Rationalen überhaupt vergleichbar zu machen. Aber genau als das Irrationale kann es durch diesen Ausdruck selbst nicht gegeben werden. Das war der Grund, weshalb die frühere, durch Dedekind zur schärfsten Fassung gebrachte Deutung des Irrationalen nicht

1) Diese wird offenkundig, wenn Aristoteles z. B. sagt (Phys. 206a), ποcὸν heiße überhaupt ποcόν τι z. B. δίπουν, τρίπουν, d. h. das Soundsoviel einer gegebenen Einheit, womit ein unendliches Quantum von vornherein ausgeschlossen ist.

befriedigte; es war der Grund der doppelten *petitio principii*, die wir oben hervorzuheben hatten. Wie nämlich das Irrationale überhaupt durch die unendliche Reihe, insofern sie aus rationalen Gliedern besteht, nicht gegeben werden kann, so vollends nicht die Allheit der irrationalen Zahlen. Eine Definition z. B. durch die überhaupt möglichen Dezimalbrüche (die man erschöpfend zu geben glaubt, indem man sich jede Dezimalstelle der Reihe nach durch die Zahlen 0 bis 9 besetzt denkt) oder irgendeine dieser ähnliche hilft der Schwierigkeit offenbar nicht ab, bestätigt vielmehr nur die Unmöglichkeit einer erschöpfenden Definition. Man zählt doch immer nur mit 0, 1, 2 . . ., aber von 0 zu 1, von 1 zu 2 usf. im Zähler bleibt logisch immer derselbe Sprung, gleichviel welche Potenz von 10 (oder sonst einer Zahl) als Nenner angenommen ist. Der Grund der Unmöglichkeit liegt aber ersichtlich in dem Festhalten an der Forderung der Meßbarkeit durch die einzige ursprünglich angenommene Einheit. Nun mag man sagen: auch wenn man auf diese Forderung verzichte und die unendlichen Ordnungen von Unendlichkleinen mit Veronese einführe, so werde hieran nichts geändert, da in Bezug auf jede gewählte Einheit dasselbe gelte. Aber eben in dem prinzipiellen Hinausgehen über jede wie auch immer gewählte Einheit zu einer neuen liegt der Überschritt zur echten Unendlichkeit und damit Stetigkeit der Zahl. Auch Veronese vermag nicht und versucht gar nicht das Unmögliche, aus Diskretem Stetiges zu machen; er stellt im Gegenteil das absolute Hinausgehen der Stetigkeit über jede, und wäre es unendlichfach unendliche Diskretion unumstößlich fest.

So allein kommt endgültige Klarheit in die Sache. Es wird die Zahl zum reinen und adäquaten Ausdruck der Denkgesetzlichkeit selbst in ihrem ganzen Umfang, die nichts anderes ist als Gesetzlichkeit der Relation, gültig für Relationen von Relationen usf. ohne Schranken. Es sollte dann nur auch von keinem „Geheimnis" der Stetigkeit weiter die Rede sein [1]), in welches es unserer „Vorstellung" nicht gestattet sei, einzudringen. Gewiß ist die Stetigkeit absolut undurchdringlich für unser sinnliches Vorstellen, aber für dieses ist überhaupt jeder reine Denkgegenstand undurchdringliches Geheimnis. Es dürfte ebensowenig die Annahme des Stetigen noch in irgendeinem Sinne auf das Zeugnis der „Anschauung" gestützt werden. Stetigkeit kann so wenig angeschaut wie empfunden, sie kann nur gedacht werden, da sie nichts anderes als das letzte Grundgesetz des Denkens selbst bloßlegt und zum wissenschaftlich genauen Ausdruck bringt. Aber in der Berufung auf die Anschauung verbirgt sich hier wie oft die richtige Ahnung einer neuen, nur noch nicht klar als solche erfaßten Denkleistung. Man meinte das Diskrete mit dem reinen Denken (das zunächst sondernd verfährt) zu durchdringen, während man noch nicht sah, welches (natürlich andere) reine Denken es ist, welches die Stetigkeit begründet; so schob man sie dann ab auf die höchst fragwürdige Instanz der Anschauung; immerhin mit dem Vorbehalt, daß diese „als notwendiger Bestandteil weder in der Fassung der Sätze oder der Definitionen, noch in den Beweisen auftreten dürfe". Veronese selbst hat dagegen anderwärts [2]) die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente, heißt es dort, werden „nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d. h. reinen Denk-) Akt, und gerade dies verbürgt ihre geometrische Möglichkeit"; eine „Möglichkeit", die offenbar auch für ihn zugleich Existenz und Notwendigkeit ist.

Indessen ist auch mit diesem allen in logischer Beziehung

---

1) Veronese, S. 56, Anm.
2) Im Anhang der Grundz., S. 704 f.

noch nicht die letzte Klärung gewonnen, sondern es bleibt hier noch eine fernere Beleuchtung notwendig, die nicht bezwecken kann, die Sicherheit der Einführung des Irrationalen noch über den erreichten Grad zu erhöhen, wohl aber darüber volles Licht zu geben, was mit der Einführung dieser Begriffe in logischer Hinsicht geleistet, welche eigentümliche Gesetzlichkeit des Denkens darin zu bestimmtem Ausdruck gebracht ist.

§ 6. (*Logische Beleuchtung des Problems. Die Stetigkeit und die qualitative Allheit.*) Es war von Anfang an falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch die angebbare Möglichkeit der Diskretionen, da sie vielmehr das Hinausgehen über jede Diskretion besagt. Mit anderen Worten: es war falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch eine Allheit selbst quantitativer Art, da durch die Quantität, auch durch eine bloß quantitativ verstandene Allheit, genau nur die Diskretion zu Begriff gebracht wird. Damit aber kommen wir erst zur Wurzel der ganzen Schwierigkeit, die zugleich den Grund ihrer Lösung enthält. Die Stetigkeit besagt vielmehr die qualitative Allheit, die jeder quantitativen logisch vorausliegt und sie erst möglich macht.

Im Sinne der reinen Quantität heißt „alle“ soviel wie „sämtliche“, alle zusammengenommen, alle der Reihe nach gesetzt, und dann vereinigt. Die Betrachtung geht also von den Einzelnen aus und nimmt diese nur hinterher gruppenweise zusammen. So sind „alle“ entweder eine bestimmte Zahl oder doch eine solche, die bestimmt sein sollte, und es erscheint als Mangel, wenn sie sich wirklich nicht bestimmbar erweist. Im Sinne der Qualität dagegen bedeutet die Allheit vielmehr die Gattung, d. h. die Identität einer inhaltlichen Bestimmung, unter der die in einer Reihe sich ordnenden, insofern in diskreter Quantität auseinandertretenden Verschiedenheiten als in ihrer Wurzel Eins gedacht, oder als bloße, doch gesetzmäßige Abwandlungen oder Entwicklungen desselben Einen erkannt werden. Hier liegt also die Allheit, als Ursprungseinheit, zugrunde, und werden nur unterhalb ihrer, in Ableitung aus ihr, die Einzelnen gesetzt. Also war es überhaupt falsch, das Kontinuum aus den diskreten Werten zusammensetzen zu wollen; die *compositio continui* war nichts als ein falsch gestelltes Problem. Das Unendliche vielmehr liegt, als Ursprung, zugrunde.

Es ist zuletzt nichts als das logische Grundverhältnis der Denkkontinuität zur Diskretion der sondernden Setzung im Denken, was in dem Verhältnis der Zahl als Kontinuum zu den Zahldiskretionen seinen bestimmten, wissenschaftlich entwickelbaren Ausdruck sucht und findet. Sähe man in der Zahl selbst nur den Ausdruck des Verfahrens der Quantität, schon als Verfahren definiert sie zugleich qualitativ eine Gattung, welche den bestimmten quantitativen Setzungen, und zwar allen unterschiedslos, sich rein qualitativ überordnet und allen vorhergeht, da keine quantitative Setzung im besonderen anders möglich ist als gemäß dem allgemeinen Gesetz des Verfahrens quantitativer Setzung überhaupt.

Mit gutem Grunde unterschieden daher schon die Alten zwischen „der“ Zahl im Sinne von: alle Zahl, oder die Zahl als Gattung, und den Zahlen. Ein anderes übergeordnetes Kontinuum als das der Zahl im Gattungssinne ist in der Tat nicht zu suchen noch zu verstehen. Zwar ist es richtig, daß das Kontinuum nicht anders definiert werden kann als durch das allbefassende Gesetz, gemäß welchem diskrete Zahlsetzungen überhaupt nur zulässig sind; nicht aber wird damit das Kontinuum definiert durch die diskreten Setzungen, als ob diese vorangingen. Es kommt nur noch darauf an, zu bestimmen, was durch den Gattungsbegriff der Zahl genau gedacht, d. h. welches das Gattungsmerkmal ist, durch das die Allheit der möglichen Diskretionen, nicht als quantitative, sondern qualitative Allheit, gegeben wird. Diese Frage aber setzen die vorigen Erwägungen uns in Stand zu beantworten. Bliebe das Verfahren der Zahl notwendig beschränkt auf die rationale Beziehung zu einer einzigen, absolut gedachten, im schlechten Sinne „gegebenen" Einheit, so bliebe damit sein Bereich selbst willkürlich beschränkt. Seine Erweiterung kann nur bestehen in einer Erweiterung eben des Verfahrens der Zahlsetzung. Diese ist es, die mit dem „Grenzverfahren" angestrebt, aber nicht in einwandfreier Weise erreicht war. Worin aber liegt der logische Kern dieser Erweiterung?

Das hier entscheidende Merkmal verbirgt sich in einem Begriff, dessen fundamentale Wichtigkeit von den Mathematikern selbst noch nicht seit langer Zeit erkannt ist: dem Begriff des Zwischen. Weshalb durften die „Lücken" oder „Schnitte" des rationalen Systems, weshalb überhaupt das Spatium zwischen irgendwelchen rationalen oder auch irrationalen Werten, das Wertsegment als „existierend" angenommen werden, existierend unter arithmetischem Gesichtspunkt; ohne doch durch einen diskreten Zahlwert bestimmt oder bestimmbar zu sein? Gibt es etwa hier[1]) ein Demokriteisches μὴ ὄν, ein Zahlvakuum, in das die diskreten Zahlen erst, wie die Atome in den leeren Raum, eintreten? Ja; man setzt der Sache nach ein solches arithmetisches „Nichtsein", und zwar, wie Demokrit sein μὴ ὄν, als dennoch und erst recht seiend: um in es die Seienden engerer Bedeutung, die diskreten Zahlwerte, setzen zu dürfen. Ja, jenes Nichtseiende erweist sich gerade an Seinswert ursprünglicher als das enger bestimmte Sein der diskreten Zahlwerte, da es die Grundbedingung darstellt, die allein die letzteren zu setzen möglich macht, und die fortgilt über jede je vollzogene diskrete Setzung hinaus.

Um so weniger aber könnte es befriedigen, dies μὴ ὄν nur negativ zu definieren durch das Nichterfülltsein mit den

1) In einem andern Sinne als oben S. 122.

eigentlich alleinigen, nämlich diskreten Setzungen, oder die Nichtbesetzung mit solchen (Lücke, Schnitt); oder auch durch die bloße Potentialität solcher Setzungen, obwohl diese, sofern sie auf den bedingenden Wert des unendlichen „Leeren" für das Volle der diskreten Setzungen hinweist, der positiven Bestimmung schon um einen Schritt näher kommt. Es genügt in letztem Betracht eben nicht, zu sagen, daß es als Bedingung vorhergeht; sondern eben als vorhergehende Bedingung muß es, wenn auch nicht außer Beziehung zu den zu setzenden Diskretionen, doch in dieser Beziehung unabhängig, durch ein eigenes positives Merkmal derart bestimmt werden, daß dadurch den zu setzenden Diskretionen das Gesetz vielmehr vorgeschrieben, als etwa von diesen abgeleitet wird. Welches nun dies positive Merkmal sei, ist jetzt nicht mehr schwer zu sagen. Wie der Raum das Gesetz der Stellenordnung allgemein vorschreibt für alles in ihm zu setzende Reale, vor aller Maßbestimmung, unabhängig von ihr, die vielmehr umgekehrt durch jene erst möglich wird, so ist es das Gesetz der Stellordnung überhaupt, welches vor aller diskreten Zahlsetzung und für sie, insbesondere vor aller Maßbestimmtheit, das positive Grundmerkmal der Zahl als Gattung ausmacht. Dies Grundmerkmal der Stellordnung überhaupt, nämlich die Grundbeziehung des Vor und Nach in der Zählung und damit des Mehr und Weniger, liegt in der Tat der Unterscheidung des Rationalen und Irrationalen im letzten Grunde voraus, denn sie liegt überhaupt diesseits aller metrischen Beziehung, auf Grund deren erst Rationales und Irrationales unterscheidbar sind. Dies findet seinen bestimmtesten Ausdruck wiederum bei Veronese, durch die Einführung der „Skala" (Messung durch eine bestimmte Einheit), lange nachdem die Reihe überhaupt, nämlich auf Grund der bloßen Ordnungsbeziehung, gesetzt, insbesondere auch die Homogeneität eingeführt ist. Die Unabhängigkeit der Positionsbeziehung von jeder metrischen Beziehung zeigt sich übrigens durchweg in den Beweisen der Existenz des Irrationalen darin, daß das Irrationale als genügend bestimmt gilt, wenn bewiesen ist, daß sein Verhältnis des Mehr und Weniger, d. h. des Vorhergehens und Nachfolgens in einer Reihe von Zahlwerten, gegenüber allen bis dahin gesetzten und noch zu setzenden Werten bestimmbar ist; bestimmbar nicht notwendig durch eine abgeschlossene Gleichung, sondern ebensowohl durch ein, sei's auch unendliches, System von Ungleichungen. Dies selbst, daß zur Bestimmung eines Zahlwertes nicht die Gleichung erforderlich ist, sondern nach bestimmten Maßgaben die Ungleichung genügt, beruht darauf, daß das Grundmerkmal der Zahl die Stellordnung oder die Beziehung des Mehr und Weniger überhaupt, und nicht die auf das Maß gestützte Beziehung der Gleichheit ist.

Man spricht von einer „Erweiterung" des Zahlbegriffs durch die Einführung des Irrationalen. Die Erweiterung eines Begriffs kann aber rechtmäßig nur bedeuten die Aufhebung einer Beschränkung, die in dem letzten Gattungsmerkmal des fraglichen Begriffs in der Tat nicht lag. Verträgt und fordert ein Begriff eine Erweiterung, so muß er zuvor zu eng gefaßt gewesen sein. Die hier fragliche Erweiterung hat im Vorstehenden ihre Erklärung gefunden. Sie läßt sich auch so ausdrücken, daß von der Forderung der Kommensurabilität (Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit) abgesehen wird. Ich hatte früher zur Lösung des Problems des Irrationalen mich der Hilfsannahme, eigentlich der Fiktion verschiedener Zählungen, nämlich mit verschiedenen, gegeneinander inkommensurabelen Einheiten bedient. Diese Erklärung leistete gute Dienste zur deutlichen Herausstellung der Schwierigkeit; zu einer wirklichen Lösung ist auch sie nicht brauchbar, und in der Tat auch nicht notwendig. Verschiedene Zählungen sollten es nur darum sein, weil für eine und dieselbe Zählung bis dahin Kommensurabilität als Bedingung angenommen war. Nachdem aber diese Bedingung sich in rechtmäßiger Weise überschreitbar erwiesen hat, ist es zulässig, die irrationalen Werte mit den rationalen von Anfang an in einer Reihe vereint zu setzen. Die Einheit der Reihe ist genügend garantiert durch die Einheit des Grundgesetzes der Folge der Glieder aufeinander oder der Beziehung des Mehr und Weniger, nachdem diese als das die Zahl überhaupt konstituierende Merkmal erkannt ist. Ohne dies gemeinsame Merkmal hätte das Aufeinanderfallen der inkommensurabelen Reihen der „Richtung" nach, wie es in jener Interpretation angenommen wurde, überhaupt keinen sicheren Sinn. Die Plus-Minus-Richtung der Zahl ist in der Tat nur ein anderer Ausdruck jenes Grundmerkmals der Aufeinanderfolge der Glieder, welches überhaupt die Zahl konstituiert. Nur weil dieses Merkmal von vornherein den untereinander inkommensurabelen Reihen gemeinsam war, ließen sie sich der Richtung nach aufeinanderfallend denken; die Einheit der Richtung ist eben bestimmt durch die immer gleiche Relation des Weniger und Mehr, als des in der Reihe Vor- und Nachgesetzten. Eben diesem gemeinsamen Merkmal zufolge brauchten aber die Reihen nicht erst künstlich zur Deckung gebracht zu werden, sondern durften von Anfang an als der Richtung nach einzige, weil überhaupt ihrem Wesen nach einzige Reihe „der" Zahl (d. i. Abstufung nach dem Mehr und Weniger) gesetzt werden.

§ 7. (*Das Transfinite.*) Ist es somit allgemein der Rückgang auf die Qualität, wodurch das Problem der Stetigkeit bewältigt wird, so fragt es sich weiter nach den verschiedenen Gestalten, in denen die Qualitätsbeziehung an der Zahl sich ausdrückt und entfaltet.

Das Vorhergehen der Qualität überhaupt vor der Quantität begründet, wie sich zeigte, durch das Gattungsmerkmal des Vor und Nach oder der Positionsbeziehung überhaupt die Stetigkeit der Zahl. Diese enthält nun schon die ermöglichende Bedingung für die Zahlstrecke, als definiert durch irgendein Gesetz der Entwicklung einer Folge von Werten (Reihe, insbesondere als unendliche), welche an die Forderung eines rational bestimmten Grenzwertes nicht mehr gebunden ist (Irrationalzahl). Sie begründet aber ganz allgemein die Möglichkeit, unendliche Folgen von Werten, die durch irgendein Gesetz gegeben werden, in Inbegriffen zu vereinigen, die nicht gleichsam von außen, durch endliche Grenzwerte, sondern in sich selbst, rein durch ihr erzeugendes Gesetz, also durch einen Universalbegriff bestimmt sind. Solche können dann untereinander durch Beziehungen verknüpft sein, die wiederum durch qualitative, nicht quantitative Bestimmungen definiert werden. Ein „unendlichkleines“ Segment ist, obwohl stets durch irgendeine gesetzmäßige Beziehung zu einem gegebenen endlichen Bereich gesetzt, doch als solches nicht durch eine Beziehung quantitativer Art zur Einheit des endlichen Bereichs definierbar. Es ist in Beziehung auf ihn nur „Grenze“ und als solche der Quantität nach Null; während es an sich nicht vom Zahlwert Null sein, sondern in einer anderen Zahlordnung einen geltenden Wert haben soll, dem gegenüber wieder ein anderes Unendlichkleines gesetzt, d. h. der Überschritt wieder in eine andere Ordnung von Zahlwerten vollzogen werden kann, und so unbeschränkt weiter. So ist der Punkt in der Dimension der Linie betrachtet Null, ebenso die Linie in der zweidimensionalen, die Fläche in der dreidimensionalen Ordnung. Abstrahiert man nun hierbei von der Lagebeziehung der Dimensionen (die uns hier noch nicht zu beschäftigen hat) und beachtet allein das Verhältnis zum jedesmaligen Nullwert und der zugehörigen Größenerstreckung (Extension) überhaupt, so gewinnt man ein zutreffendes Bild der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen. Man kann sich aber ebensowohl in einer einzigen Gesamtordnung, dem „linearen Kontinuum“, das man sich in gewöhnlicher Weise durch eine einzige Gerade repräsentiert denken mag, dasselbe Verhältnis in folgender Art klar machen. Man stelle in üblicher Weise die Zahleinheit, die als Ausgang dient, als begrenzte Strecke dar, so sind innerhalb ihrer unendliche Punkte setzbar. Man halbiere etwa die Einheit im Punkte $\frac{1}{2}$, die Hälften in den Punkten $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ usf., so liegt die ganze unendliche Folge der so entstehenden Punkte eingeschlossen zwischen den Punkten 0 und 1, ohne diese beiden Grenzen je zu erreichen. Man hat also innerhalb dieser Grenzen unendliche, in Bezug auf die angenommene Einheit unendlichkleine Strecken, jede in Bezug auf diese vom Betrag $\frac{1}{2^{\infty}}$, der sich als Einheit in einer neuen Zahlordnung betrachten und genau so behandeln, d. h. wieder unendlich teilen läßt, und so ohne Grenzen weiter. Es kann nun aber, da die Einheit überhaupt kein Absolutes ist, sondern die Bedeutung des Grundelements allemal nur für eine bestimmte Zählordnung hat, ebensowohl die erst angenommene Einheit als unendlichklein gegenüber einer höheren angesehen, d. h. sie kann unendlich vielmal gesetzt und diese ganze unendliche Folge ebenso wie die der Unendlichkleinen der vorigen Ordnung zwischen zwei Werten 0 und 1 einer nächsthöheren Wertordnung eingeschlossen gedacht werden, dann diese wieder ebenso, und so fort ebenfalls ohne Grenzen. So ergibt sich von irgendeinem willkürlich gewählten Ausgangswert Null an in einfachster Weise die Cantorsche Reihe, oder vielmehr die Veronesesche:

$$0, 1, 2 \cdots \omega, \omega + 1, \cdots 2\omega, 2\omega + 1, \cdots n\omega \cdots \omega\omega \cdots,$$

d. h. nicht nur ein Unendliches, sondern unendliche Folgen von Unendlichen, und unendliche Folgen solcher Folgen, und so immer weiter. Die Möglichkeit dieser ganzen Reihe bestimmter Unendlichkeiten ist, wie schon bemerkt, einfach darin begründet, daß auch eine unendliche Folge durch irgendein Gesetz, nach dem sie gebildet ist, gegeben und bestimmt sein kann, als ein „Inbegriff", der insoweit nur eine qualitative oder Gattungseinheit darstellt, in dem Fall aber, daß diese unendliche Folge zwischen irgendwelchen Grenzwerten des nächst übergeordneten Gebietes eingeschlossen ist, innerhalb dieses einen Umfang oder Bereich ausmacht, über den hinaus ein fernerer existiert, der mit anderen endlichen oder wiederum unendlichen Bereichen Vergleichungen auch quantitativer Art zuläßt.

Die Vergleichbarkeit wird hergestellt durch irgendeine gesetzmäßige Zuordnung von Glied zu Glied. Diese ergibt nur, wenn jeder der verglichenen Inbegriffe durch eine erschöpfbare Schrittzahl darstellbar ist, den gewöhnlichen Begriff der Gleichheit und die entsprechenden des Mehr und Weniger; wenn dagegen unendliche Inbegriffe in Vergleichung kommen, so erfahren diese selben Begriffe eine Erweiterung, indem die gegenseitig eindeutige Zuordnung festgehalten, auf die Forderung der erschöpfbaren Schrittzahl aber verzichtet wird. Es können dann natürlich die Gesetze der Beziehungen des Gleichviel, Mehr und Weniger nicht in jeder Hinsicht unverändert in Geltung bleiben; dies spricht sich aus in den bekannten „Paradoxieen des Unendlichen"[1]), die fast immer auf die eine fundamentale Abweichung zurückgehen, daß eine überendliche Menge einer Teilmenge ihrer selbst äquivalent sein kann. So ist, um nur an Allernächstliegendes zu erinnern, der Reihe der positiven ganzen Zahlen die Reihe der positiven geraden Zahlen äquivalent, da sich jeder positiven ganzen Zahl ihr Doppeltes zuordnen läßt und auf diese Weise den sämtlichen ganzen die sämtlichen geraden Zahlen gegenseitig eindeutig entsprechen. Es scheint also im Unendlichen nicht wie im Endlichen zu gelten, daß das Ganze stets mehr ist als sein Teil; man kann die unendliche Menge geradezu (mit Dedekind) durch diese Eigenschaft definieren, daß

1) Bolzano [*10*].

sie einer Teilmenge ihrer selbst (nicht gleich aber) äquivalent (d. h. gegenseitig eindeutig zuordnungsfähig) ist. Genauer wird man sagen, daß der Begriff des Verhältnisses von Ganzem und Teil nicht völlig derselbe bleibt, wo Unendliches mit in Vergleichung kommt. Nicht das ist zu verwundern, sondern eher, daß, obgleich also die im Endlichen geltenden Beziehungen im Unendlichen nicht unverändert gelten bleiben, dennoch eine Rechnung mit dem Unendlichen widerspruchslos möglich bleibt; daß Beziehungen, in weitem Umfang analog den im Endlichen geltenden, bestehen; daß die Begriffe Gleichviel, Mehr, Weniger und sämtliche Rechnungsarten bei sinngemäßer Abänderung ihrer Gesetze Anwendung leiden und zu sicheren und brauchbaren Ergebnissen führen. Aller Schein des Widerspruchs entspringt (wie Cantor[1]) eingehend gezeigt hat) nur daraus, daß man in jedem Betracht dieselben Beziehungen, die im Endlichen gelten, im Unendlichen wiederzufinden erwartet, während die Übertragung derselben Grundgesetze auf dies ganz andere Gebiet natürlich gewisse Abänderungen zur Folge haben muß. Es sind eben nicht mehr durch eine endliche Schrittzahl bestimmte Summen, mit denen gerechnet wird, sondern überendliche Inbegriffe. Unterschiedslos auf beide erstreckt sich der Cantorsche Grundbegriff der „Mächtigkeit", beruhend auf der gegenseitig eindeutigen Zuordnung von Glied zu Glied; aber dieser behält eben nur bei endlichen Inbegriffen den bisherigen Sinn der Summe, während die Mächtigkeiten unendlicher Inbegriffe nicht im gleichen Sinne Summen darstellen, daher auch nicht allen den Gesetzen unterliegen, die für endliche Summen gelten. Es darf besonders auch nicht übersehen werden, daß die Mächtigkeit einer Menge und die Menge selbst nicht dasselbe sind[2]); wenn auch der Unterschied in erkenntniskritischer Beziehung nicht einwandfrei damit be-

---

1) Z. 91, 122ff. 2) Ebenda.

zeichnet ist, daß die letztere uns als „Objekt" gegenüberstehe, die erstere, als ihr „abstraktes Bild", nur in unserem Geiste existiere. Die Gesamtheit z. B. aller endlichen ganzen positiven Zahlen (ν), sagt Cantor, ist der „Entität" nach „reicher" als die aller geraden Zahlen (2ν), die eine Teilmenge von ihr bildet; aber doch kommt beiden dieselbe Mächtigkeit zu. „Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinktion von Realität und Zahl achtet". Die Distinktion ist wenigstens in dieser Fassung nicht wohl annehmbar; der größere „Reichtum" an Entität, das „Mehr" an Realität verlangt, wie schließlich jeder Komparativ, einen Ausdruck in der Zahl, da die Zahl überhaupt die Abstufung des Mehr und Weniger, jedes Mehr und Weniger bedeuten will. Also wird es in irgendeinem Sinne auch richtig sein, zu sagen, daß die Gesamtheit (ν) aller positiven ganzen Zahlen der Zahl nach mehr ist als die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen; aber eben nicht der Mächtigkeit nach, die zwar auch eine arithmetische Beziehung, nur eben von eigener Art ist. Daß aber diese eigenartige Bestimmungsweise auf der Qualität beruht, wird ganz klar, wenn Cantor kurz vorher[1]) sagt: Die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl (Mächtigkeit) zu wie ihrer Teilmenge M', sei gleichbedeutend mit dem Satze: beide Mengen stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; „seit wann aber wäre ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen in irgendeiner Hinsicht unter demselben Universale stehe wie das Ganze?" Nur ist zu fordern, daß genau bestimmt sei, in welcher Hinsicht Ganzes und Teil unter denselben Allgemeinbegriff fallen. Dies ist aber genau bestimmt durch das Verhältnis der gegenseitig eindeutigen Zuordnung, also ist sachlich alles in Richtigkeit.

1) S. 122.

Zur Unfruchtbarkeit verurteilt bliebe freilich die Rechnung mit dem Unendlichen, wenn wirklich, wie früher angenommen wurde, im Unendlichen alle Begriffsgrenzen, die im Endlichen gelten, ineinanderflössen und damit überhaupt alles in einen Nebel völliger Unbestimmtheit und Unbestimmbarkeit zerginge. Aber wenn gewisse Beziehungen, die im Endlichen stattfinden, im Unendlichen nicht mehr gelten, so bleiben deren genug übrig, um eine sichere Rechnung mit zweifellos gewissen und bedeutungsvollen Ergebnissen zu ermöglichen; dies bewiesen zu haben ist besonders das Verdienst Cantors. Der Kern und die wahre Fruchtbarkeit seiner Entdeckung liegt darin, daß es nicht nur ein unbestimmtes Unendliches gibt, welches wesentlich nur durch den Wegfall aller der Bestimmtheiten, die im Endlichen gelten, charakterisiert wäre, sondern eine schließlich wieder unendliche Folge scharf unterschiedener, gegeneinander und gegen den ganzen Bereich des Endlichen in strenger begrifflicher Bestimmtheit abgegrenzter Klassen von Unendlichen und eine sichere Rechnung mit diesen, die nicht nur ebenso exakte Resultate wie die Rechnung mit dem Endlichen liefert, sondern exakte Ergebnisse eben da ermöglicht, wo die aufs Endliche beschränkte Rechnung bei vagen Allgemeinheiten stehen zu bleiben genötigt wäre. So beweist man (um nur ein paar der wichtigsten Resultate zu berühren), daß zwar die Mächtigkeit der Gesamtheit der ganzen Zahlen ($\mathfrak{a}$) identisch ist mit der der Gesamtheit der rationalen und auch der algebraischen Zahlen, aber verschieden von ihr die Gesamtheit der reellen Zahlen oder des linearen Kontinuums ($\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$). Diese wiederum deckt sich mit der jedes noch so kleinen Intervalls des linearen Kontinuums, z. B. von 0 bis 1, andrerseits mit der des Kontinuums von beliebiger, selbst einfach unendlicher Dimensionenzahl (da auch $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$), aber sie wird (nach Cantor) überboten durch die Mächtigkeit der Gesamtheit der reellen Funktionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen ($\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$). Diese und zahlreiche andere, besonders für die Funktionentheorie folgenreiche Sätze waren nicht zu gewinnen durch eine Rechnung, die im Endlichen stehen bleibt; diese hätte für alle diese Fälle nur den einen unterschiedslosen Begriff „des" Unendlichen zur Verfügung, welcher dann gleichbedeutend erscheint mit dem des aller Berechnung und Bestimmung Entzogenen; mit dem Dunkel, in dem alle Katzen grau sind.

Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ausdehnung der Relativierung, die Cantor mit dem Begriff des Unendlichen nach oben hin in der Reihe seiner „Alefs" richtig vollzogen hat, auch nach unten, d. h., die Anerkennung einer jener genau korrespondierenden unendlichen Reihe von Ordnungen des Unendlichkleinen. Diese Ergänzung hat aber, wie wir sahen, bereits Veronese vollbracht. Die entscheidenden Sätze Cantors über die Mächtigkeiten bleiben dabei alle richtig; gewonnen aber wird eine gesicherte Grundlage für die Infinitesimalanalysis in ihrem ganzen Umfang. Ganz abgesehen übrigens von jedem Ertrag an speziellen mathematischen Einsichten erreicht so das ganze System der Unendlichkeitsbegriffe der Mathematik eine durchsichtige Klarheit und innere Folgerichtigkeit, die, einmal errungen, nicht leichthin wieder preisgegeben werden kann.

Wir haben uns nun zur Infinitesimalanalysis den Übergang zu bahnen durch die Betrachtung der Begriffe der Veränderlichen und der Funktion.

§ 8. (*Die Zahl als Größe — Veränderliche — und als Funktion.*) Mit der Überordnung „der" Zahl über die bestimmten Zahlwerte ist ein wichtiger Begriff im Grunde schon eingeführt, unter dem erst die Zahl tauglich wird, nach der Ahnung der alten Pythagoreer und Platoniker das Sein, oder im bestimmteren Kantischen Terminus: die Realität dem

Denken zu erobern; nämlich der Begriff der Zahl als Größe, d. h. als Veränderliche.

Die Zahl, wie sie bis dahin verstanden wurde, als der bloße Ausdruck des Wieviel, gäbe einen durchaus inkompleten Begriff eines Gegenstandes. Jeder Gegenstand hat Zahl, aber kein Begriff eines Gegenstandes könnte darin erschöpft sein, daß er Zahl (in diesem beschränkten Sinne) ist. Zwar läßt sich die Methode der Zahl in völliger Reinheit entwickeln ohne jede Rücksicht auf noch irgendwie sonst bestimmte Gegenstände. Indem die Mathematik dies tut, schafft sie sich aus der reinen Zahl ein eigenes Objekt, aus der Gesamtheit der denkbaren Zahlbeziehungen eine eigene Welt, die um die ganze übrige Welt der Gegenstände sich nicht zu kümmern braucht. Die Eifersucht, mit der sie über der Reinheit und Selbständigkeit dieser in sich beschlossenen Begriffswelt wacht und alle nicht arithmetischen Begriffe aus der Arithmetik fernhält, kann vom logischen Standpunkt an sich nur gutgeheißen werden. Aber gerade je reiner somit die arithmetische Methode durchgeführt wurde, um so weniger konnte auf die Länge verkannt werden, daß diese Methode einer anderen zu ihrer Ergänzung bedarf, ohne die sie sich selbst nicht vollenden könnte und auch, soweit sie reicht, wie in der Luft stände, für eine wirkliche Erkenntnis der Gegenstände ohne Bedeutung, weil ohne Anwendung bliebe.

Eine Setzung des Denkens, in der nichts gesetzt wäre als — die Setzung selbst, als einzelne, als Reihe einzelner und Zusammenfassung solcher Reihen allemal zu einem Ganzen, und was alles weiter daraus folgt, bliebe zuletzt etwas Unausgedachtes, Unausdenkliches, ein leeres Gedankengespinnst, wie ein System von lauter sorgfältig gezählten Nichtsen. Zahl will doch Zahl von Etwas sein; gefordert ist also eine Methode, gemäß welcher das Etwas, welches gezählt wird, zu setzen sei. Man kann doch nicht ins Unendliche nur immer wieder Zahlen zählen; vielmehr man kann es wohl, aber kann es gewissermaßen nicht wollen, es kann nicht die letzte Absicht des Zählverfahrens sein. Aber ebensowenig dürfte man sich dabei beruhigen, daß die zu zählenden Gegenstände eben anderweitig gegeben werden müssen; daß es, wie durch glücklichen Zufall, eine Eigenschaft sogar jedes irgendwie Gegebenen sei, auch irgendwie zählbar zu sein, so daß freilich der Methode der Zählung die Gelegenheiten der Anwendung nie mangeln werden. Man verlangt vielmehr einen inneren Zusammenhang einzusehen zwischen dem Verfahren der Zählung und einem anderen, mindestens so ursprünglichen Denkverfahren, in welchem das zu zählende Etwas entspringe; man verlangt zu erkennen, daß und wie diese verschiedenen Verfahrungsweisen des Denkens kraft ihrer eigenen Gesetzlichkeit so ineinandergreifen, daß notwendig der Zahl auch stets ein zählbares Etwas, dem Etwas stets die Zahl zu Gebote steht.

Der Ausdruck dieser wesentlichen Beziehung der Methode der Zahl auf eine andere, noch verborgene Methode, ein zählbares Etwas zu setzen, ist nun wohlbekannt und auch den Arithmetikern geläufig, nämlich der Ausdruck der Größe. Das Verhältnis der Begriffe Zahl und Größe (πλῆθος, μέγεθος — *multitudo, magnitudo*) bedarf aber einer genaueren Bestimmung. Allzu oft werden ohne deutliche Begründung, zwar nicht die einzelnen Zahlen, wohl aber irgendwelche zusammengesetzte Zahlgebilde auf einmal Größen genannt; besonders wo Zählungen mit verschiedenen Einheiten in Frage kommen. So sprach man namentlich früher gern von komplexen Größen statt Zahlen; auch bei der Einführung des Irrationalen tritt regelmäßig der Ausdruck Größe auf; ja schon das Verhältnis, auch als bloß durch die Zahl ausgedrückt, wird Größe genannt; und so die Bruchzahl. Fast immer spielt auch eine nähere oder fernere Erinnerung an räumliche Anschauung mithinein; denn das Räumliche vor allem gilt als Größe, nicht bloß Zahl.

Der nächste Grund der Unterscheidung und zugleich engen Verbindung zwischen den Begriffen Zahl und Größe scheint dieser zu sein: Zahl für sich besagt nur das Wieviel, aber nicht das Wieviel wovon. Zwar ist es stets das Wieviel einer gedachten Einheit; was aber diese Einheit sei, braucht solange gar nicht gefragt zu werden, als immer eine und dieselbe Einheit vorausgesetzt wird; sobald dagegen verschiedene Einheiten in Frage kommen, also die mancherlei Zahlausdrücke nicht mehr das Wieviel von Einem und Demselben, sondern von Verschiedenem bedeuten, pflegt man sich des Wortes Größe zu bedienen. Dieses bedeutet dann nicht sowohl das Wiegroß (dieses wird stets ausgedrückt durch das Wieviel der bezüglichen Einheit), sondern man unterscheidet Größe von Größe, sofern die Einheiten, mit denen gezählt wird, verschieden sind. 3, 5, auch $3 + 5$ würde man nicht Größen nennen; aber $3a$, $5b$ und, falls die a und b in irgendeinem Sinne addierbar sind, $3a + 5b$ wird man Größen nennen. Vergleichungsweise wird dann auch wohl die Zahl selbst als Größe bezeichnet; aber darauf verfiele man schwerlich, wenn nicht die „unbenannte" mit der „benannten" Zahl irgendwie in Vergleichung käme; sondern nur sofern man ihre Einheit mit anderen Einheiten vergleicht; so besonders in der komplexen Zahl $a + bi$, d. h. $a \cdot 1 + b \cdot i$, wo a und b gewöhnliche Zahlen sind, 1 und i dagegen verschiedene Einheiten, mit denen gezählt wird, unter denen die Beziehung gilt: $i^2 = -1$.

Nun hat sich uns schon „die" Zahl als begriffliches Kontinuum, als Gattung den bestimmten Zahlwerten übergeordnet. Schon damit wird die Zahl selbst aus dem bloßen Wieviel einer Größe selbst zur Größe; es wird damit dem Wieviel gleichsam ein Substrat gegeben, oder es wird, ohne Anleihe bei der „Anschauung", ohne Einführung irgendwelcher Begriffe, die aus nicht-arithmetischem Bereich stammten, das Wieviel zum Wieviel von Etwas. Es ist ersichtlich das Merkmal der Stetigkeit, welches die Zahl zur Größe macht. Unter den Mathematikern hat dies besonders deutlich Hankel gesehen (*65*; bes. § 12 Anm. und § 13). Das Irrationale rein formal, durch den Grenzbegriff, dem Rationalen zu interpolieren, sagt dieser, sei „der Natur der Sache deshalb ganz unangemessen", weil eben ein solcher Grenzbegriff auf der Vorstellung des Kleinen und Großen und der Anordnung der Zahlen in einer stetigen Reihe beruhe, welche schon den Begriff der extensiven (= stetigen) Größe involviere. Das Irrationale verlange in der Tat zu seiner systematischen Fassung den Größenbegriff. Er erklärt dann zwar diesen als unmittelbar in der „Anschauung" gegeben, einer Definition nicht bedürftig. Weiterhin aber unterscheidet er: der Begriff der Quantität sei nicht zu definieren, wohl aber der des Quantum (er meint: μέγεθος, nicht ποσόν); nicht was Größe sei, sondern vielmehr was groß sei, bedürfe der Feststellung. Zu dieser dient ihm das Axiom des Archimedes: daß eine „Größe" (ein bestimmter Wertbetrag) vervielfältigt die andere übertreffe; also die Eigenschaft der Meßbarkeit; die freilich nur die endliche Größe definieren und gerade die echte, stetige Größe (wie wir sahen) nicht begründen würde. Sehr klar aber heißt es dann (in einer Bemerkung zu § 16): der Begriff der unendlichen Reihe, überhaupt der Grenze, sei nicht mehr unzulässig, nachdem der Begriff der (Zahl als) Größe eingeführt sei, „welche schon eine vollendete in sich ist und nicht erst durch den Summationsprozeß erzeugt werden soll". Das deckt sich fast mit der Unterscheidung Kants: daß bei der intensiven Größe das Ganze den Teilen, die Einheit der Mannigfaltigkeit vorhergehend, bei der extensiven erst aus ihr resultierend gedacht werde; oder mit der Leibnizschen Erklärung, daß das Intensive das Fundament des Extensiven sei; die Größe, so würden wir vorziehen zu sagen, das Fundament der Zahl, oder der reine Grundbegriff der Größe das Fundament der zählbaren Größe.

Die Berufung auf „Anschauung" freilich kann uns auch hier nicht fruchten. Man kann nicht Zeit und Raum definieren, ohne die Größe vorauszusetzen; also kann man nicht umgekehrt die Größe im Unterschied von der Zahl definieren wollen, indem man Anschauung von Zeit oder Raum zugrunde legt. Die Anschauung gibt nicht die Größe, die vielmehr ein reiner Begriff ist; und wenn ihr konstituierendes Merkmal die Stetigkeit ist, so geben Zeit und Raum eben auch nicht die Stetigkeit, sondern eben sie muß zuvor in reinem Begriff aufgestellt sein, wenn Zeit und Raum als stetige Gebilde gedacht werden sollen. Die Berufung auf die Anschauung meint aber (wie schon gesagt) in Wahrheit vielmehr die neue Begriffsgrundlage, nach der wir suchten. Als diese erkannten wir schon die qualitative Allheit. Durch sie wird, wie besonders an den unendlichen Reihen klar wurde, die Zahl selbst zu einem Gebilde, das stetig, d. h. von irgendeinem gegebenen Betrag zu irgendeinem anderen durch alle Zwischenwerte hindurch veränderlich gedacht wird. D. h.: man denkt sich, gegenüber den bestimmten Zahlwerten, „die“ Zahl selbst, in jener singularen Fassung, die den Griechen geläufig war, als ein und dasselbe Zugrundeliegende, das durch die Reihe der definiten Werte, und zwar in ausnahmsloser Allheit, sich entwickle. Es ist die Denksetzung selbst, es ist dieselbe, nämlich der Funktion nach dieselbe Denkhandlung, oder, rein objektiv ausgedrückt: die gesetzmäßig bestimmte Relation, in der die sukzessiven Werte gesetzt werden; denn irgendein anderes Substrat ist bisher nicht gegeben. So entsteht die Zahl als einziges, nur einmal vorhandenes Gebilde, das man sich veranschaulicht unter dem Symbol einer Linie, und zwar einer unendlichen Geraden, in gleichförmiger Bewegung durchmeßbar. Die so begründete stetige Zahl wird selbst zum Ausdruck des Maßes einer jeden stetigen Größenänderung, indem durch dies gemeinsame Maß beliebige Größenänderungen untereinander vergleichbar werden.

Darin liegt nun aber der Hinweis auf ein logisches Moment, das in der Zahl von Anfang an schlummerte und doch bis dahin tief versteckt blieb; das in seiner fundamentalen Bedeutung für die Denkschöpfung der Zahl überhaupt von den Arithmetikern erst verhältnismäßig spät beachtet worden ist; nämlich jenes logische Moment, dem Kant den Namen der „Relation" beilegt, welches in Wahrheit aber vielmehr eine eigene Relation von Relationen darstellt. Sein genauer Ausdruck in der Sprache der Arithmetik ist die Funktion. Die Größe als Veränderliche enthüllt ihre eigentliche Bedeutung erst, sofern dabei mitgedacht wird an eine gesetzliche Beziehung, gemäß welcher eine Wertreihe einer anderen von Glied zu Glied korrespondiert. Nicht die Größe ist veränderlich; die Größe als das Wiegroß muß vielmehr fest bleiben, und die Größe als Kontinuum bedeutet nur die Allheit der Werte je unter einem gegebenen Gattungsbegriff; sie ist die Bedingung der Veränderlichkeit, aber ist selbst nicht veränderlich. Sondern nur eine Größe kann streng genommen als veränderlich gedacht werden, gleichzeitig mit der Veränderung einer anderen. Woher hier der Ausdruck der Gleichzeitigkeit? Ist etwa der Begriff der Zeit hier schon vorauszusetzen? Keineswegs; aber wohl könnte es sich herausstellen, daß mit dem Begriff der Größe als veränderlicher man dem Begriff der Zeit schon sehr nahe gekommen ist. Die Veränderung der Größe wird naturgemäß unter dem Bilde der Zeit vorgestellt. So redet man von Geschwindigkeit der Funktion, indem die in größeren Differenzen fortschreitende Änderung gegenüber der in kleineren fortschreitenden, sofern beide an derselben, gleichsam festen Maßreihe gemessen werden, sich naheliegend der schnelleren Fortbewegung vergleicht. Aber die Fortschreitung ist keine andere als durch die Zahl; das Früher und Später besagt nur das Stellverhältnis, das Vor und Nach in der Zählung; die Bewegung ist nur die des Gedankens, der in gesetzmäßiger Folge von Wert zu Wert übergeht, während die Werte und Wertbeziehungen selbst nach wie vor feststehen und ewig, zugleich ins Unendliche, nur sind, nicht werden.

Also nicht der Zeitbegriff gehört etwa schon an diese Stelle. Das logisch Neue, das hier platzgreift, liegt vielmehr darin, daß mit der Funktion, d. h. mit der Gesetzmäßigkeit, gemäß welcher die Änderungen einer Größe denen einer gegebenen anderen korrespondieren, wir in das logische Gebiet übergetreten sind, das von der „Synthesis der Relation“ beherrscht wird. Indem die Quantität sich durch die Qualität vertieft hat, ist sie zugleich zubereitet für den Aufbau eines Systemzusammenhanges nach dem Verfahren der Relation. Die Einzelwerte werden nicht mehr als einzelne, sondern als Stufen einer einzigen Wertentwicklung, des Veränderungsganges einer Größe gedacht, damit eine Wertentwicklung oder die Veränderung einer Größe, mit der einer andern verglichen und die Beziehung ihrer beiderseitigen Änderungen einem Gesetz unterworfen werden könne. Umgekehrt, nur indem eine Größenänderung durch ihre gesetzmäßige Beziehung zu einer anderen ausgedrückt wird, also eben durch den neuen Sinn der Größe als Funktion, gewinnt man den Gattungsbegriff einer Größe, der fortan den sukzessiven Werten dieser Größe sich überordnet. Die veränderliche Größe, gegenüber ihren sukzessiven Werten, ist die durch ein bestimmtes Gesetz ihrer Veränderung definierte, also eben die Größe als Funktion, oder beziehungsweise Argument einer Funktion, d. h., nicht bloß als Veränderliche überhaupt, sondern, je nachdem, abhängig oder unabhängig Veränderliche.

Im Vorausblick auf die Beziehung zweier Veränderlichen in der Funktion kann dann auch wohl von einer Veränderlichen für sich gesprochen werden; d. h. man kann aus dem Kontinuum der Zahl irgendeine, durch irgendein Gesetz bestimmte Wertreihe willkürlich herausheben, als die Reihe der Werte einer Veränderlichen x, und kann diese

Wertreihe in mancherlei Beziehungen (z. B. als in einem bestimmten Intervall stetig oder unstetig) betrachten zunächst ohne Rücksicht auf eine Beziehung zwischen ihr und einer bestimmten anderen Veränderlichen y. So mag man von x und dx reden auch ohne Beziehung auf ein bestimmtes y und dy. Indessen ist hierbei die Funktionsbeziehung wenigstens zu einem möglichen y immer mitzudenken. Sonst wäre es nicht der Begriff einer Größe, der Größe, die der Forderung genügt, statt bloßer Zahlen ein zählbares Etwas zu vertreten. Dafür bleibt unerläßlich wenigstens die allgemeine Voraussetzung der möglichen Beziehung einer Veränderlichen auf eine andere als deren Funktion.

§ 9. (*Das Infinitesimalverfahren.*) Wir haben nunmehr die Voraussetzungen beisammen, um die Methode der Infinitesimalrechnung uns deuten zu können. Ihre fundamental wichtige logische Bedeutung erkannt zu haben, ist besonders das Verdienst H. Cohens [*22*], dessen Darstellung freilich für den nicht philosophisch wie mathematisch gleich vorbereiteten Leser große Schwierigkeiten bietet.

Der allgemeine Sinn und die Absicht des Infinitesimalverfahrens läßt sich indessen auch dem mathematischen Laien unschwer verständlich machen. Eine veränderliche Größe schreitet fort von Wert zu Wert, also in bestimmten, zunächst endlichen Differenzen. Sofern nun zwei Veränderliche (x, y) hinsichtlich des Ganges ihrer Veränderungen miteinander verglichen und in gesetzmäßiger Beziehung erkannt werden sollen, so wird die eine von ihnen (die abhängig Veränderliche, y) allemal eine bestimmte Differenz (Δy) durchmessen, wenn die andere (unabhängig Veränderliche, x) eine bestimmte Differenz (Δx) durchmißt. Das Verhältnis der Differenzen beider Größen also, das sich als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreiben läßt, drückt dann den Gang der

Veränderung der einen im Verhältnis zu dem der anderen Größe aus. Nun soll aber die beiderseitige Änderung nicht sprung- oder absatzweise, d. h. durch Differenzen von bestimmtem endlichen Betrag, sondern kontinuierlich geschehen; es soll mit anderen Worten der Wertbetrag auf beiden Seiten in keinem Punkte unverändert bleiben. Durch die Vergleichung der in endlichen Abständen gemessenen Differenzen aber ist die Änderung nur ruckweise, also diskontinuierlich zum Ausdruck gebracht. Um sie als kontinuierliche auszudrücken, fragt man: was wird aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn die Differenzen beiderseits kleiner und kleiner werden, kleiner als jeder endliche Betrag? D. h.: welches ist der Grenzwert dieses Verhältnisses, wenn beide Differenzen sich der Null unbegrenzt nähern? Dieser Ausdruck wird noch immer als Verhältnis, mithin als Quotient geschrieben, obgleich es kein Quotient für sich gegebener meßbarer Zahlwerte mehr ist; man schreibt ihn so gleichsam zur Erinnerung an seine Entstehung aus dem Quotienten der Differenzen. Dieser neue Ausdruck zeigt aber gegenüber dem vorigen eine wesentlich veränderte, in vielen und wichtigen Fällen vereinfachte Gestalt. Um den Sinn dieser Vereinfachung durchsichtig zu machen, ist es nützlich, ein typisches Beispiel ins Auge zu fassen; ein Beispiel höchst elementarer Art, für welches das Verfahren der Differentiation freilich nicht erdacht zu werden brauchte, da in diesem Fall das Ergebnis sich auch ohne das gewinnen ließ; welches aber eben darum besonders geeignet ist, dem, der über den Sinn des Verfahrens erst Klarheit sucht, eine Vorstellung davon zu geben, worin es eigentlich besteht und was damit geleistet wird.

Man bezeichnet in der Mechanik mit g die Endgeschwindigkeit, welche beim Fall schwerer Körper nach einer Sekunde vom Beginn der Fallbewegung an erreicht wird. Da nun der Fall schwerer Körper dem Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung unterliegt, so ist die Endgeschwindigkeit nach 2 Sekunden $2g$, nach t Sekunden tg:

$$v = tg. \tag{1}$$

Der durchmessene Raum ist, wie man leicht einsieht, gleich der mittleren Geschwindigkeit; also in der ersten Sekunde gleich dem Mittel zwischen 0 und g, oder $= \frac{1}{2}g$; in der zweiten Sekunde gleich dem Mittel zwischen g und $2g$, also $= \frac{3}{2}g$; so in der dritten $= \frac{5}{2}g$ und so fort. Also in der ersten $= \frac{1}{2}g$, in den zwei ersten zusammen

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ oder}\right) \frac{4}{2}g,$$

in den drei ersten

$$\left(\frac{1+3+5}{2} \text{ oder}\right) \frac{9}{2}g,$$

und so fort. Die durchmessenen Räume also schreiten von Sekunde zu Sekunde im Verhältnis der Quadratzahlen fort; der Fallraum in t Sekunden ist

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Diese Gleichungen (1, 2) ließen sich aufstellen, ohne daß es dazu der Formeln des Infinitesimalverfahrens bedurfte. Nun aber zeigt sich, daß die erste dieser Gleichungen aus der zweiten durch Differentiation, oder die zweite aus der ersten durch Integration gewonnen werden kann. Es genügt, das Erstere zu zeigen. s ist stetig veränderlich mit t oder eine stetige Funktion von t, d. h. jeder Änderung von t entspricht eine bestimmte Änderung von s, in beiderseits stetigem Übergang, nach dem Gesetz, welches durch die Gleichung (2) ausgedrückt ist. Erhält also die Größe t einen Zuwachs um eine bestimmte Differenz Δt, so erhält die Größe s einen dem genannten Gesetz gemäß diesem entsprechenden Zuwachs Δs. Dies drückt sich sachgemäß so aus, daß in der Gleichung (2) s durch $s + \Delta s$, t durch $t + \Delta t$ ersetzt wird; also

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2,$$

oder, indem $s = \frac{1}{2} g t^2$ beiderseits wegfällt:

$$\Delta s = g t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t.$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältnis irgendwelcher willkürlich gewählten endlichen Änderung von s zu einer entsprechenden, ebenfalls endlichen Änderung von t angegeben, in einem Ausdruck, der, wie man sieht, nicht von g und t allein, sondern noch von der unbestimmten, willkürlich wählbaren Größe Δt abhängt. Läßt man nun aber beide Differenzen sich unbegrenzt der Null nähern, so wird sich das zweite Glied zur Rechten ebenfalls der Null, der Wert des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, also dem Werte $g t$ unbegrenzt nähern. Diesen Grenzwert schreibt man in Gestalt eines neuen Quotienten $\frac{ds}{dt}$, welcher der Differentialquotient heißt. Er bedeutet dem Buchstaben nach das Verhältnis der unendlichklein werdenden oder „verschwindenden" Differenzen Δs und Δt, d. h., den Ausdruck, den das Verhältnis der beiden Differenzen erhält, wenn beide sich gleichzeitig der Null unbegrenzt nähern. Was aber der sachliche Sinn dieses Quotienten ist, ergibt das Beispiel klar. Wir wissen ja schon aus unserer Gleichung (1), was der erhaltene Ausdruck $g t$ wirklich bedeutet, nämlich die Endgeschwindigkeit, die in der Zeit t, vom Beginn des Falls gerechnet, erreicht wird. Der „Differentialquotient" $\frac{ds}{dt} = g t$ aus der Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ besagt also nichts

Geheimnisvolleres als: Wenn in der Zeit t der Raum s gemäß dem Gesetz der gleichförmigen Beschleunigung durchmessen wird, so ist die im Endmoment erreichte Geschwindigkeit $= g \cdot t$, wo g eine bekannte, unter bestimmten Voraussetzungen konstante Größe ist, nämlich die Fallgeschwindigkeit, die nach einer Sekunde erreicht wird, welche unter sonst gleichen Umständen, namentlich in gleicher Entfernung vom Attraktionszentrum, konstant ist.

Es sei sogleich noch ein zweites Beispiel von nicht minder typischem Charakter hinzugefügt, die Differentiation der Kreisgleichung. Hier ergibt sich der Differentialquotient gleich dem Verhältnis zweier aufeinander senkrechter Geraden, durch welches die Richtung der Tangente für einen beliebigen Punkt der Kreislinie bestimmt ist, oder auch gleich dem trigonometrischen Ausdruck eines Winkels, der dasselbe leistet: die Richtung der Tangente festzulegen. Die Differentiation der Kreisgleichung bedeutet also: Ein in der Kreisperipherie bewegter, somit konstant seine Richtung ändernder Punkt wird sich in einem gegebenen Moment seiner Bewegung, wenn er von diesem Momente ab seine Richtung nicht weiter ändert, sondern die in diesem Punkte erreichte Richtung innehält, in der Tangente fortbewegen. Umgekehrt kann man sich nun die Kreislinie entstehend denken durch Drehung einer Achse r um den Mittelpunkt, in deren anderem Endpunkt eine Senkrechte auf r gedacht wird, die zugleich mit der Achse unter Festhaltung des rechten Winkels sich dreht; so definiert die kontinuierliche Richtungsänderung dieser Senkrechten (d. h. der Tangente) die kontinuierliche Richtungsänderung eines in der Kreislinie bewegten Punktes von Moment zu Moment, oder die Krümmung der Kreislinie. Also während man einerseits aus dem gleichen Abstand jedes Peripheriepunktes vom Mittelpunkt beweist, daß die Tangente in jedem Peripheriepunkt auf dem Radius senkrecht steht, so kann man umgekehrt durch die kontinuierliche Richtungsänderung einer auf dem Radius in dessen Endpunkt errichteten Senkrechten die Kreislinie entstehend denken, so daß die kontinuierliche Richtungsänderung in der Kreislinie durch die Richtungsänderung der Tangente von Moment zu Moment dargestellt wird. Die Aufgabe, zu beliebigen, durch ihr analytisches Gesetz gegebenen Kurven die Tangenten zu finden und umgekehrt, war es historisch, die zur Entdeckung des Verfahrens der Differentation geführt hat, welches dann besonders Anwendung fand auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsänderungen in der Mechanik. Daher dürfen die beiden vorgeführten Beispiele vor anderen als typisch gelten.

§ 10. (*Sinn des Differentialquotienten.*) Vergleicht man beide Beispiele, so ergibt sich, daß übereinstimmend hier und dort aus einem schon bekannten, für endliche Beträge der Änderung der verglichenen Größen geltenden Gesetze, nach welchem die Änderung der einen von der der anderen abhängt, eine neue Form des Änderungsgesetzes gewonnen wird für irgendeinen und zwar jeden beliebigen Punkt der Veränderung; dort die Endgeschwindigkeit, mit der der bewegte Körper, falls nicht weitere Geschwindigkeitsänderung hinzutritt, etwa in einer horizontalen Ebene ohne Widerstände, sich fortbewegen würde; hier die Endrichtung, in der ein in der Kreislinie bewegter Punkt, wenn nicht die Richtungsänderung fortdauert, aber das bis zu diesem Punkte erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Richtungsänderung festgehalten wird, sich fortbewegen wird, welches offenbar die Richtung der Tangente sein muß. Hiernach versteht sich das „Verschwinden“ der Differenz. Es kommt wirklich etwas in Wegfall, nämlich die weitere Fortdauer der Veränderung, indem nur das bis dahin erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Veränderung festgehalten wird. So begreift sich, weshalb man in diesem und allen ähnlichen Fällen einen vereinfachten Ausdruck erhält, so im ersten Beispiel statt des quadratischen das einfache Verhältnis der Zeiten;

so allgemein, wenn y irgendeiner Potenz von x entspricht, eine um 1 verminderte Potenz.

Man mißt also durch den Differentialquotienten nicht das Verhältnis der unendlich kleinen Änderungen der kontinuierlich miteinander veränderlichen und in dieser Veränderung nie stillstehenden Größen y und x; sondern man fixiert das durch die nach bestimmtem Gesetz geschehende stetige Änderung im gegebenen diskreten Punkt erreichte, von da ab sich nicht weiter ändernde Ergebnis der Änderung, dieses aber in einem neuen Gesetzesausdruck (einer neuen Funktion), der für jeden Punkt der gedachten Änderung gilt. Damit erhält man einen gleichsam verdichteten Ausdruck des in anderer Form schon bekannten Gesetzes der Änderung, indem die neue, aus der vorigen abgeleitete, in diesen Fällen einfachere Funktionalbeziehung für den Punkt der Änderung, und zwar für jeden Punkt, daher in der Zusammenfassung (Integration) wieder für den ganzen, kontinuierlichen Verlauf der Änderung gilt. So ergibt sich aus der stetigen Folge der Endgeschwindigkeiten im Fall wieder umgekehrt das Fallgesetz, so aus den kontinuierlichen Richtungsänderungen der Tangente das Gesetz der Krümmung der Kurve. Das ist der verdeutlichte Sinn der zunächst dunklen Ausdrucksweise, daß die unendlichvielen unendlichkleinen Änderungen das Gesetz für den endlichen Betrag der Änderung ergeben, oder der Sinn des zur Differentiation reziproken Verfahrens der „Integration". Das Gesetz gilt für alle Punkte des Änderungsverlaufs; diese qualitative Allheit des Gesetzes als des Gattungsausdrucks der Veränderung erklärt das „Unendlichviel" und „Unendlichklein"; andere Rätsel sind darin nicht zu suchen. Aber eben indem diese Allheit qualitativer, nicht quantitativer Art ist, so ist durch das Infinitesimalverfahren das allgemeine Mittel gewonnen, echte Qualitäten zu streng gesetzmäßigem Ausdruck zu bringen. Schon Galilei hatte in seiner Ableitung des Fallgesetzes den Begriff des „Momentes" der

Geschwindigkeit eingeführt, worunter er verstand die durch die einem bestimmten Gesetz unterliegende, in diesem Fall konstante Beschleunigung in jedem Punkte der Zeit erreichte Geschwindigkeit. Indem aber die Fallbahn sich von Augenblick zu Augenblick in unendlichvielen unendlichkleinen Zuwüchsen an Geschwindigkeit erzeugend gedacht wird, erscheint die infinitesimale Geschwindigkeit als der Ursprung, aus dem die endlichen Fallräume sukzessiv hervorfließen. Das heißt es, wenn man, wie namentlich Newton, die infinitesimale Größe betrachtet als die erzeugende, die endliche als durch sie erzeugt; oder diese in jener involviert und aus ihr sich evolvierend. Der wahre Erzeuger der endlichen Größe ist nicht die „unendlichkleine" Größe (das Unendlichkleine wäre dem Größenwert nach vielmehr Null), sondern es ist das Gesetz der Größe (als Veränderlicher), das man sich nun wie in einen Punkt zusammengezogen, d. h. für den einzelnen Punkt ausgedrückt, oder an einer endlichen Erstreckung sich darstellend denken kann, das aber dem letzten Sachgehalt nach dasselbe ist für den Punkt und die endliche Erstreckung, wenn es auch in Bezug auf beide verschiedene, im allgemeinen auseinander ableitbare Ausdrücke erhalten muß. Da aber die endliche Größe überhaupt von Punkt zu Punkt entstehend (d. h. veränderlich) gedacht wird, so ist insofern der punktuelle, d. h. infinitesimale Ausdruck der fundamentale, aus dem der extensionale gleichsam erst hervorwächst. Die Differenz entsteht eben von der Null an; nicht aus ihr; aus Null wird keine extensive Größe; wohl aber von der Null, d. h. dem Nichtsein dessen, was werden soll, oder ganz schlicht[1]) vom Ausgangswert an; woraus? Aus dem Gesetz; eine andere Antwort ist nicht zu geben und nicht zu verlangen. Durch dies Gesetz aber ist die Größe als Eines, Identisches, im Unterschied von den sukzessiven Größenwerten, also in ihrem Gattungsausdruck definiert.

1) Vgl. oben S. 122.

Fragt man also: wie soll aus der Null gewordenen, „verschwundenen“ Größe die endliche Größe wiederentstehen? so ist zu antworten: die Größe zwar (*quantitas*), d. h. das So-und-so-groß, ist verschwunden, quantitativ Null geworden, aber nicht ist damit auch das Gesetz der Größe qualitativ zunichte geworden; also nicht die Größe im Sinne des Wiegroßen (*quantum*), d. h. des identisch Definierten, welches die sukzessiven Größenwerte nur wechselnd durchläuft, ohne in ihnen sich je zu verlieren und gleichsam auszugeben. Und wie ist es definiert? Eben durch das Gesetz, also in rein qualitativer Identität, wiewohl durch das Mittel quantitativer Beziehungen, die als solche sich stets nur am Endlichen darstellen. Denn auch in Bezug auf den Punkt kann das Gesetz nur formuliert werden durch quantitative Beziehungen unter endlichen Größen. Die Beispiele zeigen es klar, daß der Differentialquotient selbst eine endliche, für jeden Punkt konstante Größe darstellt (z. B. gt). Auch die Form des Quotienten ist hierbei an sich nicht wesentlich. Sie ist sogar leicht irreführend, gerade indem sie das dy und dx als neue, nur überaus kleine endliche Größen, so klein als man nur will, mißverstehen läßt. Das streng Unendlichkleine hätte überhaupt kein Wertverhältnis; dieses wäre, dem Zahlwert nach, $\frac{0}{0}$, was an sich kein möglicher Ausdruck eines definiten Wertverhältnisses ist. Es ist überhaupt nicht eine bloße quantitative Änderung des gegebenen endlichen Wertverhältnisses, sondern es ist etwas qualitativ Anderes, was der Differentialquotient gegenüber der ursprünglichen Funktion oder dem Differenzquotienten bedeutet; der Ausdruck als Quotient ist, wie gesagt, nur die Erinnerung an den Weg der Ableitung, auf dem der neue Ausdruck gewonnen wurde. Man redet daher richtig von der „derivierten Funktion“. Es ist in der Tat eine neue Funktion, die etwas Anderes als die erstgegebene ausdrückt, doch aus dieser abgeleitet.

Die wichtige allgemeine Bedeutung des Verfahrens aber besteht darin, daß dadurch Begriffsgrenzen überschreitbar werden, die ohne das für unüberschreitbar gelten müßten. Die Gerade, welche zwei Punkte mit der Kreisperipherie gemein hat, und die, welche nur einen Punkt mit ihr gemein hat, also sie nicht schneidet, sondern berührt, sind qualitativ verschiedene Begriffe. Es ist eine für die Anschauung bequeme Ausdrucksweise, wenn man die Schneidungspunkte der Sekante sich unendlich nahe kommen und so die Sekante schließlich in die Tangente übergehen läßt. Aber der rein logische Sinn dieser nur allzu anschaulichen Beschreibung des Vorgangs ist einzig der: es lassen sich Ausdrücke gesetzmäßiger Beziehungen, die für die Sekante gelten, in solche für die Tangente umsetzen, und es fallen auf diese Weise beide vorher dem Begriff nach geschiedenen Fälle qualitativ unter eine Betrachtung, unter ein und dasselbe höhere Gesetz. Die Stetigkeitsbetrachtung, daher das Infinitesimalverfahren, wird so zum geradezu universalen Mittel der Vereinheitlichung wissenschaftlicher Betrachtungen, die sich auf Größen irgendwelcher Art beziehen. Ganz analog ist die Rolle des Durchgangs durchs Unendliche in der Geometrie der Lage. Parallelen und Sichschneidende sind qualitativ verschiedene Begriffe; Parallelen schneiden sich ihrem Begriff nach eben nicht. Dennoch kommen beide unter eine Betrachtung, indem man die Parallelen als in einem „unendlichfernen Punkt" sich schneidend auffaßt. Was dieser seltsame Ausdruck der unendlichfernen Schneidung zweier sich nicht Schneidenden sachlich besagt, liegt zum Glück nicht unendlich fern; es besagt, daß ein stetiger Übergang gedacht werden kann und muß aus der Lage der sich Schneidenden in die der Parallelen, gemäß welchem jede Aussage, die für Sichschneidende gilt, sich mit richtigem Ergebnis überträgt auf den Grenzfall der sich nicht Schneidenden, d. h. eine einzige Gesetzlichkeit fortan beide Fälle umfaßt. So wird der

Durchgang durchs Unendliche zu dem methodischen Mittel einer berechtigten μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, der Herstellung einer Kontinuität des Denkens, in welcher die vorher wie A und *non-A* geschiedenen Fälle sich unter höherer Betrachtung wieder vereinigen.

Durch diese Aufhellung wird aber nicht unsere frühere Erwägung über die aktuelle Bedeutung der Unendlichkeiten in der Mathematik und besonders des Unendlichkleinen etwa entbehrlich gemacht. Die Möglichkeit des Übergangs von x zu dx und umgekehrt beruht genau darauf, daß kraft der qualitativen Allheit Unendlichkeiten, nämlich unendliche Wertbereiche, Wertinbegriffe, Zahlstrecken mit punktuellen Werten, Wertgrenzen in einen Gesetzeszusammenhang kommen. Die Strecke enthält unendliche Punkte; und indem solche Unendlichkeiten und nicht mehr bloß endliche Wertbeziehungen der Herrschaft des mathematischen Begriffs unterworfen werden, wird es möglich, von der Strecke auf den Punkt, vom Punkt auf die Strecke, und so im ganzen Gebiet der Größen von jedem gegebenen Bereich zum logisch angrenzenden in voller begrifflicher Strenge überzugehen. Ein Letztes, Absolutes wird dabei nicht erreicht; denn dieser qualitative Übergang setzt sich selbst wieder ins Unendliche fort, wie die unendlichen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen klar zeigen. Aber eben damit ist ausgesprochen, daß fortan keine Begriffsgrenze irgendwelcher Art absolut unüberschreitbar bleibt. Allein das Verfahren dieser berechtigten Grenzüberschreitung selbst könnte „absolut" heißen in dem Sinne, daß es jeder Schranke gewachsen ist, die etwa der Souveränität des Denkens sich entgegenstellen möchte.

§ 11. (*Das Infinitesimale und die Realität.*) Auf Grund des Gesagten dürfte man ganz den freilich hyperbolisch lautenden Satz Cohens[1]) unterschreiben: daß mit dem Infinite-

1) Logik [*26*], S. 32.

simalverfahren (oder allgemeiner mit dem Verfahren des Unendlichen) die „präzise Frage“ und die „erlösende Antwort“ formuliert sei für die Bedeutung des Denkens als Erzeugung des Seins. Schwierig zwar bleibt es, wenn Cohen das Infinitesimale selbst als Absolutes — immerhin mit bezeichnender Einschränkung als „gleichsam“ Absolutes — bezeichnet[1]), da doch die Infinitesimalmethode gerade die Bedeutung hat, die Einheit und damit die Zahl überhaupt zu relativieren. Nicht das Infinitesimale ist absolut; aber das Verfahren mit dem Infinitesimalen drückt prägnant die souveräne Macht des Denkens über das Sein aus, der keine absolute Schranke sich entgegenstellen kann. Schwierig ist es auch, wenn Cohen das dx selbst als die wahre „Einheit“ bezeichnet. Doch wird auch das in bestimmtem Sinne verständlich. Die Einheit überhaupt wird durch die Infinitesimalmethode, wie gesagt, relativiert, indem jede Maßeinheit einer bestimmten Wertordnung in einer anderen unendlichklein, jedes für eine Ordnung Unendlichkleine in einer anderen Ordnung endliche Maßeinheit sein kann, also jedes x wieder als dx, jedes dx als x fungieren kann. Am Ende hat Cohen eben dies sagen wollen, obwohl die Ausdrucksweise gegen Mißverstand nicht genügend geschützt ist. Es kann leicht die verkehrte Meinung entstehen, als ob das Endliche durch das Unendlichkleine gemessen werden sollte, während gerade das Hinausgehen über die Forderung der Meßbarkeit es ist, was durch das Infinitesimalverfahren ermöglicht wird. Die Vervielfachung müßte unendlich sein; aber ein unendlich Vielfaches ist im eigentlichen Sinne kein Vielfaches mehr; sondern es ist nur ein versinnlichender Ausdruck des qualitativen Überganges in eine andere Wertordnung, wie vom Punkt zur Strecke; so wie umgekehrt das dx nicht durch unendliche Teilung (die ebenso nicht mehr Teilung im eigentlichen Sinne wäre) aus dem Endlichen

1) S. 109, 116, 123 u. oft.

entsteht. Also ist dx gegenüber x nicht, was man sonst unter Einheit versteht: eine zu vervielfältigende Einheit, Einheit zu einer Mehrheit; dx dürfte, in Vergleichung mit x, genau genommen überhaupt nicht im Plural gesetzt werden (wie wenn Cohen[1]) von einem Zusammenhang „der" dx, der infinitesimalen Elemente spricht), sondern als Allgemeinausdruck nur im Singular. Cohen selbst stellt das Differential treffend zusammen mit dem allgemeinen Glied der Reihe, welches doch als allgemeines nicht mehr ein Glied, sondern das Glied ist, das die Reihe aufbaut. Die größte Schwierigkeit aber macht in Cohens Behandlung des Problems die scheinbar schroffe Ablehnung des Grenzverfahrens als Grundes der Infinitesimalmethode, während doch anders als durch den Grenzwert — richtiger freilich: die innere Wertbestimmtheit — unendlicher Reihen, die aus endlichen Größen sich aufbauen, zu keinem Differential (wie auch nicht zum Irrationalen) zu gelangen ist, ja im Grenzübergang die schöpferische Macht des Infinitesimalverfahrens wesentlich liegt. Der Punkt, heißt es bei Cohen, müsse nicht als Grenze, als Anfang, sondern als Ursprung der Extension gedacht werden. Aber nicht der Punkt, der als solcher in der Tat nur den Nullwert der Ausdehnung bedeuten würde, ist der Ursprung, sondern der Ursprung ist das Gesetz, das man sich (wie gesagt) intensiv im Punkte konzentriert oder extensiv auf die Strecke erstreckt denken mag, das aber an sich so wenig am Punkte wie an der Strecke haftet, sondern gleichermaßen beide bestimmt, insofern über beiden steht und eben damit den Übergang vom einen zum andern möglich macht. Das Richtige, das zugrunde liegt, ist: daß eben hiermit der Begriff des Punktes (aber nicht minder der der Strecke) eine Wandlung erfährt, indem fortan der Punkt nicht bloß als Nullwert der Ausdehnung (wie die Strecke nicht bloß als endlicher Wertbe-

1) S. 115.

trag), sondern als Träger des Gesetzes angesehen wird, aus dem die extensionale Größenbestimmtheit durch Integration, wie umgekehrt aus ihr die punktuelle Bestimmung durch Differentiation hervorgehe. Aber nur wenn man sich die Strecke vom Punkte an entstehend denkt, erscheint der auf den Punkt bezogene Ausdruck des Gesetzes ursprünglicher; und auch so nur ursprünglicher; über diesen Komparativ hinauszugehen wäre bedenklich, weil der punktuelle Ausdruck so wenig wie der extensionale eine absolute Geltung beanspruchen kann; weil in nochmals vertiefter Betrachtung der Punkt wieder Segment werden, also einen neuen, vergleichungsweise punktuellen Ausdruck des Gesetzes (eine neue Differentiation) erfordern kann. Gerade Cohen hat mit Recht betont, daß nicht notwendig die Integration als Umkehrung der Differentiation, sondern ebensogut diese als Umkehrung jener zu betrachten ist. Die Strecke, einmal als Integral begriffen, hat also nicht durchaus als das Abgeleitete zu gelten, so wenig wie der Punkt als Differential absoluter Ursprung ist. Dann schiene in ihm der Ursprung sich zu erschöpfen, während es doch der ganze logische Sinn des Ursprungs ist, unerschöpfbar zu sein, wie es in der unendlichen Wiederholbarkeit des Differentiationsverfahrens auch zum genauen Ausdruck kommt. Vielmehr in beiden, im Differential wie im Integral, drückt sich gleich sehr und in genauer Korresponsion das Unendliche als Ursprung und rechtfertigender Grund des Endlichen, und damit das Denken als Ursprung und rechtfertigender Grund des Seins aus. In dieser logischen Grundauffassung bleiben wir einig, und sie festgestellt zu haben bleibt das unschätzbare Verdienst der Cohenschen Untersuchungen über die Infinitesimalmethode.[1])

1) Die Kritik, welche B. Russell (*154*, ch. 41, §§ 315—324) an Cohens „Prinzip der Infinitesimalmethode" übt, setzt durchweg Russells eigene Philosophie der Mathematik voraus (über welche Cassirer [*19*] Bericht gibt). Nicht das ist ihr zum Vorwurf

Das aber bedeutet zuletzt auch die tiefe Kantische Bestimmung der intensiven, d. h. wesentlich: der infinitesimalen Größe als der realisierenden. Durch die bloße extensive Größe setzt man (wie anfangs schon gesagt) eigentlich nichts als die Setzung selbst, die soweit keinen Inhalt hätte, daher leer, nichtig erscheinen müßte in Hinsicht auf den schließlichen Zweck: den Gegenstand zu erkennen. Die hier fehlende Inhaltsbestimmung gibt erst die Größe als intensive, d. h. aus dem Unendlichen des reinen Denkverfahrens, gleichsam von innen her, begründete und von da nach außen, in den „Gegenstand" hinein, erst sich erstreckende (extendierende). Wie sie zum Ausdruck gerade der echtesten Qualität wird, genügt fast das einzige Beispiel der Beschleunigung klar zu machen. Eben dadurch aber wird es nun möglich, zu präzisem Ausdruck zu bringen, was

---

zu machen; eher, daß auf die bedeutende Weiterentwicklung, welche die Mathematik des Unendlichen seit Cantor (durch Veronese) erfahren hat, keine Rücksicht genommen wird. Doch, von allem Prinzipiellen abgesehen, beruht diese Kritik fast durchweg auf Mißverständnissen, welche durch die schwierige Darstellung Cohens doch nur zum Teil erklärlich sind. (Z. B. wenn Cohen *22*, § 2, sagt, durch das Grenzverfahren werde der elementare Begriff der Gleichheit ergänzt und korrigiert, so will er auf die einfache Tatsache hinweisen, daß auf Grund des Grenzverfahrens ein Wert nicht bloß, wie in der Elementarmathematik, durch eine Gleichung, sondern durch ein System von Ungleichungen bestimmt wird.) Durchweg liegt bei Russell die irrige Vorstellung zugrunde, als solle das Infinitesimale, das als inextensiv von Cohen fort und fort bezeichnet wird, gleichwohl eine extensive Quantität, eine „Distanz", die nicht Null und doch auch nicht endlich sei, bedeuten, was die Meinung Cohens jedenfalls nicht ist. Zu bedauern ist auch, daß Russell sich ausschließlich an die Schrift d. J. 1883 gehalten hat; aus Cohens „Logik" (1902) würde er ersehen haben, daß der in der älteren Schrift noch nicht völlig aufgegebene Kantische Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken von keinem gründlicher als eben von Cohen überwunden ist. — Ein anderer Angriff auf Cohens Auffassung des Infinitesimalen ist von Cassirer (Philos. Arbeiten I, S. 31 ff.) gebührend zurückgewiesen worden (vgl. auch *20*, S. 462).

jetzt und hier, im gegebenen Punkt der Zeit und des Raumes, „Reales" vorhanden sei. Es werden eben jetzt nicht mehr lauter Nichtse gezählt, noch bleibt zwischen den gezählten Punkten ein Leeres, im schlechten Sinne eines Nichts, das dennoch dawäre, nur nicht mitzählte. Mag unsere Zählung von Punkt zu Punkt springen, der wirkliche Vorgang kann, eben als Gang, nur kontinuierlich gedacht werden. Wie aber denkt man ihn kontinuierlich? Indem der Gedanke das Gesetz, in welchem das Reale des Vorgangs qualitativ bestimmt wird, stetig festhält, auch wenn er zählend von Punkt zu Punkt, von Halt zu Halt zu springen scheint, um festzustellen, welches jetzt und jetzt und wieder jetzt das Ergebnis der kontinuierlichen Änderung ist. So wird die Reihe sukzessiver Wertbestimmungen der Veränderlichen zum Ausdruck der sukzessiven Veränderungsstufen eines nunmehr definierten „Etwas", d. h. zum Ausdruck des Realen.

Also ist die entscheidende Erkenntnisleistung des Infinitesimalen zutreffend durch Kants Bestimmung ausgedrückt, daß es Realität begründe, d. h. ein existenzfähiges Etwas im Unterschied vom Nichts (der leeren Stelle) definierbar mache. Die Methode des Infinitesimalen ist also nicht bloß eine abkürzende Methode des Zählens und Rechnens, die gleichsam zufällig auf anderweitig gegebenes „Reales" Anwendung litte, sondern es ist die Methode, welche ein Etwas, das gezählt und womit gerechnet wird, überhaupt erst begründet. Die Quantität liefert gleichsam nur das Rohmaterial dazu; durch sie allein wäre allenfalls nur ein System von Stellen gegeben, ohne etwas, das die Stellen besetzt. Erst durch die Qualität, in jener strengen Verknüpfung mit der Quantität und andrerseits mit der Relation, die im Infinitesimalen sich den genauen wissenschaftlichen Ausdruck und die handliche Methode geschaffen hat, werden die Stellen besetzbar, und zwar alle Stellen eines zu beschreibenden Änderungsganges in lückenloser Ausfüllung.

So bleibt nichts „leer"; die Zumutung eines existierenden Nichts kann ferner nicht auftreten.

Hiermit ist nun der Übergang schon in weitem Umfang vorbereitet von der bloßen Mathematik zur mathematischen Naturwissenschaft, zunächst der Mechanik. Mit der Einführung der Stetigkeit in die Zahl ist die trennendste Kluft schon gefallen, welche die Zahl vom Raume schied; mit dem Raume aber und der Zeit, die nicht minder zwingend von hier aus sich der Zahl verbindet, stehen wir schon nicht mehr in der bloßen Mathematik, sondern bereits mitten in der Mechanik. Nur eines fehlt uns noch, um den Übergang zu einem ganz kontinuierlichen zu machen: die Einführung auch der Begriffe Dimension und Richtung in die reine Zahl. Diese soll uns im nächsten Kapitel beschäftigen.

Fünftes Kapitel.

Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl.

§ 1. (*Die Zahlreihe als gerade Reihe.*) Die Beziehung der Position oder der Ordnung des Vor und Nach erwies sich als das letzte Gattungsmerkmal der Zahl, welches aller Maßbedeutung derselben logisch vorhergeht. Sein mathematischer Ausdruck ist das Plus und Minus, welches eine immer gleiche Art der Relation von Glied zu Glied unserer Urreihe

$$\ldots|\,|\,|\,|\,|\ldots,$$

nämlich die Bedeutung jedes Gliedes der Reihe als Gegenglied zu einem Grundglied oder Grundglied zu einem Gegenglied bezeichnet. Dieser Doppelausdruck der Plus-Minus-Beziehung ist darin begründet, daß mit dem Plus das Minus, mit dem Minus das Plus immer zugleich gegeben ist. Man nennt diese beiden „Sinne" der Positionsbeziehung einander entgegengesetzt. Diese Bezeichnung ist aber nur dann zutreffend, wenn man die Entgegensetzung ohne den Nebensinn des Feindlichen oder der Tendenz der Vernichtung, in der schlichten Bedeutung des Gegenüber oder der Gegenseitigkeit versteht. Der „Gegensatz" ist in Wahrheit, nach Kants Ausdruck, „Gegenverhältnis", Reziprozität. Weit entfernt, einander zu vernichten, bedingen und geben sich die beiden Sinne der Positionsbeziehung vielmehr gegenseitig, daher sie richtig so, als die zwar verschiedenen, aber zueinander gehörigen „Sinne" einer und derselben, dennoch einzigen Grundbeziehungsart oder „Richtung" bezeichnet werden. Die „Aufhebung" der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Werte gegeneinander ist nicht „Vernichtung", sondern Rückgang zum jedesmaligen Ausgangswert, der absoluten oder relativen Null, die nicht ein arithmetisches Nichts ist, sondern die sehr reale Bedeutung des letzten Bezugs- oder Vergleichspunktes zu jeder Setzung eines Wertbetrages, oder in anderer Wendung, der unteren Grenze der Wertsetzung hat. Für jetzt aber ist von einer Bestimmtheit des im einen oder anderen Sinne zu setzenden Wertbetrags überhaupt abzusehen, da es gilt, die Positionsbeziehung rein als solche in ihrer eigenen Gesetzlichkeit zu verstehen.

Dieser zufolge stellt nun unsere Urreihe sich dar als streng homogenes Gebilde. Damit soll ausgedrückt sein: daß in strenger Identität stets der Art nach dieselbe, jedoch von Haus aus doppelsinnige Grundbeziehung, eben jene mit Plus und Minus bezeichnete (des Gegenglieds zum Grundglied und des Grundglieds zum Gegenglied) für irgendwelche zwei Glieder der Reihe, welches auch ihr Abstand in der Reihe, gleichsam die Schrittzahl vom einen zum andern (oder von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkte Null zum einen und zum andern) sei, geltend bleibt. Dadurch ist nicht bloß ein Zurücklaufen der Reihe in sich selbst, sondern überhaupt irgendeine Mehrheit der Relationsart oder der Art der Nullbeziehung (abgesehen von ihren beiden „Sinnen") ausgeschlossen.

Die Bedeutung dieser Bestimmung wird sofort klar werden durch eine Vergleichung mit den auf dieselbe Frage bezüglichen Aufstellungen Veroneses. Dieser definiert die Homogeneïtät eines eindimensionalen Systems dadurch: daß es zu einem beliebigen, in einer bestimmten Richtung genommenen Segment des Systems von einem beliebigen Element desselben Systems aus zunächst in derselben Richtung ein ihm identisches, d. h. dem Begriff, und zwar dem ganzen Begriff nach übereinstimmendes Segment gibt. Indem dann diesem „homogenen“ System noch die weitere Eigenschaft beigelegt wird, daß es auch als Ganzes in seinen beiden Richtungen, von irgendeinem Element aus genommen, sich selbst identisch bleibt, nennt Veronese das so charakterisierte System ein „in der Lage seiner Teile identisches“ System. Mit diesen Bedingungen bleibt eine zirkuläre Gestalt des Systems verträglich: das so definierte System kann offen oder geschlossen sein (§§ 70, 71). In der Tat treffen die besagten Merkmale auf den Kreis so gut wie auf die gerade Linie zu. Doch beruht dies im Grunde darauf, daß Veronese nicht, wie wir, die Positionsbeziehung rein von der Maßbeziehung ablöst, sondern sie nur zugleich mit dieser ins Auge faßt und zunächst maßgleiche Segmente in Vergleichung zieht. Für solche gilt allerdings im Kreis wie in der Geraden auch Positionsgleichheit; während sie für ungleiche Segmente in der Geraden gilt, im Kreise nicht. Nun kann aber ein Segment gar nicht bestimmt sein, ohne daß voraus die Art der Relation von Glied zu Glied bestimmt ist. Also ist vielmehr diese zunächst rein für sich ins Auge zu fassen, die Identität also auf diese, in voller Unabhängigkeit von irgendwelchen besonderen Bedingungen hinsichtlich des Betrages der verglichenen Segmente, zu beziehen. Dann aber kann die Homogeneïtät des Systems nur so verstanden werden, daß die Identität der Beziehung von Glied zu Glied für irgendwelche, wie auch immer angenommene Glieder der Reihe (nicht Segmente, sondern Elemente) auch in deren stetigem Zusammenhange gilt. Diese Bedingung läßt aber nicht mehr die Wahl frei zwischen dem offenen und dem geschlossenen System, da im geschlossenen System die Positionsbeziehung nicht identisch ist für beliebige Paare von Elementen, sondern genau nur für maßgleiche Segmente. Schon ein Segment AB ist einem Segment $AC = AB + BC$ im zirkulären System nicht „in der Lage seiner Teile identisch", während im geraden System und nur in ihm diese Identität, überhaupt unabhängig vom Punktabstand, erfüllt ist.

Das durch diese Eigenschaft ausgezeichnete Gebilde ist damit zugleich in seiner Art einzig, nicht auf mehr als eine Art annehmbar. So aber ist es von dem Grundgebilde, auf dem überhaupt die mathematische Bestimmung irgendwelcher Art sich aufbauen soll, auch unbedingt zu fordern. Wie weit man auch die Wahlfreiheit mathematischer Definitionen ausdehnen mag, man gäbe überhaupt jede Möglichkeit einer Einheit des Objekts der mathematischen Wissenschaft, d. h., eine durchgängige Vergleichbarkeit und gesetzmäßige Vereinbarkeit der von ihr aufzustellenden Gebilde preis, wenn man auf jede letzte „notwendige", d. h. nicht so oder anders wählbare Voraussetzung verzichten würde. Diese unerläßliche letzte, für alles Mathematische als solches bedingungslos geltende Voraussetzung aber ist es eigentlich, die unter dem Namen der Zahl gesucht und verstanden wird. Möchte es also in der Geometrie, als einer besonderen mathematischen Wissenschaft, immerhin wahlfrei bleiben, ob man ihr Grundgebilde in unserem oder in Veroneses Sinn homogen annimmt, möchte die letztere Annahme wegen ihrer größeren Weite für die Geometrie sogar einen Vorzug behaupten, so ist dagegen das schlechthin ausgeschlossen, das Grundgebilde, auf dem die Zahl sich aufbauen soll, anders als einzig und darum in unserem prägnanten Sinne homogen vorauszusetzen. „Voraussetzen" bedeutet dann nicht mehr: nach Wahl annehmen, sondern die Voraussetzung hat hier den verschärften Sinn derjenigen Grundlegung, ohne welche der ganze Bau der Mathematik hinfiele, nämlich jede Möglichkeit einer einheitlichen Bestimmung ihrer Objekte aufgehoben wäre.

Freilich, hätte man den Aufschluß über die Eigenschaften der Zahl von gegebenen Dingen zu erwarten, dann müßte man am Ende auch auf solche Überraschungen gefaßt sein, wie daß man, von Eins an weiter und weiter zählend, bei dieser selben Eins, von der man ausgegangen war, endlich wieder anlangen würde. Aber, wenn nirgend sonst, so müßte an diesem Punkte klar werden, daß die letzten Gesetze, die der Erkenntnis gelten sollen, nur sie selbst sich vorschreiben kann, weil sonst aller Sinn des Erkennens, das doch vor allem Verstehen, mit sich selber eins werden bedeutet, aufgehoben würde. Die „Erfahrung", die über die Gesetze der Zahl Aufschluß geben sollte, wäre selbst nicht möglich ohne eben die Gesetze, über die sie angeblich erst entscheiden soll. Und so würde sie selbst sich in jener zirkulären Anordnung der Beweisgründe bewegen, welche die Logik den *circulus vitiosus* nennt. Ein gerader Denkgang wird das Grundgebilde alles reinen Denkens selbst nur als gerades, d. h. in sich der Art nach streng identisch aufstellen können.

Diese Bezeichnung des im erklärten Sinne homogenen Systems als „gerades" bedarf vielleicht noch einer Rechtfertigung. Mag unter Geometern der Begriff des Geraden noch streitig sein, der gemeinhin darunter verstandene Begriff ist zweifellos der jener Eigenschaft eines Systems, wonach dasselbe durch irgendwelche zwei seiner Elemente unterschiedslos eindeutig bestimmt sei. Ob diese Eigenschaft, welche wir als die der absoluten Geradheit bezeichnen wollen, dem Grundgebilde, auf dem die Raumbeziehungen mathematisch aufzubauen sind, unerläßlich beizulegen sei, ist hier noch nicht zu untersuchen; die einfache Zahlreihe aber ist, der oben gestellten Bedingung zufolge, die nichts Willkürliches einschließt, sondern rein auf die Grundrelation, welche die Zahl überhaupt nur möglich macht, sich stützt, notwendig als gerade in diesem absoluten Sinne zu setzen.

Eine andere Frage ist, ob die Forderung der Eindeutigkeit (Einzigkeit) im gleichen absoluten Sinne für die Maßbestimmung gelten müsse. Diese ist ihrem ganzen Begriff nach relativ; es wird daher auch die Forderung der Eindeutigkeit für sie nur den relativen Sinn haben dürfen, daß für eine einzige Zählung auch eine einzige letzte gemeinsame Grundlage der Maßbestimmung, d. h. eine einzige Maßeinheit gelten muß; was zur Folge hat, daß durch irgendwelche zwei Elemente auch stets ein Abstand als einziger bestimmt sein wird. Die Eigenschaft der Geradheit (im erklärten Sinne) ist für die Möglichkeit irgendwelcher Bestimmtheit des Abstandes schon Voraussetzung und als solche in ihr eingeschlossen; an sich aber ist sie die Eigenschaft der Positionsbeziehung, daher von jeder besonderen Annahme hinsichtlich des Abstandes unabhängig, und auch ihrerseits auf diesen ohne Einfluß. Wenn oben das gerade System erklärt wurde als ein solches, das durch irgendwelche zwei seiner Elemente eindeutig bestimmt sei, so kann und will dies nicht besagen, daß durch das Merkmal der Geradheit die Elemente selbst gegeben würden, sondern nur: die Art der Relation von Element zu Element, gleichgültig wie viele deren (nach metrischen Gesetzen) angesetzt werden mögen und wie, sei für das ganze System bestimmt, sobald nur zwei Elemente, und mit diesen deren Relation, gesetzt sind.

Auch das mag zu bemerken nicht überflüssig sein: diese Forderung gilt streng nur für die Reihenordnung nach der Zahl selbst; sie legt dagegen keinerlei Bedingung dem zu Zählenden auf. Das was gezählt wird, etwa Punkte der Zeit oder des Raumes, möchte in seiner Aufeinanderfolge einen Kreislauf beschreiben, die Zählung ginge dabei doch immer gleichförmig weiter. Es möchte das an n^{ter} Stelle Gezählte mit dem an 1^{ter} Stelle Gezählten identisch sein, die Stelle n der Zählung bleibt von der Stelle 1 deshalb nicht weniger verschieden. Schon darum wäre es nicht möglich, diese Eigenschaft der Zahl irgendwie auf Anschauung (Zeit oder Raum), geschweige auf Wahrnehmung an zählbaren Dingen zu gründen. Ihre Begründung kann nur rein logisch sein; ihr letzter logischer Grund aber ist kein anderer, als daß überhaupt irgendeine veränderliche (so oder anders setzbare) Bestimmung zu ihrer eigenen Möglichkeit irgendeine letzte unveränderliche, nicht anders mögliche, d. h. notwendige Voraussetzung fordert. Diese Forderung eines *Principium* der Bestimmung ist unabweisbar; und ihr genügt, für das, was hier zur Frage steht, einzig jene absolute Identität der Relationsart, die wir als Geradheit definierten.

§ 2. (*Das Kontinuum der Richtungen.*) Nachdem die Einzigkeit der Positionsbeziehung für die Grundreihe gesichert ist, fragt es sich weiter, ob und in welcher Art etwa in irgendeiner ferneren Entwicklung der Zahl eine Mannigfaltigkeit von Positionsbeziehungen doch entstehen kann. Für eine solche Weiterentwicklung ist bisher kein anderer Anhalt gegeben als in den beiden Sinnen der dennoch einzigen Grundrichtung unserer Urreihe. Wir nannten sie zueinander reziprok; sie sind es auch in der genauen Bedeutung, daß jeder die Umkehrung des andern, keiner von beiden absolut der erste ist. Zwar geht die Zählung von der Null „vorwärts", und dies Vorwärts ergibt den Plussinn; so erscheint dieser als der erste. Aber die Plusbeziehung existiert überhaupt nicht ohne die Minusbeziehung; mehr: schon in der Erklärung der Subtraktion erwies sich das Minus sogar ursprünglicher als das Plus. Durch es ist die Beziehung des Nachfolgenden zum Voraufgehenden ebensowohl ausdrückbar wie die des Voraufgehenden zum Nachfolgenden. $1 - 0$ (Stellung von Eins gegen Null) ist ein so korrekter Ausdruck für die Plusbeziehung wie $0 - 1$ (Stellung von Null gegen Eins) für die Minusbeziehung. Natürlich ist die Deutung des Zeichens an sich willkürlich; aber es besteht für sie der sachliche Grund, daß es eines Ausdrucks bedarf für die Positionsbeziehung überhaupt, der also beide Sinne zugleich umfassen muß; zu diesem Ausdruck eignet sich nach dem geltenden Zeichengebrauch das Minuszeichen, nicht das Pluszeichen, weil das erstere, als Zeichen der Subtraktion, unabhängig davon, ob der Subtrahend oder der Minuend die größere Zahl ist, eben die Stellbeziehung als solche gleichermaßen nach ihren beiden Sinnen ausdrückt. Entscheidend ist namentlich, daß man in der Arithmetik tatsächlich die Plusbeziehung aus der Minusbeziehung hervorgehen läßt, da man sagt, daß Minus mal Minus Plus ergibt; während aus der Plusbeziehung die Minusbeziehung nur durch die Minusbeziehung selbst hervorgehen kann. Der doppelten Forderung, daß 1. die Positionsbeziehung überhaupt einen Ausdruck finde, 2. nicht nur ein zweifacher Sinn dieser Beziehung, sondern zugleich die Reziprozität beider Beziehungssinne, nach welcher sie sich gegenseitig bedingen und geben, also das Hervorgehen des einen aus dem andern und zwar gleichviel, von welchem ausgegangen wird, zum Ausdruck komme, wird durch die geltende Bezeichnung entsprochen, indem erstens das nackte Minuszeichen sich zwanglos als Ausdruck der Positionsbeziehung überhaupt deuten läßt, sodann durch $-^0$ der Ausgangssinn, in der Folge der Potenzen des Minus aber ($-^0$, $-^1$, $-^2$ usf.) durch Vermehrung des Exponenten um 1 das Hervorgehen allemal des (relativen) Gegensinns aus dem vorigen als (relativem) Grundsinn bezeichnet, endlich die geraden Potenzen des Minus gleich Plus, die ungeraden gleich Minus (im absoluten Sinne) gesetzt werden. Diese Beziehungen unter den Vorzeichen gelten zugleich, so wie es gefordert ist, unabhängig von jeder Rücksicht auf die mit Vorzeichen zu versehenden Wertbeträge in allen metrischen und Stellbeziehungen; der Betrag des Produkts ergibt sich aus den Beträgen der Faktoren ohne Unterschied des Vorzeichens: $+2 \cdot +3$, $+2 \cdot -3$, $-2 \cdot +3$, $-2 \cdot -3$ geben dem Betrage nach unterschiedslos dasselbe, nämlich $2 \cdot 3 = 6$; das Vorzeichen des Produkts richtet sich allein nach den Vorzeichen der Faktoren, und zwar den obigen

Aufstellungen entsprechend so, daß, jedes Plus für zweimaliges Minus gerechnet, das Produkt positives oder negatives Vorzeichen erhält, je nachdem die Gesamtzahl der Minus in den Faktoren gerade oder ungerade ist.

Noch scheint der Ausdruck der Änderung des Beziehungssinnes durch das Produkt und daher, da die Änderung immer die gleiche ist, durch die Potenz einer Begründung bedürftig. Sie liegt darin, daß die Bedeutung der Produktbildung an sich eine allgemeinere sein muß als die der Vervielfältigung eines Wertbetrages, da man eben nicht bloß numerische Werte, sondern relative (mit Vorzeichen versehene) Zahlen multipliziert. Diese allgemeinere Bedeutung ist die: daß eine bestimmte Änderung selbst wieder einer ihr gleichsinnigen Änderung unterworfen wird. Das gewöhnliche Produkt fällt unter diesen Begriff als wiederholte Setzung wiederholter Setzungen, Zählung von Zählungen, Betrag von Beträgen. So ist, der einfachen Minussetzung gegenüber, als „Minus mal Minus" auszudrücken die Minussetzung einer Minussetzung; die zweimalige Minussetzung nicht im Sinne des „Minus plus Minus"; das wäre eine Veränderung und noch eine ihr gleiche; sondern in der Bedeutung, daß der Minus- d. h. Gegensinn selbst wieder im Minus- oder Gegensinn genommen wird, also, da einmalige Minussetzung Umkehrung des gegebenen Beziehungssinnes bedeutet, diese Umkehrung sich wiederum umkehrt, was gleichbedeutend ist mit der Rückkehr zum Grundsinn.[1])

1) Auf diesen allgemeinen Sinn der Produktbildung stützt sich z. B. H. Graßmann, indem er ihm auf die Multiplikation gerichteter Strecken Anwendung gibt (WW. I² 507; vgl. [*128*] S. 198). Er definiert im Anschluß an eine Aufstellung des älteren (J. G.) Graßmann als Produkt in allgemeiner Bedeutung „das Ergebnis einer Konstruktion, welche aus einem schon Erzeugten (Konstruierten) auf gleiche Weise hervorgeht, wie dieses Erzeugte aus dem ursprünglich Erzeugenden", oder klarer noch als „das Ergebnis einer Synthesis, bei welcher das durch eine frühere Synthesis Erzeugte an die Stelle des ursprünglichen Elementes gesetzt und wie dieses behandelt

Auf die angegebene Weise entsteht nun schon eine erste Mannigfaltigkeit von Beziehungsarten und eine Rechnung mit solchen, vorerst beschränkt auf die reine Umkehrung des jedesmaligen Beziehungssinnes. Diese führt zwar, so oft sie auch wiederholt werden mag, zu nichts Neuem, da eben alle geradzahligen Potenzen unterschiedslos den Plussinn, alle ungeraden den Minussinn zurückführen. So dürftig aber diese neue Rechnungsart an Ergebnissen zu sein scheint, prinzipiell ist sie darum nicht von geringerer Tragweite. Diese liegt darin, daß mit den beiden Grundarten der Positionsbeziehung (Null gegen Eins und Eins gegen Null, oder Minus und Plus) zugleich die Relation dieser Relationsarten (Plus zu Minus und Minus zu Plus) gegeben ist. Diese kann, indem sie von der einen Art der Relation zur andern hinüberführt, ohne weiteres auch als Änderung der Relation verstanden werden, im gleichen Sinne, wie die Folge der Werte 0, 1, 2 ... zugleich die Möglichkeit eines Überganges von Wert zu Wert oder einer Abwandlung durch die Folge dieser Werte ausdrückt. Damit aber sind wir unversehens auf das gestoßen, was wir vorher zurückgewiesen hatten, auf dem damaligen Punkte der Erwägung auch zurückweisen mußten, nämlich die zirkuläre Änderung. Es war also eine ganz richtige Tendenz, welche die Mathematiker leitete, wenn sie annahmen, daß die zirkuläre Änderung an sich nicht minder ursprünglich sei als die lineare und darum schon bei der ersten Aufstellung der Zahlreihe Berücksichtigung fordere. Man erkannte nur nicht zugleich: 1. daß die lineare Änderung schlechthin zugrunde liegt und nicht anders als im

wird". In der Multiplikation der gerichteten Strecken nun kommt zur Multiplikation der Beträge (Längen), die den gewöhnlichen Gesetzen folgt, eine Multiplikation der Positionsbeziehungen (Richtungen in der Ebene), und das erklärt in einfachster Weise (vgl. die oben zitierte Abhandlung *128*) den nichtkommutativen Charakter dieser Art der Multiplikation.

Rückblick auf sie eine zirkuläre Änderung überhaupt zu sicherem Begriff gebracht werden könnte; 2. daß die zirkuläre Änderung, als Änderung der Position, eben auch rein aus den selbständig für sich zu betrachtenden Beziehungen der Position zu begründen ist. In diesen aber hat sie in der Tat ihren schlechthin ursprünglichen Grund, nämlich in der Reziprozität der beiden Beziehungssinne, die mit diesen selbst ursprünglich und unaufheblich gesetzt ist; d. h. jenem Umstand, daß zugleich mit der Beziehung des Folgenden zum Voraufgehenden nicht bloß die des Voraufgehenden zum Folgenden, sondern auch die Beziehung dieser beiden Beziehungen existiert, welche als die Beziehung der Reziprozität oder des wechselseitigen Hervorgehens der einen aus der anderen, oder deren Umkehrbarkeit, unmittelbar die zirkuläre Änderung bedeutet.

Dann aber muß es sofort auch als logisch unbefriedigend empfunden werden, daß diese neue Art der Änderung durchaus nur unstetig, sprungweise sollte geschehen können. So aber stellte sie bis dahin sich dar; denn von der Grundreihe in die Gegenreihe und umgekehrt würde, wenn die bisherige Betrachtung der Positionsbeziehungen erschöpfend wäre, kein stetiger Übergang stattfinden. Es ist nämlich ein bloßer Schein, daß man vom Plus zum Minus durch die Null in der stetigen Zahlreihe kontinuierlich überginge. Eine Kontinuität liegt zwar vor, aber sie betrifft einzig die Werte. Diese ändern sich stetig von irgendeinem Punkte der Reihe zu irgendeinem andern, und diese Kontinuität wird durch die Null nicht unterbrochen, sondern für die Reihe der Plus- und Minuswerte als Ganzes gerade hergestellt. Die Plusbeziehung dagegen bleibt für alle Werte > 0, die Minusbeziehung für alle Werte < 0 in sich ungeändert; in der Null selbst findet keine von beiden Beziehungen statt; „Null gegen Null" kann nicht etwa ebensowohl als Plus- wie Minusbeziehung aufgefaßt werden, sondern in Wahrheit besteht kein Grund, eine von beiden Beziehungen hier anzusetzen. Die Schreibung ± 0 hat nur den verständlichen Sinn, daß die Null zugleich die untere Grenze der Plus- und die obere der Minuswerte darstellt, nicht aber, daß in diesem Grenzpunkt die Gegensätze, als deren Begriff man sonst angab, daß sie in der Vereinigung einander vernichten, friedlich zusammenbeständen. Zwar haben wir diesen Sinn des Gegensatzes des Plus und Minus überhaupt verworfen und betont, daß beide Beziehungssinne vielmehr stets zusammengehen; aber dadurch ist es nicht weniger ausgeschlossen, daß sie jemals begrifflich koinzidieren sollten. Daraus, daß es kein Rechts gibt ohne ein Links und kein Links ohne ein Rechts, folgt nicht, daß je ein Rechts sein eigenes Links, ein Links sein eigenes Rechts sein könnte. Also wird durch die Null nicht eine Kontinuität der Plus- und Minusbeziehung hergestellt, sondern gerade die Diskontinuität des Überganges vom einen zum andern Beziehungssinne kommt darin zum scharfen Ausdruck, daß der Null als solcher in der relativen Zahlreihe mit logischem Recht weder die Plusbeziehung noch die Minusbeziehung zugeschrieben werden kann, aus dem einfachen Grunde, weil sie selbst das Fundament dieser doppelsinnigen Beziehung, das worauf zu beziehen, und nicht ein Bezogenes bedeutet.

Ist demnach in der stetigen Reihe der relativen Zahlen der Übergang von der Plusbeziehung zur Minusbeziehung selbst und umgekehrt nur durch einen Sprung möglich, so weist eben diese Unstetigkeit, je unwidersprechlicher sie vorliegt, um so zwingender auf die Notwendigkeit hin, die hier fehlende Kontinuität durch eine neue Schöpfung des Denkens herzustellen. Der Gedanke selbst vollzieht doch den Übergang stetig. Er wendet den Grundsinn in den Gegensinn und umgekehrt und beschreibt diese Wendung kontinuierlich, gleichsam als Drehung, die sich ohne weiteres auch als kontinuierliche Winkeländerung verstehen läßt. In der Tat ist mit der Relation der Relationen Plus und Minus der Begriff des Winkels schon verhüllt eingeführt: ein neuer Abstand, eine Größe der Verschiedenheit der Beziehungsart ist damit gesetzt; ein Abstand, der bisher zwar nur 1 oder 0 sein, aber doch aus 0 1, aus 1 0 soll werden können. In diesem „Werden“ liegt aber schon unabweisbar die Notwendigkeit, auch die Zwischenwerte zwischen den Werten 0 und 1 des Beziehungsunterschieds in Gedanken zu setzen. Kontinuität ist ein so ursprüngliches, unverbrüchliches Gesetz des Denkens, daß überhaupt irgendwelche Diskretion sich nur als Diskretion eines Kontinuums will denken lassen. Also gibt es für das reine Denken das Kontinuum der Beziehungssinne oder Richtungen ebenso wie das Kontinuum der Werte. Und da die Zahl ursprünglich Richtung hat, so fordert auch an ihr diese neue Kontinuität ihren gesetzmäßigen Ausdruck. Dieser Ausdruck ist in der Arithmetik wohlbekannt; es ist: die komplexe Zahl.

§ 3. (*Aus der Geschichte der komplexen Zahl.*) Es ist nach dem Gesagten nicht ein bloßes, zufällig sich einstellendes Bedürfnis der Rechnung, welches eine Mehrheit von Zählrichtungen, d. h., in unserer Zeichensprache ausgedrückt, andere als ganzzahlige Potenzen des Minus fordert. Sondern das Auftreten dieses Bedürfnisses in der folgerichtigen Entwicklung der Rechnung ist selbst das sichere Symptom einer insgeheim wirkenden Gesetzlichkeit des reinen Denkens, die über die ursprünglich einzig gerichtete Zahlreihe hinausdrängt. Es ist aber bekannt, wie hartnäckig die Mathematik sich wohl zwei Jahrhunderte hindurch gesträubt hat, diesem tiefen Zuge des Denkens bis zu vorbehaltloser Anerkennung nicht sowohl seiner wissenschaftlichen als seiner logischen Berechtigung nachzugeben. Die Geschichte des Imaginären [1]) ist eines der denkwürdigsten Zeugnisse für

1) S. z. B. Durège [*42*], Einleitung. Gauß, WW. II, 109, 171 ff.

die siegende Kraft des Logischen in der Mathematik, zugleich aber für die oft zu einem harten Rigorismus sich steigernde formal-logische Gewissenhaftigkeit derselben, die selbst einer so ursprünglich notwendigen, darum auch wie mit Naturgewalt sich Bahn brechenden Neuschöpfung wie der der komplexen Zahl das Heimatrecht im Reiche der mathematischen Begriffe so lange bestritt, als eben ihre logische Zulänglichkeit nicht überzeugend dargetan werden konnte. Die Rechnung mit dem Imaginären entstand schon im Laufe des 17. Jahrhunderts, aber sie galt langehin als eine Rechnung mit dem Unmöglichen; blieb das Imaginäre im Ergebnis stehen, so bedeutete das die Unlösbarkeit der Aufgabe, die Absurdität des Geforderten (so z. B. Montucla). Aber so hartnäckig, wie man ihm das Existenzrecht absprach, behauptete es sich in dieser so bestrittenen Existenz selbst. Nur zögernd verstand man sich dazu, einzugestehen, daß in ihm doch wohl noch eine andere Bedeutung schlummern müsse als die einer zur Vereinfachung gewisser Rechnungen zwar nützlichen, in sich aber sinnlosen Fiktion. Auch die schon früh (zuerst 1693 durch Wallis) gemachte Beobachtung, daß durch die komplexe Zahl die Punkte der Ebene eine ebenso streng gesetzmäßige Darstellung finden wie durch die reelle die Punkte der Geraden, brachte das Bedenken gegen ihre logische Zulässigkeit nicht zum Schweigen. Entscheidender wirkte die Erkenntnis, daß allgemein eine Rechnung mit verschiedenen Einheiten (komplexen Zahlen im weiten Sinne) möglich ist und sinnvoll sein kann. Diesem allgemeineren Begriffe ließ sich nunmehr die Rechnung mit dem Imaginären, nämlich der imaginären in Verbindung mit der reellen Einheit, einfach unterordnen. Freilich die Gleichsetzung des Quadrates der imaginären Einheit mit dem negativen Wert der reellen erschien gerade nun als gewissermaßen zufällig, als nur eine von unendlichen, willkürlich wählbaren Annahmen, die vor anderen keinen weiteren Vorzug habe als jene erstaunliche

Fruchtbarkeit an weittragenden Ergebnissen, für die es bis dahin keine rechte Erklärung gab. Aber wenigstens das Bürgerrecht im Reiche der mathematischen Begriffe konnte dem Imaginären nicht länger vorenthalten bleiben. Schon erklärt Durège die Existenz des Imaginären für hinreichend gesichert durch ihre widerspruchslose Definition; nach den Anwendungen, so wichtig sie sein möchten, habe die reine Mathematik als solche nicht zu fragen; denn ihre durch eindeutige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe begründen in ihrer Definition selbst ihre Existenz; ihre Sätze sind wahr, gleichviel ob sich von ihnen eine Anwendung machen läßt oder nicht. Das ist nun merkwürdig: vordem blieb dem Imaginären die Anerkennung einzig deshalb versagt, weil es in seinem Begriff einen offenen Widerspruch einschließe. Eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergäbe, existiere eben nicht; denn es gebe der Position nach nur positive und negative Zahlen, welche beide, in gerade Potenz erhoben, positive, nie negative Zahlen ergeben. Einzig um der Fruchtbarkeit der Anwendungen willen hatte man die Rechnung mit dem Imaginären dennoch zugelassen, aber stets mit dem ausdrücklichen oder stillschweigenden Vorbehalt, daß man es nur ja nicht für eine rechtschaffene Zahl ansehen dürfe statt für ein Symbol unbekannten Sinnes, mit dem nur merkwürdigerweise sich rechnen und richtige und bedeutsame Resultate herausbringen ließen.

Vielleicht ist es nicht zum wenigsten gerade dieser merkwürdige Erfolg einer Rechnung mit einem bisher unbegriffenen, ja für absurd geltenden Symbol gewesen, der so viele Mathematiker noch bis in die jüngste Zeit verführt hat, zu glauben, daß man am Ende besser tue, auf einen angebbaren logischen Sinn der ersten Voraussetzungen, mit denen die Mathematik arbeitet, zu verzichten und sich mit der Widerspruchslosigkeit der Ableitungen zufrieden zu geben; Zahl einfach zu nennen, womit sich rechnen und Resultate gewinnen lassen, auch wenn für das so Benannte selbst eine sichere Bedeutung nicht angebbar ist. Diesen schroffen Formalismus vertrat auch in dieser Frage wieder in typischer Weise ihrerzeit die Arithmetik von Stolz. Sie dekretierte einfach: da die Gleichung $x^2 = -1$ eine reelle Wurzel nicht hat, so verschafft man ihr Auflösungen durch eine neue „Erweiterung des Zahlsystems". Diese wird an keine andere Bedingung gebunden, als daß für die neuen „Zahlen" dieselben Rechnungsregeln wie für die bisherigen geltend bleiben müssen. Also der reinen Mathematik wurde eine absolute Machtvollkommenheit zugetraut, Zahlen nach Bedarf zu schaffen; sie zu schaffen geradezu aus dem Nichts; denn das Bedürfnis der Verallgemeinerung der Rechnungsregeln ist doch nicht eine Materie, aus der sich etwas schaffen ließe. Daneben wurde dann in „synthetischer" Erwägung eigentlich nur historisch bemerkt, daß, seit man die geometrische Bedeutung der komplexen Zahl kenne, man sich mehr und mehr zur Anerkennung ihrer Zulässigkeit verstanden und die logischen Bedenken zum Schweigen gebracht habe. Irgendein Bedürfnis, zwischen der arithmetischen Definition und der geometrischen Deutung des Imaginären einen logischen Zusammenhang herzustellen, wurde nicht empfunden.

Dagegen zeichnet auch in dieser Frage Hankel sich dadurch aus, daß er diesen fehlenden Zusammenhang doch wenigstens vermißt. Gerade bei ihm läßt sich erkennen, daß besonders Graßmanns große Durchführung der Rechnung mit Größen zu beliebig vielen Einheiten (seine „Ausdehnungslehre"), zumal in Verbindung mit der dem Prinzip nach nahe verwandten Quaternionenrechnung Hamiltons, das volle Zutrauen in die logische Angängigkeit der komplexen Zahlen bei den Mathematikern hervorgebracht hat. Bei Graßmann und Hamilton kommt aber auch schon zu deutlichem Ausspruch, daß durch die Rechnung mit dem

Komplexen die tiefe Kluft, die zwischen Arithmetik und Geometrie bis dahin bestand, überbrückt wird. Die Geometrie wird bei Graßmann geradezu zum bloßen Spezialfall oder „Beispiel" einer Mathematik, die rein in Rechnung besteht, aber auch über die gewöhnliche Arithmetik und Algebra sich erhebt und diese gleicherweise nur als Spezialfälle unter sich begreift. Im Grunde ist die beiden Wissenschaften sich überordnende „Ausdehnungslehre" nichts als die Erweiterung der Zahl selbst, als stetigen Gebildes, zugleich auf unbeschränkt viele Dimensionen. Und zwar ist es deutlich eben die Forderung der Stetigkeit, mit der ihr eng verschwisterten der Homogeneïtät, welche den Übergang in die höheren Dimensionen zugleich fordert und möglich macht; wiewohl selbst Graßmann darüber nichts Genaueres angibt, wie eigentlich dieser Übergang sich auch als im logischen Sinne stetiger vollzieht. Gerade die Hinaushebung der Ausdehnungslehre auch über die Zahl (indem diese im gewöhnlichen Sinne, daher streng eindimensional verstanden wird) hat es wohl verschuldet, daß die Dimensionsbetrachtung, so unbeschränkt sie bei Graßmann durchgeführt wird, doch nicht aus den eigenen Begriffen der Arithmetik hervorwachsend, sondern willkürlich in sie hineingetragen erscheint. Und daraus hauptsächlich erklärt es sich wohl, weshalb Graßmann lange Zeit bei den Mathematikern so gut wie unbeachtet bleiben konnte, von neueren Mathematikern aber, die sein Verdienst voll würdigen, selbst jedoch auf dem formalistischen Standpunkte starr verharren (wie Whitehead), als Gesinnungsgenosse begrüßt werden konnte, während er sich doch ausdrücklich und mit ganzer Entschiedenheit auf den „genetischen" Standpunkt stellt, das Ausgehen von einem „unmittelbaren Anfang", einem eigentlich Platonischen ἀνυπόθετον, die ursprüngliche, streng stetige „Erzeugung" der mathematischen Gebilde fordert, über deren Eigenschaften daher auch gar nicht anders entschieden werden könne, als wenn man „auf ihre ursprüngliche Erzeugung zurückgeht".[1])

Hankel nimmt, wie gesagt, auf Graßmann bereits Bezug. Auch scheint ein innerer Zusammenhang zwischen der arithmetischen und geometrischen Bedeutung der komplexen Zahl ihm schon bestimmter als seinen Vorgängern vor Augen zu stehen. Nur gilt dieser Zusammenhang auch ihm noch als ein verborgener, geheimnisvoller. Die Imaginärzahl ist ihm ein eigenes, „im Geiste gesetztes", „mentales Objekt", das zunächst in sich etwas ist, an sich unabhängig davon, wie es etwa im Gebiete der Anschauung oder des Realen zur Erscheinung kommt. Doch liegt, sagt er, in der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen „ein dem formalen Schema . . . zwar dem Begriff nach nicht unbedingt wesentliches, aber doch vollkommen adäquates Phänomen im Raume, in der Anschauungsform des zusammenfassenden Denkens" vor, die „sich mit psychologischer Notwendigkeit allen unseren abstrakten Vorstellungen als konkretes Abbild beigesellt". An dieser Ausdrucksweise ist merkwürdig, daß die Anschauung nur als eine besondere Art des Denkens, das in ihr „Konkrete", ganz Platonisch, als bloßes Abbild, also die rein begriffliche Denkgestalt, der sie sich nur „beigesellt", als das Urbild angesehen wird. Aber um so unbefriedigender ist es, daß eine notwendige innere Beziehung des anschaulichen Abbildes zum gedanklichen Urbild dennoch nicht aufgezeigt wird. So ist es begreiflich, daß auch Hankel schließlich nicht über die Klage hinauskommt, daß die Metaphysik des Imaginären noch immer sehr im argen liege. Nicht nach einer Metaphysik war zu fragen, so wenig wie nach einer Psychologie, sondern nach schlichter Logik. Das Imaginäre, auch der Zusammenhang zwischen seinem anschaulichen Abbild und dem begrifflichen Urbild, muß sich rein logisch bewältigen lassen,

1) S. [*128*], bes. S. 181, 185.

wenn doch die Form der Anschauung selbst nur eine solche des „zusammenfassenden Denkens“ ist.

Dieser Zusammenhang ist es, den unsere obige Betrachtung anbahnen wollte. Seiner Entdeckung war immerhin schon von vielen Seiten vorgearbeitet. Stellt die reelle Zahl die gerade Linie bloß ihrer Länge nach dar — so heißt es schon bei Durège — so die komplexe auch der Richtung nach. Daß hier ein logischer Zusammenhang obwalten muß, konnte nicht lange mehr verborgen bleiben. Wie freilich ein Ausdruck, der rein aus dem Gebiete der Zahl stammt: die Anwendung des rein arithmetischen Verfahrens der (geradzahligen) Radizierung auf die negative Einheit, die einer solchen ihrem Begriff nach ganz unfähig scheint, dazu kommt, den bisher für bloß geometrisch geltenden Begriff der Richtung zu vertreten, das blieb immer noch Geheimnis.

Nahezu erreicht ist die Lösung, soviel ich sehe, zuerst von O. Schmitz-Dumont (Naturphilosophie, 1895). Er trennt von Anfang an (so wie wir) von der rein quantitativen (d. h. metrischen) Betrachtung — in der allein die Quadratwurzel oder mittlere Proportionale unmittelbar eine Bedeutung hat, aber dann auch nur die numerischen Werte angeht — die „qualitative“ Betrachtung, wie wir sagen: der Zählungsrichtung. Für das Verhältnis des Plus und Minus nun glaubt er die rein logische Erklärung zu finden in dem Aristotelischen Begriff des Totalgegensatzes (τελείωϲ ἐναντίον), der seinerseits wiederum mit Quantitätsbegriffen an sich nichts zu schaffen habe. Bloß als Krücke der Anschauung, um einen Träger für die Denktätigkeit zu haben, an dem diese haften könne, wie die Kräfte an den Stoffen in der physikalischen Betrachtung, setze man statt des abstrakten Verhältnisses von Plus und Minus das Verhältnis $(+1):(-1)$, oder in der Umkehrung $(-1):(+1)$. Diesen unter sich äquivalenten Ausdrücken steht dann folgerecht als Ausdruck der Richtungsidentität gegenüber das Verhältnis Plus zu Plus oder Minus zu Minus, also, wenn man auch hier die Krücke der Anschauung zu Hilfe nimmt: $(+1):(+1)$ oder $(-1):(-1)$. Zwischen der reinen Identität aber und dem vollen, aufhebenden Gegensatze liege der vollkommen denkbare Fall, daß zwei Setzungen sich nicht vollständig, sondern nach einem Grade des Mehr und Minder aufheben. Denn Gegensatz und Gradreihe widersprechen sich nicht, seien als denkende Setzungen nicht heterogen in jeder Hinsicht, da sie durch Tätigkeit desselben, in seiner Grundform sich stets gleich bleibenden Denkaktes entstehen. Also habe man das Recht, zwischen $\frac{-1}{-1}$ oder $(-1)^0$ und $\frac{-1}{+1}$ oder $(-1)^1$ die mittlere Proportionale $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ zu setzen; womit dann die imaginäre Einheit begründet ist. Die geometrische Darstellung ergibt sich nun von selbst, und zwar nicht als bloße Anwendung auf ein ohnedies Gegebenes, sondern so, daß der Begriff des zweidimensionalen Kontinuums durch den des Richtungs-Kontinuums, welches in der komplexen Zahl seinen sachentsprechenden arithmetischen Ausdruck gefunden hat, erst gegeben wird.

Hierin liegt in der Tat das wahre Prinzip zur Entscheidung der Frage. Im übrigen ist die Ableitung, so wie sie bei Schmitz-Dumont vorliegt, nach mehreren Seiten unbefriedigend. Man sieht nicht, wie der rein logische Begriff des Mittleren zwischen den Gegensätzen dazu kommt, als mittlere Proportionale ausgedrückt zu werden. Und wenn Schmitz-Dumont mit größtem Recht die Richtungsbetrachtung von der metrischen zunächst trennt, so wird dagegen nicht klar verständlich, wie beide hernach wieder zusammenkommen; man sieht nicht, wie eine Gleichung $i^2 = -1$ begründet sei, kurz wie „das“ Imaginäre zur Imaginärzahl wird. Die verschiedenen Richtungen müssen Richtungen der Größensetzung, Richtungen der Zählung, und als solche aus der Natur der Zahl selbst verständlich sein. Das ist es, was bei Schmitz-Dumont vielleicht wohl geahnt, aber jedenfalls zu voller Klarheit nicht gebracht ist. Dies ist aber zugleich die Voraussetzung, um die Richtungsbetrachtung, wie es doch auch Schmitz-Dumont anstrebt, mit der Dimensionsbetrachtung in überzeugende Verbindung zu setzen. Dimensionen sind, als „Abmessungen", eben Zählungen. So wird durchweg der Rückweg von der bloß logischen zur mathematischen Betrachtung bei Schmitz-Dumont nicht gefunden oder doch nicht klargestellt. Und das läßt es begreiflich erscheinen, daß die Mathematiker an dieser anscheinend bloß logischen Aus- oder Umdeutung arithmetischer Begriffe achtlos vorübergingen. Man sah nicht, was für das Verständnis der Zahl da herausspringen solle. Gewiß muß logische Erwägung in dieser so sehr logischen Frage entscheiden, aber nur eine solche, die aus dem Schoße der mathematischen, der arithmetischen Begriffe, die selbst rein logische Schöpfungen sind, homogen hervorgeht, nicht aus einem der Arithmetik an sich fremden Gebiete des Logischen in sie hineingetragen erscheint.

Der Ausgang von dem Aristotelischen Begriff des Gegensatzes ist in der Tat bestenfalls eine Verhüllung, aus der der reine Sachgehalt erst herauszuschälen ist. Wie schon die negative Zahl nicht richtig gedeutet wird durch den Begriff entgegengesetzter als in der Vereinigung einander vernichtender Dinge; wie man schon hier in dem Gegensatz des Plus und Minus den ganz positiven Sinn der Gegenseitigkeit bloßer Beziehungen, den Sinn des Gegenverhältnisses nicht erkannt hat, so konnte erst recht in der Erklärung der komplexen Zahl das Ausgehen vom Gegensatz im Sinne der Aufhebung zu Null (als dem vermeinten arithmetischen Nichts) nur in die Irre leiten. Vielmehr war die Aristotelische, absolut verstandene Kontrarietät erst selbst zu relativieren zum Richtungsgegensatz (Plus-Minus-Verhältnis), welche Relativierung übrigens der Sache nach schon Kant in der wenig beachteten, bedeutenden Schrift von den negativen Größen (1763) vollzogen hat. Im Richtungsgegensatz aber verbirgt sich als die wahre Wurzel der gesuchten Mannigfaltigkeit der Position die zirkuläre Änderung. Der Sache nach schwebt diese auch Schmitz-Dumont vor; auf die zyklische Funktion wird geradezu hingewiesen (S. 113 u. 140). Aber es kommt bei ihm wenigstens nicht zur Klarkeit über ihre Stelle im System der logischen Grundbegriffe und daher über die Art ihrer Verbindung mit den übrigen für die Begründung der Arithmetik erforderlichen Urbegriffen des reinen Denkens; man versteht nicht, wie die Zahl selbst der zirkulären Änderung fähig sein soll.

§ 4. (*Endgültige Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl.*) Verstehen läßt es sich in der Tat wohl, daß man ernstes Bedenken trug, die Begriffe Dimension und Richtung mit dem Begriff der Zahl in eine so unmittelbare Verbindung zu setzen, wie wir es fordern. Hat doch selbst Graßmann nicht gewagt, sie geradezu der Zahl als Merkmale beizulegen; beide bleiben auch bei ihm im Grunde nur Eigenschaften des Zählbaren, für die in der „Ausdehnungsgröße" nur das geeignete Mittel methodischer Behandlung geschaffen werden sollte. Wie dagegen aus dem eigenen Begriff der Zahl Dimension und Richtung folge, das zu zeigen nimmt auch er keinen Anlauf. Aber eben darum haftet seiner Ausdehnungsgröße ein kaum überwindlicher Schein des Willkürlichen, künstlich Zurechtgemachten an.

Die Zahl als bloßer Ausdruck des Mehr und Weniger scheint ein lineares Gebilde sein und bleiben zu müssen und also, mit einer Mehrheit von Dimensionen, auch eine Mehrheit von Richtungen auszuschließen. Das ist es, was allen Bedenken gegen die komplexen Zahlen von jeher offen oder versteckt zugrunde lag und bis heute zugrunde liegt.

Zwar fällt auch jeder Schatten von logischem Widerspruch sofort weg, wenn man verschiedene, aber unter sich verknüpfte Zählungen einmal zuläßt. Nur für eine einzige

Zählung muß auch die Nullbeziehung einzig sein; diese Bedingung gilt dagegen nicht mehr, sobald eine Mehrheit unter sich verknüpfter Zählungen angenommen werden darf. Aber diese Annahme selbst erscheint zunächst logisch nicht gerechtfertigt, sondern allenfalls nur willkürlich setzbar. So erklärt Whitehead: das Symbol $(-1)^{\frac{1}{2}}$ sei an sich als Zahl sinnlos. Daß algebraische Operationen mit diesem sinnlosen Symbol sich ausführen lassen und zu Sätzen führen, die für Zahlen gelten, sucht er dadurch verständlich zu machen, daß die Operationen der Algebra über die Zahl (als ein besonderes Gebilde) hinausreichen. Ihre Gesetze, obgleich durch die Arithmetik ursprünglich dargeboten, hängen doch an sich nicht von ihr ab, sondern — wovon? Von der Übereinkunft! Nur, da es doch ursprünglich Regeln der Arithmetik waren, so bleiben die arithmetisch deutbaren Ergebnisse algebraischer Entwicklungen immer richtig. Aber daß der bloßen Übereinkunft ein Kraft innewohne, durch arithmetisch absurde Vermittelungen arithmetisch sinnvolle Ergebnisse zutage zu fördern, will nicht einleuchten. So ist es in der Tat auch nicht. $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ist allerdings keine „Zahl", wenn man sich einmal darauf festgelegt hat, „Zahl" nur ein einzelnes Glied einer einzelnen Zählung zu nennen. Sobald man dagegen anerkennt, daß aus systematischer Verknüpfung verschiedener Zählungen Zahlausdrücke hervorgehen können, welche nicht Glieder isolierter Zählungen, sondern Beziehungen unter verschiedenen, doch gesetzmäßig verknüpften Zählungen bedeuten, wird der Streit, ob man solche als arithmetische Begriffe anerkennen soll oder nicht, zum unnützen Wortstreit; die Gültigkeit eines durch die komplexe Zahl erhaltenen Ergebnisses für reelle Zahlen ist dann um nichts rätselhafter, als daß ein geometrischer Beweis, der auf n Dimensionen Bezug nimmt, eine Aussage im Bezug auf $n - 1$ Dimensionen begründen kann.

Dies setzt freilich die Zulässigkeit mehrfacher Zählung schon voraus. Nun liegt es nahe genug, darauf hinzuweisen, daß die sogenannten Erweiterungen der Zahl sämtlich auf der Einführung verschiedener aber verknüpfter Zählungen beruhen, wie schon Hamilton (in der Vorrede seiner Vorlesungen) bemerkt hat. Und zwar bietet sich zur nächsten Vergleichung die relative Zahl an, in der die Zählung 0, 1, 2... zweimal auftritt, unterschieden durch das Vorzeichen, verknüpft im gemeinsamen Ausgangswert 0; verknüpft aber durch die, nicht aus irgendwelcher Willkür angenommene, sondern mit der ursprünglich die Zahl erzeugenden Grundrelation von 0 zu 1 oder 1 zu 0 zugleich gegebene Beziehung dieser beiden Beziehungsweisen (des Plus und Minus), gemäß welcher die eine die Umkehrung der anderen oder ihren Gegensinn darstellt. Durch diese so ursprünglich begründete Verknüpfung wird die relative Zahlreihe, obgleich sie von einer Seite als Verknüpfung zweier Zählungen erschien, zu einem fortan unteilbar einheitlichen Gebilde. So erwiesen auch die gegeneinander inkommensurabelen Zählungen, die sich zunächst als verschiedene, obgleich streng gesetzmäßig verknüpfbar, darstellten, sich in letzter Betrachtung, nachdem der tiefere Grund dieses Unterschieds und dieser Verknüpfbarkeit erkannt war, als nicht bloß hinterher vereinbar, sondern wurzeleins und in der einen, stetigen Zahlreihe notwendig zusammenhängend. So muß denn wohl auch die komplexe Zahl, so sehr ihr zunächst der Schein eines willkürlichen Kompositum anhaftet, in einer letzten Betrachtung sich als wesentlich einiges Gebilde, im Ursprung aller Zahlsetzung von Haus aus begründet, erweisen. Irgendein Hinweis auf die Tatsache, daß mehr Dimensionen und Richtungen des Zählbaren, z. B. räumlicher Beziehungen vorkommen und einen Ausdruck in der Zahl verlangen, kann hier schlechterdings nichts ausrichten; sondern die Entscheidung muß streng in den eigenen Gesetzen der Zahl gefunden werden. Da aber haben wir sie dem Prinzip nach bereits gefunden.

Zur Darstellung mehrdimensionaler Beziehungen, nachdem solche anderweitig gegeben sind, würde die gewöhnlich verstandene, eindimensionale Zahl zur Not hinreichen; obwohl genau betrachtet nur deshalb, weil schon die schlichte Operation des Multiplizierens ein Analogon von Mehrdimensionalität einschließt. Nämlich es läßt sich schon die allein auf die Werte bezogene multiplikative Entwicklung der Zahl zum Ausdruck mehrdimensionaler Beziehungen des Gezählten gebrauchen, wie es schon den Pythagoreern geläufig war. Aber es sind immer nur die Werte, die so zum Ausdruck gebracht werden, nicht die Dimensionsbeziehungen selbst. Wertbeträge mehrdimensionaler Gebilde werden aus den in jeder einzelnen Dimension gemessenen hergeleitet auf Grund voraus gegebener Beziehungen unter den Dimensionen, von denen die gewöhnliche Multiplikation an sich nichts weiß. Es erfolgt also auf diese Weise die Entwicklung in die Dimensionen nicht durch die Zahl.

Nun aber haben wir einen Sinn der Multiplikation kennen gelernt, der unmittelbar die Mehrheit der Dimensionen, und zwar sofort in voller Allgemeinheit einführt. In der multiplikativen Entwicklung der relativen Zahl ist, wie sich gezeigt hat, die Überschreitung der einzigen Dimension der Zahl dem Grundsatz nach schon vollzogen und faktisch in Gebrauch genommen; daher denn auch das Imaginäre sich unabweislich ergibt, sobald die multiplikativen Beziehungen der relativen Zahlen folgerecht weiterentwickelt werden. Das Vorzeichen setzt eben schon die Richtung, und zwar sofort eine Zweiheit von Beziehungsrichtungen und einen möglichen Austausch unter diesen. Damit ist die Eindimensionalität grundsätzlich überschritten, so daß für eine folgerechte Weiterentwicklung der Zahlbeziehungen schon kein anderer Weg übrig bleibt als, die Mehrdimensionalität allgemein zur Voraussetzung zu erheben.

Die bloße Wertbetrachtung war auf mehr Dimensionen, wie gesagt, nur anwendbar, wenn diese anderweitig gegeben waren. Auch aus der bloßen Reihenfolge, solange diese einseitig als Sonderung verstanden wird (indem zwar die Verbindbarkeit überhaupt festgehalten, aber nach irgendeiner unterschiedlichen Art der Verbindung nicht gefragt wird) würde eine Mehrheit von Dimensionen nicht folgen. Und denkt man sich auch eine Reihenfolge wiederum solcher Reihenfolgen (selbst unendlicher, was sich als zulässig erwies), und Reihenfolgen dritter, vierter, *n*ter Stufe, doch käme man nicht aus der einzigen Dimension heraus, sondern nur zu den Cantorschen oder Veroneseschen Unendlichen. Dagegen mit der Multiplikation als Relation der Relation, sofern diese auf die Positionsbeziehung, zunächst ganz abgesehen von Wertbeziehungen, sich erstreckt, tritt sofort die mehrdimensionale Betrachtung in ihr volles Recht.

Nicht nur Wertbeträge haben, auf Grund des Mehr und Weniger, gegeneinander eine Lagebeziehung, sondern Lagebeziehungen selbst haben untereinander eine Lagebeziehung. Damit ist unmittelbar die Positionsbetrachtung selbst zur zweiten Dimension erhoben. Die Potenz, als Potenz der Lageänderung, ist unmittelbar ihrem Begriff nach die Dimension.

Die Einzigkeit unserer Urreihe bleibt dabei übrigens unangetastet. Sie gerade ist gefordert als Vergleichsgrundlage für jede über eine Dimension hinausgehende Positionsbeziehung. Die Urreihe wird damit zur Nullreihe, im Sinne des festen Ausgangs für die Positionsbetrachtung. Eben als solche mußte sie absolut eindeutig konstruiert werden, damit dann die ganze, nunmehr unbeschränkte Mannigfaltigkeit der Positionsbeziehungen auf ihr sich aufbauen könne. Nämlich auch die ungeänderte Lage wird, im Hinblick auf die nun als möglich erkannte Änderung, zum Lageverhältnis, dem Verhältnis einer gegebenen Lage zu sich selbst, welche als nullte Potenz der Grundänderung der Lage folgerecht ausgedrückt wird. Die „gerade" Reihe positiven Vorzeichens wird mit anderen Worten zur Reihe vom Winkel 0, während die gerade reelle, d. i. positiv-negative Reihe dem gestreckten Winkel oder dem Winkel 1, nämlich der Fundamentaländerung der Positionsbeziehung, von Plus in Minus oder umgekehrt, entspricht. Die Übertragung der Einheitsstrecke aus dem Plus- in den Minussinn drückt sich dann folgerecht aus als Änderung des (-1) von der nullten zur ersten Potenz. Dann entspricht $(-1)^{\frac{1}{2}}$ der Halbierung des gestreckten Winkels, also der Normale, die beliebigen gebrochenen Potenzen von (-1) der beliebigen Winkelteilung zwischen 0 und 1, wobei die n verschiedenen Werte der $n$ten Einheitswurzel in bekannter Weise ihre (wie man sagt) „geometrische" Deutung finden.

Eine rein mathematische Ausführung in diesem Sinne, auf Grund einer Erweiterung der goniometrischen Funktionen, welche diesen statt des Winkels $\frac{1}{2}\pi$ den beliebigen Winkel $\frac{1}{n}\pi$ zugrunde legt, woraus zugleich eine entsprechende Erweiterung der Hamiltonschen Quaternionen folgt, findet man in einer Arbeit von Unverzagt (*174*, 1876; vgl. auch Drobisch, *38*^{a}, 1848). Besonders auch darin entspricht diese Darlegung ganz unseren eben entwickelten Voraussetzungen, daß sich die Längenbeziehung bei ungeänderter Beziehungsrichtung als bloßer Sonderfall der goniometrischen, nämlich für den Winkel 0, ergibt. Mit Recht sieht Unverzagt in der so begründeten Rechnungsart, die nur der konsequente Ausbau der von Möbius, Hamilton und Graßmann angebahnten ist, eine der möglichen Erfüllungen der Leibnizschen Forderung einer Analysis, welche die Lagebeziehungen in gleicher Weise wie die Größenbeziehungen und auf gleicher Linie mit diesen zu behandeln gestatte (*Analysis situs*); welche Forderung ebenso für die Entdeckung der projektivischen Geometrie durch Poncelet, für Riemanns Gebietsrechnung und für Graßmanns Ausdehnungslehre wegweisend gewesen ist. Bei diesen allen erwies sich die Positionsbetrachtung fundamentaler und daher umfassender als die bloße Wertbetrachtung; so wie die komplexe Zahl die gewöhnliche zugleich umfaßt. Die Zahl existiert eben nicht ohne die Richtung, und nur so lange erscheint die in Abstraktion von der Richtung betrachtete Zahl einfacher, als man unterläßt, die Positionsbeziehung in vollem Umfang in Betracht zu ziehen; während jeder Ausdruck der letzteren durch die erstere 1. nicht ohne gewisse Minimalvoraussetzungen aus dem Gebiete der Position (zum wenigsten das Verhältnis von Plus und Minus) möglich ist, 2. notwendig komplizierter und weniger direkt ausfällt als ein solcher, der die Positionsbeziehung von Anfang an auf gleicher Linie mit der auf die bloße Extension erstreckten Maßbeziehung, daher direkt und ihrem vollen Umfange nach ins Auge faßt. Vor allem behält jede Art der Zurückführung der Lage- auf Wertbeziehungen unvermeidlich in den Voraussetzungen etwas Willkürliches, was dagegen ganz wegfällt, sobald die Lagebeziehung in gleichberechtigter Stellung mit der Wertbeziehung vom ersten Anfang an berücksichtigt wird. Die Vergleichung irgendeiner Cartesianischen Behandlung der Richtungen in Verbindung mit den Längen mit der Streckenrechnung von Möbius, Graßmann, Hamilton oder Unverzagt läßt den Unterschied sofort in die Augen fallen. Freilich mußten die Zahlbeziehungen im engeren Bereich bis zu einem gewissen Punkte entwickelt sein, ehe sie diese umfassendere Bedeutung frei entfalten konnten. Man braucht die ganzen Zahlen, selbst um die Potenzen, auch als Potenzen der Richtung, ausdrücken zu können. Der Richtungsunterschied hat selbst einen Betrag; es gibt gleiche, also auch doppelte usw. Änderungen der Richtung, die sich als solche notwendig durch Zahlbeträge ausdrücken. Dagegen ist die Richtungsverschiedenheit auf keine Weise aus irgendeiner bloßen Verschiedenheit von Größenbeträgen konstruierbar, vielmehr jede Änderung der

Größenbeziehung unterliegt von Anfang an zugleich der Richtungsbeziehung; nur wird zur größtmöglichen Vereinfachung die Richtungsbeziehung zunächst ohne andere Änderung als die einfachste (von Plus in Minus und umgekehrt) angenommen und läßt so in den Rechnungen ihre umfassendere Bedeutung nicht sofort erkennen. Diese müßte in logisch-radikaler Betrachtung auch schon in der gewöhnlichen Zahl irgendwie mit zum Ausdruck gebracht werden. So geschieht es in der Tat auf die angegebene Weise bei Unverzagt; und so geschah es auch schon bei Graßmann, indem die Zahlgröße zur Ausdehnungsgröße nullter Stufe (ebenso wie als diskrete zum bloßen Quotienten stetiger Größen) wurde; womit der Sache nach gesagt ist, daß die Ausdehnungsgröße als stetige n-dimensionale Zahl der gewöhnlichen (diskreten eindimensionalen) Zahl (d. h. Menge von Einheiten) sich logisch überordnet und sie als Sonderfall einschließt. Durch diese Überordnung aber stellt nun die Einheit des Systems sich erst vollständig her. Es kann sich der Schein nicht länger behaupten, als sei diese durch die Zulassung von mehr Dimensionen durchbrochen und der Weg willkürlicher Erweiterungen beschritten, den ein logisch-genetischer Aufbau der Zahl streng meiden muß. Die eindimensionale Zahl vielmehr bliebe der Position nach unstetig; also mangelte gerade ihr die wesentliche logische Einheit, welche unbedingt Kontinuität erfordert.

§ 5. (*Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung.*) Nur eines bedarf hier noch der weiteren Aufhellung, nämlich das innere Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung untereinander. Ich glaubte in meinen ersten auf diese Frage bezüglichen Untersuchungen (*127*, *128*) unbedenklich die Mannigfaltigkeit der Dimensionen erst durch die der Richtungen einführen zu können. Hiergegen wurde von mehreren Seiten eingewendet: es leuchte nicht ein, mit welchem Recht überhaupt aus der Grundreihe hinausgegangen werde. Zumal wenn die Grundreihe von vornherein die Zahlreihe sein (die Zahl vor den Richtungen und Dimensionen für sich feststehen) sollte, so war in der Tat diese Berechtigung nicht gegeben. Zählen (durfte man einwenden) heißt in eine Reihe ordnen, also gibt es insoweit nichts außer der einen Reihe. Diesem Bedenken suchte ich dann (*130*, *133*[1]) dadurch zu begegnen, daß ich die Mehrdimensionalität der Zahl unabhängig von der Richtungsbetrachtung einführte auf Grund der Erwägung, daß ja unsere Grundreihe nicht ein Ding, sondern ein reines Verfahren bedeute. Daher lasse sich diese Reihe nicht bloß einmal, sondern beliebig vielfach setzen; es lassen sich Reihen solcher Reihen bilden, jede für sich von gleichem Aufbau wie die ursprüngliche, alle aber verbunden durch ein System von Beziehungen, in jeder Hinsicht entsprechend dem der Einzelglieder der Grundreihe; nicht also als gleichartige Fortsetzung derselben Reihe, sondern in neuer Funktion, indem die Glieder der Reihe jetzt weder Einzelglieder noch irgendwie begrenzte Reihen solcher, sondern ganze, unendliche Reihen, ebenso wie die Grundreihe, sein sollen. Es ließen sich dann auch wiederum Reihen solcher Reihen von Reihen bilden, und so unbeschränkt weiter. So ergaben sich die Dimensionen — scheinbar — vor den Richtungen, und zwar sofort unendliche; und damit schien die vorher vermißte Grundlage für eine Mannigfaltigkeit auch der Richtungen gewonnen. Nämlich es ließ sich nunmehr leicht zeigen, daß es in sämtlichen, der Voraussetzung nach durchaus identisch konstruierten Reihen z. B. ein Glied 0, ein Glied 1 usf. gab, also, wenn man die einander entsprechenden Glieder der verschiedenen Reihen durch Indices unterschied, Reihen:

$$0_0 \quad 1_0 \quad 2_0 \ldots$$
$$0_1 \quad 1_1 \quad 2_1 \ldots$$
$$0_2 \quad 1_2 \quad 2_2 \ldots$$

usf.

Es bildeten aber dann z. B. die Nullglieder sämtlicher Reihen (o_0 o_1 o_2 . . .) auch unter sich eine Reihe, welche mit der Grundreihe das Glied o_0 gemein hat. Und zwar bildeten die Nullglieder eine gerade Reihe; denn da die übrigens in jeder Hinsicht identisch konstruierten Reihen auch in derselben, nicht bloß von Glied zu Glied gleichen, sondern zugleich schlechthin einfachen Art der Relation zueinander geordnet sein sollten, wie die Glieder der Grundreihe, so konnte in der Tat auch zwischen den identischen Gliedern sämtlicher Reihen (z. B. den Nullgliedern) nur dieselbe einfache, immer identische Relationsart (die als Geradheit schon definiert war) stattfinden. Diese Reihe hatte sofort auch für sich einen Plus- und Minussinn; es fragte sich nur noch, wie dieser sich zum Plus- und Minussinn der Grundreihe verhalten müsse. Die Frage entschied sich mit Notwendigkeit dahin, daß beide sich zu beiden (im Grundfall) gleich verhalten, d. h. die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Grundreihe durch die Querreihe, ebenso die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Querreihe durch die Grundreihe halbiert gedacht werden mußte. Für diese, immerhin nicht unmittelbar einleuchtende und schwer als unerläßlich zu beweisende Annahme sah ich den entscheidenden prinzipiellen Grund darin, daß hier wie stets in genetischer Ableitung der Fall der Gleichheit zugrunde zu legen sei. Eine ungleiche Beziehung nämlich würde, wenn keine Unbestimmtheiten bleiben sollen, anderweitige Bestimmungsstücke fordern, was der genetische Aufbau verbietet. Gilt aber die Voraussetzung, so ist durch eine so konstruierte Querreihe (z. B. die der Nullglieder sämtlicher Reihen) die Senkrechte dargestellt; man hat also zunächst die Normalrichtung, die der gewöhnlichen Imaginärzahl $(-1)^{\frac{1}{2}}$ entspricht. Es machte dann keine besondere Schwierigkeit mehr, die Winkelgröße allgemein, in zwei Dimensionen zunächst, ferner aber, da die einmal eingeführte Dimensionsbetrachtung ohne weiteres für eine beliebige Zahl von Dimensionen zureicht, auch für beliebige Dimensionen einzuführen.

Diese Deduktion scheitert schwerlich an dem Einwand von Max Simon[1]) (dem die obige Darstellung implicite schon begegnet ist), daß man auf die angegebene Art die Cantorschen transfiniten Zahlen, aber nicht die qualitative Verschiedenheit der Richtungen in der Ebene oder die komplexen Zahlen erhalte. Es war doch Voraussetzung, daß der ursprünglichen Reihe alle Werte angehören, die in der gleichen Relation (Nullbeziehung) überhaupt setzbar sind. Für die Cantorschen Transfiniten aber gilt dieselbe Art der Nullbeziehung, und zwar als Beziehung auf eine und dieselbe, soweit überhaupt einzige Null der Urreihe; sie gehören also, wofern sie überhaupt angenommen werden, notwendig derselben, ursprünglich einzigen Reihe an. Wird nun diese Reihe wiederholt gesetzt und unter den so gesetzten Reihen eine neue Beziehung angenommen, so ergibt sich nicht eine Fortsetzung der ursprünglichen Reihe in ein Transfinites nur höherer Ordnung, sondern, wenn überhaupt etwas, dann notwendig der Überschritt in eine neue Dimension.

Aber allerdings wird die Überschreitbarkeit der ursprünglichen, als einzig angenommenen Richtung der Zählung überhaupt hierbei stillschweigend schon vorausgesetzt, und das ist es wohl, was der Einwand wesentlich besagen wollte. So berührt sich dieser Einwand nahe mit dem, welchen Jonas Cohn (*28*, S. 212 ff.) gegen Russells der meinigen nahestehende wenn nicht äquivalente Einführung der Dimensionen[2]) erhebt. Russell machte nämlich die Bemerkung, die auch mir zu meiner Aufstellung den Anstoß gegeben hatte, daß in Graßmanns Darstellung der Dimensionen durch die komplexen Zahlen beliebiger Ordnung die

1) Zeitschr. f. Math. u. math. Unterricht, XXXIII, S. 125.
2) [*154*] Ch. 44, §§ 351 ff.

Verschiedenheit der Einheiten und damit die Mehrheit der Dimensionen nicht wirklich abgeleitet, sondern ohne Begründung eingeführt wird. Aus den Gesetzen der bloßen Zahl scheint sie überhaupt nicht abgeleitet werden zu können, da eine derartige qualitative Unterscheidbarkeit der Einheiten (so sagt Cohn) „unter den Voraussetzungen der Arithmetik nicht vorkommt“. Russell glaubte nun diese Lücke zu schließen durch eine Konstruktion ähnlich der oben angegebenen, von mir zuerst 1901 vorgetragenen, nämlich durch Bildung von Reihen zweiter, dritter, *n*ter Ordnung, d. h. Reihen von Reihen (oder Beziehungen von Beziehungen), Reihen wieder solcher Reihen, und so unbeschränkt weiter. Auch Russell denkt indessen nicht daran, die so entstehenden Systeme als reine Entwicklungen der Zahl anzusehen. Sie gehen nicht hervor durch eine Erweiterung von Zahlbeziehungen auf *n* Dimensionen, sondern geben, wie er sagt, dieser Erweiterung (d. h. den komplexen Zahlen) wo nicht den „Ursprung“, doch den „Seinsgrund“ [1]); d. h. man bildet die Systeme komplexer Zahlen, um die Elemente der *n* dimensionalen Mannigfaltigkeit dadurch darstellbar zu machen, nachdem diese unabhängig von der Zahl — nämlich, wie Russell meint, rein logisch und nicht arithmetisch — begründet sind.[2]) Insofern wird Russell wohl nicht getroffen durch den Einwand Cohns [3]), daß die Möglichkeit von mehr Dimensionen bedingt sei durch eine inhaltliche Verschiedenheit von Gegenständen, die aus rein arithmetischen Bestimmungen nicht zu schöpfen sei; denn die reine Arithmetik schließe durch ihre Voraussetzungen eine solche Verschiedenheit gerade aus. „Wenn also Russell glaubt, mehrdimensionale Systeme arithmetisch erzeugt zu haben, so irrt er.“ Nach dem Gesagten scheint

1) Couturat [*31*] S. 145.
2) Russell a. a. O., Couturat S. 141, 145.
3) a. a. O. S. 215.

es nicht, daß dies der Glaube Russells überhaupt gewesen sei. Dagegen war es allerdings mein Glaube, unmittelbar durch die Zahl selbst, nämlich als komplexe, die Mehrheit der Dimensionen einzuführen. Somit ist meine Aufstellung von der Russells prinzipiell verschieden. Aber gerade so scheint eher sie als die Russells dem Einwande Cohns ausgesetzt, der dem Kern der Sache nach offenbar auf das alte Bedenken zurückkommt, daß die Zahl als solche überhaupt nur von einer Dimension, daher aus sich einer Erweiterung auf mehr Dimensionen unfähig sei.

Aber darauf ist oben die Antwort schon gegeben worden; und in wiederholter, gründlicher Erörterung der Frage auch in unserem philosophischen Seminar sind wir auf dieselbe Antwort immer zurückgekommen: die Überschreitung der einzigen Dimension ist damit gegeben, daß schon in der ursprünglichen Zahlreihe nicht bloß ein Unterschied der Beziehungsart, sondern auch eine neue Beziehungsart dieser Beziehungsarten, also eben eine Relation von Relationen, d. h. aber, das Fundament einer zweidimensionalen, überhaupt mehrdimensionalen Betrachtung eingeschlossen liegt. Nur das bleibt zu entscheiden, ob diese Überschreitung ursprünglich durch die Positionsbeziehung selbst, d. h., wie schon oben ausgesprochen wurde, durch die direkte Einführung der Winkelgröße in die Zahl, oder durch die von verschiedenen Einheiten zu geschehen habe. Welche von beiden Betrachtungen man auch zum Ausgang wählt, in jedem Fall muß hernach die andere hinzutreten, und es lassen sich an sich gleichgut unter Voraussetzung des Winkels die Reihen von Reihen begründen, wie jener unter Voraussetzung dieser; faktisch sind in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaft beide Betrachtungsarten hervorgetreten und auch sofort miteinander verbunden worden. Nach wiederholter Überlegung aber will es mir scheinen, daß die erstere Betrachtungsart die fundamentale, meine ursprüngliche Ableitung also in sich wohlbegründet gewesen ist, obgleich ich die zureichende Begründung damals nicht finden konnte und deshalb zunächst den anderen Weg glaubte wählen zu sollen. Die Reihen von Reihen nämlich verlangen für die neue Anordnung (die der Reihen selbst) schon eine neue Richtung, wie auch immer deren Beziehung zur Richtung der Urreihe angenommen wird. Also kann man nicht die Richtungsverschiedenheit überhaupt durch die Reihen von Reihen (d. h. die ausgeführte Dimensionsbetrachtung) erst einführen wollen. Dagegen werden umgekehrt durch die neuen Richtungen unmittelbar auch neue Reihen, mithin Reihen von Reihen hergestellt; denn die Richtungen sind Richtungen der Zahl; eben für sie steht das Verfahren des Zählens, wie es zunächst als eindimensionales aufgestellt wurde, fortan zu unbeschränkter Wiederholung bereit, nachdem sich erwiesen hat, daß die Richtungen überhaupt nicht durch den an sich etwa von ihnen unabhängig vollziehbaren Aufbau der Zahl bedingt, sondern vielmehr für diesen ihrerseits bedingend sind. In diesem bestimmteren Sinne behält mein früheres Argument: daß die Zahlreihe nicht ein Ding, sondern ein Verfahren bedeute und darum nicht bloß für ein einziges Mal, sondern zu beliebig wiederholter Anwendung zu Gebote stehe, volle Geltung und findet gerade in der eben angegebenen Verbindung mit der Richtungsbetrachtung uneingeschränkte und einwandfreie Anwendung. Schon die ursprüngliche Zahlreihe wird, wie schon gesagt, durch die Doppelheit des Beziehungssinns zur zweifachen Zählung; es ist also die Einzigkeit der Zählung schon durch die relative Zahl überschritten, ganz im Einklang mit unserer Behauptung, daß durch die Richtungsbetrachtung unmittelbar die Mehrheit der Zählungen, also auch der Einheiten herbeigeführt werde. Der ferneren Erweiterung der Richtungsbetrachtung muß daher auch die Erweiterung der Zählung, mithin der Einheiten, und damit die Dimensionsbetrachtung, unweigerlich folgen.

§ 6. (*Abschließende Betrachtungen über die Dimensionen der Zahl.*) Hiermit ist die prinzipielle Frage entschieden. In welcher genauen Gestalt dann die weitere Konstruktion ausgeführt wird, ob durch die zirkuläre Änderung oder durch ein Quadratnetz (worauf die obige Darstellung hinauskam), ist nicht von der gleichen prinzipiellen Wichtigkeit. Auf die erstere Art erhält man, zunächst vom Nullpunkt der ursprünglichen Reihe ausgehend, die Mannigfaltigkeit der durch diesen Punkt gehenden Strahlen, also das Strahlenbüschel. Dieses reicht aus, die Punkte zunächst der Ebene zu geben; in entsprechender Weise lassen sich aber auch die Punkte im drei- oder n-dimensionalen System, immer von demselben, einzigen Nullpunkt aus, hervorgehend denken. Aber auch eine Konstruktionsart wie durch ein Quadratnetz läßt sich aus unseren Voraussetzungen unschwer begründen. Denn da ganz die gleichen Konstruktionen von jedem Gliede der Ausgangsreihe aus (indem man es zum Null-Punkt wählt) möglich sind, so steht es ohne weiteres auch frei, die ganze Grundreihe in irgendeiner denkbaren Richtung, z. B. der senkrechten (der übrigens ein absoluter Vorzug nicht zukommt), auch stetig transformiert zu denken, also die Ebene (wie man gewöhnlich sagt) durch geradlinige Fortbewegung der Geraden (sowie diese durch Bewegung des Punktes unter Festhaltung einer einzigen Richtung) sich erzeugen zu lassen, und auf entsprechende Weise dann weiter jedes System von n Dimensionen aus dem von $n - 1$ Dimensionen. Es scheint, daß Graßmann (A^1, § 16) eine solche Erzeugungsweise im Sinne gehabt hat, da er 1. aufs stärkste betont, daß alle durch verschiedene „Grundänderungen" (Richtungen) erzeugten Gebilde „nicht als anderweitig schon gegebene aufgefaßt werden dürfen, sondern als ursprünglich erzeugt", und da er 2. das so entstandene System zweiter Stufe ganz als Ebene beschreibt, welche dadurch erzeugt gedacht werden soll, daß „alle Punkte einer Geraden nach einer neuen, nicht in ihr enthaltenen Richtung (oder der entgegengesetzten) sich fortbewegen", so daß die Ebene als Gesamtheit der Parallelen erscheint, welche eine gegebene Gerade durchschneiden, aber, da sie selbst sich nicht schneiden und auch die ursprüngliche Gerade nicht noch ein zweites Mal treffen, durchweg verschiedene Punkte ergeben. Ebenso gelangt er dann zum Raum durch Bewegung der Ebene nach einer neuen, nicht in ihr liegenden Richtung oder der dieser entgegengesetzten. Immerhin erscheint diese geometrische Ableitung bei Graßmann bloß als Beispiel einer allgemeineren, die er im Sinne hat, aber in keiner Weise entwickelt, so daß man auf das Gemeinte eben nur aus diesem „Beispiel" zurückschließen kann. Auch fällt auf, daß im weiteren Aufbau seines Systems von der Voraussetzung einer solchen Erzeugungsweise seiner Elemente gar kein Gebrauch gemacht, besonders die gewöhnliche komplexe Zahl $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ für sie nicht benutzt, sondern nur als merkwürdige, sehr beweisende Analogie zu seinen n dimensionalen Zahlen erwähnt und als auf der Mitte zwischen der gewöhnlichen Zahl und der Ausdehnungsgröße stehend bezeichnet wird (A^2, Vorr. S. VI), indem sie aus zwei Einheiten $\left(1 \text{ und } i = \sqrt{-1}\right)$ ebenso durch reelle Zahlkoeffizienten dargestellt werde, wie die extensive Größe aus zwei oder mehr Einheiten. Es wäre nur konsequent gewesen, die Ausdehnungsgröße überhaupt als Erweiterung der komplexen Zahl von zwei auf n Dimensionen zu begründen; wobei es übrigens nicht notwendig war, gerade an der Voraussetzung $i = \sqrt{-1}$ festzuhalten; denn an sich hat, wie gesagt, die Zweiteilung der fundamentalen Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus keinen unbedingten Vorzug vor irgendeiner anderen Teilung. Nur die bequemste Form des Komplexen ist die auf diese besondere Voraussetzung gegründete; und hinreichend zur Darstellung von Zahlbeziehungen beliebiger Dimension ist sie wie jede andere. Ihr Gebrauch entspricht in jeder Beziehung dem der rechtwinkligen Koordinaten in der Cartesischen Geometrie und andererseits der Begründung der goniometrischen Funktionen auf die Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, welche beiden Darstellungsweisen der Ebene und beziehungsweise des Winkels in ihr eingeschlossen sind und durch sie eigentlich erst ihre Begründung erhalten.

„Interessant ist es noch zu bemerken", sagt Graßmann (A¹, § 79), „wie bei der rein geometrischen Betrachtung wie auch in der abstrakten Wissenschaft die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und daß somit diejenige Betrachtung, in welcher alles räumlich auseinandertritt, sich räumlich entfaltet, als die der Raumlehre eigentümliche und für sie als die einfachste erscheint, während, wenn ihre Gebilde ineinander liegen, dann auch alles noch verhüllt erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine räumliche Bedeutung gewinnt, wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem räumlich Entfalteten." Das gilt auch, wenn man, wie es der Sache nach in der Tat gemeint ist, für die räumliche Bestimmung die *n* dimensionale, für die lineare die eindimensionale Zahlbeziehung setzt. Allgemein ist das Komplexe wissenschaftlich das Einfachere; das vermeintlich Einfache beruht auf Abstraktionen, welche die Beziehungen, von denen abgesehen wird, wirklich nicht aufheben können, sondern nur willkürlich außer Betracht lassen. Das aber kann nie ohne Schaden an der inneren Konsequenz der Entwicklung gelingen, da man auf eben die Beziehungen, von denen man absehen wollte, hernach in den besonderen Problemen doch immer wieder stoßen muß und sich dann genötigt sieht, die künstlich gesetzte Schranke der Betrachtung wieder zu überschreiten. Es bewährt sich durchweg auch hier das früher Gesagte: die Erweiterung eines Begriffs, der eine fundamentale Geltung beansprucht, kann nur dann rechtmäßig sein, wenn der Begriff zuvor zu eng gefaßt war. Nicht die weitere Fassung ist dann logisch bedenklich, sondern im tieferen Sinne des Logischen träfe das Bedenken die engere Fassung, von der ausgegangen wurde. Gleichwohl hat diese die sachliche Berechtigung, daß die Betrachtung analysierend vorgehen, daher von vielen an sich vorhandenen Beziehungen vorerst absehen muß, auch um die methodischen Mittel bereitzustellen, die zur gedanklichen Beherrschung der vorerst beiseite gesetzten Beziehungen gebraucht werden.

Will man nicht unsere Ableitung anerkennen, und vermag man auch nicht eine andere, ihr gleichartige, nämlich ebenso rein logische Ableitung zu geben, so bleibt freilich nichts übrig, als, mit J. Cohn, die Mehrheit der Dimensionen auf „irgendwelche" Verschiedenheiten der „Gegenstände" zu gründen; ein Weg, der uns nach unseren allgemeinen Voraussetzungen gänzlich abgeschnitten ist; denn wir haben keine Gegenstände, nämlich dem Denken sind keine gegeben, ehe sie durch Denken geschaffen sind. Auch nicht mit irgendeinem „Minimum von Denkfremdheit" kann unsere Logik sich abfinden, ausgenommen dies Minimum sei gleich Null. Das Denkfremde wäre eben auch nicht denkmöglich; es darf für das Denken gar nicht existieren, es wäre denn im Sinne des Problems, das aber selbst als Problem dann schon in den Prozeß des Denkens eingespannt wäre und schließlich, wenn auch vielleicht erst nach hartnäckiger Gegenwehr, sich ihm ergeben müßte. Übrigens ist zu sagen, daß bisher niemand die Verschiedenheiten der Gegenstände, die den Begriff der Dimensionen geben sollten, unabhängig von der Voraussetzung der Dimensionen anzugeben vermocht hat. Natürlich sind es die Dimensionen des Raumes, die man im Sinne hat. Aber 1. um die Dimensionen des Raumes denken zu können, muß man schon die Dimensionen überhaupt denken können; 2. ist auch der Raum kein gegebener Gegenstand. Er ist weder als drei-, noch als zwei- oder eindimensionales System gegeben, sondern er ist in jedem Fall, auch als der Raum der Empfindungen, konstruiert.[1]) Für diese Konstruktion aber bestehen keine anderen Möglichkeiten, als die im sachlichen Sinn einer Ordnung, einer Konstruktion einer Mannigfaltigkeit gemäß einer durchgängig einheitlichen Gesetzesordnung überhaupt begründet sind und also rein logisch sich müssen entwickeln lassen. Diese Entwicklung selbst war hier noch nicht unsere Aufgabe; aber die reinen Denkmittel zu ihr haben wir bereitgestellt. Mit der Einführung 1. der Stetigkeit und 2. der Mannigfaltigkeit der Dimensionen und Richtungen in die Zahl, d. h. in die allgemeine und allumfassende Gesetzlichkeit der Ordnungs- und Maßbestimmung, ist eben diese und damit das gesamte mathematische Verfahren zubereitet für die gedankliche Bewältigung der Probleme der Raumordnung und ebenso der Zeitordnung — soweit wenigstens sie nicht das Problem der Existenz miteinschließen, das Einzige, was mit bloß mathematischen Mitteln nicht zu zwingen ist.

Im Grunde ist es dies Letzte, was man im Sinne hat, indem man sich der ausschließend logischen Ableitung der Dimensionen und Richtungen (wie auch schon der Stetigkeit) widersetzt. Das eben verrät die Berufung auf Gegenstände, die als denkfremde dennoch dem Denken gegeben werden sollen. Aber Existenz ist selbst ein nur komplexeres Problem des Denkens. Nichts anderes besagt die Berufung auf „Anschauung", selbst wenn sie als reine verstanden, aber doch vom reinen Denken geschieden wird. In dem, was man Anschauung nennt, wirken im Grunde die sämtlichen reinen Denkfunktionen nur in unaufgelöster Verflechtung zusammen. Es ist daher die Berufung auf sie nicht überhaupt ungegründet; in der Anschauung ist das reine Denken allein konkret. Und es ist gerade die Kontinuität des Denkens, es ist die Wurzelung aller seiner Sondergestalten in der Einheit des unendlichen Ursprungs, was die Anschauung antezipiert. Aber sie antezipiert sie bloß, sie

1) Vgl. Poincaré, Wiss. u. Hyp., II, Kap. 4 (S. 53 ff.).

enthält sie nur als Problem, das allein durch reines Denken seine Auflösung finden kann. Insofern also ist die Berufung auf die Anschauung in der Logik schlechthin unzulässig, als sie eine Umgehung der eigentlichsten Aufgabe der Logik bedeutet, die darin besteht, das Konkrete der „Anschauung" selbst durch strenge, bis zur Wurzel dringende Analyse in die reinen Denkbestimmungen, die in ihr verflochten sind, auseinanderzulegen. Anschauung kann dem Denken nichts „geben", sie kann selbst nur durch Denken „gegeben", d. h. bestimmt werden. So vor allem in der Mathematik.

Doch ist es eben das Problem vom Verhältnis von Anschauung und Denken, dem wir näher zu treten im Begriff stehen und zu dessen völliger Auflösung wir vorzudringen hoffen, indem wir jetzt unsere Frage auf Zeit und Raum unmittelbar richten.

Sechstes Kapitel.

Zeit und Raum als mathematische Gebilde.

§ 1. (*Zeit und Raum bei Aristoteles, Plato und Kant. Das Problem von Anschauung und Denken.*) In den bisherigen Aufstellungen wurde von „Anschauung“ ohne Zweifel vielfach Gebrauch gemacht. Aber wir haben uns dabei streng an die Bedingung gehalten, die von den großen Mathematikern stillschweigend immer anerkannt und befolgt worden ist, und die von Veronese auch bestimmt formuliert wird: von der Anschauung nur den Ausgang zu nehmen, mehr nicht als das Problem aus ihr zu schöpfen, die Aufstellung der Begriffe und Entwicklung der Gesetze der Mathematik aber rein durch Denken zu vollziehen; auf das bloße Zeugnis der Anschauung nichts, sei es in die Definitionen oder in die Beweise, einfließen zu lassen.

Aber eben damit sind wir auch im Bereiche bloßer Denkgebilde verblieben. Ein solches ist, so wie sie in den vorigen Kapiteln sich darstellte, die Zahl in allen ihren Gestaltungen, einschließend auch Richtung und Dimension. Mit der Zeit dagegen und dem Raume treten wir, so scheint es, in eine andere Gattung von Erkenntnisgrundlagen hinüber, in welcher, nach fast allgemeiner Annahme, das Denken nicht mehr allein zu gebieten hat, sondern seine Herrschaft teilen muß mit einem anderen Erkenntnisfaktor, dem zum wenigsten ein „Minimum von Denkfremdheit“ anhafte, jenem, der seit Kant den Namen „Anschauung“ führt, werde diese nun verstanden als reine oder geradezu als empirische. Brauchte bis dahin von der Anschauung und ihrem Verhältnis zum Denken nur in einigen vorgreifenden Nebenbemerkungen gesprochen zu werden, so wird es an dieser Stelle unerläßlich, eine endgültige Klarstellung dieser für Philosophie und Mathematik gleich wichtigen, aber in beiden auch gleich sehr umstrittenen Unterscheidung anzustreben.

Bei Aristoteles nehmen Ort und Zeit eine bedeutende Stelle in der begrifflichen Grundlegung zur allgemeinen Naturwissenschaft ein; im System seiner Kategorien erscheinen sie unter den Benennungen des Wo und Wann. Indessen die Aristotelischen Grundprinzipien der Naturwissenschaft wie auch seine Kategorien sind nicht „reine Verstandesbegriffe“ im Sinne Kants, sondern Abstraktionen (obgleich letzte Abstraktionen) von den Dingen, und zwar den Sinnendingen. Das bestätigt gerade die Aufnahme des Wo und Wann unter die Kategorien, wenn man sich der Rolle erinnert, die beiden in der Aristotelischen Physik angewiesen wird. Reine Verstandesbegriffe im strengen Sinne sind dagegen die Ideen Platos. Aber Plato trennt von diesen mindestens den Raum und weist ihm — der Sache nach aber auch der Zeit — eine eigenartige, zuletzt freilich ihm selbst problematisch bleibende Zwischenstellung zwischen den Ideen und den Sinnendingen an. Darin verrät sich die Einsicht, daß gerade diese Erkenntnisgrundlagen von einer besonderen Beschaffenheit sind. Plato bezeichnet den Raum als Gegenstand eines unechten, eines Pseudodenkens, das uns glauben macht, was immer ist, müsse irgendwo, an einem Orte sein; während für Plato feststeht, daß das echteste Sein, das der Ideen, an diese Bedingung nicht gebunden, sondern ortlos wie auch zeitfrei sei. Daß aber der Raum eine Bedingung sein soll für das Denken der Existenz eben des Sinnlichen, d. h. aber, für die Darstellung der Ideen im Sinnlichen, nämlich ein System bloßer Stellen, welche die Ideen gleichsam durchwandern; daß also der Sache nach schon bei ihm der

Raum eine „Bedingung möglicher" — als Wissenschaft möglicher — „Erfahrung" ist, wird in einer Reihe tiefer Wendungen deutlich; und daß der Zeit eine dieser ganz ähnliche und eng verbundene Rolle zufallen soll, ist ebenfalls nicht zu verkennen. Nahe genug hätte es nun gelegen, beide eben darum den Ideen zuzurechnen, wie es der Sache nach wenigstens im „Parmenides" auch geschieht. Doch entschied sich Plato, wie es scheint, gerade in letzter Erwägung (im „Timäus"), dem Raume jene eigentümliche Sonderstellung anzuweisen, wobei er mit der allen großen Denkern eigenen Ehrlichkeit die nicht überwundene, vielleicht überhaupt nicht überwindliche Dunkelheit dieser Sonderstellung sich und seinen Lesern offen eingesteht.

Es scheint nicht, daß Kant sich an dies Platonische Eingeständnis erinnert hat, als auch er sich entschloß, Zeit und Raum aus der Reihe der reinen Grundbegriffe des „Verstandes", denen namentlich die Wolffische Schule sie beigerechnet hatte, auszuschließen und sie, viel entschiedener als Plato, auf die Seite der Sinnlichkeit zu rücken; während er ihnen zugleich doch für diese eine Gesetzesbedeutung zuerkannte, die sie unentrinnbar den reinen Verstandesbegriffen wieder nähert. Geradezu als „Gesetze" der Sinnlichkeit werden Zeit und Raum bezeichnet in der Dissertation von 1770; später, in der Kritik der reinen Vernunft, überhaupt in den Schriften der kritischen Periode, ist dieser Ausdruck, wie es scheint, absichtlich vermieden; gerade damit Zeit und Raum nur ja nicht als Verstandesgesetze, wenngleich für die Sinnlichkeit, erscheinen.

Indessen verkennt doch Kant nicht, daß Zeit und Raum bloße „Verhältnisvorstellungen" sind. „Reine" Anschauungen heißen sie ihm nicht in der Bedeutung von etwas Angeschautem, Daten der Anschauung, sondern vielmehr als Weisen des Anschauens. Bestimmter werden sie beschrieben als Weisen, wie das Mannigfaltige der Erscheinungen „in gewissen Verhältnissen geordnet werden kann". Dies und nur dies besagt der viel mißverstandene Terminus „Form der Anschauung". Zeit und Raum stellen dar: die Form, d. h. die gesetzmäßig bestimmte Art der Ordnung, gemäß welcher alles Mannigfaltige der Erscheinungen in den Verhältnissen des Nach- und Nebeneinander „angeschaut", d. h. konkret vorgestellt wird. Hierbei ist das Ordnen selbst Leistung des synthetischen Denkens. Nicht also die Tätigkeit des Ordnens bedeutet die Zeit- und Raumanschauung. Aber doch drücken beide nur aus eine bestimmte Weise, in der diese Ordnung sich uns allein vollziehen kann; eine gewisse „Bedingung" also, an die die ordnende Tätigkeit des synthetischen Denkens an dem Mannigfaltigen der Sinnlichkeit gebunden ist. So vermag Kant den Charakter des Apriori, d. h. der Allgemeinheit und Notwendigkeit, kurz den Gesetzescharakter der zeiträumlichen Vorstellung festzuhalten, obgleich es nicht Gesetze reinen Denkens sein sollen, die in ihr sich ausdrücken.

Unvermeidlich aber mußte sie damit nun doch mit der in sich streng einheitlichen Gesetzlichkeit des reinen Denkens in eine sehr enge Verbindung treten. Diese kommt denn auch in den weiteren Aufstellungen Kants (in der transzendentalen Analytik) immer deutlicher zutage, bis hart an die Grenze der förmlichen Zurücknahme der anfänglichen Festsetzungen.

Zeit und Raum sind nach Kant nicht gegebene, von uns angeschaute „Mannigfaltigkeiten" oder auch Ordnungen wohl gar sinnlicher Dinge. Als Gesetzlichkeiten einer von uns erst zu vollziehenden, nicht vorgefundenen Ordnung eines Mannigfaltigen der Sinne überhaupt aber müssen sie offenbar der Zahl, die auch eine Gesetzlichkeit der Ordnung, und zwar dieses selben Mannigfaltigen der Sinne darstellt, nahe verwandt sein; um so mehr, da Kant auch für die Zahl nicht das reine Denken allein verantwortlich macht, sondern gleichfalls „Anschauung" als „Bedingung" heranzieht. Der reine Verstandesbegriff, dessen

Funktion die Zahl eigentlich nur entwickelt, nämlich der der Größe, bedarf — so heißt es schon in der Dissertation — zu seiner *actuatio in concreto* der Anschauung.

Und wer wollte leugnen, daß diese beiden: Zahl und zeit-räumliche Vorstellung, sich innerlichst nahestehen? Schon für Aristoteles war wenigstens die Zeit mit der Zahl aufs engste verknüpft; beide vereinten sich unter dem gemeinsamen Begriff der Reihenfolge, des Vor und Nach (πρότερον καὶ ὕστερον), also der Ordnung. Im „Nacheinander" liegt deutlich beides: der Begriff des Einen und Anderen und die Ordnungsbeziehung, d. h. eben die Momente, auf denen das Grundwesen der Zahl beruht. Die Zeit, scheint es, ist geradezu Zahl; nach Aristoteles die „Zahl der Bewegung", d. h. allgemein der Veränderung; aber wir wissen ja, daß auch die Bewegung, auch die Veränderung der reinen Zahl nicht überhaupt fremd ist; eben als Ausdruck der Größe bedeutet sie schon die „Veränderliche". Wie also sollte die Zeit sich der Methode der Zahl entziehen können? Daß aber vom Raume ein gleiches gilt, müßte, wenn es sonst zweifelhaft wäre, durch die Erörterungen unseres letzten Kapitels klar geworden sein. Wenn selbst Richtung und Dimension den Gesetzen der Zahl nicht bloß nachträglich sich fügen müssen, sondern geradezu aus ihnen logisch hervorgehen, was kann dann die Gesetzlichkeit des Raumes anders sein als eine bestimmte Seite eben der Gesetzlichkeit der Ordnungsbeziehung überhaupt, die wir als den letzten Sinn der Zahl und damit des Mathematischen überhaupt erkannten?

Nach den herkömmlichen Begriffen freilich müßte Kant wohl einer solchen Auffassung weltenfern stehen, da man ihm zutraut, mit seiner „reinen Anschauung" des Raumes und der Zeit einen schlechthin denkfremden Faktor, etwas wie einen blinden Vorstellungszwang einführen zu wollen, dem selbst das reine Denken in der Mathematik des Raumes und der Zeit und vollends in der Naturerkenntnis sich fügen müsse. Nun aber sind ihm Zeit und Raum, als gewisse Arten, das Mannigfaltige „im Gemüte" — in den reinen „Verhältnissen" des Nach- und Nebeneinander — „zu setzen", gänzlich abhängig von dieser unserer Tätigkeit des Setzens, daher von der „Synthesis" zunächst der „Apprehension", gewiß aber auch der „Reproduktion" und der „Rekognition", da nach Kants eigenen Ausführungen diese drei Stufen der Synthesis voneinander schlechthin untrennbar sind.[1]) Geradezu zum *actus animi* wurde die Zeitvorstellung schon in der Dissertation, in fast hartem Widerstreit mit der sonstigen Erklärung, wonach sie, mit dem Raume, vielmehr der „Rezeptivität der Sinnlichkeit" angehören sollte. Wie unterscheidet sich aber dann überhaupt die „reine Anschauung" der Zeit und des Raumes von einer reinen Setzung des Denkens, insbesondere (was uns hier zuerst angeht) von der Zahl?

Daß sie ohne diese nicht zustande kommt, ist klar, nicht bloß in der Sache, sondern auch in Kants eigener Darstellung. Als Setzung bloßer „Verhältnisse" setzt sie unentrinnbar das Denken voraus, das als Synthesis, d. h. Vereinigung eines Mannigfaltigen wie in einem Blick des Erkennens, überhaupt nichts anderes ist als Beziehen, also Setzen von Verhältnissen. Auch ist nach Kant die Leistung des Denkens synthetisch eben damit, daß sie an der Anschauung sich vollzieht und nur so konkret wird. Wird damit nicht die Synthesis zur Anschauung, die Anschauung zur Synthesis — die doch die Grundfunktion des Denkens sein soll? Das synthetische Denken bedeutet das schöpferische; schöpferisch aber beweist es sich eben als Anschauung, wenn doch diese die *actuatio*, die „Wirklichmachung"

1) Es möchte sich aus Kants eigenen Andeutungen begründen lassen, daß die Zeitvorstellung aus der „Apprehension", die Raumvorstellung aus der „Reproduktion" entspringt. Man beachte besonders die Rolle, welche die Zeit im „Schematismus" spielt, und der Raum ebendort spielen — müßte.

des Denkens selbst, also seine eigene höchste Prägnanz bedeutet, die Prägnanz, den Gegenstand wirklich hinzustellen, ihn „konkret", d. h. eben in voller Gegenständlichkeit, nicht in irgendwie unbestimmt bleibender Allgemeinheit der Regel bloß zu bedingen, allenfalls zu fordern, sondern zu geben. Kann das, was den Gegenstand „gibt", nach den idealistischen Voraussetzungen Kants etwas anderes sein als schöpferische Synthesis, mithin Denken, volle Prägnanz des Denkens: Erdenken des Gegenstandes?

Genau hierauf weisen aber auch alle die besonderen Merkmale, durch welche Kant Anschauung von Denken unterscheidet. „Bloßes" Denken, ohne Anschauung, ist „leer", nämlich ungegenständlich; Anschauung also, wenngleich ohne Denken „blind", über sich selbst nicht aufgeklärt (was ebenso von der Synthesis ohne Analysis gilt), doch dafür „voll", nämlich voll gegenständlich. Auf die Anschauung „zweckt" das Denken bloß „als Mittel ab"; d. h. in der Anschauung erst vollendet sich das Denken zur Erkenntnis des Gegenstandes. Die Gegenstandsbeziehung des bloßen Denkens ist nur „mittelbar", die der Anschauung allein „unmittelbar"; gleichbedeutend: durch Anschauung wird der Gegenstand „gegeben", nicht mehr „bloß" gedacht.

Und eben dies begründet das Merkmal, an dem ganz besonders Zeit und Raum als Anschauung und nicht bloße Denkgebilde erkannt werden sollen: die Gegenstände stellen sich unmittelbar in Zeit und Raum, nicht bloß unter ihnen als allgemeinen oder diskursiven Begriffen dar; Zeit und Raum sind nicht Begriffe im Sinne von Allgemeinheiten, sondern sind „wesentlich einig", *per essentiam nonnisi unicum*, sagt schon die Dissertation; die Vorstellung aber, die „nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann", heißt Anschauung. Sogar gerade in ihrer Unendlichkeit, die sonst eher den Begriffscharakter nahelegen würde (denn, wenn irgendetwas, scheint Unendlichkeit nur gedacht, nicht unmittelbar vorgestellt, d. h. angeschaut werden zu können), sind sie dennoch „gegeben", d. h. wir haben sie, und zwar nicht in bloß diskursiver Allgemeinheit, als Begriffe, sondern als unmittelbare, in strenger Einzigkeit zugrundeliegende Vorstellungen d. i. Anschauungen.

§ 2. (*Fortsetzung. Entscheidung über Anschauung und Denken.*) Dieses Merkmal der Einzigkeit, auf das Kant immer wieder zurückkommt und das höchste Gewicht legt, fordert noch besondere Aufmerksamkeit. Man weiß, woher es historisch stammt. Leonhard Euler [*48*] hatte in einer bedeutenden Abhandlung des Jahres 1748 [1]) nachdrücklich betont: Der Raum ist kein Generikum, kein logischer Allgemeinbegriff; kein Abstraktum von den Beziehungen der Teile der Körper (wie die Wolffianer lehrten); keine prädikative Bestimmung (abhängiges Merkmal) der Körper; denn der Raum bleibt, wenn man die Körper ganz, nicht bloß gewisse Bestimmungen derselben, wegnimmt. Das war für Kant, dessen Denken über die Natur an Newton geschult war, unbedingt überzeugend und wurde ihm zu einem Hauptanstoß für den gründlichen Umbau des Systems der Urbegriffe der Erkenntnis, dessen Ergebnis die Kritik der reinen Vernunft ist. Aber nur einer der Ausdrücke dieser Wandlung ist die Unterscheidung von Anschauung und Denken; neben dieser steht, ja sie überwiegt in den zentralen Untersuchungen der Kritik weit die andere Unterscheidung der synthetischen und analytischen Funktion des Denkens. Das synthetische Denken aber ist zugleich das anschauliche, das anschauliche das synthetische; eine Gleichsetzung, die ganz durchsichtig nur wird, wenn man unter Anschauung nichts mehr versteht als die Durchführung und Vollendung der Synthesis, also gerade das echteste, ur-

1) Réflexions sur l'espace et le temps, in den Schriften der Berliner Akademie. (Ausführlich darüber Cassirer, *18*, II, 349 ff.)

sprünglichste Denken, geradezu das Urprungsdenken selbst. In der Einheit des Ursprungs wurzelt die Unendlichkeit, und die Einzigkeit in dieser Unendlichkeit und durch sie, die nur die vollendete Einheit ist. Und eben dieser Einzigkeitscharakter ist es zugleich, der die zeiträumliche Darstellung zur vollen, unmittelbaren Darstellung des Gegenstandes macht. Erkenntnis des Gegenstandes heißt Bestimmung des Unbestimmten; Einzigkeit aber bedeutet nichts als vollendete Bestimmtheit. Bestimmung überhaupt geschieht nach den Gesetzen des Denkens; deren allgemeiner Ausspruch aber, bloß als Gesetze, enthält noch nicht, vollführt nicht selbst die Bestimmung; ihr wirklicher Vollzug — durch die Vermittlung der „Schemata", die jemand[1]) treffend als „Einführungsbestimmungen" zu der „Gesetzgebung" des Denkens bezeichnet hat — ist es, den die „Anschauung" bedeutet. Darum ist es nicht etwa weniger, sondern noch viel mehr Bestimmung; die Bestimmung, die nichts unbestimmt läßt; also Denken, das Denken, wobei nichts ungedacht bleibt; jene Determination des Denkens, die gegenüber aller Unbestimmtheit des bloß Allgemeinen: der Gegenständlichkeit, den Gegenstand selbst in seiner nicht bloß Einzelheit, sondern Einzigkeit darstellt. So versteht es sich, daß das Merkmal der Einzigkeit der Zeit und dem Raume zukommen soll, gerade sofern sie Anschauungen, d. h. Bedingungen der Darstellung des Gegenstandes im Konkreten der — selbst aus gleichem Grunde einzigen — „Erfahrung" sind; und es versteht sich, weshalb diese „Bedingungen" (wie sie Kant mit Vorliebe nennt), gegenüber den Allgemeinheitsfunktionen der „bloßen" reinen Begriffe des Verstandes, „restringierend" (einschränkend), d. h. determinierend, genannt werden.

Aber dann hat die „reine Anschauung" ihren natürlichen

1) Wellstein [*181*] 130 — wohl auf Anregung von philosophischer Seite.

Ort im System der reinen Grundbedingungen der Erkenntnis unweigerlich nach den bloßen Allgemeinheitsfunktionen der Gegenständlichkeit, den Kategorien und Grundsätzen Kants, also seinem „reinen Denken“. Die Anschauung „realisiert“ erst den „Verstand“, indem sie ihn zugleich „restringiert“: also wäre ihre richtige Stelle erst da, wo die bis dahin durch Abstraktion voneinander gesonderten und je nach ihrer eigentümlichen Leistung erwogenen, eben damit die volle Gegenständlichkeit noch nicht erbringenden Momente des Erkenntnisprozesses zusammengeführt werden, um alle im Verein erst den vollen, d. h. einen Gegenstand der einen Erfahrung zu konstituieren. „Es ist nur eine Erfahrung,“ sagt Kant, „in welcher alle Wahrnehmungen als in durchgängigem und gesetzmäßigem Zusammenhange vorgestellt werden, ebenso wie nur ein Raum und Zeit ist, in welchem alle Formen der Erscheinungen und alle Verhältnisse des Seins und Nichtseins stattfinden.“ Nicht bloß „ebenso wie“ für Zeit und Raum, gilt die Bedingung der Einzigkeit für die „Erfahrung“, sondern die Einheit der Erfahrung, welche identisch ist mit der der Natur, kommt selbst allein zustande mit der der Zeit und des Raumes, und diese allein mit jener; wie es besonders in den Beweisen der „Analogien“ sich klar herausstellt. Somit ist die Einheit der Zeit und des Raumes — d. h. eben das, was sie als Anschauungen unterscheiden soll — geradezu erst das Ergebnis der „Grundsätze“, besonders derer der Relation. Und so kann gar kein Zweifel mehr bleiben, daß sie erst das Resultat und nicht eine voraufgehende Bedingung jener Synthesis des Denkens ist, welche eine Erfahrung, nämlich eine Erfahrung, die Einheit der Erfahrung erst „möglich macht“.

Eine genaue Durchprüfung von Kants „transzendentaler Deduktion der reinen Verstandesbegriffe“, d. h. der zentralsten und überhaupt entscheidenden Untersuchung der Kritik der reinen Vernunft, besonders in der Fassung der zweiten Auflage, läßt hierüber keine Mehrdeutigkeit bestehen. Geradezu in Berichtigung der Aufstellungen der transzendentalen Ästhetik wird hier der synthetische, also Denkursprung der Zeit- und Raumeinheit ausgesprochen [1]), durch welchen nicht bloß „alle Begriffe" von Zeit und Raum „zuerst möglich", sondern diese sogar „als Anschauungen zuerst gegeben" werden, indem „der Verstand die Sinnlichkeit bestimmt". Auch ihr „reines" Mannigfaltiges ist nicht voraus, sondern wird erst „gegeben" durch die reine Synthesis.

Gefordert ist die Einzigkeit der Zeit und des Raumes um der Einzigkeit willen, die im Begriff der Existenz, als des letzten Zieles der theoretischen Erkenntnis, notwendig gedacht wird. Existenz aber ist selbst ein Begriff des reinen Denkens; es ist nur der Begriff jener Bestimmung des Gegenstandes, die nichts unbestimmt läßt. Eben das ist dann erst Erfahrung, im Unterschied von der Allgemeinheit des bloßen Verfahrens des Denkens. Erfahrung, möchte man sagen, ist das bis zu Ende durchgeführte Verfahren. Das Sein der Erfahrung bleibt also immer Sein des Denkens; aber vollendetes Sein des vollendenden Denkens. Denken aber ist nichts anderes als Setzen von Relation. So begreift es sich, daß Zeit und Raum, so sehr immer auf die Existenz bezogen, dennoch nichts enthalten als reine Relationen ohne voraus gegebene Relata; die Relata werden erst gesetzt durch die Relation und fallen daher weg, sobald die Relation wegfällt. Eben damit beweist sich die Setzung dieser Relationen als schlechthin ursprünglich, primitiv, wie es in den bekannten Argumenten Kants vom Raume und der Zeit ausgeführt wird. Als ursprünglich aber können sie ihren Ursprung nur im Denken suchen; es gibt keinen anderen.

Nach diesem allen ist die Voranstellung der Zeit und des Raumes vor die Gesetze des Denkens des Gegenstandes

1) Anm. zu § 17, §§ 20, 21, bes. aber § 26 mit Anm.

im System der Kantischen Transzendentalphilosophie ein ernster Fehlgriff, verständlich und entschuldbar allenfalls nur im Sinne einer Vorwegnahme. In einem strengeren Systemaufbau hätten sie ihre Stelle wohl finden müssen in der Modalität, bei der Kategorie der Wirklichkeit; aber auch bei der Möglichkeit und der Notwendigkeit. Zwar gerade indem die Forderung der Einzigkeit in der Modalität der Gegenstandserkenntnis begründet ist, muß sie sich auf das ganze System der reinen Denkbedingungen der Gegenständlichkeit und auf jede dieser Bedingungen besonders erstrecken; so zunächst und ganz unwidersprechlich auf die Relation, durch diese mittelbar aber auch weiter zurück auf die „mathematischen" Bedingungen der Gegenständlichkeit, die von Kant in den Grundsätzen der Quantität und Qualität formuliert werden. Sie muß sich auf sie erstrecken zum wenigstem im Sinne der Aufgabe unendlicher, in dieser Unendlichkeit aber streng einheitlicher Bestimmung. So tritt denn auch das Problem der Unendlichkeit, und zwar der Einheit in dieser Unendlichkeit, der Sache nach überall auf, wenngleich es seine prägnanteste Bedeutung erst entfaltet in der Durchdringung aller synthetischen Leistungen zur Bestimmung des Gegenstandes, des einzigen der einzigen Erfahrung. Eben deshalb hat übrigens das Ausgehen von der Forderung dieser Einzigkeit wohlberechtigten Sinn, und als vorgreifende Entwicklung des Problems auch die Zerlegung in die Faktoren Anschauung und Denken, oder richtiger: Denken und Anschauung. Im Terminus „Anschauung" wird im Grunde nichts als jene letzte wechselseitige Durchdringung aller reinen Denkleistungen, oder die allseitige Kontinuität der Denkprozesse in dem einen Prozeß des Denkens, d. h. die Unendlichkeit und Einheit des Ursprungs, antezipiert. In diesem Sinne der Antezipation ist schließlich auch in der Wissenschaft der Mathematik die Berufung auf Anschauung nicht schlechthin zu verwerfen, sondern nur, wenn sie die Umgehung der Rechenschaft aus dem reinen Denken bedeuten will. Die ganze Entwicklung der Erkenntnisfunktionen muß sich vom ersten Anfang an ergeben im Hinblick auf die Einheit des Unendlichen als Problem. Sofern aber nur aus dem Problem die Lösung hervorwächst, steht sie als Problem auch richtig am Anfang; doch eben nur so. So bewährt sich die schöpferische Genialität des Kantischen Denkens in jedem Linienzuge seines Aufbaues, so wenig dieser, als systematischer, formal vollendet ist.[1])

Muß etwa hier noch dem Bedenken begegnet werden, daß eine „Einheit" des „Unendlichen" widersprechend sei, weil sie Vollendung des Unvollendbaren bedeute? Zweierlei wäre darauf zu antworten: 1. Unendlichkeit besagt nicht bloß negativ Nichtvollendbarkeit, sondern positiv den stets möglichen und stattfindenden Fortgang des Prozesses des Denkens oder Fortbestand seiner Relationen; 2. die verlangte Einheit bedeutet nicht Abschluß im Sinne des Fertigwerdens, sondern des stets festzuhaltenden Einheitsbezugs, gegründet in der Einheit eben der Methode, die als solche für einen unendlichen Fortgang nicht bloß zulangt, sondern ihn fordert und notwendig macht. Durch diese Einheit wird die Unendlichkeit positiv; aber auch umgekehrt verhindert es die Unendlichkeit, daß die Einheit, im falschen Sinne des Abschlusses, eine absolute Leere, also eine absolute Negativität außer sich ließe und damit selbst wiederum zu etwas Leerem, Negativem zu werden in Gefahr käme. Beide, in ihrer reinen Positivität gedacht, koinzidieren vielmehr, als daß sie sich ausschlössen.

Sind also Zeit und Raum Bedingungen der Existenzbestimmung in möglicher Erfahrung, so gehen sie eben damit hinaus über die bloße Gesetzlichkeit der Zahl,

---

1) Indirekt ist mit diesen Ausführungen der Kritik begegnet, welche Russell (*154*, ch. 52) an Kants Raumtheorie geübt hat. Vgl. übrigens Cassirer [*19*].

die, für sich betrachtet, nicht zur zeit-räumlichen Gesetzlichkeit durchgeführt, den Charakter abstrakter Generalität nicht überwände. Erst durch Zeit und Raum, oder soll man nicht vielmehr sagen, als Zeit und Raum, wird die Zahl selbst konkret, wird sie Zahl der Dinge, geradezu der Existenz.

Aus diesem letzten logischen Grunde folgt im System der Wissenschaften die Lehre über Zeit und Raum erst der allgemeinen Mathematik, als deren Grundbegriff wir jetzt unbedenklich den einzigen, wenn nur in genügender Komprehension verstandenen Begriff der Zahl bezeichnen dürfen. Die bloß mathematischen Bestimmungen der Zeit und des Raumes sind, wie sich zeigen wird, durch die Zahl vollständig gegeben; doch sind beide darum im Begriff der Zahl nicht erschöpft. Das, wodurch sie über diese hinausgehen, ist eben der direkte Bezug auf Existenz, d. h. nicht etwa vom Denken weg und aus ihm hinaus, sondern auf das Denken des vollen Gegenstandes, das zugleich erst das volle Denken ist. Was unterscheidet die Folge in der Zeit von der Folge in der Abzählung? Nichts als der unmittelbare Bezug auf Existenz. Dieser ist als solcher der reinen Mathematik fremd; er vollzieht, übrigens in strenger Kontinuität, den Überschritt von der Mathematik zur mathematischen Physik, zunächst zur grundlegenden Physik, der Mechanik. In bloßer Mathematik, ohne vorgreifenden Bezug auf die Mechanik und durch diese auf die gesamte Physik, wäre von keiner Zeit und folgerecht auch von keinem Raum zu reden, sondern einzig von der Zahl.

Damit werden aber nicht Zeit und Raum selbst zu Gegenständen der Erfahrung, wie fast alle, die ihren nicht mehr rein mathematischen Charakter erkannten, fälschlich geschlossen haben. Vielmehr umgekehrt: die Empirie wird durch sie der reinen Gesetzlichkeit des Denkens erschlossen. Zeit und Raum werden „Bedingungen möglicher Erfahrung“ in einem prägnanteren Sinne, als dies von den bloßen Gesetzen der Zahl gilt; aber nicht sie selbst werden

Erfahrungen nur etwa sehr primitiver und umfassender Art; sondern sie bleiben reine Denkbestimmungen. Mathematik stellt beide auf als bloße Stellensysteme, schlechthin unabhängig von jeder bestimmten, durch besondere Erfahrungen zu gebenden Weise der Besetzung der Stellen. Sie sind daher auch nicht selbst existent, aber Bedingungen des Existierens; und wieder deshalb nicht Erfahrungen, aber gesetzgebend für Erfahrung, für alles, was im Erfahrungssinne existent heißen kann. Ihre Herleitung aus fertigen Erfahrungen (im Sinne gegebener Existenzen) wäre derselbe Zirkel, wie wenn man die Gesetze der Zahl von den Hausnummern ablernen wollte. Das ist in der Tat in gewissem Maße möglich, aber nur, nachdem man zuvor die Häuser numeriert hat. So kann man gewiß Zeit und Raum von den zeit-räumlichen Gegenständen abstrahieren, aber nur, nachdem diese zuvor als zeit-räumliche im Denkprozeß der Erfahrung konstituiert worden sind. Also gehören sie in aller Strenge zu den Setzungen reiner Erkenntnis. Sie erscheinen daher auch in der Wissenschaft als Gebilde ganz vom Typus des Mathematischen, was ja eigentlich nur das rein Wißbare, wissenschaftlich rein Bestimmbare bedeutet. Wenn sie, wie gezeigt, den Existenzbezug dem Mathematischen hinzufügen, so bedeutet dies nicht die Empirisierung der Mathematik, sondern die Mathematisierung der Empirie. Indem sie, wie auf Messersschneide, auf der Grenze zwischen Mathematik und Empirie stehen, stellen sie die Kontinuität zwischen beiden her.

Darum nun fordern sie eine zweiseitige Betrachtung: als mathematische Gebilde, und als Grundbedingungen der Existenzbestimmung in möglicher Erfahrung. In diesem Kapitel haben wir es mit ihrem bloß mathematischen Charakter und Aufbau zu tun. Es wird sich zwar zeigen, daß schon dabei die Existenzbeziehung nicht ganz beiseite gesetzt werden kann. Ausdrücklich aber und in vollem Umfang soll diese im letzten Kapitel untersucht werden.

§ 3. (*Die Zeit als mathematisches Gebilde.*) Nimmt man zunächst die Zeit so in Betracht, wie sie in der grundlegenden Wissenschaft von der Natur, der reinen Bewegungslehre oder Mechanik zugrunde gelegt wird, so stellt sie sich dar als feststehende, unverrückbar einzige Ordnung, in welche alle Objekte der Natur sich einreihen, die sie gleichsam durchlaufen müssen. So hat besonders Newton in dem gewichtigen Scholion zu den Eingangsdefinitionen seiner „Prinzipien" sie eindringlich gezeichnet: Die absolute, wahre, mathematische Zeit, in sich und ihrer Natur nach, ohne Beziehung auf irgendetwas Äußeres, fließt gleichförmig. . . . Der Fluß der absoluten Zeit kann sich nicht ändern; (denn) die Dauer oder Beharrung der Existenz der Dinge ist (eine und) dieselbe, sei die Bewegung schnell oder langsam oder gar keine . . . die Zeiten und die Räume sind gleichsam die Örter (*loca*, Systeme von Stellen) ihrer selbst und aller Dinge. In der Zeit, nach der Ordnung der Aufeinanderfolge [1]), im Raume, nach der Ordnung der Lage [2]), findet alles seine Stelle (*locantur universa*); es ist in ihrem Wesen begründet, daß sie Stellen sind; und daß die ersten (d. i. ursprünglichen) Stellen (*primaria loca*) sich bewegen (d. h. ihre Stellen wechseln) sollten, ist absurd; folglich (und in diesem Sinne) sind sie die absoluten Stellen, und allein die Übertragungen von diesen Stellen (auf andere) sind die absoluten Bewegungen. — Der entscheidende Grund für diese Aufstellungen ist ersichtlich dieser: die primäre, letzlich grundlegende Bedeutung der Zeit (wie ebenfalls des Raumes) für die Stellenordnung der Existenz verlangt ihre absolute Einzigkeit, Unverrückbarkeit, und deshalb auch Gleichförmigkeit und Stetigkeit.

Nach diesem Begriff aber deckt sich die Zeitordnung,

---

1) dem Aristotelischen πρότερον καὶ ὕστερον (Vor und Nach).
2) der Aristotelischen θέσις (Position, Gelegen- oder Gesetztheit, Sitz oder Stand).

was ihre rein mathematischen Eigenschaften betrifft, vollständig mit der eindimensionalen geraden Reihenordnung der Zahl. Ganz und gar so, als Zahlreihe, stellt die Zeit sich dar in den Bewegungsgleichungen der Mechanik und der gesamten Physik. Alle Veränderung in der Natur mißt sich zuletzt an dieser einzigen Grundskala, die als unabhängig Variabele t (*tempus*) bloß mathematisch betrachtet nichts ist, als die Zahlreihe selbst, und zwar zunächst die Reihe der Ordnungszahlen von $-\infty$ zu $+\infty$. Sie kann, sie darf nichts anderes sein, wenn sie ihr Amt erfüllen soll: die Darstellung aller Vorgänge der Natur in einem einzigen Funktionalzusammenhang als erstwesentliche Bedingung zu ermöglichen. Denn diese erfordert, als letzte Grundlage eben der funktionalen Beziehung, eine solche Grundskala als Ur-Maßreihe, die, eben um diese ihre Funktion zu erfüllen, notwendig als eindimensionale, stetige, homogene, gerade Reihe, mithin als die Zahlreihe, genau so wie wir sie konstruiert haben und konstruieren mußten, zugrunde zu legen ist. Das ist der rein mathematisch ausgedrückte Sinn der Newtonschen Sätze: daß in der Zeit (wie andererseits und aus gleichem Grunde im Raum) „*universa locantur*" — alles, nämlich was in die einzige Ordnung der Natur sich als Glied einfügen soll, seine Stelle finden muß; und daß die letzten Stellen nicht selbst ihre Stellen wechseln (sich verschieben) können, das will besagen: daß sie nur so unverrückbar feststehend angesetzt werden können, um ihre Funktion der Stellenordnung für „alles", was zur Natur gehört, zu erfüllen.

Aus dem gleichen, rein transzendentalen Grunde kann die Zeit weder ungleichförmig noch unstetig noch von mehr als einer Dimension gedacht werden. Nämlich eine ungleichförmige Ordnung müßte erst wieder auf eine andere, gleichförmige zurückbezogen werden, wenn ihre Ungleichförmigkeit in einer denkbaren Einheit der Existenz möglich sein, ja wenn diese Ungleichförmigkeit selbst auch nur sollte ausgedrückt und bestimmt werden können. Ebenso eine unstetige Zeit würde erstens die Einheit der Existenz zerreißen, und würde zweitens dennoch die stetige, und zwar als ihr voraufgehend und zugrundeliegend, schon ihrem Begriff nach fordern, da sie überhaupt nur in Beziehung auf sie als unstetig erkannt und bestimmt werden könnte. Und so endlich ist die Eindimensionalität unerläßlich gefordert von der letzten, darum absolut einzigen Grundlage der Ordnung nicht sowohl des Existierenden als seiner Existenz selbst; denn nicht die Inhaltsbestimmung dessen, was existiert, betrifft die Zeit selbst und als solche, sondern der wechselnd bald so bald so sich bestimmende Inhalt des Existierenden, die nach bestimmten Gesetzen sich entwickelnden Wertreihen $x_0 x_1 x_2 \ldots, y_0 y_1 y_2 \ldots$ usf. irgendwelcher Veränderlichen $x, y \ldots$ sind, hinsichtlich dieses Wechsels ihrer Bestimmung von Punkt zu Punkt im Veränderungsgange der Natur, zu beziehen auf eine einige und selbige, ihnen allen zuletzt zugrunde liegende Stellenordnung, welche eben die Zeit bedeutet. Sie ist einfach die gemeinsame Reihe der Ordnungszahlen für die in einem einzigen Funktionalzusammenhang unter sich zu verknüpfenden Wertreihen sämtlicher in das einzige System der Existenz eingehenden Veränderlichen. So fließt die Zeit, als einzige Ordnung des Existierens, niemals zusammen mit den Inhaltsbestimmungen des Existierenden. Und gerade so muß sie, nicht bloß nur einzig, sondern, gleich der ursprünglichen Reihe der Ordnungszahlen, auch nur eindimensional gedacht werden.

Wenn also, worauf so vieles hindrängt, zwischen Zeit und Zahl ein besonders enger Zusammenhang besteht, so sind es doch unmittelbar und bedingungslos nur die Eigenschaften der Ordnungs- oder Stellzahl, die an der Zeit sich wiederfinden. Zwar können irgendwelche Zeitzusammenhänge (Zeitfolgen, Abstände, Strecken) durch Maßzahlen dargestellt werden; aber nur so, wie auch in einem System bloßer Ordnungszahlen solche Zusammenfassungen möglich sind, also nur folgeweise und genau nur soweit, als die Maßbeziehungen Ordnungsbeziehungen ausdrücken und ihnen äquivalent bleiben, nicht aber, soweit überhaupt die Maßbeziehung ihrer eigentümlichen Gesetzlichkeit nach sich erstreckt. Zeitordnung ist in sich nur Ordnung des Nacheinander, d. h. des Einen nach dem Anderen, richtiger: des Anderen nach dem Einen, oder des Folgens auf ein Voraufgehendes; und nur indem wiederum eine Folge sich an eine andere an- und mit ihr in einer umfassenderen zusammenschließt, ergibt sich sekundär eine Messung der Zeit. In dieser wird aber vom Nacheinander eigentlich abgesehen, das Nacheinander wie in ein Miteinander, die Zeit wie in den Raum projiziert. Darum müssen nicht etwa alle Bestimmungen des Miteinander auch für das Nacheinander gelten.

Leicht könnte man auf den Gedanken geführt werden, daß aus eben diesem Grunde wenigstens die Eigenschaft der Stetigkeit der Zeit nicht eigentlich oder nicht ursprünglich zukommen könne; wie sie auch der Ordnungszahl zunächst fremd scheint. Die Aufeinanderfolge, das Erstens, Zweitens usf. scheint eher Diskretion zu fordern, die auch durch immer fortgesetzte Zwischenschiebung dichterer Aufeinanderfolgen sich nicht in Kontinuität verwandeln würde. Aber wir haben früher gesehen, daß gerade der die Ordnungsbeziehung fundamental begründende Begriff des Zwischen, in seiner notwendigen Überordnung über alle Maßbestimmung, das ist, was die Kontinuität der Zahlreihe zuletzt begründet. Ganz im gleichen Sinne und aus gleichem Grunde ist sie daher auch der Zeitreihe als ursprünglich eigenes, nicht von der Maßbeziehung erst erborgtes Merkmal zuzuerkennen. Daher hebt Newton mit Recht gerade das Merkmal der Stetigkeit, unter dem Namen des „Fließens", an der Zeit hervor. Indessen ist dieser Ausdruck nicht ganz unbedenklich. Die Zeit selbst ist ja, wie gerade Newton stark betont, nicht veränderlich, so wie auch nicht die Zahl. Sondern so wie das Gezählte, seiner Zahl nach, sich von Null oder irgendeinem bestimmten Werte an stetig ändern mag, so durchläuft das zeitlich zu Bestimmende, hinsichtlich seiner Zeitbestimmung, die Zeitlinie stetig. So wenig wie überhaupt dieser Verlauf oder Fortgang der Zeit selbst zufällt (die Zeit verläuft sich nicht, sagt Kant mit Recht, sondern in ihr verläuft sich alles), so wenig betrifft die Stetigkeit des Fortgangs unmittelbar die Zeit. Aber als allgemeine und ursprüngliche Bedingung der Möglichkeit solches Fortganges nimmt allerdings die Zeit, nicht anders als die Zahl für die Zählung, das Merkmal der Stetigkeit gleichsam auf sich; also nicht als selbst veränderlich, sondern vielmehr (nach Kant) „stehendes und bleibendes Korrelat“ der Veränderung. Aber doch ihr zufolge ist die Veränderung in der Natur stetig zu denken, nicht sie erst zufolge der Veränderung. Gerade in ihrer unwandelbaren Gleichheit begründet sie die Stetigkeit der Veränderung. „Stetigkeit“ kommt von „stets“; sie bedeutet gerade die stets gleiche, also immerfort, unveränderlich waltende Beziehung, die erst die diskrete Mannigfaltigkeit (hier das Außereinander der Zeitpunkte) in innerer, nämlich reiner Denkeinheit (als Punkte in dem einen und selbigen Zusammenhange der Zeit) zusammenschließt. Mathematisch drückt sich daher die Stetigkeit der Veränderung aus durch die Beziehung des Differentials, z. B. des durchlaufenen Weges, auf das Differential der Zeit, die sich damit, wie überhaupt als Maß, so auch als stetiges und gleichförmiges Maß zu erkennen gibt.

Diese immer gleiche Beziehung des Vor und Nach und damit des Zwischen begründet zugleich den Charakter der Zeit als gerader Reihe. Die Zeit ist mathematisch nicht bloß überhaupt durch das eindimensionale (lineare) Kontinuum, sondern durch die Gerade zu repräsentieren: weil die Art der Beziehung jedes ihrer Elemente zu jedem, welches auch als Bezugspunkt gewählt werden mag, schlechthin einzig und identisch ist. Denn die Zeit ist in sich nicht bloß einzig gerichtet, sondern streng gesprochen nur einsinnig; sie geht stets vorwärts, nie zurück oder irgendwie von ihrer Bahn seitab. Eine rückläufige Zeitbetrachtung ist im eigentlichen Sinne nicht möglich. Man kann die Zeit selbst nicht umkehren, das Voraufgehen zum Nachfolgen, das Nachfolgen zum Voraufgehen machen; man kann nur etwa den Zeitinhalt in umgekehrter Folge aufmarschieren lassen, wobei die Zeit selbst immer gleichmäßig vorwärts läuft. Man stellt die Vergangenheit nicht vor, indem man die Zeitlinie rückwärts, gleichsam bergan durchläuft, sondern man versetzt sich unvermittelt in den früheren Zeitpunkt, als wäre er jetzt, oder jetzt er; von da ab aber verfolgt man ihren Ablauf wiederum ihrem eigenen Sinne gemäß vorwärts. Wollte man gewaltsam den Zeitlauf selbst umwenden, so wäre es nicht anders, als ob man sich zwänge zu zählen: 10, 9, 8 ...; d. h., man tauscht im Grunde doch bloß die Worte, nennt Nachfolgen Vorhergehen, Vorhergehen Nachfolgen; die Zeit selbst aber lacht uns aus und geht, in buchstäblicher Bedeutung eigensinnig, ihren Weg vorwärts, nie zurück, so wie das Wasser nur zu Tal läuft. So kann die Zeit auch nicht im Vorwärtsgehen dennoch, wie in einem Kreislauf, in sich zurückkehrend, es kann nicht in Zukunft die Vergangenheit wiederkehrend gedacht werden, so wie man in der Zahlreihe immer weiter zählend auch durch noch so unendliche Sprünge nicht zum ursprünglichen Ausgang zurückkommt. Möchten alle Dinge wiederkehren, ihr Frühersein wird damit nicht ihr Spätersein, ihr Spätersein nicht ihr Frühersein, sondern es wiederholt sich nur im späteren Zeitpunkt, was schon im früheren war; die Zeiten selbst bleiben, was sie sind: Früher und Später, und nicht umgekehrt. Auch eine Frage, ob zwischen zwei Punkten der Zeit etwa mehr als eine Zeitlinie möglich sei, kann gar nicht auftreten; durch zwei beliebige Zeitpunkte ist die Zwischenzeit und ist die ganze Zeit vor- und rückwärts ins

Unendliche in absoluter Eindeutigkeit bestimmt, da zu ihrem Aufbau nichts weiter zu Gebote steht oder erforderlich ist als die einzige, immer identische Grundrelation des Vor und Nach. Und diese Eindeutigkeit ergibt sich nicht erst durch eine Wahl unter *a priori* gleich denkbaren Voraussetzungen, sondern es ist von Anfang an nur das Eine zulässig. Es gibt ja hier kein höheres Kontinuum, etwas wie eine Zeitebene, in die die Zeitlinie sich als Kurve einzeichnete. Denn eben weil die Zeit durchaus nur einsinnig ist, gibt es für sie keine Mehrheit von Richtungen, also auch nicht von Dimensionen. Sie hat eben damit auch keine Breite. Zwar hat gelegentlich Kant die Gleichzeitigkeit ihre zweite Dimension genannt. Das ist aber nichts als ein ungenauer Ausdruck. Nicht zwei Zeiten sind (im Zeitsinn) zugleich, sondern zwei Ereignisreihen können gleichzeitig, d. h. in derselben, stets einzigen und eindimensionalen Zeit ablaufen. Ihr Zugleichsein ist keine Bestimmung der Zeit; es besagt nur, daß beide dieselbe Folge von Ordnungszahlen 0, 1, 2 ... gemein haben. Selbst die Bezeichnung der Zeit als eindimensional schließt noch eine kleine Ungenauigkeit ein; strenger wird man sagen: eine Dimensionsbetrachtung leide auf sie überhaupt keine Anwendung.

Diese absolute Einsinnigkeit der Zeit scheint ihren Grund zuletzt darin zu haben, daß die Zeitrelation als solche und ursprünglich Disposition, nicht Komposition, Auseinanderstellung, nicht Zusammenstellung ist. Nicht als ob sie die Verbindung, den Zusammenhang ganz zunichte machte (dann könnte sie nicht Ordnung sein); vielmehr macht die Sonderung den notwendigen Zusammenhang erst recht durchsichtig (wie besonders am Merkmal der Stetigkeit deutlich wird). Aber die zeitliche Anordnung als solche verbindet nicht, sondern legt auseinander; sie faßt das Mannigfaltige als Mannigfaltiges: Eines, ein Anderes, wieder ein Anderes usf. ins Auge. Am deutlichsten spricht sich dies in Hinsicht der Existentialbedeutung der Zeit darin aus, daß, wenn ein Zeitpunkt „ist“, alle anderen „nicht sind“ (nicht mehr oder noch nicht). Diese Verneinung, die von der Zeitordnung untrennbar ist, weist bestimmt auf eine Sonderung hin, die im gleichen Sinne in der Raumordnung nicht liegt. Zwar ist auch das Hier nicht Dort, das Dort nicht Hier; aber beide sind zusammen, d. h., mit dem Einen ist notwendig das Andere zugleich gesetzt; „zugleich“ nicht bloß im Zeitsinn, sondern auch, wenn von der Zeitbeziehung ganz abgesehen wird, sozusagen zu gleichen Rechten: weil die Raumordnung als solche eben Zusammenordnung, Ordnung des Miteinander ist, also in ihr die Verbindung als Verbindung ebenso vorwaltet und ursprünglich bestimmend ist, wie in der Zeit die Sonderung als Sonderung. Dieser gründliche Unterschied liegt aber schon in der Zahl nach ihrer Doppelbedeutung als Ordnungs- und Maßzahl. Auch die Folge der Ordnungszahlen kann aus gleichem Grunde wie die der Zeit an sich nur einsinnig fortschreitend gedacht werden. Das schon Gezählte zählt nicht ferner; im Übergang zum Zweiten wird das Erste, im Übergang zum Dritten das Erste und Zweite usf. auf Seite gesetzt, zurückgelassen; während in den Zwei die Eins, in den Drei die Eins und die Zwei eingeschlossen bleiben. Die bloße Reihenordnung ist also gleichsam Auflösung in die Elemente, in der nicht die Verbindungs**möglichkeit** aufgehoben, aber jedenfalls von irgendeiner bestimmten Art, einem besonderen Gesetz und also einem unterschiedlichen Wie der Verbindung abgesehen, nur die Elemente als überhaupt verbindbar zurückbehalten werden. Dies ist es, was wir als „Disposition, nicht Komposition“ auszudrücken suchten. Dies aber gilt von der Zählung, sofern sie bloß Akzentuierung und gleichsam Bezifferung und nur soweit Ordnung ist; es gilt ebenso und aus gleichem Grunde von der Zeit als der „Zahl der Existenz“; dagegen nicht vom Raum.

§ 4. (*Grundbeziehung zwischen Zeit- und Raumordnung.*) Dieser Unterschied selbst aber macht es nun erklärlich, weshalb fast alle die Bestimmungen, die wir der Zeit beizulegen hatten, nochmals gelten für das Grundgebilde des Raumes, die gerade Linie, ohne daß doch damit der Unterschied zeitlicher und räumlicher Anordnung sich verwischt, die Zeit zum Raume wird oder der Raum zur Zeit. Diese seltsame Identität und doch Nichtidentität der räumlichen Ordnung in ihrer Urgestalt mit der zeitlichen fordert zunächst noch einiges Verweilen.

Der Raum ist wie die Zeit eine bloße Stellenordnung, für sich ohne Inhalt, „leer". Seine Stellen werden erst besetzt durch irgendwelche Momente des Existierenden. Deshalb gehören Zeit und Raum nicht nur unlöslich zusammen, sondern sie unterliegen einer und derselben Gesetzlichkeit, der der Stellenordnung überhaupt und damit der Zahl. Was für eine gesetzmäßige Stellenordnung überhaupt als ermöglichende Voraussetzung gilt, muß demnach gleichermaßen für die Zeit und für den Raum gelten. Um so notwendiger wird es, da überdies beide auch darin übereinstimmen, Stellenordnungen des Existierenden zu sein, den innersten Grund ihrer Verschiedenheit, ihrer unterschiedlichen Leistung eben für die Ordnung des Existierenden, so scharf wie möglich zu bestimmen.

Der fragliche Unterschied ist nun nicht zweifelhaft, gerade sofern er die direkt die Existenz angehenden Merkmale beider betrifft. Nämlich das Mannigfaltige im Raum ist zugleich mit-, oder wie man gern sagt, nebeneinander, das Mannigfaltige in der Zeit nur nacheinander; die Stellen in der Zeit lösen sich ab; wenn eine nächste eintritt, muß die vorige weichen; während im Raum alle Stellen zusammenstehen und sich gegenseitig nicht nur nicht verdrängen, sondern halten und tragen. Dies weist auf den vorhin festgesetzten Grundunterschied: daß Zeit ursprünglich Sonderung, Raum ursprünglich Verbindung bedeutet.

Aber dieser Doppelsinn der Ordnung besteht doch (wie sich ebenfalls schon ergab) nicht erst in der Beziehung auf die Existenz, sondern liegt uranfänglich im Sinn des Ordnens selbst; er besteht daher auch schon in der Grundfunktion der Zahl. Schon das Zählen ist von Haus aus beides, Sonderung und Vereinigung; je nachdem aber das eine oder das andere Moment als das Grundmoment angesehen wird, ergibt sich ein sicherer Unterschied in der Funktion der Zahl, nämlich der von Ordnungs- und Maßzahl. Mag also die Beziehung auf die Existenz diesen Unterschied noch vertiefen, erkennbar muß er auch schon in den rein mathematischen Merkmalen der Zeit und des Raumes sein. Und zwar nicht bloß in Hinsicht des Umfangs, in dem die allgemeinen Gesetze des Ordnens sich auf beide übertragen (nämlich darin, daß die Begriffe der Richtung und Dimension auf die Zeit keine Anwendung leiden, dagegen wohl auf den Raum); sondern auch in den gemeinsamen Bestimmungen muß zum wenigsten ein abstraktiver Unterschied sich festhalten lassen, wenn nicht, wenigstens bei Beschränkung auf eine Dimension und einen einzigen Sinn der Ordnung, Zeit und Raum gänzlich ineinanderfließen, ihre begriffliche Zweiheit aufgehoben sein soll. Dieser Unterschied ist aber kein anderer als der besagte: daß in der Zeit die Sonderung, im Raume die Verbindung letztbestimmend bleibt. Eine Auseinanderhaltung gibt es auch im Raum, wird doch das Nebeneinander ebensowohl als Außereinander bezeichnet. Aber die Sonderung ist hier nur Voraussetzung der Verbindung; diese erst macht das Außereinander zum räumlichen. Soll Verbindung stattfinden, so muß eine Mehrheit gegeben, also Auseinanderhaltung möglich sein. Aber schon die Auseinanderhaltung im Raume ist nicht dieselbe wie in der Zeit. Diese nämlich ist streng nur einseitig gerichtet; sie vollzieht sich nur in einem Fortschritt vom Einen zum Anderen (in welchem Ausdruck schon Verneinung liegt); dagegen ist die räumliche Auseinanderhaltung von Anfang an streng gleichseitig; keins der verglichenen Glieder ist an sich das erste, keins das folgende, sondern jedes kann mit ganz gleichem Recht als erstes oder folgendes angesehen werden, vielmehr überhaupt liegt die Setzung als erstes und folgendes nicht an sich im Wesen des Raumes, sondern ist schon Anwendung zeitlicher Betrachtung auf das Mannigfaltige des Raumes; indem man im Raume ein Erstes und Folgendes setzt, überträgt sich unvermerkt das räumliche Auseinander in das zeitliche. Umgekehrt, sobald an der zeitlichen Mannigfaltigkeit diese ausschließende Stellung der verglichenen Glieder als vorhergehendes und nachfolgendes außer Acht gelassen und eine gleichsinnige Wechselbeziehung unter ihnen vorgestellt wird, verliert ihre Beziehung sofort den Charakter des Zeitlichen und wird zur räumlichen.

Gewiß merkwürdig ist diese vollständige gegenseitige Übertragbarkeit der Bestimmungen der Zeit- und Raumordnung ineinander, und stark beweisend für die Freiheit, mit der das Denken über beide verfügt, die Zeit, die ewig fließende, zum Stillstand zu zwingen, den Raum, den ewig ruhenden, in den Fluß der Bewegung gleichsam mithineinzuziehen die Macht hat. Es liegt darin eine nicht geringe psychologische Bestätigung des rein apriorischen Charakters beider. Aber nicht minder auffallend ist, daß dabei eine Gefahr des Ineinanderfließens der Begriffe doch nicht besteht; begreiflich freilich, wenn, wie sich zeigte, ihr ursprünglicher Unterschied in den zwar aufs engste zusammengehörigen, sich gegenseitig fordernden, aber der Richtung nacheinander ursprünglich entgegengesetzten Funktionen des Sonderns und Vereinigens beruht.

Wie nun überhaupt die Sonderung für die Vereinigung vorbedingend ist, nicht ebenso umgekehrt, so folgeweise die zeitliche Sonderung für die räumliche Vereinigung, aber nicht diese für jene. Die Vereinigung ist gar nicht bestimmt vollziehbar, wenn nicht die Sonderung zuvor vollzogen ist; in der Vereinigung müssen ja die verbundenen Glieder zugleich volle Selbständigkeit gegeneinander bewahren. Gerade jene Wechselbeziehung, die für die Raumordnung wesentlich unterscheidend ist, setzt deutlichste Scheidung voraus, die für sich allein zeitliche, nicht räumliche Ordnung begründen würde. Also ist Raumordnung durch Zeitordnung bedingt; nicht im gleichen Sinne diese durch jene. Daraus versteht sich, daß, wie Kant richtig beobachtet hat, die Zeitordnung sich der Raumordnung überordnet; daß in der Zeit sich ordnen muß, was nur überhaupt in unsere Vorstellung kommt, auch wenn es nicht oder noch nicht räumlich geordnet sein mag. So kann leicht das Gebiet der räumlichen Ordnung als ein engeres, nicht im gleichen Sinne allumfassendes erscheinen wie das der zeitlichen Ordnung. Ist doch — nicht eigentlich durch Kants Schuld — die Meinung bei Psychologen und Metaphysikern fast unausrottbar festgewurzelt, als ob die äußere, räumliche Welt eine innere, unräumliche, bloß zeitliche Welt des psychischen Seins übrig lasse; während jede tiefer dringende Untersuchung unabweislich ergibt, daß alles sogenannte Innere, Psychische, wenn nicht räumlich bezogen, doch beziehbar und, sofern es sich wenigstens um Erfahrung, d. h. Existenzsetzung und damit Kausalordnung des Geschehens handelt, notwendig so zu beziehen ist. Aber dieser tiefgewurzelte Irrtum wird immerhin erklärlicher aus der wirklichen Überordnung der Zeitordnung über die Raumordnung. Die Möglichkeit der Sonderung schließt die Möglichkeit der Vereinigung zwar ebenso ein wie umgekehrt; nicht aber der Vollzug der Sonderung ist darum gebunden an den vorausgegangenen Vollzug der Verbindung; während umgekehrt die Sonderung vollzogen sein muß, wenn eine Verbindung in bestimmter Gestalt soll stattfinden können. Wird aber die Zeit selbst (irgendein zeitlicher Verlauf) als Ganzes ins Auge gefaßt, namentlich der Messung unterworfen, so muß sich die Zeit in den Raum gleichsam projizieren; die Zeit ist darum (wie wiederum Kant hervorgehoben hat) durch sich selbst nicht meßbar, eben weil ihre Teile nicht zugleich sind, Messung aber eine Zusammenfassung erfordert, die nur als räumliche möglich ist. Hier besonders beweist sich, daß dies ganze eigenartige Wechselverhältnis des Zeit- und Raumvorstellens nicht etwa bloß psychologische Bedeutung hat (in welchem Falle es uns hier nicht zu interessieren brauchte), sondern auf den Aufbau der Wissenschaft seine weittragenden Konsequenzen erstreckt. Wir werden bald zu zeigen haben, wie die Gestalt des Koördinatensystems für die Darstellung der Naturvorgänge in den Gleichungen der Physik durch dies Verhältnis (die räumliche Bedingtheit der Zeitmessung selbst und andererseits die nur zeitliche Darstellbarkeit der Raumänderung) gänzlich bedingt ist.

§ 5. (*Die Gerade als Grundgebilde des Raumes.*) Zufolge eben dieser Wechselbeziehung also müssen dieselben Grundbestimmungen, die wir an der Zeit nachwiesen, soweit sie rein mathematische sind, sich, einzig mit dem besagten begrifflichen Unterschied, beim Raume nochmals ergeben, während nicht umgekehrt alle Bestimmungen des Raumes sich zugleich auf die Zeit übertragen müssen. Nämlich es werden alle die Merkmale der Reihenordnung, die aus der Sonderung des Mannigfaltigen fließen, für Zeit und Raum gemeinsam gelten, alle die dagegen, die aus der Verbindung als solcher hervorgehen, den Raum allein angehen, oder auf die Zeit wenigstens nur durch eine Übertragung anwendbar sein, die immer als Übertragung bewußt bleibt. Das erstere gilt von den Gesetzen der Zahl bloß als eindimensionaler, einzig gerichteter Stellenordnung, das letztere von allem, was darüber hinausliegt.

Daher treffen alle für die Zeit oben festgestellten Merkmale: Einzigkeit, Unverrückbarkeit, Unendlichkeit, Homogeneïtät und Stetigkeit, ebenfalls zu auf das

Grundgebilde, auf dem alle Raumbeziehungen sich aufbauen: das eindimensionale räumliche Urgebilde, die gerade Linie.

Der Begriff des Geraden ist von uns im vorigen Kapitel festgelegt worden; als das radikal begründende Merkmal ergab sich die absolute Eindeutigkeit der Relation von Glied zu Glied in der Reihe. Diese Forderung wird von den Mathematikern im allgemeinen anerkannt. Besonders Veronese, der fast überall unter den lebenden Mathematikern das stärkste Gefühl für die Unerläßlichkeit rein logischer Grundlagen für die Aufstellung der Fundamentalgebilde der Mathematik beweist, stellt diese Forderung in bestimmter Fassung in seinem Begriff der „Grundform"; man möchte die Übersetzung „Grundgebilde" vorziehen. Darunter versteht er: diejenige „Form" (d. h. Einheit eines Mannigfaltigen, welche Ganzes und Teil, Ordnung und Art der Position enthält), welche zur Bestimmung aller anderen dient und eben darum als nur einzig angenommen werden muß. Als diese Grundform ergibt sich zunächst das „in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension" [1]; dann, auf Grund der vollen Entwicklung der mathematischen Grundbegriffe, besonders der Einführung der Stetigkeit: das kontinuierliche, in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension, welches durch die geringste Anzahl von Elementen bestimmt ist [2]. Durch eben diese Merkmale wird dann [3] die Gerade definiert und als Axiom aufgestellt: es gibt diese Grundform.

Hiermit ist ihm indessen die Gerade wirklich nicht eindeutig bestimmt, wie es doch gefordert war. Das in der Lage seiner Teile identische System kann nämlich, wie man sich erinnert, offen oder geschlossen sein. Und so ist auch

1) Einl. § 71; vgl. oben S. 226 f. 2) § 122, Hyp. IX.
3) I. Teil, § 4, Def. I.

die Gerade jener Definition „einfach geschlossen oder offen“. Der Unterschied ist der, daß das einfach geschlossene homogene System zwar auch durch zwei Punkte, nicht aber, wie das einfach offene, durch beliebige zwei seiner Punkte bestimmt ist. Die erstere Bestimmung aber, meint Veronese, sei deshalb wissenschaftlich vorzüglicher, weil sie eine kleinere Zahl von Erfordernissen enthalte und — die sphärische Geometrie nicht ausschließe. Aber so bleibt doch die Bedingung der Einzigkeit der Grundform unerfüllt. Das zirkuläre System ist durch zwei seiner Punkte überhaupt nur dann bestimmt, wenn ein bestimmtes Gesetz der Anordnung schon vorausgesetzt ist, für dessen Aufstellung zwei Punkte nicht genügen; sonst sind mit der bloßen Forderung, zwei gegebene Punkte zu enthalten, unendlich viele stetige und homogene, in der Lage ihrer Teile identische zirkuläre Systeme vereinbar. Ein einziges System ergibt sich nur dann, wenn die zwei Punkte allein als ausreichend gelten, eine denkbare Art der Positionsbeziehung vor allen anderen und als grundlegend für alle anderen auszuzeichnen; das aber geschieht allein durch den Begriff des Geraden in unserem bestimmteren Sinne, der diese Einzigkeit der Beziehungsart nicht nur mitbedeutet, sondern wesentlich bedeutet. Daß dieser Begriff des Geraden bestimmter ist (mehr einschließt) als der Veroneses, kann nicht gegen ihn entscheiden. Denn nicht überhaupt nur auf die Mindestzahl von Voraussetzungen kann es in dieser Frage ankommen, sondern allein darauf, welche Voraussetzungen notwendig und hinreichend sind, eine eindeutige Bestimmung zu ermöglichen. Die zirkuläre Anordnung aber läßt eben einen unendlichen Spielraum von Bestimmungsmöglichkeiten, sie taugt also nicht zur letzten Voraussetzung eindeutiger Bestimmung, da sie vielmehr selbst, wofern dieser Spielraum überhaupt bestimmt sein soll, wieder einer anderen Voraussetzung, als letzter, bedarf. Diese kann nur die Gerade im absoluten Sinne sein, welche die Identität der Richtung, als Richtungsverschiedenheit gleich Null, zugrunde legt aller Bestimmung irgendwelcher Richtungsverschiedenheit ungleich Null, und damit irgendwelcher möglichen, sei es homogenen oder nichthomogenen Richtungsänderung, durch die erst die zirkuläre Anordnung zu sicherem Begriff gebracht wird.

Der eigentliche Grund, der nicht nur Veronese, sondern die große Mehrzahl der Mathematiker zu der Meinung verleitet hat, daß man sich an diesen, im Aufbau der mathematischen Begriffe wirklich fundamentalen Begriff des (absolut) Geraden nicht zu binden brauche und nicht binden dürfe, ist wohl der, der sich bei Veronese in der „empirischen Bemerkung I" (S. 229f.) ausspricht: „Wenn das System durch die Punktepaare, welche den Enden geradliniger in dem Bereich unserer Beobachtung gelegener Gegenstände entsprechen, bestimmt wird, so bedeutet dies nicht, daß es durch zwei beliebige seiner Punkte bestimmt wird. Denn mit Hilfe (auf Grund) der Anschauung oder Beobachtung kann man nicht behaupten, daß diese Eigenschaft auch für die Paare von Punkten des Systems gelte, von denen wenigstens einer einem nicht in dem Bereich unserer Beobachtung gelegenen Gegenstand entspricht." Die Frage sei also durch die Anschauung nicht zu entscheiden; abstrakt aber müsse man von Anfang an die Möglichkeit offen halten, daß zwei Punkte die Gerade nicht bestimmen. Das heißt: die Voraussetzung — und nicht etwa die Folge — jener Unbestimmtheit, die Veronese im Begriffe seiner „Grundform" bestehen läßt, ist keine mathematische, sondern die metaphysische des Empirismus und Realismus in Hinsicht des Raumes. Nach unseren, nicht metaphysischen, sondern logischen, d. h. methodischen Voraussetzungen, ist die Raumordnung ganz so wenig wie die Zeitordnung oder die Ordnung der Zahl ein „Gegenstand", der empirisch gegeben und durch Beobachtung festzustellen wäre, sondern es gelten für sie mit Notwendigkeit die Bestimmungen, die aus dem reinen Denken eines einzigen Systems der Ordnungsbestimmung fließen. Ausschließlich auf Grund der Forderungen dieses reinen Denkens, wenn schon unter der „Führung“ der Anschauung, hat Veronese selbst sämtliche übrigen Grundvoraussetzungen seiner Geometrie aufgestellt; es erscheint daher vom logischen Standpunkt lediglich als Inkonsequenz, wenn er an diesem einzigen letzten Punkte die Entscheidung darin sucht, was durch Beobachtung feststellbar sei oder nicht. Beobachtung vermöchte wahrlich auch nicht die Veronesesche Stetigkeit zu begründen, und doch zögert er keinen Augenblick, sie seiner „Grundform“ zuzuschreiben und sie damit wie durch einen Machtspruch auf alle räumlichen Konstruktionen auszudehnen, ohne die geringste Sorge um die mögliche oder nicht mögliche Bestätigung durch Beobachtung. Und doch würde die Auslassung dieser so viel einschließenden Bedingung seine Voraussetzungen sehr vereinfachen, gewiß auch neue Möglichkeiten sogenannter „Geometrien“ eröffnen, die sicher auch irgendwelchen technischen Wert haben oder noch gewinnen könnten. Die Rücksicht auf die nichteuklidischen Geometrien dürfte übrigens in dieser Frage für Veronese um so weniger ausschlaggebend sein, da er selbst gar kein Bedenken trägt, durch seine Voraussetzungen über die Grundform das Lobatschefskijsche System von vornherein auszuschließen. Das Riemannsche System aber bleibt genau nur dann möglich, wenn die Gerade einfach geschlossen angenommen wird (285); und dieser Annahme gibt Veronese einzig darum den Vorzug, weil sie die beiden Fälle der euklidischen und der sphärischen Geometrie zusammenfaßt, die sphärische aber für das Studium der euklidischen gewisse Hilfen bietet; also nur aus einer technischen Rücksicht.

Eine solche kann für uns hier den Ausschlag nicht geben. Sondern uns müssen die Eigenschaften des Grundgebildes

des Raumes rein logisch aus den fundamentalen Voraussetzungen hervorgehen, die überhaupt nur eine streng einzige Gesetzesordnung des Miteinander möglich machen. Nun erwies sich schon bei der reinen Zahl und der Zeit die Positionsbeziehung als nicht minder reiner und eindeutiger Urbegriff einer gesetzlich bestimmten Ordnung wie die Maßbeziehung. Die große Mehrzahl der Mathematiker sieht die letztere als *a priori* bestimmbar an, weil die vollkommene Identität der Gesetze des Maßes mit denen der reinen Zahl nicht leicht übersehen werden konnte; das Messen ist geradezu ein Zählen. Die Positionsbeziehung dagegen hält man, wie es scheint, ebenso allgemein für abhängig von Beobachtung und Erfahrung, also *a priori* nicht eindeutig festgelegt, unter bloß logischem Gesichtspunkt also frei verfügbar. Wir behandeln beide streng auf gleicher Linie, nicht weil wir „Böotier" sind, die es nicht über sich bringen, von der mehr als 2000jährigen Tradition des Euklid, oder von dem sinnlichen Bilde der beiderseits ins Unendliche fortlaufenden Geraden, sich zu befreien; sondern weil für Richtung und Abstand, Positions- und Maßbeziehung die logischen Bedingungen völlig gleich liegen. Die Bestimmbarkeit von Abständen fordert einen Grundabstand, der folglich als einziger bestimmt sein muß durch das bloße Gegebensein zweier Punkte als Anfangs- und Endpunkt; nicht anders als die Bestimmbarkeit der Zahl eine eindeutig bestimmte Grundzahl, die Eins, erfordert, deren Maßwert als unverrückbar fest bestimmt angenommen werden muß bloß damit, daß die Endpunkte der Zahldistanz, die sie vertritt (0 und 1 als Endpunkte der Zahlstrecke $\overline{0\,1}$) bestimmt sind. Aber schon in dieser Grundrelation selbst, auf der alle Zahlbeziehung sich aufbaut, liegt zugleich und mit gleichem logischem Zwang die Einzigkeit der Positionsbeziehung zwischen denselben und überhaupt zwischen irgendwelchen zwei Punkten, deren Ausdruck im Zeichensystem der Mathematik das Plus und

Minus ist. Diese Einzigkeit der Positionsbeziehung also, behaupten wir, gilt eben damit notwendig auch für das Grundgebilde des Raumes, wie ebenfalls der Zeit. Denn alle Möglichkeit der Bestimmung von Position wird aufgehoben, wenn nicht eine Grundbeziehung der Position gesetzt wird, die als einzige bestimmt sei durch das bloße Gegebensein von zwei Bezugspunkten, ebenso wie alle Bestimmbarkeit der Distanz aufgehoben wird, wenn nicht eine Grunddistanz angenommen wird als einzig bestimmt durch das bloße Gegebensein zweier Endpunkte. Warum gerade zweier? Nicht weil zwei die wenigsten sind, wenn überhaupt eine Relation stattfinden soll, und diese Sparsamkeit in Voraussetzungen an sich ein unbedingter Vorzug wäre; allgemein nicht erst aus einem teleologischen Grunde; teleologische Erwägungen können keine Geltung beanspruchen vor den logischen; auch hat eine Minimumaufgabe in Hinsicht der Voraussetzungen der Geometrie erst einen Sinn, wenn wenigstens die letzten Voraussetzungen, die eine Geometrie überhaupt nur möglich machen, schon feststehen, nicht aber, wenn selbst nach den letzten ihrer Voraussetzungen erst die Frage ist. Sondern das allein kann hier entscheiden, daß eine gesetzmäßige und zwar einzige Ordnung verlangt ist, die aber sich allein aufbauen kann auf dem Prinzip des Fortbestandes immer derselben letzten Grundrelation. Diese muß durch zwei Elemente bestimmt gedacht werden, weil jede größere Anzahl von Elementen, um selbst ihrer Relation nach bestimmt zu sein, die durch zwei Elemente bestimmte Grundrelation voraussetzen würde. Darum ist es in letzter, grundlegender Betrachtung nicht angängig, die zirkuläre Anordnung zugrunde zu legen und dann die lineare etwa als deren Grenzfall (so wie die Euklidische Geometrie als Grenzfall der sphärischen) hinterherkommen zu lassen. Das läßt sich übrigens auch direkt einsehen: die zirkuläre Anordnung stellt die Forderung, Relationen ab, ba zugleich als einander wie

Plus und Minus entgegengerichtet (weil in *b* zusammenstoßend) und auch gleichgerichtet anzusehen. Das muß wohl überhaupt möglich sein, da sonst die zirkuläre Änderung überhaupt wegfiele; aber es ist nur als abgeleiteter Fall, unter Voraussetzung einer Richtungsänderung verständlich, als Urfall dagegen unverständlich, denn für diesen muß unter denselben Elementen die Positionsbeziehung (der Plus- und Minussinn) auf einzige, ausschließende Weise feststehen, weil, ehe von einer Mehrheit oder Änderung der Positionsbeziehung die Rede sein kann, der Einheits-, der Identitätssinn der Position feststehen muß.

Es wäre für die Verständigung über diese Frage schon viel gewonnen, wenn man sich allgemein davon überzeugen würde, daß doch der Begriff der Richtung ebenso wie der aller sonstigen Merkmale der Zahl und Größe der Bestimmung des reinen Denkens unterliegt; daß man also, um ihn auf bestimmte Weise aufstellen zu können, ja zu müssen, nicht auf besondere Erfahrungen oder eine denkfremde „reine Anschauung" zu warten hat, deren vermeinte Bezeugungen, um verstanden zu werden, doch die Grundbegriffe des reinen Denkens verlangen würden. Die Richtung ist so gut wie der Abstand ein reiner Denkbegriff; auch der Abstand könnte es nicht sein, ohne daß zugleich die Richtung es ist. Denn ein Abstand ist nur bestimmt, indem zugleich die Richtung bestimmt ist. Galt dies schon für die reine Zahl, so muß es erst recht für die Zeit und den Raum gelten. Setzt man, wie am auffälligsten Helmholtz [*74, 75*], an die Stelle des Begriffs des Geraden den des Kürzesten, so spricht man entweder nicht mehr vom Raume, sondern von Konstruktionen im Raum, wobei der Raum selbst schon vorausgesetzt werden müßte, oder man führt einen nicht bestimmten, ohne die Grundlage der Richtungsbestimmtheit überhaupt nicht bestimmbaren Begriff räumlicher Entfernung ein. Es gibt kein logisch gegründetes Urteil über Distanz ohne Voraussetzung der Richtungsbestimmtheit. Man versucht dann, sich eine Zahl ohne Richtung zu denken. Der Versuch muß mißlingen; Zahl ohne Richtung ist nach unseren Begriffen überhaupt nichts, vor allem nicht Größe; der Abstand aber soll Größe sein.

Das ist, solange man sich, von metaphysischen Skrupeln unbeirrt, allein an die Begriffe selbst hält, so klar, daß es gar nicht zu verstehen wäre, wie es hat übersehen werden können, wenn man nicht die Macht eben jener metaphysischen Vorurteile kennte, durch die allein diese Frage hat verwirrt werden können: der alten, schier unausrottbaren Vorurteile des Empirismus und Realismus. Man kommt nicht davon los, daß doch die Dinge an sich existieren und unsere Begriffe auf dem Wege der Erfahrung von ihnen abgelernt sein müßten. Wo es zumal, wie beim Raume, um die „Dinge außer uns" zu tun ist, erscheint es dem natürlichen Dogmatismus als etwas Ungeheuerliches, daß wir ihre Eigenschaften von uns aus voraus sollten festsetzen und gar die Gesetze unseres Denkens den Dingen selbst aufzwingen können. Aber ist es denn so schwer, sich klar zu machen, daß Existenz ein Begriff, das Existenzurteil ein Urteil ist wie jedes andere, daß folglich beide keinen anderen letzten Gesetzen unterstehen können als denen des Begriffs und des Urteils überhaupt, mit einem Worte, des Denkens? Hat denn schon jemand Existenz gesehen oder getastet? Ich weiß von ihr nur, daß sie ausgesagt wird; und wenn ich den Inhalt dieser Aussage nicht soll denken dürfen, so bleibt mir nichts als ein Schall ohne Sinn. Besonders irreleitend mußte hier das Beispiel so großer, zweifellos philosophisch gerichteter mathematischer Denker wie Gauß, Riemann und Helmholtz wirken, welche alle den Raum der Geometrie ganz und gar als ein Objekt der Physik ins Auge fassen, dessen Eigenschaften durch Experiment festgestellt werden müßten; ohne auch nur zu fragen, ob dies Experiment denn anders als im Raum, somit unter Voraussetzung eben der Grundeigenschaften des Raumes, die das

Experiment feststellen soll, ausführbar wäre. Aber die Wissenschaft ist doch auch über jene Großen hinausgeschritten. Wenigstens heute müßte endlich volle Klarheit darüber gewonnen sein, daß auf dem Wege des Experiments hier eine Entscheidung schlechthin ausgeschlossen ist, nachdem über und über bewiesen ist [1]), daß nach geeigneter Wahl der physikalischen Voraussetzungen jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie in Einklang gebracht werden kann. Also muß die Wahl der Voraussetzungen für die Geometrie jedenfalls unabhängig von physikalischer Empirie getroffen werden. Ist aber das einmal klar, so muß man auch begreifen, daß der Raum, desgleichen die Zeit, ganz so wenig wie die Zahl eine gegebene Existenz, sondern vielmehr eine grundlegende Bedingung der Existenzbestimmung bedeutet, über deren Eigenschaften allein nach den Gesetzen des Denkens von Existenz zu entscheiden ist. Existenz nun bedeutet Einzigkeit der Bestimmung; diese überhaupt zu ermöglichen, war die erste Voraussetzung die einzige, allbefassende Zeit; die zweite ist der aus gleicher Notwendigkeit nur einzig und allbefassend zu denkende Raum. Wie nun die Eigenschaften der Zeit sich rein aus der Forderung einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Nacheinander ergaben, so müssen mit gleicher Notwendigkeit die Eigenschaften des Raumes hervorgehen aus den logischen Erfordernissen einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Miteinander. Diese Gleichheit der letzten Begründung erklärt die völlige Gleichartigkeit der logischen Gestalt des Grundgebildes des Raumes, der geraden Linie, mit dem der Zeit und der Zahl. Es bleibt nur übrig, auf derselben Grundlage die Gesetze

---

1) Es ist ein großes Verdienst von H. Poincaré (*147*, S. 54ff., 72, 82, 86 und durchweg), dies nachdrücklich ausgesprochen und hell beleuchtet zu haben. Nach ihm ist es „unmöglich, mit dem Empirismus in der Geometrie einen vernünftigen Sinn zu verbinden" (81).

abzuleiten für das, was wir bisher bei Seite gelassen haben: die Richtungen und Dimensionen des Raumes.

§ 6. (*Der dreidimensionale Euklidische Raum.*) Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ergab sich, daß die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen kraft gedanklicher Notwendigkeit an sich besteht. Folglich ist sie auch für das Denken der Existenz, und zwar von dessen ersten Voraussetzungen an, zugrunde zu legen. Warum sie für die Zeit nicht, dagegen notwendig für den Raum besteht, dafür haben wir den logischen Grund bereits aufgewiesen: die Zeit entspricht, nach ihrer Urbedeutung der Auseinanderstellung, der nur einzig gerichteten Reihenordnung, also der bloßen Stellenzahl, der Raum, nach seiner Urbedeutung der Zusammenordnung, der Zahl in ihrer vollen Entfaltung, d. h. der komplexen Zahl. Also findet die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen, es findet der Begriff der Richtungsverschiedenheit und Richtungsänderung (oder des Winkels) mit gleicher Notwendigkeit wie der der Größenverschiedenheit und Größenänderung auf den Raum Anwendung. Es handelt sich nur noch darum, das genaue Gesetz und die etwaige obere Grenze für die damit gegebene Erweiterung des Raumbegriffs festzusetzen.

Die Aufgabe ist, mit anderen Worten: zu zeigen, wie, nachdem durch irgendwelche zwei Elemente (0 und 1) eine einzige als Grundrichtung bestimmt ist, von dieser aus die Allheit der Richtungen im Raum und damit zugleich der räumlichen Dimensionen gegeben ist.

Nun scheint in abstrakter Erwägung der Fortgang ins Unendliche hier nicht ausgeschlossen werden zu dürfen. Die bloßen Begriffe der Richtung und Dimension setzen rein aus sich dem Fortgang eine obere Grenze nicht. Daher ist es verständlich, daß die Mathematik, sobald sie darüber hinauskam, an eine bestimmte Zahl von Dimensionen als die durch die Dinge allein gegebene und darum allein interessierende sich prüfungslos zu binden, sobald sie lernte, die Begriffe Richtung und Dimension als reine Denkbegriffe in Freiheit zu handhaben, auch den Mut der Konsequenz bewies, ihre Betrachtung sogleich auf eine unbeschränkte Zahl von Richtungen und also Dimensionen auszudehnen, wie es in voller Allgemeinheit H. Graßmann vollbracht hat. Indessen ist eine Beschränkung unabweislich gefordert, wenn es sich nicht um bloße abstrakte Denkbarkeiten, sondern um die Möglichkeit von Existenzbestimmung handelt, denn damit ist die neue Bedingung gestellt, daß die Richtungen und Dimensionen im Raume in einer geschlossenen, von vornherein nur als einzig denkbaren systematischen Verknüpfung miteinander stehen müssen. Daß die bloße Mathematik auf eine solche Beschränkung nicht verfiel, ist begreiflich; hat sie doch, als „reine" oder „freie" Mathematik, überhaupt nicht die Aufgabe, selbst Bestimmungen auch nur allgemeinster Art über Existenz zu treffen, sondern die Methoden allseitig zu entwickeln, die dann einer anderen Wissenschaft, der Physik, zur Bestimmung der Existenz dienlich sein mögen. Und gerade je entschiedener wir die volle Unabhängigkeit der Mathematik von der Physik betonen, um so weniger werden wir uns weigern, anzuerkennen, daß reine Mathematik, bloß als solche, in der Behandlung der Begriffe Richtung und Dimension an keine Schranke, die lediglich aus dem Bedürfnis der Existenzbestimmung fließt, gebunden sei. Jetzt aber ist die Frage eben nach den Bedingungen einer möglichen Existenzbestimmung; es ist die Frage nicht nach abstrakten Mannigfaltigkeiten, nach einem bloßen Allgemeinbegriff „möglicher", d. h. widerspruchsfrei denkbarer und gesetzlich darstellbarer „Räume", sondern nach dem Raum, dem einzigen der Existenz, der als solcher auch nur auf einzige Weise bestimmt gedacht werden kann. Diese neue Bedingung der Einzigkeit fließt also nicht mehr aus den Begriffen reiner Mathematik; auch nicht einer abstrakten

Logik, die nach nichts als den Bedingungen der Denkbarkeit überhaupt fragt, also erst recht die äußerste Weite der Bestimmungen sich offenhalten muß; sondern der konkreten, der transzendentalen Logik Kants, mit anderen Worten: aus den Gesetzen des Existenzurteils. Diese bilden aber nicht nur ein, sondern das letzte, alles in sich zusammenfassende Problem der echten Logik, die eben Logik der Existenz sein muß. Denn das Denken will zuletzt Denken der Existenz sein; auf nichts als sie zielt es überhaupt; richtiger: Existenz ist nur der Ausdruck dessen, worauf als letztes alles Denken abzielt. Denn Denken heißt Bestimmen, und Existenz bedeutet die letzte Bestimmung, die, in der nichts unbestimmt bliebe. Darin liegt schon die Forderung des einzigen, mithin geschlossenen Zusammenhanges des Existierenden, der als Grundlage den einzigen, geschlossenen Zusammenhang der Stellenordnung des Existierenden, also des Raumes, wie andererseits der Zeit, fordert. Damit aber ergibt sich für die Aufstellung der Richtungen und Dimensionen des Raumes die unerläßliche Forderung einer Beschränkung der Dimensionenzahl. Denn Dimensionen sind nichts anderes als Bestimmungsstücke; aus unendlichen Bestimmungsstücken aber wäre überhaupt nichts bestimmbar.

Für diese geforderte Beschränkung aber vermag ich bisher nur eine Möglichkeit abzusehen, nämlich durch die Voraussetzung, daß keine größere Zahl von Dimensionen der Existenzbestimmung zugrunde zu legen sei, als notwendig und hinreichend ist, einen einzigen und damit geschlossenen, zugleich homogenen und stetigen Zusammenhang räumlicher Bestimmung herzustellen. Aus dieser Bedingung aber ergibt sich, sobald die Stetigkeit, wie es notwendig ist, auf den Zusammenhang der Richtungen miterstreckt wird, eine bestimmte, und zwar genau die Beschränkung, welche von der Geometrie Euklids und der Naturwissenschaft Newtons ohne Bewußtsein oder doch ohne Angabe des Grundes angenommen worden ist: die

Beschränkung auf drei Dimensionen, und zwar „Euklidischer“ Konstitution.

Der Beweis ist einfach. Durch zwei Elemente, 0 und 1, ist unseren Voraussetzungen zufolge der „Sinn“ von 0 nach 1 (Plussinn) und mit diesem der Gegensinn von 1 nach 0 oder von 0 nach 1′ (Minussinn) auf einzige Weise bestimmt. Von der durch diese beiden Grundsinne definierten einzigen „Richtung“ verschiedene, von demselben Punkte ausgehende Richtungen existieren; aber sie können nicht um eine größere Richtungsdifferenz als die des Gegensinns vom Grundsinn verschieden sein; denn die Richtungsänderung ist (wie bereits festgestellt wurde) ihrer Natur nach zirkulär. Folglich sind alle Unterschiede der von 0 ausgehenden Richtungen beschlossen zwischen dem Richtungsunterschied 0 und einem Maximum des Richtungsunterschiedes, oder die mögliche Richtungsänderung hat ihre obere Grenze in einer Richtungsänderung 1, welche der reinen Umkehrung des Richtungssinnes entspricht. Definiert man nun die kontinuierliche Richtungsänderung zwischen Grund- und Gegensinn als Drehung, so kann die Drehung wieder verschiedenen Sinn und verschiedene Richtung haben, es ist aber wieder die Drehung von identischer Richtung, welche die Ebene definiert, zugrunde zu legen, und es haben die möglichen Änderungen der Drehungsrichtung wieder ein Maximum 1 der Änderung der Drehungsrichtung, nämlich an derjenigen Änderung derselben, welche den ursprünglichen Drehungssinn in den Gegensinn überführt. Indem nun diese Änderung, d. h. die Drehung der Ebene um die Gerade als Achse, wiederum homogen und stetig zu vollziehen ist, ergibt sich der homogene und stetige dreidimensionale, d. h. der Euklidische Raum. Auf mehr Dimensionen aber führt unser Ableitungsprinzip nicht. Denn nach demselben sind neue Dimensionen einzuführen, wenn und nur wenn solche erforderlich sind, um gegebene Richtungsgegensätze in stetigem Übergang zu vermitteln. Nun hat zwar die

Drehung der Ebene im Raum wiederum zwei entgegengesetzte Sinne, zwischen denen eine stetige Vermittlung gefordert ist. Aber diese verlangt nicht eine neue Dimension, denn die Ebene hat im dreidimensionalen Raum zwei fundamentale Drehungen, nämlich nach ihren zwei Dimensionen (in einfachster Darstellung: um zwei aufeinander senkrechte Achsen), von welchen, wie man sich leicht überzeugt, jede für die andere die erforderliche stetige Vermittlung herstellt; z. B. die Vorwärtsdrehung der Ebene um die Horizontalachse wird in die Rückwärtsdrehung stetig übergeführt durch die Drehung der Ebene um die Vertikalachse, die Rechtsdrehung um die Vertikalachse in die Linksdrehung durch die Drehung um die Horizontalachse.[1])

Mit dem absoluten Begriff der Geraden oder der Richtung, der dieser Konstruktion zugrunde gelegt wurde, ist die Euklidische Verfassung des so konstruierten Raumes gegeben zufolge der Bedingung der strengen Homogeneität, nach welcher jede von einem Punkte aus mögliche Konstruktion ebenso von jedem Punkte aus möglich sein, oder anders ausgedrückt, an allen Stellen des Raumes dieselben Relationen obwalten müssen. Durch irgendwelche zwei Punkte des Raumes ist dann eine Gerade bestimmt; zwei Gerade haben nur einen oder alle Punkte gemein. Die Euklidische einzige Parallele ist unmittelbar damit gegeben, daß auch von jedem Punkte aus dieselben und nur dieselben Richtungen existieren wie vom Ausgangspunkte der Konstruktion, und jede von diesen nur einmal.

1) Vgl. die Abhandlungen *127*, *128*, *130* sowie *133*. Diese Deduktion berührt sich, aber deckt sich nicht mit der von Pietzker [*142*], von der sie sich übrigens auch dadurch unterscheidet, daß sie nicht die logische Unmöglichkeit eines Raumes von mehr als drei Dimensionen bewiesen haben will; sondern nur: daß das Hinausgehen über drei Dimensionen (und zwar Euklidischer Konstitution) in unendliche Unbestimmtheit führt, also eine Existentialbestimmung unmöglich machen würde.

Zwei gleich gerichtete Gerade treffen sich nicht, denn sie bilden keinen Winkel. Es müssen von allen Punkten die gleichen Konstruktionen auch zu beliebigem Maßstab ausführbar sein, weil die Maßbestimmung auf die Richtungsbestimmung keine ändernde Wirkung üben kann. Im vollkommen homogenen Raum muß jede Distanz jede vertreten können; ein absoluter (kleinster oder größter) Abstand, eine Raumkonstante, ein Krümmungsmaß verschieden von 0 ist durch die streng verstandene Homogeneïtät schon ausgeschlossen; wie auch eine Endlichkeit des Raumes.

Dies alles folgt aus der Grundbedingung unserer Konstruktion, nämlich der geforderten Einzigkeit und begrifflichen Geschlossenheit des räumlichen Zusammenhanges; freilich nicht aus den bloßen abstrakten Begriffen Abstand und Richtung. Diese würden von sich aus für die Zahl der Dimensionen keine Beschränkung ergeben; mit dem Raum von n Dimensionen aber sind auch die verschiedenen Fälle nichteuklidischer Räume von $n - 1$ Dimensionen, und ist unweigerlich auch die unbeschränkte Veränderlichkeit der sogenannten „Krümmung" des Raumes gegeben. Nichts davon ist etwa logisch widersprechend; Räume von beliebiger Dimensionenzahl und damit ohne weiteres auch nichteuklidische Räume konstanter oder nicht konstanter Krümmung sind nicht nur ohne Widerspruch denkbar, sondern aufs genaueste begrifflich darstellbar und in allen ihren Grundeigenschaften und Konsequenzen mathematisch berechenbar. Das allerdings könnte heute nur ein Böotier leugnen wollen. Es ist also gegen die Mathematik der allgemeinen „Räume" mit unseren obigen Aufstellungen durchaus nichts gesagt. Abgelehnt wird durch die Konsequenz unserer Voraussetzungen nur die Metaphysik der allgemeinen Räume, die sogenannte „Metageometrie". Darüber aber tröstet man sich leichter, wenn man vor Augen sieht, daß diese Metaphysik nichts weniger als eine eindeutig klar entwickelte und sicher fortschreitende

Wissenschaft, daß sie vielmehr fast bei jedem ihrer Vertreter eine andere und nirgends in auch nur erträglicher Strenge begründet, sondern in der Regel bloß einfach behauptet ist. Gemeinsam ist diesen Behauptungen nur zweierlei: die im schlechten Sinne apriorische Voraussetzung des Empirismus und Realismus überhaupt, und, in seltsamem Kontrast dazu, die Behauptung von Möglichkeiten als realen, die aller empirischen Entscheidung ihrer Natur nach entzogen sind.

Einige kritische Bemerkungen über die Irrungen der Metaphysik der nichteuklidischen Räume mögen denn wohl hier am Platze sein.

§ 7. (*Die Metaphysik der nichteuklidischen Räume. „Metageometrie“.*) Es ist eine bei Mathematikern und Philosophen noch immer nicht selten begegnende Meinung, daß durch die nichteuklidische Geometrie Kants Apriorismus der Raumanschauung widerlegt, der Empirismus endgültig bewiesen sei. Ich habe zu Anfang gesagt, daß und weshalb ich in der apriorischen Raumanschauung Kants das letzte Wort in der Raumfrage nicht sehe. Aber durch das Faktum der nichteuklidischen Geometrie wäre sie nicht widerlegt. Wenn es des Beweises noch bedurfte, daß die Euklidische Vorstellung des Raumes eine absolute Denknotwendigkeit nicht ist, so ist dieser Beweis durch die Aufzeigung und den Ausbau widerspruchsloser, also denkmöglicher nichteuklischer Raumsysteme freilich erbracht. Aber so wichtig dieser Beweis sonst sein mag, für Kant bedurfte es seiner nicht, da eben der Satz, daß der Euklidische Raum eine absolute Denknotwendigkeit nicht sei, eine der wesentlichen Voraussetzungen seiner These ist, daß er eine dem Menschen eigentümliche, für andere denkende Wesen vielleicht nicht bestehende Anschauungsnotwendigkeit sei. Daß wir aber die nichteuklidischen Räume uns sogar zur Anschauung zu bringen vermöchten, hat zwar Helmholtz beweisen wollen, aber dieser Beweis — der mit der Mathematik der nichteuklidischen Räume nichts zu tun hat, vielmehr eine rein psychologisch-physiologische Frage betrifft — ist heute wohl allgemein als mißglückt erkannt und dürfte kaum noch ernstliche Verteidigung finden. Die „Anschauung“ sphärischer und pseudosphärischer Räume, die uns Helmholtz hat verschaffen wollen, ist ganz ersichtlich nichts als eine „Abbildung“ oder Projektion derselben auf den Euklidischen Raum; und dasselbe gilt ausnahmslos von allen Veranschaulichungen nichteuklidischer Räume, die je versucht worden sind oder versucht werden konnten. Daß solche „Abbildungen“ möglich sind, hat die große Bedeutung, daß die Gesetze der nichteuklidischen Geometrien einen Wert und eine unzweifelhafte Anwendbarkeit besitzen für viele komplexere Probleme des Euklidischen Raumes; wie besonders schön und vielseitig Wellstein [*181*] gezeigt hat. Damit gewinnt die nichteuklidische Mathematik, rein als solche, ohne Zweifel eine hohe und sehr reelle Bedeutung. Nur sind ihre Grundgebilde dann etwas gänzlich anderes, als man sonst unter Punkten, Geraden, Ebenen verstanden hat; es können irgendwelche räumlichen Gebilde von beliebig hoher Komplexion sein, unter denen nur (vollständig oder teilweise) dieselben Beziehungen nochmals gelten wie unter den Punkten, Geraden, Ebenen, für die sie ursprünglich aufgestellt wurden. Es ist technisch zweifellos von sehr großer Bedeutung, daß auf solche Weise die ganze Geometrie auf höheren Stufen nochmals und noch unendlich vielmals gilt. Aber es sind durchaus nur komplexere Gebilde des Euklidischen Raumes, von denen sie gilt, nicht solche einer überhaupt anders gearteten Räumlichkeit. Als alleinige für uns anschaubare Raumordnung ließe sich darum nicht minder die Euklidische festhalten. Also mit dem Sachbestand der Geometrie, nicht bloß, wie er zu seiner Zeit vorlag, sondern auch, wie er heute bekannt ist, wäre Kants These an sich nicht unvereinbar.

Unhaltbar ist diese These, in der soeben ausgesprochenen, übrigens noch aus seiner vorkritischen Zeit (der Dissertation von 1770) stammenden Fassung, vielmehr gerade zufolge der berichtigten Grundsätze der von demselben Kant geschaffenen transzendentalen Methode. Daß der Raum nur die „subjektive Bedingung der Sinnlichkeit" sei, „unter der allein uns äußere Anschauung möglich" ist; daß er an der besonderen „Beschaffenheit unserer Sinnlichkeit", an der „Rezeptivität des Subjekts, von Gegenständen affiziert zu werden" hänge, somit „*a priori* im Gemüte gegeben" sei; daß man daher „nur aus dem Standpunkte eines Menschen" von diesem Raume reden könne, während wir „von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen können, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien" [1]), sind Thesen, die auf dem Wege transzendentaler Begründung nicht nur nicht erwiesen oder je erweislich, sondern dem reinen Sinne der transzendentalen Methode geradezu widersprechend sind, indem die Bedingungen zur Möglichkeit wissenschaftlicher Erfahrung (Mathematik und mathematischer Naturwissenschaft) nicht in dieser selbst, als tatsächlich in ihr wirkend und zugrunde liegend aufgewiesen, in rein inhaltlichen Bestimmungen festgelegt und auf ihre letzten, nicht minder rein inhaltlichen Voraussetzungen reduziert, sondern gleichsam hinter der Erfahrung, in der eigenartigen Beschaffenheit eines erst wie außer der Welt stehend, dann in sie eintretend gedachten „Subjekts" unserer Anschauungen gesucht werden. Auch als bloß psychologische Hypothese wäre eine solche Aufstellung nicht brauchbar; während die allgemeine Voraussetzung der Ursprünglichkeit der Raumvorstellung überhaupt sich allerdings auch psychologisch wohl bewährt.

Dagegen bleiben die begründenden Sätze nach unseren methodischen Voraussetzungen in voller Kraft: 1. Der

---

1) Kr. d. r. V. § 3. „Schlüsse aus den obigen Begriffen", b.

Raum ist „kein empirischer Begriff, der von äußeren Erfahrungen abgezogen", „aus den Verhältnissen der äußeren Erscheinungen durch Erfahrung erborgt" wird, sondern „diese äußere Erfahrung ist selbst nur durch gedachte Vorstellung allererst möglich"; 2. er ist „kein diskursiver . . . Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt", sondern eine „wesentlich einige" Vorstellung und in diesem, rein objektiv bestimmten Sinne ursprüngliche „Anschauung"; und 3. die Sätze von ihm haben nicht bloß „komparative Allgemeinheit" durch Induktion, sondern besitzen eine strenge, obwohl nicht analytisch, nach dem Satze des Widerspruchs zu begründende, sondern synthetische Notwendigkeit — deren transzendentalen Grund aufzuweisen aber nun erst die Aufgabe ist; eine Aufgabe, die durch alle diese wenn noch so richtigen tatsächlichen Festsetzungen erst gestellt, nicht gelöst ist.

Die Lösung, die wir fanden, bestätigt Kants Auffassung insoweit, als auch nach unserem Ergebnis der Euklidische Raum weder eine absolute Denknotwendigkeit noch eine reine Erfahrungstatsache, oder etwa eine Hypothese ist, deren Wahrheit oder Unwahrheit der Entscheidung der Erfahrung unterläge; sondern eine „notwendige" Voraussetzung in dem bestimmten Sinne, daß er bedingend ist für „mögliche Erfahrung", bestimmter: für die eindeutige gesetzmäßige Bestimmbarkeit von Existenz in der Erfahrung. Er beruht also nicht auf einer Notwendigkeit des Denkens überhaupt, wohl aber des Erfahrungsdenkens, des Denkens von Existenz. Das Unterscheidende liegt in dem Hinzutritt der Bedingung der Einzigkeit, nicht irgendwelcher besonderer räumlicher Bestimmungen, sondern des Zusammenhanges aller der Bestimmungen, die mitsammen die Koexistenz der Dinge gesetzmäßig darstellbar machen. Sofern in Kants Begriff der „Anschauung" oder Gegebenheit diese Forderung der Einzigkeit der Bestimmung wesentlich zugrunde lag, bleibt auch richtig, daß der Euklidische

Raum eine notwendige Bedingung nicht des (allgemeinen, diskursiven) Denkens, sondern der „Anschauung“ sei. Aber die Forderung der Einzigkeit ist selbst eine Forderung des Denkens, nur eben nicht des Denkens überhaupt, sondern des bestimmtesten Denkens, des Denkens der Existenz, welches beruht auf dem Zusammentritt aller in besonderen Richtungen des Denkens waltenden Grundgesetzlichkeiten, die je für sich nur für einen besonderen Bereich von Denkgegenständen, nicht aber, ohne die anderen, für den Gesamtgegenstand des Denkens die zureichenden Voraussetzungen bieten. So bleiben wesentliche, man darf vielleicht sagen, die wesentlichen Züge der Kantischen Lehre bestehen; aber jene ursprüngliche — wie gesagt, noch aus der Zeit vor der Entdeckung der transzendentalen Methode stammende, nachher von Kant nicht genügend dieser gemäß nachgeprüfte und berichtigte — Formulierung derselben ist ohne künstliche Umdeutung nicht haltbar, wird also besser ganz aufgegeben.

Dagegen ist die dieser gegenüberstehende These des Empirismus und Realismus nicht etwa ein bewiesenes Ergebnis der nichteuklidischen Raumtheorien, sondern eine Voraussetzung — nicht dieser mathematischen Theorien, sondern einiger der Forscher, die diese Theorien begründet haben. Sie konnten es nicht wohl vermeiden, sich auch über die Metaphysik des Raumes Gedanken zu machen, und diese Gedanken bewegten sich zunächst in der Richtung des Empirismus. Nicht das ist sehr zu verwundern; eher das andere: daß man gerade mit den Argumenten den nur empirischen Charakter der Euklidischen Raumvorstellung hat begründen wollen, aus denen in Wahrheit das Gegenteil folgt. Sollten unsere Begriffe vom Raum nur empirisch sein, so müßten sie nicht bloß aus der Erfahrung uns erwachsen, sondern durch Erfahrung zu bestätigen oder zu widerlegen sein. Nun ist zwar „daran gar kein Zweifel“, daß diese, wie überhaupt alle unsere theoretischen Grundbegriffe allein in der Erfahrung ihren Gebrauch haben und allein durch diesen Gebrauch sich in uns haben entwickeln und zu bestimmtem, gesichertem Bewußtsein erheben können. Aber das gilt ebenso von den letzten Voraussetzungen der Arithmetik und selbst der allgemeinen Logik, die man doch darum nicht für bloß empirisch ansehen kann. Ihre Gültigkeit kann offenbar nicht von der Erfahrung abhängen, weil die Erfahrung, die sie beweisen oder widerlegen sollte, selbst ohne sie nicht möglich wäre. Es fragt sich aber, ob nicht ebendies auch von der Gesetzlichkeit der Raumordnung gilt.

Wie sollte über die Euklidische oder nichteuklidische „Beschaffenheit" des Raumes unserer Erfahrung — diese Erfahrung selbst entscheiden? Die Erfahrungen, welche diese Entscheidung erbringen sollten, könnten doch nur empirische Messungen im Raume sein. Solche aber fußen unvermeidlich auf Voraussetzungen physikalischer, also selbst empirischer Art, wie Starrheit der Körper, Geradheit der Trägheitsbahnen derselben sowie der Bahnen der Lichtfortpflanzung. Aber diese Voraussetzungen setzen schon ihrerseits eine bestimmte Geometrie, in ihrer gewöhnlichen Fassung die Euklidische voraus; wie sollten also solche Messungen entscheiden können über die Gültigkeit einer Geometrie, die ihre eigene Voraussetzung ist? — Man denkt sich, es sei dies in der Weise möglich, daß die Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie, weil selbst aus unserer gewöhnlichen physikalischen Empirie geschöpft, im Bereiche der gewöhnlichen physikalischen Empirie zwar sich bewähren, über gewisse Grenzen hinaus aber, namentlich auf sehr große räumliche und zeitliche Entfernungen sich nicht mehr richtig erweisen könnten, indem, wenn wir sie auch da noch unserer Theorie der Erscheinungen zugrunde legen würden, Widersprüche oder wenigstens Unzuträglichkeiten zutage treten würden. In der Tat ist der Fall zwar bisher nicht eingetreten, aber an sich wohl denkbar, daß z. B. auf Fixsternweiten die Winkelsumme in Dreiecken, die unter den sonst geltenden Voraussetzungen gemessen würden, sich ungleich zwei Rechten fände. Aber es wären dann doch nicht die Eigenschaften des Raumes, welche die Messung festgestellt hätten, sondern die Eigenschaften physikalischer Körper oder ihre Bewegungen. Also wären nach den Ergebnissen solcher Messungen nicht die Voraussetzungen über die Raumgesetze zu ändern, sondern es wäre das einzig richtige Vorgehen, vielmehr über die Bewegungen der physikalischen Körper andere Aufstellungen als die bisherigen zu machen. Und zwar würde man, da wiederum die Gesetze der Mechanik fundamentaler sind als die der Optik, am ehesten die optischen Voraussetzungen zu ändern, etwa die Lichtfortpflanzung als nur annähernd, nicht exakt geradlinig anzunehmen haben. In jedem Fall würde durch geeignete physikalische Annahmen das Ergebnis der Messung sich mit den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie in Einklang bringen lassen.

Allerdings ist auch der Fall denkbar, daß gewisse durchgängig nach bestimmtem Gesetz von den bisherigen Annahmen abweichende physikalische Beziehungen sich am bequemsten durch Modifikation der geometrischen Voraussetzungen repräsentieren ließen. In der Macht der Rechnung liegt das eine wie das andere, und wenn der letztere Weg irgendwelche technischen Vorteile bietet, so wäre es ja töricht, ihn nicht zu benutzen. Aber über eine „wirklich" nichteuklidische Beschaffenheit des Raumes wäre dadurch dennoch nicht entschieden. Durch bloßes Umrechnen kann einmal über Wirklichkeiten nichts ausgemacht werden. Über Wirklichkeit entscheidet Beobachtung und Experiment; aber der reine Raum der Geometrie ist eben keine Wirklichkeit, an die Beobachtung und Experiment überhaupt herankönnten. Er selbst unterliegt nicht empirischer Messung; er ist für jede Art empirischer Bestimmung schlechterdings unfindbar[1]), ein echtes Demokritëisches μὴ ὄν. Aber er ist nur um so mehr eine reine Denkgrundlegung, welche selbst erst Beobachtung und Experiment an ihrem Teile möglich macht, Voraussetzungen dafür schafft, die eben darum selbst nicht der Bestätigung oder Widerlegung durch Beobachtung und Experiment unterliegen können. In eben dieser seiner Funktion muß der Raum selbst nicht bloß überhaupt gesetzmäßig, sondern in dieser Gesetzmäßigkeit auch schlechthin eindeutig konstruiert werden; dieser Forderung aber genügen, wie gezeigt, nicht die Bestimmungen nichteuklidischer Räume, die zuletzt alles in unendlicher Unbestimmtheit zurücklassen würden, sondern ihr genügt allein, eben kraft seines Einzigkeitscharakters, der Euklidische Raum.[2])

Vermag man von dem selbständigen Gesetzescharakter des Raumes sich auch etwa nicht aus allgemeinen, erkenntniskritischen Gründen zu überzeugen, doch müßte man zugeben, daß eine Entscheidung über die Raumgesetze durch Erfahrung aus dem eben besagten allgemeinen Grunde von Haus aus unmöglich ist: weil an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Voraussetzungen rechnerisch in Einklang gebracht werden kann. Ist dem aber so, so muß hier entweder für immer alles unentschieden bleiben (wobei vielleicht die Mathematik, nicht

1) Vgl. Poincaré, [*147*] 86: „Die Experimente beziehen sich nicht auf den Raum, sondern auf die Körper." Vgl. oben S. 302, Anm. 1.

2) Dies ist neuerlich wieder durch M. C. Mott-Smith ([*121*], S. 189 u. ö.) betont worden. (Einiges in gleicher Richtung auch bei Russell [*153*] 78, 88; vgl. [*128*] 374.) Ich stimme mit Mott-Smith in der Kritik der Metaphysik der nichteuklidischen Geometrien vielfach überein und finde auch in seiner positiven (auf Kroman gestützten) Deutung Richtiges. Nur bleibt daneben die unhaltbare Hypothese einer auf besonderer subjektiver Organisation beruhenden „Zwangsläufigkeit" unserer Anschauung (nach einem Ausdruck Wellsteins, [*181*] 143) als müßige und störende Annahme stehen.

aber Physik und Philosophie sich beruhigen könnten), oder die Entscheidung muß irgendwie nach Gründen *a priori* getroffen werden.

Und hier greift nun die sehr alte Beobachtung ein, daß es empirische Daten, welche die geometrischen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene adäquat darstellten, ein für allemal nicht gibt noch geben könnte. Man braucht gar nicht dem zu widersprechen, daß diese Begriffe dennoch aus empirischen Gegebenheiten durch einen Prozeß idealisierender Abstraktion herausgearbeitet sind; wie namentlich Benno Erdmann zu zeigen versucht und unter den Mathematikern der nichteuklidischen Geometrie Felix Klein als seine Ansicht ausgesprochen hat. Aber idealisierende Abstraktion ist nicht Induktion; die Korrektur der Erfahrung, die sie einschließt, würde in induktiver Wissenschaft schlechterdings unzulässig sein.[1]) Bei den alten Ägyptern war die Geometrie eine induktive Wissenschaft; aber sie war in wesentlichen Stücken falsch. Den Grund zur Geometrie als Wissenschaft haben die Griechen gelegt, indem sie den induktiven Weg bewußt verließen und ihre Begründung in reiner Deduktion suchten. Daß sie dabei gerade die „Euklidischen" Voraussetzungen zugrunde legten, war, so wenig sie einen Beweis für die alleinige Zulässigkeit dieser Voraussetzungen zu führen auch nur versucht haben und so wenig dieser Beweis überhaupt geführt werden kann, dennoch nicht bloße Willkür. Sondern sie haben in der Sicherheit ihres wissenschaftlichen Instinkts genau die Voraussetzungen getroffen, die eine eindeutige Raumbestimmung allein möglich machen. Sie wußten ganz wohl, daß die Gleichheit, Geradheit usw. ihrer Voraussetzungen durch Erfahrung nicht gegeben war noch je gegeben werden konnte, daß es sich dabei vielmehr um echte und rechte Platonische „Ideen" handelte, nach denen vielmehr Erfahrung sich

1) Auch dies betont mit Recht Mott-Smith.

richten muß, als sie nach der Erfahrung. Man bezeichnet sie jetzt oft als „Grenzbegriffe“[1]); z. B. der Punkt ist die Grenze der ins Unendliche abnehmenden Distanz. Aber diese Grenzen sind ebensowenig in Erfahrung gegeben wie Cantors Überendliches oder Veroneses aktuell Unendlichkleines. Solche Begriffe an die Stelle der empirischen Daten setzen und diese vielmehr ihnen unterwerfen, ist das volle Gegenteil davon, diese Begriffe aus der Erfahrung zu entnehmen, sie nach Erfahrung zu richten. Kant war also ganz im Rechte, wenn er behauptete, daß die Geometrie auf Voraussetzungen faktisch fuße und zu fußen gar nicht umhin könne, die nicht durch Erfahrung gegeben sind, sondern ihr vielmehr zugrunde gelegt werden müssen, indem sie es sind, welche eine Erfahrung als Wissenschaft überhaupt nur möglich machen. Nur, wie und in welchem Sinne sie sie „allererst möglich machen“, bedurfte einer strengeren Bestimmung, als Kant sie gegeben hat; für welche strengere Bestimmung übrigens, wie wir gesehen haben, fast alle Voraussetzungen bei Kant selbst mehr oder weniger bestimmt vorliegen.

§ 8. (*Josef Wellstein über die Grundlagen der Geometrie.*) Wenn wir aussprachen, daß an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Grundannahmen in Einklang gebracht werden könne, so ist damit anerkannt, daß, abstrakt logisch und rechnerisch angesehen, nicht die Euklidische Geometrie die einzige ist, mit der eine Naturwissenschaft sich widerspruchslos aufbauen läßt.

Im letzteren Sinne hatte Kants These Wellstein sich gedeutet, dessen anregungsreiche Darlegung (*181*, bes. S. 129 ff.) schon darum unsere Beachtung fordert, weil sie sich tiefer, als es von Mathematikern sonst zu geschehen pflegt, in die Untersuchung auch der philosophischen Seite

---

1) So Max Simon z. B. [*162*], S. 21, mit öfterer Berufung auf B. Kerry [*92*].

unseres Problems einläßt. Die Frage der richtigen Interpretation der Kantischen Sätze darf hierbei um so mehr auf Seite gestellt werden, da Wellstein sichtlich bemüht ist, diesen Sätzen den günstigsten möglichen Sinn abzugewinnen.

Gesetzt es wäre unsere These, daß eine Physik überhaupt unter keinen anderen als den Euklidischen Voraussetzungen logisch und rechnerisch möglich sei, so würde dagegen mit vollem Recht eingewandt, was Wellstein eben unter dieser Voraussetzung einwendet: daß zwar, wenn es sich so verhielte, damit „eine Erkenntnis von ungeheuerer Tiefe und gewaltiger Tragweite“ erreicht wäre; eine Erkenntnis, die weder aus der Erfahrung noch aus bloßen Begriffen geschöpft sein könnte, also eines ganz eigenen Quells bedürfte, den Kant mit dem Namen einer „Anschauung *a priori*“ nur etwa nicht rein und klar genug bezeichnet hätte; daß indessen das Faktum der mathematischen Naturwissenschaft, welches doch als letztentscheidende Instanz in einer solchen Frage gerade von Kant anerkannt wird, jene Annahme nicht bestätige. Vor allem sei die mathematische Naturwissenschaft bisher nicht zu einer so gesicherten Festlegung ihrer letzten Voraussetzungen gelangt, daß eine Aussage darüber heute möglich wäre, ob bestimmte Voraussetzungen, mit denen sie gegenwärtig überwiegend noch arbeitet, die für alle Zeit allein möglichen und zum Ziele führenden seien. Besonders zwischen der Physik des Ponderabelen und des Imponderabelen sei ein eindeutiger Zusammenhang bis dahin nicht hergestellt. Voraussetzungen, die auf dem einen Gebiet sich brauchbar erweisen, könnten für das andere überhaupt unbrauchbar oder wenigstens nicht die förderlichsten sein. Wellstein nähert sich nun aber in bemerkenswertem Maße der Einsicht, daß von Seiten der Physik eine Entscheidung über die Gültigkeit oder Ungültigkeit einer bestimmten Geometrie grundsätzlich unmöglich ist. Die Anwendbarkeit gleichviel welcher Geometrie auf die Physik nämlich erfordert in jedem Fall bestimmte physikalische Voraussetzungen; dabei zeigen sich im besonderen große Schwierigkeiten. Zunächst gibt es keine absolut starren Körper, die doch für jede direkte Messung im Raume die Voraussetzung wären. Sodann setzt die physikalische Messung auf große Entfernungen die Lichtfortpflanzung als absolut geradlinig, überhaupt in sich streng identisch voraus; ob sie es aber im absoluten Sinne ist, ob die Lichtfortpflanzungsbahn mit der Trägheitsbahn, die nach Definition als Euklidische Gerade angenommen wird, absolut identisch ist, läßt sich empirisch nicht ausmachen. Noch besondere, fast hoffnungslose Schwierigkeit macht die Wechselbeziehung zwischen Raum- und Zeitmessung, da die letztere selbst wieder nur auf räumlicher Grundlage möglich ist. Man hat als entscheidend die Tatsache ansehen wollen, daß die Parallelverschiebung eines starren Systems nur im Euklidischen Raum möglich sei. Aber auch diese wie jede andere auf den Euklidischen Raum bezogene Voraussetzung würde sich ohne Schwierigkeit auf irgendwelche nichteuklidischen Räume so umrechnen lassen, daß den Tatsachen nicht widersprochen wird. Weder die Starrheit noch die Parallelität muß oder darf überhaupt absolut verstanden werden. Ganz allgemein können Messungen im Raume nur innerhalb bestimmter Fehlergrenzen genau sein; sie sind nach oben wie nach unten nur im endlichen Bereich ausführbar; daher wird es stets möglich sein, die Tatsachen mit irgendeiner Geometrie dadurch in Einklang zu halten, daß die möglichen Abweichungen jenseits der Beobachtungsgrenzen fallen.

Im Zusammenhang dieser Erwägungen aber bekennt sich Wellstein allgemein mit einer Bestimmtheit, die man bei Mathematikern und Physikern nicht allzu häufig findet, zu den schroff idealistischen Sätzen: daß physikalische Tatsachen überhaupt nie im strengen Sinne „gegeben“, sondern stets nur Annahmen sind, und stets solche Voraussetzungen einschließen, die wir, wenn auch von Beobachtungen geleitet, unsererseits zugrunde legen, um physikalische Tatsachen überhaupt erst bestimmbar zu machen (142). Die „wahren" Tatsachen sind nicht Data, sondern das unendlich ferne Ziel der Forschung. Die „reinen" Phänomene, die „exakten" Gesetze sind nur Ideen und „werden immer Ideen bleiben". Er folgert aber daraus: da die nichteuklidischen Voraussetzungen als „Ideen" nicht weniger rein und streng sind als die Euklidischen, so haben sie an sich den gleichen Anspruch wie diese, der Naturwissenschaft zugrunde gelegt zu werden; das Vorrecht der Euklidischen Geometrie sei nicht prinzipiell, sondern nur historisch und etwa physiologisch-psychologisch oder auch durch die „Ökonomie des Denkens" begründet. Eine „Zwangsläufigkeit unseres Geistes", wie die Apriorität der Euklidischen Raumanschauung in Kants Sinn sie bedeuten würde, finde nicht statt; ihre Annahme sei bei Kant im Grunde nur ein „Erdenrest von Sensualismus", der seinen sonst reinen und strengen Idealismus trübe.

Es müßte gelingen, mit einem so idealistisch gerichteten mathematischen Denker von einem Standpunkt aus zur Verständigung zu kommen, der nichts als die reinste Durchführung eben dieses Idealismus in der Prinzipienlehre der mathematischen Wissenschaften im Auge hat.

Über das Faktum besteht zwischen uns, und wohl heute überhaupt, keine tiefgehende Meinungsverschiedenheit mehr: alle Geometrien sind gleich denkmöglich, und jeder auf eine bestimmte Geometrie gestützte Ausdruck physikalischer Tatsachen würde sich auf jede andere Geometrie umrechnen lassen. Den technischen Nutzen dieser Verfügungsfreiheit über geometrische wie physikalische Voraussetzungen wird keiner, der sich mit diesen Dingen auch nur rezeptiv vertraut gemacht hat, heute mehr bestreiten wollen. Als denkmöglich aber hätte (wie Wellstein selbst zu bemerken nicht unterläßt) auch Kant die nichteuklidischen Geometrien ruhig gelten lassen können, ebenso wie er die Denkmöglichkeit der Räume von mehr als drei Dimensionen bei Gelegenheit ausdrücklich anerkennt. Eine Anschauung *a priori* dagegen im Sinne einer Euklidischen „Zwangsläufigkeit unseres Geistes" wäre (wie wir im Einklang mit der großen Mehrzahl der heutigen Vertreter der kritischen Methode schon lange anerkannt haben) ein einfacher Rückfall in die von Kant selbst in Hinsicht der reinen Verstandesbegriffe derb zurückgewiesene[1]) subjektivistische Begründung der Erkenntnis auf eine besondere Organisation unseres Geistes. Eine physiologisch-psychologische Präformation für den Euklid aber — die keinesfalls besteht — wäre wohl das Letzte, was wir an die Stelle des Kantischen Apriori der reinen Anschauung setzen würden. Die Denkökonomik endlich hat zwar ihr gutes Recht in der gesetzmäßigen Darstellung der Naturtatsachen im besonderen, aber sie kann nicht da entscheiden sollen, wo es sich um die Voraussetzungen handelt, die allein *a priori* heißen dürfen, nämlich die, welche überhaupt nur eine Naturwissenschaft möglich machen. Daß zu diesen eine zeit-räumliche Anordnung der Erscheinungen überhaupt gehört, kann nicht wohl zweifelhaft sein und wird der Sache nach auch von denen festgehalten, die es mit Worten bestreiten. Wunderlich aber wäre es nun doch, wenn hierüber zwar das Daß bestimmt, das Wie dagegen unendlich unbestimmt sein und bleiben sollte. Es wäre (so habe ich es früher einmal ausgedrückt), wie wenn ein Gesetzgeber bestimmt hätte, daß eine jede Sache als irgendjemandes Eigentum anzusehen sei, aber eine Festsetzung darüber zu treffen vergessen hätte, wessen Eigentum sie im Zweifelsfalle sei. Nun haben wir hier nicht über irgendeinen unbekannten Weltgesetzgeber zu Gericht zu sitzen; es handelt sich um keine andere Gesetzgebung,

1) Kr. § 27, Prol. § 36, Anm. gegen Crusius (man könne dabei „niemals wissen, was der Geist der Wahrheit oder der Vater der Lügen uns eingeflößt haben möge").

als die unserer Erkenntnis. Also träfe der Einwurf niemand anders als unser eigenes Denken; welches dann hoffentlich in sich gehen und auf bessere Konsequenz bedacht sein wird.

Nun scheint Wellstein die Einzigkeit der Zeit als aus transzendentalem Grunde feststehend anzuerkennen. Sie ergibt sich ihm, wie uns, als Veränderliche t, d. h. als eindimensionale Reihe von Stellziffern, welche die stetige Zahlreihe schlechthin einsinnig von $-\infty$ zu $+\infty$ durchläuft. Nun, im gleichen Sinne behaupten wir, daß der Raum für den rein begrifflichen Aufbau einer Mechanik als auf einzige Weise bestimmt zugrunde zu legen sei, aus keinem anderen als demselben transzendentalen Grunde, der für die Eindeutigkeit der Zeit entscheidet: weil nur so eine eindeutige Bestimmung der Bewegung und damit überhaupt irgendwelcher Veränderung in der Natur möglich wird. Die Gerade als das Grundgebilde des Raumes war aus eben diesem Grunde wiederum der stetigen, nur jetzt nicht einsinnig, sondern beidsinnig verstandenen Zahlreihe entsprechend anzusetzen; auf dieser Grundlage aber ergab sich mit logischem Zwang der ganze weitere Aufbau einer Geometrie Euklidischen Charakters, zunächst mit unbeschränkter Dimensionenzahl, für deren Beschränkung sich dann aber auch eine wiederum analoge Begründung aufweisen ließ. Die so sich ergebende „Notwendigkeit" ist also nicht absolute Denknotwendigkeit, auch nicht subjektive Anschauungsnotwendigkeit, sondern die rein objektive Notwendigkeit der einzigen Bedingung eindeutiger Bestimmbarkeit zeiträumlicher Veränderung, die sonst, vom Standpunkt abstrakten Denkens und Rechnens ebenso wie vom Standpunkt bloßer Erfahrung, in absoluter Unbestimmtheit verbleiben müßte.

Darstellbar müssen ja die Vorgänge der Natur auch nach Wellsteins Voraussetzung im Euklidischen Raume sein, wenn sie es überhaupt in irgendeinem sind. Da sie es aber, abstrakt genommen, in jedem von unendlichfach-unendlichen Räumen konstanter oder beweglicher Verfassung sind, so würde in der Tat alles in unendlichfach-unendlicher Unbestimmtheit verbleiben, wenn nicht solche letzte Bestimmungsgesetze existierten, die nicht willkürlich, so oder so wählbar, oder auf Festlegung durch denkfremde Faktoren (Erfahrung) angewiesen sind — eine Festlegung, die, wie gezeigt, wohl überhaupt nicht möglich wäre, in keinem denkbaren Falle aber eine mehr als provisorische Gültigkeit beanspruchen könnte —, sondern die in sich so bestimmt sind, daß es durch sie möglich wird, bestimmt zu machen, was ohne sie in haltloser Unbestimmtheit verbleiben müßte.

Führt man in die rein mathematischen Voraussetzungen auch nur ein „Minimum von Denkfremdheit" ein, reicht man dem Empirismus auch nur diesen kleinen Finger, so darf man sich nicht wundern, daß er gleich die ganze Hand nimmt. So ist es z. B. Russell [*153*] ergangen, der, von ursprünglich idealistischer Voraussetzung ausgehend und mit besserem Verständnis des Sinnes der transzendentalen Methode, als etwa Helmholtz und Erdmann es in dieser Frage bewiesen haben, dennoch bei einem Empirismus endete, der über die Gesetze des Raumes die Entscheidung in der Erfahrung sucht. Nachdem aber allseitig klargestellt ist, daß Erfahrung hier ein- für allemal keine Entscheidung geben kann, daß wir die gesetzmäßige Darstellung der Erscheinungen, insoweit sie rein mathematisch ist, vollständig in der Hand haben, ist der Empirismus überhaupt keine mögliche Lösung mehr.

Auf alle Fälle aber wäre die empiristische Lösung unvereinbar mit dem klaren Idealismus, den wir Wellstein bekennen hörten. Man kann nicht gleichzeitig Kant den Erdenrest von Sensualismus, der seinen Idealismus noch trübe, zum Vorwurf machen, und dem heutigen (Neu-) Kantianismus anraten, der Empirie (in Sachen der Grundlegung der Mathematik!) doch etwas mehr Spielraum zu gewähren (Wellstein S. 132, Anm. 2). Man kann nicht auf der einen Seite gegenüber Kant die strengere Durchführung des Idealismus fordern, auf der anderen aber (122) Gauß nachsprechen, man müsse „in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir *a priori* ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können". Zwar macht Wellstein hierbei den Vorbehalt, daß er für „Raum" „Raumordnung" setzt. Die Raumordnung des Empirischen ist natürlich Sache der Empirie; sie ist nicht bloß nicht vollständig, sondern gar nicht *a priori* bestimmbar. Aber nach ihr war hier gar nicht die Frage, sondern nach den Grundbestimmungen des reinen, geometrischen Raumes. Für diese aber auf eine Realität außer unserem Geiste zu verweisen, ist unter idealistischen Voraussetzungen schlechterdings unverständlich. Es wäre dies, wenn ein wertendes Prädikat hier überhaupt am Platze wäre, eine Hoffart menschlicher Erkenntnis und nicht Demut zu nennen. Man könnte uns ebensogut an Gott oder den Vater der Lügen (s. o. S. 322, Anm. 1) verweisen. Es gilt dann auch gleichviel, ob man von einer Organisation unseres Geistes spricht oder von Urbeschaffenheiten der Dinge an sich. Vom einen und von anderen wissen wir genau gleichviel, nämlich nichts.

Siebentes Kapitel.

Die zeit-räumliche Ordnung der Erscheinungen und die mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft.

§ 1. (*Die Frage der Existenz der absoluten Zeit und des absoluten Raumes.*) Bis dahin haben wir die Zeit- und Raum-Ordnung so ins Auge gefaßt, wie sie bloß mathematisch, in der Geometrie und reinen Bewegungslehre sich darstellt. Sie erwies sich insoweit in ihrem gesetzmäßigen Aufbau so ganz zusammenfallend mit der Ordnung der Zahl, daß es unabweisbar wurde, sie mit dieser auf die gleiche logische Grundlage, nämlich die Gesetzlichkeit der Synthesis der Quantität, Qualität und Relation zurückzuführen. Damit ist sie jeder Willkür entzogen, im gleichen Sinne notwendig im Apparate der Erkenntnis wie die Zahl selbst. Von dieser unterscheidet sie sich durch den direkten Bezug auf die Existenz, durch die Bedeutung einer konstituierenden Bedingung des empirischen Existenzurteils überhaupt. Selbst für die bloß mathematischen Bestimmungen der Zeit und des Raumes erwies sich der Existenzbezug nicht gleichgültig, so wenig das mathematische Urteil als solches schon Existenzurteil ist. Es soll nun in diesem Kapitel die Existenzbedeutung der zeit-räumlichen Ordnung besonders untersucht und daraus die Konsequenzen für die Gestaltung einer mathematischen Naturwissenschaft entwickelt werden.

Ganz verfehlt ist es, die Existenzfrage an den Raum und die Zeit selbst zu richten. Stellt man die Frage einmal so, so kann die Antwort allerdings nicht anders als verneinend ausfallen. So wird dann gern als eine der wichtigsten und sichersten Entdeckungen empiristischer Erkenntniskritik verkündet: daß die absolute, reine, mathematische Zeit, der absolute, reine, mathematische Raum Newtons — nicht existiere.

Die Gründe der Behauptung sind bekannt und die Behauptung selbst keineswegs erst eine Errungenschaft jüngster Zeit. Daß die reine mathematische Zeit, der reine mathematische Raum in keiner Erfahrung gegeben ist, hat vor allem Newton selbst, unmittelbar neben und in seiner Aufstellung dieser Begriffe, mit allem nur möglichen Nachdruck ausgesprochen. Empirische Zeit- und Ortsbestimmungen können nur relativ sein. Man bestimmt die Zeit und den Ort eines Ereignisses in Bezug auf solche Körper, die als ruhend, oder deren Veränderung als konstant angenommen wird, z. B. die tägliche Änderung der gegenseitigen Lage zwischen Erdkörper und Fixsternhimmel. Aber kein Ort im Universum ist als absolut ruhend, keine Änderung als absolut gleichförmig empirisch gegeben oder könnte es — schon nach Newtons Voraussetzungen, vollends nach denen der heutigen Naturwissenschaft — jemals sein. Setzt man selbst, es gäbe irgendwo im Universum absolute Ruhe oder gleichförmige Veränderung (eine Möglichkeit, die Newton allerdings noch nicht schlechthin ausschließen zu wollen scheint), so gäbe es doch keine Möglichkeit, sie als absolute empirisch zu erkennen. Damit verliert aber die Annahme ihrer „Möglichkeit" jeden methodisch brauchbaren Sinn. Eine Annahme, die aller empirischen Bestätigung oder Widerlegung ihrer Natur nach entzogen ist, erfüllt nicht die Bedingungen einer sinnvollen Hypothese empirischer Wissenschaft.

Nur von vergleichsweise festen Bestimmungen kann also mit verständlichem Sinn geredet werden. Man korrigiert die zunächst in der Erfahrung sich darbietenden, als ungenau bald erkannten Bestimmungen durch solche, die auf breitere Basis, auf Feststellungen in weiterem zeitlichem und räumlichem Umfang gestützt sind. Man kommt dann sehr bald an einen Punkt, über den die uns zugebote stehenden Bestimmungsmittel nicht hinausreichen, und bleibt bei den so gewonnenen Bestimmungen notgedrungen stehen, bis etwa eine Möglichkeit sich ergibt, zu Bestimmungen auf noch breiterer Grundlage fortzuschreiten. Voraus aber steht fest, daß keine für empirische Bestimmungsmittel überhaupt erreichbare Grundlage der Zeit- und Ortsbestimmung je absolute Festigkeit wird beanspruchen dürfen. Man macht dennoch, ja eben damit die grundsätzliche Voraussetzung, daß es eine absolute Zeit, einen absoluten Ort des Geschehens an sich gebe, mit welchen erst, wenn sie bestimmbar wären, das Geschehen selbst absolut bestimmt wäre, denen gegenüber also jede empirisch mögliche Bestimmung nur die Bedeutung einer brauchbaren Annäherung beanspruchen kann. Woraufhin macht man diese Voraussetzung? Sie liegt ursprünglich in der Forderung, in der letzten, grundsätzlichen Supposition der Erfahrung als gerichtet auf Erkenntnis dessen, was „wirklich“ sei oder vorgehe. Existenz kann nur auf einzige Weise bestimmt gedacht werden, weil sie überhaupt nichts anderes besagt als Bestimmtheit auf einzige Weise. Es ist also ein „analytischer Satz“, daß, sofern die Existenz zeit-räumlich bestimmt sein soll, diese Bestimmung selbst als schlechthin eindeutige gefordert, obzwar nie gegeben ist. Nur eine schlechthin eindeutige (und das heißt: absolute) Zeit- und Raumbestimmung würde die der Existenz selbst sein; an diesem konditionalen Ausspruch ändert es nichts, daß die empirisch mögliche Bestimmung schlechthin eindeutig niemals sein kann.

Newton selbst scheint mir in der Hauptsache nichts anderes zu sagen, obgleich seine Ausdrucksweise vielleicht nicht jeden Zweifel über das Gemeinte ausschließt. Ausdrücklich erklärt er: absolute Zeit- und Ortsbestimmung würde absolut ruhende Körper verlangen; „es kann aber sein, daß es absolut ruhende Körper gar nicht gibt". Dieses „es kann sein" ist am Ende nur ein vorsichtiger Ausdruck, der zumal im Eingang, in der ersten Vorbereitung seiner Untersuchung angemessen erscheinen mochte; auf Grund der Voraussetzung der allgemeinen Gravitation wenigstens, die Newton zwar nicht schlechthin vertreten will, auf die aber doch seine ganze Forschung unverkennbar hindrängt, hätte es bestimmt lauten müssen: es gibt keine absolut ruhenden Körper, kann keine geben, also ist absolute Zeit- und Ortsbestimmung empirisch überhaupt unmöglich. Jedenfalls aber kann nach Newtons eigenen Voraussetzungen die Korrektur der relativen Zeitbestimmungen durch die astronomischen Gleichungen, von der er spricht, nur den Sinn einer Näherungsbestimmung haben, welche die begrifflich geforderte absolute Bestimmung nicht etwa darstellt, sondern nur notgedrungen als Ersatz für sie dient. Dem entspricht es, wenn Newton an dieser Stelle ausdrücklich nicht von „wahrer", sondern von „wahrerer" Bestimmung spricht. Diesem die Zeit betreffenden Gedankengange läuft aber die Betrachtung über die relative und absolute Bestimmung des Orts und der Bewegung genau parallel; und wenn nun hier auch dieser genauere Ausdruck der „wahreren" Bestimmung nicht wiederkehrt, so wird man nach logischem Zusammenhang die „wahren" Bestimmungen doch auch hier nur als relativ wahre zu verstehen haben. Daß auf die von Newton angegebene Weise nur relative Bestimmungen möglich sind, liegt überdies so auf der Hand, daß wenigstens ich fürchten würde, dem Genius Newtons zu nahe zu treten, wenn ich annähme, daß er sich darüber weniger klar gewesen sei als seine heutigen, etwas rasch urteilenden Kritiker. Durch Kräfte soll ausgemacht werden, was wahre, was scheinbare Bewegung ist. Kräfte aber sind überhaupt nicht empirisch gegeben, sondern zur Konstruktion des Gegebenen supponiert. Schwerlich brauchte Newton darüber erst von uns belehrt zu werden. „Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft“: das klingt nicht nach Empirismus. „*In philosophicis autem abstrahendum est a sensibus*“, heißt es ausdrücklich. Die „philosophische“, d. h. theoretische Bestimmung (der „wahren“ Bewegungen durch die Kräfte) beruht also, will ausdrücklich beruhen auf Abstraktion, positiv ausgedrückt: auf einer Konstruktion, deren oberste Gesetzgebung niedergelegt ist in den „*Axiomata sive leges motus*“.

Aber eine solche Begründung gerade der entscheidenden ersten Suppositionen sogar der Naturwissenschaft auf reine Konstruktionen („Synthesen“) theoretischen Denkens muß freilich dem metaphysischen Empirismus ein Dorn im Auge sein. Also darf er die „absoluten“ Bestimmungen, die diesen Suppositionen zugrunde liegen, in keinem Sinne gelten lassen. So erklärt denn, in der von ihm immer betonten Ehrlichkeit und Aufrichtigkeit, namentlich Ernst Mach[1]) kurzerhand: Die absolute Zeit kann an keinen (gegebenen) Bewegungen abgemessen werden, sie hat also keinen praktischen und auch keinen wissenschaftlichen Wert; niemand ist berechtigt zu sagen, daß er von ihr etwas wisse, sie ist ein müßiger (=) metaphysischer Begriff. Ebenso: Über absoluten Raum, absolute Bewegung „kann niemand etwas aussagen“, sie sind „bloße Gedankendinge, die in der Erfahrung nicht aufgezeigt werden können“. Gegeben sind nur, können nur relative Zeit- und Ortsbestimmungen sein. Die Zeitordnung eines Ereignisses besagt nur sein Verhältnis zu einer bestimmten Veränderung, nämlich der der gegenseitigen Lage zwischen unserem Erdkörper und dem Fixsternhimmel. Dann weiterhin: Wenn wir sagen, daß ein Körper seine Richtung und Geschwindigkeit im Raume beibehält, so liegt darin nur (!) eine „kurze Anweisung auf Beachtung der ganzen Welt“ (227). „Macht man sich klar, daß es sich

1) [*110*], S. 218.

nur (!) um Ermittelung der Abhängigkeit der Erscheinungen voneinander handelt . . . so entfallen metaphysische Unklarheiten" (220).

Dieser letzte Satz ist besonders aufklärend darüber, wo der Grund des bei einem so bedeutenden und so philosophisch gerichteten Forscher immerhin auffallenden Mißverständnisses liegt. Es ist unbedingt richtig, daß die Zeitordnung des Geschehens sich nur darstellen kann in der von Glied zu Glied fortwaltenden Abhängigkeits-(Funktional-) Beziehung zwischen verschiedenen, schließlich allen verfolgbaren Veränderungsreihen. Eine solche allbefassende Funktionalbeziehung würde jene „ganze Welt" wissenschaftlich darstellen, mit der zugleich dann die absolute Zeit- und Ortsbestimmung gegeben — wäre. Zeit und Raum sind ja ohne jede Frage gar nicht für sich gegeben, sie können, wie auch Newton nicht unterläßt zu betonen, weder gesehen noch sonstwie sinnlich wahrgenommen werden, sie sind in diesem Sinne in der Tat „bloße Gedankendinge". Aber eben rein gedanklich werden sie, und zwar mit Notwendigkeit, zugrunde gelegt jener gesamten Konstruktion des Weltzusammenhanges, d. h. dem Systeme jener Gleichungen unter einer unbestimmten Zahl von Veränderlichen, deren durchgängige Funktionalbeziehung die „ganze Welt" wissenschaftlich darstellen würde. „Existieren" können Zeit und Raum, als bloße Stellenordnungen, nur, sofern das existiert, was in ihnen sich ordnet. Etwas existiert, d. h. aber, dem logischen Sinn des Existenzurteils zufolge: es ist allseitig bestimmt, so bestimmt, daß nichts unbestimmt bleibt. Solche absolute Bestimmung ist — selbstredend — als empirische nicht möglich; wenn also „Existieren" zugleich auch heißen soll: empirisch gegeben sein, so „existiert" freilich weder der absolute Raum noch die absolute Zeit.

Ist das die Entdeckung, deren der Empirismus sich rühmt (Mach verzeichnet sorgfältig die Jahrzahlen seiner ersten Aussprüche dieses Sachverhalts), so steht die Richtigkeit des Behaupteten gewiß ganz außer Frage. Historisch aber wäre dazu die Anmerkung zu machen, daß — wenn über Newtons Meinung in dieser Hinsicht noch Zweifel sein sollten — in einem bis heute nicht vergessenen Buche eines Newtonianers des 18. Jahrhunderts diese Sachlage bereits in aller Klarheit ausgesprochen ist. Die Bestimmung der Zeitstelle irgendeines Vorgangs in der Natur, heißt es da, „kann nicht von dem Verhältnis der Erscheinungen gegen die absolute Zeit entlehnt werden, denn die ist kein Gegenstand der Wahrnehmung, sondern umgekehrt, die Erscheinungen müssen einander ihre Stellen in der Zeit selbst bestimmen". Und: „Diese Einheit der Zeitbestimmung ist durch und durch dynamisch, d. i. die Zeit wird nicht als dasjenige angesehen, worin die Erfahrung unmittelbar jedem Dasein seine Stelle bestimmte, welches unmöglich ist, weil die absolute Zeit kein Gegenstand der Wahrnehmung ist, womit Erscheinungen könnten zusammengehalten werden; sondern . . ." — ich darf nicht fortfahren, sonst errät der Leser am Ende, um welchen Autor es sich handelt. Oder muß ich es verraten? Nun, das Buch führt den merkwürdigen Titel „Kritik der reinen Vernunft", von Immanuel Kant.[1]) Wünscht man noch volleren Aufschluß, so findet man ihn in der letzten großen Anmerkung zu desselben Autors „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft", wo die „sonderbaren Begriffe" der absoluten Zeit und des absoluten Raumes noch heller beleuchtet und als „bloße Ideen" (Gedankendinge!) herausgestellt werden — die freilich als solche ihre Notwendigkeit haben. Besondere Beachtung verdient dabei die Unterscheidung zwischen „absoluter" und „wahrer" Zeit- und Ortsbestimmung, die auch für unsere Deutung Newtons, wie mich dünkt, bestätigend ist.

1) Bei der zweiten und dritten „Analogie", 2. Aufl., S. 245 u. 262.

§ 2. (*Fortsetzung.*) Es ist also nicht etwa ein notgedrungenes Zugeständnis des Kritizismus an den Empirismus, sondern es ist seine eigenste Behauptung: die absolute Zeit, der absolute Raum sind reine Gedankendinge, nicht empirische Data, sie haben also keine empirische Existenz. Das gilt freilich ebenso von der Zahl, von der Größe, ja von dem Begriffe der Existenz selbst, von dem Begriffe des Gegenstandes der Erfahrung. Diese alle, wie überhaupt sämtliche reinen Funktionsbegriffe der Erkenntnis, stehen und fallen miteinander.

Hätte es Sinn zu sagen: Es existiert zwar der eindeutige Funktionalzusammenhang des Geschehens, aber es existiert nicht eine einzige Zeit, in der das Geschehen (wirklich) abläuft? Oder will man dies nicht gesagt haben, sondern nur: Die Zeit, in der — zweifellos — das Geschehen wirklich abläuft, ist für uns nicht absolut, sondern nur relativ bestimmbar, nämlich ebenso relativ wie — dies Geschehen selbst? Das sind sicher zwei sehr verschiedene Thesen; es ist in den Behauptungen der Empiristen nicht immer klar, welche von beiden gemeint ist. Da es aber zuletzt nicht auf die Meinung dieses oder jenes Gelehrten, sondern auf die Sache ankommt, so wird es das beste sein, beide Thesen gesondert ins Auge zu fassen.

Also: kann man im Ernst behaupten wollen: Das Geschehen zwar läuft wirklich ab, z. B. die wechselseitige Lage zwischen der Erde und gewissen fernsten Sternen ändert sich wirklich auf bestimmte Weise, aber diese Änderung geschieht nicht in einer Zeit, die — mindestens so wirklich und bestimmt ist wie die gedachte Änderung selbst? Es gibt wirkliche Vorgänge und bestimmte Abhängigkeiten unter diesen, aber es gibt nicht eine wirkliche Zeit, in der diese Vorgänge sich abspielen? Jeder wird doch antworten: Veränderung, Bewegung ist ihrem Begriff nach Anders- und Anderssein in der Zeit; sie kann also nicht bestimmt sein, wenn sie es nicht in der Zeit ist; nicht eindeutig bestimmt, wenn nicht in einer einzigen Zeit.

„Wir nennen eine Bewegung gleichförmig“, sagt Mach[1]), „in welcher gleiche Wegzuwüchse gleichen Wegzuwüchsen einer Vergleichsbewegung (der Drehung der Erde) entsprechen.“ Aber diese Entsprechung muß doch eben als zeitliche gemeint sein, das heißt so, daß die beiderseits gleichen Zuwüchse gleichzeitig (von demselben Punkte 0 der Zeit zu demselben Punkte 1, 2 usf.) geschehen; wobei es denn freilich mißlich ist, daß die Bewegung, die als Zeitmaß dienen soll, um selbst als Bewegung, d. h. Ortsänderung in der Zeit, bestimmt zu sein, ein Zeitmaß schon vorauszusetzen scheint. Keine Gleichheit von Zeiten ist überhaupt „gegeben“; die letzte Gleichheit ist stets nur supponiert, und die Rechtfertigung solcher Supposition kann nur darin gefunden werden, daß sie eine in sich einstimmige theoretische Darstellung der Erscheinungen überhaupt nur möglich macht.

Vielleicht erscheint die folgende Fassung einwandfrei. Es seien die Stadien einer bestimmten Veränderung einer Veränderlichen x der Reihe nach bezeichnet durch x_0, x_1, $x_2 \ldots$, die einer zweiten, mit dieser im algebraischen Sinne simultanen Veränderung einer Veränderlichen y entsprechend durch $y_0, y_1, y_2 \ldots$, und so die einer dritten usf.; so sollen die Stadien $x_0, y_0, z_0 \ldots$, $x_1, y_1, z_1 \ldots$, $x_2, y_2, z_2 \ldots$ usf. sich einander eindeutig zuordnen, so daß die Reihe der Stellziffern 0, 1, 2 ... für sämtliche Veränderungsreihen dieselbe ist; dann ist es diese gemeinsame Reihe von Stellziffern, die wir Zeit, die gemeinsame Zeit dieser simultanen Veränderungen nennen.[2]) Alles was Mach verständlicherweise damit kann sagen wollen: es existiere zwar die Abhängigkeit der Erscheinungen voneinander, aber es existiere nicht die eine Zeit, in der sie sich vollziehen, ist: diese Stellen-

---

1) S. 218. 2) Vgl. das Schema oben S. 73, Anm. 1.

ordnung 0, 1, 2 ... existiere nicht noch außerdem, daß nach ihr die sukzessiven Stadien der verglichenen Veränderungen in der Natur sich ordnen. Zeit ist nur diese Stellenordnung der Existenz, sie ist nicht noch eine fernere Existenz außer der, überhaupt ihrem Begriff nach einzigen Existenz (des ganzen Inbegriffs der Veränderungen in der Natur), die sich in ihr (nämlich in unseren Rechnungen) geordnet darstellt. Aber niemand, soviel ich weiß, sicher keiner der großen Physiker[1]) oder Philosophen hat der Sache nach unter der Zeit eine Existenz schlechthin für sich, eine Existenz außer der (ihrem wesentlichen Begriff nach einzigen) Existenz verstanden, sondern eben eine Ordnung des Existierenden. Und Entsprechendes gilt vom Raume.

Die Frage kann also mit Sinn überhaupt nur so gestellt werden: Gibt es eine einzige, eine eindeutig bestimmte Stellenordnung des Existierenden, nämlich der in funktionalem Zusammenhang miteinander gedachten Veränderungsreihen, deren Inbegriff wir „Natur" nennen? Diese Frage aber reduziert sich restlos auf die andere: Existiert überhaupt eben dies, was wir Natur nennen? Existiert dieser einzige Funktionalzusammenhang des Geschehens? Oder ganz kurz: Existiert die Existenz?

Hier ist nun dem Empiristen durch seine aprioristisch-metaphysische Stellungnahme von vornherein jeder Zweifel verboten. Denn als solcher muß er um jeden Preis das „empirisch Gegebene" behaupten; empirisch gegeben aber heißt ihm schon: als existierend gegeben. Dagegen entsteht für den Kritizismus erst hier die ernste Frage: Ist es denn so gewiß, daß die Existenz existiert? Nach seinen Begriffen würde das nichts Geringeres bedeuten, als

1) Ein Zweifel könnte höchstens über L. Euler bestehen, der in seinen Ansichten geschwankt hat (s. darüber Streintz [*169*] und Cassirer [*18*]). Doch herrscht volle Klarheit über die Sache in der schon erwähnten Abhandlung [*48*] über Raum und Zeit v. J. 1748, von der gerade Kant in seinen Erwägungen ausgegangen ist.

daß ein Funktionalzusammenhang „des“ Geschehens, schlechthin eindeutig, in einziger Weise bestimmt, „gegeben“ wäre, oder doch gegeben werden könnte. Denn nichts anderes bedeutet ihm und bedeutet überhaupt Existenz als: vollständige, in keiner Hinsicht unvollendete Bestimmtheit des Seins, und zwar, da es sich hier um zeit-räumliches Sein handelt, vollendete Bestimmtheit eben auch in Bezug auf Zeit und Raum. In solchem Sinne erklärt Newton mit vollem Recht: Eine und dieselbe „ist“ (kraft notwendigen Denkens!) die Zeit der Existenz der Dinge: folglich sei diese zu unterscheiden von ihren sinnlichen Maßen, da diese wandelbar, der Verfluß der Zeit selbst notwendig unwandelbar einer sei. Überzeugt man sich nun, daß dieser unwandelbar eine Verfluß der Zeit in den Erscheinungen weder gegeben ist noch je gegeben werden könnte, so folgt daraus nicht etwa, daß die Forderung der eindeutigen Bestimmtheit der Stellenordnung des Existierenden als sinnlos abzuweisen sei. Das hieße den Begriff der Existenz selbst, es hieße, die Aufgabe der Erkenntnis gerade als Erfahrung preisgeben, um was zurückzubehalten? Empirische Data als absolute. Denn, leugnen, daß gegenüber der empirisch bestimmten Zeit- und Raumordnung, die eine absolut eindeutige nicht ist noch je sein kann, die Frage nach der absoluten Zeit- und Raumordnung festzuhalten sei, hieße die empirische Ordnung für endgültig, für absolut ausgeben. So kann es einen Augenblick wirklich scheinen, wenn Mach die Zeit letztgültig scheint bestimmen zu wollen als den „Drehungswinkel der Erde“; als ob der bestimmt wäre; und als ob nicht im Begriff der Drehung die Zeitordnung, nach deren Möglichkeit erst die Frage ist, vorausgesetzt wäre. Aber ohne Zweifel will Mach, hier wie durchweg, nicht die empirische Bestimmung für absolut ausgeben, sondern gerade die Relativität aller Zeit-(und ebenso Raum-)Bestimmung betonen. Also sind wir über die Sache wohl kaum verschiedener Meinung; nur übersieht Mach, was bei Kant (namentlich an der zuletzt zitierten Stelle) sonnenklar wird: daß die absolute Zeit, der absolute Raum, obgleich kein „Gegenstand der Erfahrung", kein „Begriff von einem wirklichen Objekt", sondern eine „bloße Idee", doch als Idee notwendig ist: um alle relative Bestimmung von Bewegung und Ruhe auf sie zu reduzieren, wofern die Erscheinung derselben, wie Kant sagt, in „einen bestimmten Erfahrungsbegriff" (nämlich Funktionalzusammenhang), „der alle Erscheinungen vereinigt", soll verwandelt, oder wofern zwischen Erscheinung und Schein hinsichtlich der zeit-räumlichen Bestimmung soll unterschieden werden können; wozu das einzige Mittel (zufolge den Beweisen der „Analogien der Erfahrung") eben die Herstellung eines einzigen Funktionalzusammenhanges des Geschehens ist.

Andere Philosophen empiristischer Richtung sind daher — auf Umwegen freilich, und schwerlich im Einklang mit ihrem Prinzip — auf eben dies Ergebnis durch den inneren Zwang der Sache geführt worden. So erkennt Petzoldt[1]) an, daß die unabweisliche Forderung der „Eindeutigkeit" des Geschehens die Beziehung auf die einzige, absolute Zeit und den einzigen absoluten Raum nicht sowohl fordert als einschließt. Zur Aufstellung eines einzigen Funktionalzusammenhanges des Geschehens nämlich bedürfe es eines letzten Parameters, für den selbst nicht wiederum andere bestimmende Faktoren gefordert werden können; man könne nicht fragen: Wann werden die nächsten 4 Stunden verstrichen sein? Die Gesetze der reinen Mechanik, welche Aussagen in Bezug auf die absolute Zeit und den absoluten Raum tun, sind zulässig und notwendig, weil sie nur konditionale Gesetze sind gleich denen der Mathematik, und auf der gleichen Grundlage *a priori* beruhen wie etwa der Begriff der geraden Linie, nämlich darauf, daß durch sie

1) Das Gesetz der Eindeutigkeit, Vtljschr. f. wiss. Philos. XIX, 1895, und schon: Maxima, Minima und Ökonomie, ebenda XIV, 1890.

eine eindeutige Bestimmung des Empirischen überhaupt nur möglich wird. Ähnlich erklärt ein anderer Empirist, Heymans[1]: der Unterschied absoluter und relativer, wahrer und scheinbarer Bewegung sei kein empirischer; in reiner Erfahrung habe absolute Bewegung überhaupt keinen Sinn; aber er sei notwendig als „Grenzbegriff", welcher den begrifflich geforderten, wirklich immer nur provisorisch vollziehbaren Abschluß der Reihe fortschreitender Auflösungen des Gegebenen in seine Elemente bedeute. Absolute Voraussetzungen seien darum notwendig, weil Relationen zuletzt nicht ohne Absolutes denkbar sind. Solche wollen aber nicht empirisch Gegebenes ausdrücken, sondern lediglich Voraussetzungen zur Interpretation des Gegebenen. Prinzipien solcher Art können durch Erfahrung weder bestätigt noch widerlegt werden. Sie wollen eben nicht Erfahrungen ausdrücken, sondern haben es (so würde es in der Sprache Kants lauten) nur mit der „Möglichkeit der Erfahrung" zu tun.

Wesentlich ist es Kants These der „Idealität" der Zeit und des Raumes, die man durch dies alles, mit oder ohne Willen, bekräftigt. Sie besagt positiv: daß die Hypothesis der reinen Zeit, des reinen Raumes eine Konsequenz der reinen, formalen Grundgesetze der Gegenstandserkenntnis ist, also ihre Begründung eben in der eigenen Gesetzlichkeit der Erkenntnis, nicht in gegebenen Gegenständen zu suchen hat. Ihre Begründung liegt in ihrer Bedeutung als Bedingung des Urteils der Existenz, d. i. der vollständigen Determination des Gegenstandes in der Erfahrung. Einen einzigen Funktionalzusammenhang des Geschehens aufzustellen ist die Aufgabe, die durch den Begriff der Existenz, durch den Sinn der Setzung, daß etwas sei, im Vollsinn allseitiger Bestimmtheit des Gedachten, gestellt ist. Dieser Funktionalzusammenhang mißt erst, was ihn messen sollte,

1) Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, II, S. 189.

die Zeit, und ebenso den Raum. Soviel sieht auch der Empirist: daß die Bestimmtheit des Zeitverlaufs wie des Ortes der Ereignisse nur gegeben sein kann durch die Bestimmtheit des Verlaufes des Geschehens selbst, welche bedingt ist durch die Herstellung eines Funktionalzusammenhanges der parallelen Reihen von Veränderungen, die in der einen Zeit und dem einen Raum ablaufend gedacht werden. Er sieht nicht, daß dieser Funktionalzusammenhang aus erkenntnisgesetzlicher Notwendigkeit an sich als einziger (wiewohl in der Erfahrung immer nur hypothetisch, mit bestimmtem Vorbehalt der Korrektur, sobald die Data sie gestatten) angesetzt wird; daß aber in und mit diesem Ansatz selbst und aus derselben erkenntnisgesetzlichen Notwendigkeit die Zeit und der Raum als einzige, mithin „absolute" zu setzen sind, und zwar gänzlich *a priori*, da ja, wie man mit größtem Recht behauptet, diese einzige absolute Zeit- und Raumordnung empirisch nicht gegeben ist, noch je gegeben sein könnte. Das Letztere wird also der Kritizismus nicht etwa bloß zugeben, sondern er überbietet noch den Relativismus, der der gesunde Kern des Empirismus ist, indem er erklärt: diese Ansicht irrt noch, sofern sie die einzelne Veränderungsreihe, oder deren einige, seien es viele oder wenige, die in funktionalem Zusammenhang darzustellen bisher geglückt ist, wie schlechthin bestimmt ansieht. Damit nimmt man für irgendeinen begrenzten Funktionalzusammenhang bestimmter Veränderungsreihen im Grunde eine eigene existierende Zeit an (so, wenn man sagt: die Zeit „ist" der Stundenwinkel der Erde); wogegen der Kritizismus von Anfang an jede als „gegeben" angesehene Zeit, wie sie auch bestimmt sei, nur als eine Hypothese betrachtet, und auch als Ergebnis aus einer Reihe solcher Hypothesen immer nur eine auf breitere Basis gestellte Hypothese zu erhalten hofft, analog den sukzessiven Näherungswerten einer unendlichen Reihe. Er behauptet jedoch, daß diesen unendlichen Näherungswerten gegenüber den

Grenzwert zu denken methodisch unerläßlich sei, der damit also zugleich Grenzwert der Existenzbestimmung wird. Das verneinen hieße, wie gesagt, überhaupt den Begriff der Existenz und damit die Aufgabe der Erkenntnis, eben als „Erfahrung“, verneinen. Das also ist der entwickelte Sinn der These: Die Zeit, desgleichen der Raum, sei nicht eine Bestimmung des Gegenstandes „an sich selbst“ (d. h. eines solchen, wie er schlechthin bestimmt wäre), sondern nur ein methodisches Mittel zur Bestimmung des Gegenstandes in der Erfahrung (der nie schlechthin bestimmt sein kann). Vergebens sucht man, was der Empirismus sollte ausrichten können gegen eine Behauptung, die so sehr dessen eigenes bestes Recht zur Geltung bringt.

Das einzige Beiwort „mathematisch“, das Newton der absoluten Zeit und dem absoluten Raum beilegt, hätte jeden Zweifel darüber ausschließen sollen, um welche Art von Voraussetzungen es hier nur zu tun sein kann. Der Empirist müßte auch erklären: Kein Ding in der Natur ist absolut eines, sondern immer nur in bestimmter empirischer Relation: also hat die absolute Eins der Arithmetik „keinen praktischen und auch keinen wissenschaftlichen Wert; niemand ist berechtigt zu sagen, daß er von derselben etwas wisse, sie ist ein müßiger metaphysischer Begriff“. Und so dürfte er schließlich die ganze mathematische Wissenschaft vom kleinen Einmaleins bis zu den Quaternionen als müßiges metaphysisches Gedankenspiel verlachen. Wie? Von meinen eigenen Begriffen, dem Einzigen, wodurch ich überhaupt etwas wissen kann, soll ich nicht behaupten dürfen etwas zu wissen; dagegen die Existenz soll ich wissen? Existenz vielmehr ist erst das letzte Wißbare, oder richtiger: das, was man wissen müßte; in Wahrheit das ewig Unwißbare. Sie ist die ewige Frage der Erkenntnis, auf die alle die heiße Arbeit der Begriffe zielt und auf die sie nie endgültige, sondern nur mehr oder weniger annähernde Antworten zu geben vermag. Dagegen ist alles Mathematische ausgezeichnet durch die Eigenschaft der „Wißbarkeit“ (*scibilitas* sagt Keppler); in ihr „weiß man, wenn man etwas weiß“ (sagt Galilei); sogar läßt sich unter Umständen behaupten, daß man durch sie alles weiß, was von einem bestimmten Gegenstand gewußt werden kann. Auch mathematische Wissenschaft ist nicht erschöpfend dem Umfang nach, aber sie kann qualitativ erschöpfend sein in Hinsicht des bestimmten Problems oder Problemgebietes, darum, weil sie nichts aufstellt, das nicht aus den selbstgeschaffenen Begriffen und nach den eigenen Gesetzen des Erkennens begründbar wäre. In diesem Sinne „rein“ erkennbar sind die Zeit und der Raum als Gebilde rein mathematischer Art, die gleichwohl über die bloße Zahl hinausgehen durch den allgemeinen Bezug auf die Existenz, den ihre Begriffe einschließen. Denn auch dieser ist aus reinen Erkenntnisgesetzen so bestimmt, daß beide, nicht selbst als Existenzen, aber als Bedingungen des Existenzurteils, so vollkommen wißbar und erschöpfend bestimmbar sind wie alles Mathematische.

§ 3. (*Die zeit-räumliche Bestimmung des Existierenden.*) Es ist nun weiter zu untersuchen, welche Grundbestimmungen für die empirische Existenz durch Zeit und Raum als erkenntnisgesetzliche Bedingungen der Existenzsetzung in möglicher Erfahrung als notwendig gegeben sind.

Für eine Betrachtung, die man wohl „ontologisch“ zu nennen hätte, die nämlich von einem voraus gefaßten Begriff des Seins aus das zeitliche Sein als eine Sonderart desselben zu charakterisieren unternähme — nicht minder auch unter psychologischem Gesichtspunkt — muß zunächst dies zeitliche Sein rätselhaft, ja voller Widerspruch erscheinen. Es soll sich zusammensetzen aus zwei, in negativer und positiver Richtung ins Unendliche verlaufenden Strahlen des Seins, die indessen beide durch die merkwürdige Seinsbestimmung des — Nichtseins ausgezeichnet sind: eine Vergangenheit, die „nicht mehr“, eine Zukunft, die „noch nicht“ ist; und noch einen nie ruhenden, ewig sich verschiebenden bloßen Punkt des Seins, der, nur die ausdehnungslose Grenze zwischen jenen beiden Nichts, sie nicht sowohl verbindet als ewig getrennt hält, und der allein im Vollsinn des Wortes existieren soll: dem Jetzt oder der Gegenwart. Ruhelos, ewig fließend muß das Jetzt gedacht werden, denn was für einen Punkt der Betrachtung Jetzt ist, war es für einen noch so nahe benachbarten vorigen Punkt noch nicht und wird es für einen noch so dicht ihm auf dem Fuße folgenden nicht mehr sein. Und absolut ausdehnungslos ist es zu setzen, denn sonst gäbe es in ihm selbst wieder ein Früher und Später, also ein Nichtmehr und Nochnicht, während es vielmehr auf der unendlich schmalen Grenze zwischen diesen beiden Abgründen des Nichtseins — als das allein zweifelsfreie, positive Sein sich behaupten soll. Freilich, wie es, als Null der zeitlichen Erstreckung zwischen den zwei Unendlichen rück- und vorwärts gleichsam eingeklemmt, diese Positivität des Seins zu behaupten vermag, bleibt nicht weniger rätselhaft. Und so möchte wohl dem uralten Zweifel gegen die Realität der Zeit nichts so günstig sein wie eine solche ontologische Betrachtung. Psychologisch aber stellt dieselbe Schwierigkeit sich so dar: Wie soll es möglich sein, einen Zeitverlauf vorzustellen, d. h. ein Nichtjetzt im Jetzt vorzustellen, da doch, was immer ich vorstelle, als Vorgestelltes, in dieser Vorstellung mir gegenwärtig sein muß? Oder in umgekehrter Wendung: Wie kann irgendeine Vorstellung (da sie als solche mir gegenwärtig sein muß) ohne Widerspruch eine Nicht-Gegenwart (Vergangenheit oder Zukunft) mir vorstellen? Jedenfalls weckt diese Erwägung von neuem Mißtrauen gegen die Kennzeichnung der Zeitvorstellung als „Anschauung“, da Anschauung unmittelbare Präsentation, nicht Repräsentation bedeuten soll, welche letztere ohne jene Art der Beziehung, die das Denken oder den Begriff unterscheidet, (Kants „Synthesis der Rekognition") offenbar nicht möglich ist. Ein Nichtgegenwärtiges kann, als nichtgegenwärtig, doch offenbar nicht „angeschaut", sondern allenfalls nur mittelbar vorgestellt, d. h. gedacht werden.

Uns aber kann weder die eine noch die andere Erwägung länger beirren, nachdem uns feststeht, daß die zeit-räumliche Ordnung jedenfalls im Sinne und mit dem Charakter einer reinen Methode der Setzung in der Erkenntnis, und zwar der empirischen Erkenntnis gedacht werden muß. Wird die Zeit so gedacht, so verschwindet sofort der Schein jenes doppelten ontologischen wie psychologischen Widerspruchs. Die wechselseitige Ausschließung der Zeitmomente in Hinsicht der Existenz besagt dann einfach: die Zeitreihe des Existierens sei derart in Gedanken zu setzen oder zu konstruieren, daß einem einfachen Element der Zeit nur ein einfaches Element des Existierens zugeordnet wird. Die Existenz im Zeitpunkt 0, im Zeitpunkt 1 usf. sind, gleichsam als Punkte des Existierens, auseinanderzustellen, weil Zeit überhaupt nichts als diese Auseinanderstellung und damit Reihenordnung oder Zählung der Existenzpunkte besagt. So verliert das Nichtmehr und Nochnicht alles Rätselhafte; es ist nicht rätselhafter als daß, was in einer Zählung schon gezählt ist, nicht in derselben Zählung nochmals gezählt werden darf. Die Zeit, als Stellenordnung des Existierens, hat je für ein definites Element des Existierens nur eine Stelle bereit, und umgekehrt kann jede Stelle der Zeit nur mit einem genau bestimmten Element des Existierens besetzt werden: weil diese gegenseitig eindeutige Zuordnung der ganze Sinn und die ganze Funktion jener Stellenordnung ist. Eben deshalb kann die Simultanëität nicht ein Modus oder eine Dimension der Zeit genannt werden. Nicht zwei Zeiten können gleichzeitig sein, aber zwei Inhaltsmomente oder Momente des Existierenden können in zwei Zeiten oder in eine fallen. Man beachte die Unterscheidung: Momente des Existierenden, nicht des Existierens.

Der Plural „Existenzen“ ist zweideutig; er kann Momente des Existierens bedeuten oder dessen was existiert, da unsere Sprache gestattet, auch das, was existiert, „eine“ Existenz zu nennen. Wir brauchen aber beide Begriffe: der vielen Wirklichkeiten und der einen, nur in der Einzahl denkbaren Wirklichkeit, die jene alle in sich schließt. Diese ist in den aufeinanderfolgenden sich ausschließenden Momenten der Zeit immer auf einzige, ausschließende Art bestimmt zu denken; dagegen schließt jede solche Augenblicksexistenz unbeschränkt viele Einzelmomente des Existierenden ein, denen, eben als in jener einzigen, in einem Augenblick gegebenen Existenz begriffen, gleichzeitige „Existenz“ zukommt. Es sei durch die Reihe

$$\ldots E_{-2},\ E_{-1},\ E_0,\ E_{+1},\ E_{+2},\ \ldots$$

die Folge der Momente des Existierens ausgedrückt; so umfaßt jedes von diesen eine unbeschränkte Zahl (Summe oder Integration) von Momenten des Existierenden; in roher Symbolisierung etwa:

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
E_{-1} = \cdots e_{-1,-1} + e_{0,-1} + e_{+1,-1} + \cdots \\
E_0 \;\;= \cdots e_{-1,0} \;\;+ e_{0,0} \;\;+ e_{+1,0} \;\;+ \cdots \\
E_{+1} = \cdots e_{-1,+1} + e_{0,+1} + e_{+1,+1} + \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Hier stellt die vertikale Reihe der E die Sukzession der Momente des Existierens, die horizontalen Reihen die Simultanëität des für jeden Moment Existierenden dar. In der Folge der Ordnungszahlen der E (denen allemal die zweiten Ordnungszahlen der e in der zugehörigen Simultanreihe entsprechen) drückt sich die in sich einzige, nur eindimensionale Ordnung der „Zeit selbst“ aus. Ihr gleichmäßiger und stetiger Fluß nun wird sich ausdrücken müssen in dem gleichförmig und stetig gedachten Verlauf eines Geschehens. Bedingung der Möglichkeit objektiver Zeitbestimmung also ist die Voraussetzung irgendeines Geschehens als gleichförmiges und stetiges, also einer Veränderungsreihe derart, daß gleiche Zeiten in gleichen Veränderungen, und zwar in beiderseits stetigem Zusammenhange, sich ausdrücken. Wie und mit welchem empirischen Geltungscharakter diese Gleichheit der Veränderung selbst bestimmt sei, ist hierbei nebensächlich; es verschlägt nichts, wenn, was für einen gegebenen Stand der Erkenntnis sich als gleichförmige Änderung darstellte (etwa die wechselseitige Lageänderung zwischen Erde und Fixsternhimmel), für eine fortgeschrittene Stufe sich als nicht gleichförmig herausstellt. Diese Feststellung selbst setzt dann notwendig irgendeine andere Veränderung als gleichförmig, d. h. gleichförmiger voraus. Irgendeine solche Hypothese aber ist unerläßlich; sie bleibt es auch dann und gerade dann, wenn man sich ein- für allemal klar macht, daß keine Gleichförmigkeit eines Geschehens je als absolute empirisch gegeben sein kann, also unter empirischem Gesichtspunkt auch nicht als absolute behauptet werden darf.

Die Hypothese der Gleichförmigkeit einer Veränderung hat aber überhaupt nur einen angebbaren Sinn in der Vergleichung einer Mehrheit von Veränderungsreihen. Es muß also, damit überhaupt eine Folge der Zeitmomente für eine gegebene Reihe von Veränderungen bestimmt sein könne, eine Mehrheit von Veränderungsreihen gegeben und in solcher Beziehung miteinander darstellbar sein, daß die Ordnung je in einer folgenden Reihe nach irgendeinem Gesetze in Beziehung auf die Ordnung einer erstgegebenen sich bestimmt. Dies ist der tiefe, unbedingt richtige Sinn der Aufstellung Kants (in den Beweisen seiner drei „Analogien der Erfahrung"): daß die objektive Zeitfolge des Geschehens eine Konstruktion der Erkenntnis sei, beruhend auf der Herstellung eines „ursächlichen", d. h.

aber (auch für Kant) nichts weiter als: eines Funktionalzusammenhanges des Geschehens; in welchem die objektive Zeitfolge (der Sache nach) sich darstellen würde als identische Folge der Ordnungszahlen der sukzessiven Werte der zueinander in gesetzmäßige Beziehung gesetzten Veränderlichen. Diese Konstruktion des objektiven Geschehens und damit der objektiven Zeitfolge vollzieht sich rein induktiv, d. h. in einem versuchenden Fortschritt von Hypothese zu Hypothese, der aber geleitet ist durch die Grundhypothese, daß ein einziger Funktionalzusammenhang des Geschehens in einer einzigen Zeit (die selbst nur der Ausdruck dieser geforderten, im ewigen Fortschritt der Wissenschaft erst darzustellenden, aber nie endgültig dargestellten absoluten Einheit der Existenzordnung ist) „existiere", d. h. in unendlicher Fortschreitung näherungsweise bestimmbar sein müsse. Wird diese letztere Supposition selbst absolutistisch gedacht, als ob sie das Gesetz unserer Erkenntnis einem fremden, außer ihm stehenden Sein der Dinge aufzwänge, dann freilich muß sie als eine ungeheuerliche Anmaßung erscheinen. Es soll aber damit nicht mehr gesagt sein als: daß dies die notwendige Bedingung ist für einen sicheren Stufengang unserer Erkenntnis, als einer Folge von Näherungsbestimmungen einer uns möglichen einheitlichen Ordnung der Existenz. Es ist damit wesentlich nur gesagt: daß allein in dem Umfang, in welchem, und allein unter den bestimmten Voraussetzungen, unter welchen die Konstruktion eines durchgängigen Funktionalzusammenhanges des Geschehens gelingt, die Einheit der Existenzordnung, die für unsere Erkenntnis nur eine ewige Aufgabe ist, allemal auf gegebener Stufe dargestellt, nämlich konditional bestimmt sei.

Soweit ließ sich gelangen auf Grund der einzigen, aber unabweisbaren Forderung einer einheitlichen Zeitordnung des Geschehens, noch ohne bestimmtere Rücksicht auf die ebenso unabweisbar geforderte Einheit der Raumordnung.

Es ist aber ersichtlich, wie eben damit die gewonnenen Festsetzungen noch in großer Unbestimmtheit verbleiben. Ein Funktionalzusammenhang paralleler Veränderungsreihen ist gefordert; in der eindimensionalen Ordnung der Zeit aber wäre für einen solchen überhaupt kein Platz; es muß also die Simultanordnung, die Ordnung der „Koexistenz" hinzutreten, also die räumliche Ordnung.

Hier kommt es uns nun zustatten, daß überhaupt, während die Elemente in der Zeit sich der Existenz nach ausschließen, die Elemente des Raumes sich vielmehr gegenseitig bedingen und geben; daß die Raumordnung, wie überhaupt Verbindung, so auch Verbindung in der Existenz besagt. Wie also jene Ausschließung, die in der zeitlichen Ordnung als solcher liegt, sich auf den Zeitinhalt (die Existenz im Sinne des Existierens) erstreckt, so muß die durchgängige wechselseitige Verknüpfung der Raumelemente, die ja so wenig wie die Zeitordnung für sich gegeben ist, sich im Rauminhalt, als Ordnung des je für einen gegebenen Zeitmoment Existierenden, darstellen. Jedem Raumpunkt also, der existentiell gegeben sein soll, muß ein Punkt oder absolutes Element des Existierenden entsprechen, nämlich — dieser Zusatz ist unerläßlich — je für einen identischen Punkt des Existierens, also der Zeit. Eine bestimmte Besetzung der Stellen des Raumes, und zwar im stetigen Zusammenhange desselben, ist daher allemal auf einen bestimmten Zeitpunkt zu beziehen, mithin als gleichzeitige zu verstehen, während eine verschiedene Besetzung auch nur eines einzigen Raumpunktes notwendig den Bezug auf verschiedene Zeiten, und umgekehrt eine zeitliche Unterscheidung, um existentielle Geltung zu haben, eine verschiedene Besetzung mindestens eines Raumpunktes erfordert. Ohne Beziehung auf die Zeit hätte überhaupt die Koexistenz der Teile des Raumes und also des Rauminhalts keinen hinreichend bestimmten Sinn; denn das Existierende setzt das Existieren, die Ordnung des Existierenden die des Existierens schon voraus. Auch unter diesem Gesichtspunkt erweist sich die Zeitordnung der Raumordnung logisch vorhergehend; während allerdings eine Zeitordnung empirisch nicht bestimmt sein kann ohne gleichzeitige Bestimmtheit der Raumordnung.

Aus dem Gesagten folgt nun, daß die Raumordnung des Existierenden sich in der Zeit wechselnd darstellen wird, und zwar so, daß für jeden gegebenen Zeitpunkt die Stellen im Raum für jedes Element des Existierenden auf einzige Art bestimmt sein müssen; in der Folge der Zeitmomente also die an sich auf unendlich verschiedene Art mögliche Raumordnung oder Kollokation der Elemente des Existierenden einem Wechsel, und zwar stetigem Wechsel unterliegt: weil nur so zugleich ein selbst stetiger Zusammenhang des Existierens von Punkt zu Punkt der Zeit gewährleistet ist.

Im bloßen Raum aber gibt es, wie in der bloßen Zeit, ja nur leere Stellen. Diese selbst verrücken sich nicht. Man kann sie von einem willkürlichen Ausgangspunkt aus (als Koordinatenanfang) in willkürlicher Ordnung (je nach Wahl der Koordinaten) aufreihen und demgemäß bezeichnen; alle diese verschiedenen Bezeichnungen werden dann untereinander äquivalent sein in dem strengen Sinne, daß sie sachlich dasselbe nur unter anderen und anderen Zeichen, weil in verschiedener Ordnung darstellen; eine bestimmte Bezeichnung aber vorausgesetzt, ließe sich, solange nichts gegeben ist als der Raum selbst und die Zeit, durchaus keine Änderung anders als absolut willkürlich ansetzen. Es scheint also etwas beiden an sich Fremdes, ein anderweitiger Zeit- und Rauminhalt hinzutreten zu müssen, um die für sich leeren Stellen der Zeit und des Raumes zu besetzen; diese Besetzung ist dann also wechselnd und zwar stetig wechselnd zu denken, während die Stellen selbst bleiben. Es hätte in der Tat keinen Sinn, zu sagen, daß die Stellen des Raumes ihre Stellen wechseln; dann brauchte man einen ferneren Raum, in dem der Raum sich bewegte, und so vielleicht immer wieder einen ferneren. Also vielmehr irgendein, noch sonstwie zu bestimmendes Etwas im Raum (nach Kants Ausdruck: „Reales“) wird so gedacht werden müssen, daß es wechselnd andere und andere Stellen im Raum einnimmt. Das heißt: es muß jene wechselnd andere und andere Ordnung der Elemente im Raum sich darstellen als andere und andere, nämlich in der Zeit dem Raume nach wechselnde Ordnung gewisser Elemente oder Punkte eines Existierenden, welches noch irgendwie anders als bloß durch die Einnahme dieser und dieser Stellen im Raum zu der und wieder zu der und der Zeit zu bestimmen ist; und zwar ist, wenn in diesem Wechsel die Einheit des Existierenden streng gewahrt bleiben soll, die weitere Voraussetzung unerläßlich, daß es zuletzt immer dieselben Elemente desselben, somit allein (zeit-räumlich) Existierenden seien, die in der Zeit ihren Ort und zwar stetig wechseln. Daraus folgt das große Gesetz: daß aller in der Zeit und im Raum geschehende Wechsel nur Stellenwechsel, also gegenseitige Lageänderung immer derselben Elemente eines und desselben Existierenden, dieses also, abgesehen von diesem Stellenwechsel, unveränderlich (weil notwendig auf einzige Art bestimmt) zu denken ist.

§ 4. (*Substanz und Energie.*) So ergibt sich allein durch die logische Forderung der eindeutigen Bestimmtheit des Seins in Bezug auf Zeit und Raum die notwendige Voraussetzung einer unveränderlich sich erhaltenden Substanz des Geschehens, oder eines „Realen“, welches nach diesem seinem reinen Begriff notwendig zu denken ist als in seinem Grundbestand immer sich selbst identischer, also ungewordener und unzerstörlicher, nicht vermehrbarer noch verminderbarer, auch keiner Qualitätsänderung unterliegender, dagegen im Raum beweglicher Rauminhalt; dem mit diesem allen durchaus nur solche Bestimmungen beigelegt sind, welche dem in Zeit und Raum Existierenden, zufolge des Inhalts der Begriffe Zeit, Raum und Existenz und des erkenntnisgesetzlichen Verhältnisses dieser Begriffe untereinander, notwendig zukommen. Darin mag man den richtigen Kern der Meinung des Descartes erkennen, daß die körperliche „Substanz" aus apriorischer Notwendigkeit durch nichts weiter als die zeit-räumliche Existenz selbst zu definieren sei.

Was aber nun dies im Raume immer sich Erhaltende und nur den Ort Wechselnde sei, darüber ist hiermit noch nichts weiter entschieden. Die Vorstellungen darüber haben im Laufe der Entwicklung der Naturerkenntnis in sehr weiten Grenzen geschwankt und sind bis heute zu keiner einheitlichen Feststellung gediehen. Doch darf gesagt werden: es nähern sich in den letzten Jahrzehnten die Anschauungen der fortschreitenden Physiker mehr und mehr der Auffassung, die schon lange als die theoretisch befriedigendste sich aufdrängen mußte: daß als das im Raum Vorhandene und sich von Stelle zu Stelle Übertragende nichts anderes anzusehen sei als das, was man unter dem Begriff der „Energie" zu fassen sucht. Was freilich, abgesehen von den soeben angegebenen grundsätzlichen Erfordernissen, unter diesem Begriff zu denken sei, steht noch keineswegs fest. Man hat einen bestimmten Begriff von der mechanischen Energie, nämlich als dem Arbeitswert; aber man nennt dann ferner „Energie" auch ein empirisch weiter nicht Bekanntes, vielmehr eine ganze Reihe unbekannter Faktoren (die allenfalls zuletzt in drei oder zwei oder einen sich noch auflösen mögen), deren jeder für sich am mechanischen Arbeitswert zwar gemessen wird, aber selbst nicht Arbeitswert, jedenfalls uns nicht als solcher gegeben ist. Durch die Eigenschaft der Meßbarkeit am Arbeitswert wird doch die Frage nicht beantwortet, was das ist, das am Arbeitswert gemessen wird. Ist die Meßbarkeit am Arbeitswert der „Energie" überhaupt wesentlich, oder dient vielleicht die mechanische Arbeit nur darum uns als ihr allgemeines Maß, weil sie das uns zugänglichste Maß ist? Muß es darum, weil es das uns zugänglichste ist, auch das richtigste, das exakteste Maß sein? Daß sie es wirklich nicht ist, würde sofort klar sein, wenn, wie es der jüngsten Forschung sich mehr und mehr herauszustellen scheint, die wägbare Masse überhaupt kein letzter, unveränderlicher Faktor in den Rechnungen der Natur, sondern bloß ein uns bequemer, weil unseren sinnlichen Erkenntnishilfen, die durch und durch den Charakter des Zufälligen, der Einrichtung auf besondere Lebensbedingungen tragen, am besten angepaßter Näherungsausdruck ist; daß diese Masse selbst nur eine besondere Folge der Energieverteilung, der Ausdruck bestimmter „innerer Arbeit“ ist, deren nähere Beschaffenheit noch nicht hinreichend geklärt, von der aber schon jetzt absehbar ist, daß ihr absolute Unzerstörlichkeit nicht zugeschrieben werden kann. Wird also unter der Zurückführung aller Naturvorgänge auf „Bewegung“ die Zurückführung auf Übertragung unveränderlicher Massen, und damit als das letzte im Raume Vorhandene und Bewegliche die mechanische Masse verstanden, dann ist das Mißtrauen gegen das Ideal solcher Reduktion sehr begründet. Sie ist dann auch nicht länger als zwar bisher nicht erreichtes, aber grundsätzlich anzustrebendes Erkenntnisziel der Physik festzuhalten; sondern vielmehr umgekehrt wäre als Ziel ins Auge zu fassen, die Mechanik der Massen ganz in eine Mechanik der reinen Energie aufzulösen; wozu gerade die jüngste Forschung auf bestem Wege zu sein scheint.[1])

Wenn aber demnach das Reale im Raum durch die mechanische Masse nicht allgemein und unbedingt und überhaupt nicht ursprünglich dargestellt sein kann, so bleibt als das letzte Bewegliche nur die Energie selbst übrig. Die

1) Man vergleiche etwa mit den noch tastenden, rein prinzipiellen Zweifeln von Driesch [*38*] oder Mach [*110*] die tief umwälzenden, auf Tatsachen und Berechnungen gestützten Aufstellungen von Planck [*144*], auf die hernach noch die Rede kommen wird.

z. B. von Planck[1]) betonte „Analogie“ der Energie mit der Masse wird nicht bloß „enger Anschluß“[2]), sondern geradezu Identität; nicht indem die Energie zum bloßen, untrennbaren Merkmal der Masse oder selbst zu einer nur subtileren Masse, sondern indem die Masse zu nur auf den Raumpunkt, aber in infinitesimalem Übergang bezogener, „nur stetig mit der Zeit ihren Platz wechselnder“ Energie wird. Damit würde das von Planck am Ende seiner grundlegenden Schrift aufgestellte Programm erst voll verwirklicht, welches er selbst durch das Schlagwort „Infinitesimaltheorie“[3]) bezeichnet, und welches bestehen soll in der Anerkennung eines „neuen allgemeinen Naturgesetzes“, wonach „alle Veränderungen, die in und an irgendeinem materiellen Element vor sich gehen, vollständig bestimmt sind durch die augenblicklichen Vorgänge innerhalb und an der Grenze des Elements“. Hierbei kann das „materielle Element“ offenbar selbst nur hypothetisch bestimmt sein; theoretisch verlangt es dargestellt zu werden durch eine infinitesimal zu konstruierende Verteilung der Energie nach Differentialen des Raumes und der Zeit, als deren stetige und gleichmäßige Funktion sie selbst nur infinitesimaler Änderung unterliegt.

Auf die Frage also: als was denn die Energie in sich selbst zu verstehen sei, da sie durch ihr gewöhnliches Maß, den mechanischen Arbeitswert, weder ursprünglich und allgemein, noch überhaupt ohne Zirkel definiert werden kann, wird durch diesen Ausschluß die Antwort nur um so zwingender, die sich übrigens auch wohl direkt hätte geben lassen: die Energie als letzter Naturfaktor will besagen, daß

1) [*143*], S. 116. 134. 2) Ebenda S. 275.

3) Vgl. Cohen [*98*], S. 504f. Übrigens hat auch Hertz [79] die Vorgänge in der Natur streng infinitesimal konstruieren wollen. Doch steht mit dieser Absicht die Annahme absolut fester Verbindungen nicht im Einklang (s. z. B. Planck S. 181; und vgl. weiter unten, § 8).

keine andere Erhaltung für die Rechnungen der Natur erforderlich und in der Tat auch keine gegeben sei, als allein die Erhaltung des Grundbestandes der Veränderung selbst; das heißt: jede im bestimmten Zeit- und Raumpunkt geschehende Veränderung muß darstellbar sein als Einzelergebnis der beständig und zwar kontinuierlich sich ändernden räumlichen Verteilung einer durch die Konstruktion der gesetzmäßigen Abhängigkeitsbeziehungen unter den beobachtbaren Veränderungen erst darzustellenden, in keiner Weise unabhängig gegebenen „Substanz" dieser Veränderungen selbst. Diese Antwort mag stark empiristisch scheinen; wirklich schafft sie der Empirie eben damit ihre volle Freiheit, daß sie ganz rein *a priori* ist, das heißt, nicht mehr als das Grundgesetz der Konstruktion festlegt, deren ganze Ausführung der Erfahrung überlassen bleibt.[1])

Es ist schon vielen aufgefallen (vor langer Zeit z. B. von E. Dühring, neuerlich wieder von Driesch[2]) betont worden), daß man die „potentiellen" Energien im Grunde nur einführt, um die Identität des Grundbestandes der Veränderungen rechnerisch herzustellen und damit das apriorische Prinzip der „Gleichheit von Ursache und Wirkung" allgemein durchführbar zu machen. Potentielle Energie ist ja überhaupt nichts selbständig Gegebenes; es läßt sich von ihr, wenigstens im ursprünglichen Fall, überhaupt nur „*post factum*" reden. Mit Recht sieht darin Driesch die Bestätigung des Apriori-Charakters des Satzes von der Erhaltung der Energie, „seinem wesentlichsten Kerne nach". Dieser einschränkende Zusatz ist allerdings notwendig; denn rein *a priori* läßt sich in der Tat nicht mehr aufstellen als: es müsse die Gesetzlichkeit des

1) Insofern glaube ich mich mit Plancks Betonung des empirischen Charakters des Gesetzes der Erhaltung der Energie (*143*, S. 111. 148) der Sache nach nicht in Widerstreit zu befinden.

2) [*38*] S. 55.

Geschehens so konstruiert werden, daß ein, wie auch immer zu definierender, Grundbestand der Veränderungen in der Natur sich immer erhält und nur im Raume sich anders und anders verteilt. Dieser, wenn auch bedingte A-priori-Charakter des Satzes, daß alles Geschehen der Natur sich als bloße Wanderung der „Energie" darstellen müsse, gibt sich besonders auch darin zu erkennen, daß so jeder Anthropomorphismus aus den Voraussetzungen über die letzte Beschaffenheit des im Raume Beweglichen schwindet[1]); daß weder das Sicht- und Tastbare noch irgendein Empfindbares als solches das Bewegliche im Raum definiert, dieses vielmehr sich als bloßen Rechnungsfaktor darstellt, der indessen so geartet sein muß, daß durch seine Bestimmung auf jeden Ort und Zeitpunkt die darin wirklich auftretenden Verschiedenheiten der Empfindung, unter voller Berücksichtigung der physikalischen und physiologischen Bedingungen des Empfindens, in einheitlichem und stetigem Zusammenhang dargestellt werden. Dazu ist nicht erforderlich, daß für die ja nie erschöpfbare Allheit der Orte im Raum eine Bestimmtheit des in jedem Augenblick sich Ereignenden sich ergebe; sondern es genügt, wenn die Rechnung, in der das Geschehen in der Natur sich ausdrükken soll, so geartet ist, daß sich daraus für jeden Raum- und Zeitpunkt unter geeigneten Voraussetzungen ein bestimmtes Resultat ableiten läßt. Es dürfen also Zwischenräume „leer" gelassen werden, sofern eben keine Data vorliegen, um etwas über sie zu bestimmen; denn wo Empfindung keine Frage stellt, ist auch Physik zu keiner Antwort verpflichtet; oder auch, sofern gewisse Bestimmungen (Vorhandensein von Masse, Widerstand, Reibung) für sie nicht gelten, d. h. empirisch nicht in Betracht kommen; nie aber so, daß ein im Raum existierendes absolutes physikalisches

1) Gute Bemerkungen darüber in dem Vortrag Plancks (1909): „Die Einheit des physikalischen Weltbildes" [*145*].

Nichts behauptet wird. In älteren atomistischen Vorstellungen, die vielleicht die Demokritēischen nur mißverstanden, erschien es allerdings so. Diese alte Ansicht vom „Leeren" war das richtige Gegenstück zu der ebenso unhaltbaren der absolut harten, durch ihr bloßes Dasein im Raume je einen geometrisch abgegrenzten Teil desselben schlechthin erfüllenden, jedem Eindringen anderer Körper absolut widerstehenden Atome; sie beruhte mit dieser auf der gleichen absolutistischen Denkweise und war unter deren Voraussetzung in der Tat nur folgerichtig. Die absolut unnachgiebigen Atome konnten folgerecht nur in einem absolut nachgiebigen Medium (das damit physikalisch zu einem existierenden reinen Nichts wurde) ihre ebenso absolut gedachten Rückungen und Schiebungen vollführen.[1] Bei unserer Auffassung dagegen tritt die Frage, ob, wo und wie Widerstände im Raume vorhanden sind, überhaupt ganz in zweite Linie; Widerstände sind uns nicht ursprüngliche Konstruktionsstücke, sondern selbst der Konstruktion erst bedürftig. Dagegen die Energiebeziehungen hat man sich kontinuierlich allenthalben durch den Raum hin waltend zu denken; und es ist nur die Aufgabe, diese im Einklang mit den Aussagen der Empfindung so darzustellen, daß für jeden existentiell gegebenen Punkt des Raumes und der Zeit ein bestimmtes Ergebnis abzuleiten möglich wird. Empirisch ist jede Realisierung dieser Bestimmungsmöglichkeit für den gegebenen Fall; empirisch sind auch die allgemeinen Formeln, welche die wechselnde Verteilung der Energie, als des letzten, immer identischen Grundbestandes der Ver-

1) Vgl. Buek [*13*] S. 35ff.; der richtig bemerkt, daß ein Festhalten am Atomismus im klassischen Sinne mit dem historischen Stand der modernen Mathematik nicht wohl vereinbar ist. „Die antike Atomistik ist . . . aus der Mathematik der Alten entsprungen. Die Entdeckung der Analysis des Unendlichen erledigte daher auch den Grundgedanken des antiken Atomismus"; wie an Leibniz besonders klar wird; nicht minder an Faraday.

änderungen, gesetzmäßig darstellen; empirisch ist mit einem Wort die ganze Aufstellung und die ganze Ausführung der Rechnung, welche die Natur darstellt, sowohl im Großen als vollends in jeder differenzierten und individualisierten Gestalt; *a priori* allein das Erkenntnisgesetz — dessen Vollstreckung dennoch diese ganze empirische Rechnung schließlich nur ist.

§ 5. (*Die mechanischen Prinzipien. Der Beharrungssatz.*) Es läßt sich nun aber noch eine Reihe von Bestimmungen ebenso rein methodischen Sinnes auf dieser selben erkenntnisgesetzlichen Grundlage sicher ableiten. Diese sind in den sogenannten „Prinzipien" der Mechanik von den großen Forschern auf diesem Gebiet schon lange dem Kerne nach richtig getroffen worden. Aber fast jede ihrer Aufstellungen bedarf doch noch einer erkenntniskritischen Klärung, zu der wir durch die letzten Betrachtungen die feste Basis gewonnen zu haben hoffen.

Die Aufgabe ist, die Methode zu finden, gemäß welcher das im Punkte der Zeit und des Raumes gegenwärtige Reale definierbar wird. Zu definieren ist es, soviel ergab sich schon, als Punkt des Geschehens, und zwar zeiträumlichen Geschehens; also der Bewegung. Das Reale der Bewegung aber ist zu definieren in einem solchen Etwas, das, obgleich stetiger Veränderung unterliegend, ja nur in dieser Veränderlichkeit selbst bestehend, dennoch und gerade so in der Substanz dieser seiner Veränderlichkeit sich identisch erhalte.

Daß irgendeine Erhaltung des Zustands überhaupt gefordert ist, wofern die Veränderung selbst soll zu Begriff gebracht werden können, wird wohl allgemein anerkannt, obgleich nicht immer in voller Klarheit als erkenntnisgesetzliche Notwendigkeit begriffen. Worin aber diese Erhaltung bestehe, das kann um so mehr als reine Erfahrungssache erscheinen, da die Vorstellungen darüber in der Geschichte der Wissenschaft (wie oben schon bemerkt wurde) überaus geschwankt haben und bis heute nicht volle Übereinstimmung unter den Forschenden erreicht ist.

Allgemein verlassen zwar ist die dem Absolutismus des natürlichen Denkens zunächstliegende Voraussetzung, daß das im Raum Existierende, abgesehen von äußerer Einwirkung, seinen Ort im Raume beibehalten würde. Aber eben darin, daß diese im schlechten Sinne apriorische, nämlich für einen naiven Standpunkt des Denkens selbstverständlich scheinende Annahme zu keiner brauchbaren Methode der Naturwissenschaft führte und daher verlassen werden mußte, sieht der Empirismus gern den schlagenden Beweis dafür, daß der gegenteiligen, von Galilei ab allmählich durchgedrungenen, von Newton endgültig formulierten Voraussetzung, nach welcher nicht die zu bestimmter Zeit gegebene Ortsbeziehung (wechselseitige Lage und Entfernung) beweglicher Elemente, sondern ihr Bewegungszustand selbst (Ruhe als Bewegung = 0 miteingerechnet) sich zu erhalten strebe, ein Apriori-Charakter ebensowenig zukomme.[1]) Wir sagen mehr: die erstere Voraussetzung war nicht bloß *a priori* ebenso möglich, sondern sie war so lange die schlechthin als notwendig gegebene, als die Voraussetzung galt, daß es absolute Orte im Universum überhaupt gibt. Den Alten aber galt eben diese Voraussetzung. Ihnen lag die Erde in der Weltmitte absolut fest und mußten, in Beziehung auf sie als ruhende Bezugsgrundlage, die Bewegungen des Fixsternhimmels sich als ewige, absolut gleichförmige darstellen. Mit diesen Voraussetzungen war nicht wohl eine andere Annahme über den Urfaktor der Bewegungen der Materie vereinbar als die der „Trägheit" im Sinne absoluter Ortsbehauptung, abgesehen von Änderung des Zustands durch äußere Einwirkung.[2]) Noch Kopernikus, der zwar die Erde in Be-

1) So (mit vielen anderen) Mach S. 135.
2) Dies bemerkt auch Poincaré, [*147*] S. 96.

wegung setzte, aber dafür die Sonne und den ganzen Fixsternhimmel zu absolutem Stillstand verurteilte, brauchte diese mechanische Grundannahme nicht zu ändern, konnte sie kaum ändern. Es durfte, es mußte wohl bei ihr bleiben, solange die Vorstellung absoluter Ruhe und Bewegung selbst, die ihre Voraussetzung war, sich aufrechthalten ließ. Erst seit Galilei die gänzliche Relativität aller Bestimmungen der Zeit, des Raumes und folglich der Bewegung klar begriff, wurde es eben damit unabweislich, die Annahme der Behauptung des Orts, abgesehen von äußerer Einwirkung, zu ersetzen durch die der Beharrung des Bewegungszustandes. Diese Annahme war ebenso notwendig unter der neuen Voraussetzung, daß kein Ort im Universum aus sich bestimmt oder bestimmbar sei, wie jene es unter der gegenteiligen Voraussetzung war. Bei Galilei hatte jener „scharfe Luftzug“ aus der Unendlichkeit, der (nach einem Wort F. A. Langes) mit der Entdeckung des Kopernikus hereingedrungen war, die Wirkung einer tiefen Klärung und Reinigung der mechanischen Grundbegriffe. Seinem geraden Verstande konnte nicht verborgen bleiben, daß mit diesem einzigen Schritt in die Unendlichkeit die ganze Aufgabe der Forschung zur unendlichen geworden war; daß also die Natur fortan mit solchen Hilfsmitteln, nämlich „Suppositionen“, Grundlegungen des Denkens[1]), zu bearbeiten sei, die auf einen unendlichen Progreß der Erfahrung von Haus aus berechnet und für ihn zureichend sind. Denn da im Unendlichen der Zeit und des Raumes nichts aus sich bestimmt ist, so war alle Bestimmtheit, die von Objekten der Natur gelten soll, aus den eigenen Mitteln der Erkenntnis erst herzustellen. Dazu aber bedurfte es eben solcher Grundvoraussetzungen, die — wie ja auch die der reinen Mathematik — auf einen Progreß ins Unend-

1) S. darüber besonders de Portu [*150*] und Cassirer [*18*], I bes. S. 295 f.

liche ihrer ganzen Anlage nach gerichtet und für ihn geschaffen waren. Das erste dieser Konstruktionsstücke aber wurde nun notwendigerweise die geradlinig-gleichförmige Bewegung, die folglich als beharrend auszusprechen war in dem genauen Sinne, daß sie als unveränderlicher Faktor einzusetzen sei in die Rechnungen, welche die Vorgänge in der Natur darstellen sollen.

Dieser logische Grund des Beharrungssatzes liegt der Sache nach bei Galilei klar zutage; in den Formulierungen bleibt er höchstens dadurch einigermaßen verhüllt, daß von Anfang an diese erste Voraussetzung nicht abgetrennt wird von der zweiten, die mit ihr in der Tat in der denkbar engsten Korrelation steht: daß als Änderung des Zustandes eines Realen allein die Geschwindigkeitsänderung, nicht die Ortsveränderung zu denken sei. Es wird also das im Punkte der Zeit und des Raumes vorhandene Reale schon von Galilei gedacht als Bewegung, mit diesen zwei, voneinander untrennbaren Merkmalen: daß sie, abgesehen von der im wechselseitigen Kausalverhältnis zu bestimmenden Änderung, in ungeänderter Richtung und Geschwindigkeit verharrend, ihre Änderung selbst aber gedacht werden müsse als Änderung eben dieses, nach Richtung und Geschwindigkeit bestimmten Bewegungszustandes. Nach diesen Maßgaben waren fortan die Vorgänge in der Natur zu konstruieren, — wofern überhaupt und insoweit es gelingen mochte, sie in theoretischer Konstruktion auszudrücken.

Dieser determinierende Zusatz, der vielleicht nirgends bei Galilei so nackt dasteht, aber der Sache nach seinen Gedanken sicherlich trifft, beseitigt mit einem Schlage die Schwierigkeiten, die man im Beharrungsprinzip gerade in neuerer Zeit hat finden wollen und die einigen scharf und radikal denkenden Forschern so ernst erschienen sind, daß sie nahezu entschlossen waren, mit diesem Prinzip gänzlich zu brechen. Aber das zeigt sich nun sofort als kaum angängig. In der Geschwindigkeit und Beschleunigung, in der Masse, der Bewegungsgröße, der Wirkung und Gegenwirkung, der Arbeit, der Energie, in jedem Begriff oder Satz der Mechanik überhaupt setzt man die Beharrung der Sache nach doch eben voraus und arbeitet mit ihr; dann aber müßte es wie eine Art begrifflicher Unredlichkeit erscheinen, sie nicht auch ausdrücklich als Voraussetzung auszusprechen und an die Spitze zu stellen.

Eines allerdings ist in diesen Untersuchungen[1]) sehr klar geworden, und gerade darin möchte ihr eigentlicher Wert zu suchen sein: daß es durchaus mißlingt, einen empirischen Tatbestand aufzuweisen, den das Prinzip der Beharrung ausdrückte. Newton bezog die Beharrung in geradlinig-gleichförmiger Bewegung auf den „absoluten Raum“; damit schien, da ein absoluter Raum empirisch nicht gegeben ist noch je gegeben werden kann, der Sinn dieses „Axioms“ überhaupt unbestimmt und unbestimmbar zu werden. Nachdem dies von C. Neumann (1870) mit Nachdruck ausgesprochen war, sehen wir eine ganze Reihe von Forschern eifrig bemüht, das wahre „Bezugssystem“ zu finden, für welches das Galileische Axiom empirische Gültigkeit habe. Mach [*110*] zeigt dagegen unwidersprechlich, daß das in dem Axiome (scheinbar oder wirklich) geforderte Absehen von allen übrigen Körpern in der Welt gar nicht ausführbar ist. Er will deshalb die Aussage des Axioms, um sie doch nicht ganz wegwerfen zu müssen, im Sinne einer „hinreichenden Annäherung“ auf die äußeren Körper, nämlich „räumlich auf den Fixsternhimmel, zeitlich auf die Drehung der Erde“ beziehen und die Korrektur oder Verschärfung der so gewonnenen, natürlich nun nicht mehr exakt gültigen Aussage von erweiterter Erfahrung erwarten (236). Damit ist aber implicite schon gesagt, und

1) Neumann (1870), Mach (1872. 83. 88. 97), Streintz (1883), Lange (1885. 86), L. Weber (1891), Johannesson (1896), Stallo (deutsch 1901), Poincaré (deutsch 1904 u. 1906) u. v. a.

es wird an anderer Stelle (231) auch geradezu ausgesprochen, daß die Schwierigkeit im Grunde dieselbe bleibt wie bei der Beziehung auf den absoluten Raum: „In dem einen Fall können wir des absoluten Raumes nicht habhaft werden, in dem andern Fall ist nur eine beschränkte Zahl von Massen unserer Kenntnis zugänglich und die angedeutete Summation also nicht zu vollenden.“ Darüber beruhigt ihn dann die Erwägung, daß dies eben allgemein die Lage unserer Erkenntnis sei; daß auch ihre fundamentalsten Sätze schließlich auf nicht nur unabgeschlossenen, sondern sogar nie vollständig abschließbaren Erfahrungen beruhen. — Hieran ist wertvoll und richtig der Hinweis auf die Unendlichkeit des Prozesses der Erfahrungserkenntnis überhaupt. Aus dieser folgt gewiß, daß der Satz der Beharrung, wenn er überhaupt ein Erfahrungssatz, eine Aussage über wirkliche Vorgänge in der Natur sein soll, nur diese Geltung einer im Fortgange der Erfahrung vielleicht sich verschärfenden, nie aber zu einem wirklichen Abschluß führenden Annäherung beanspruchen kann. Unter dieser Voraussetzung also hat Mach durchaus recht und wird gegen seine Behauptung weder durch Neumanns Hypothese eines absolut ruhenden Körpers im Weltall noch durch die nur künstlicheren Auskunftsmittel von Streintz und Lange etwas ausgerichtet. Jeder Versuch, für das Beharrungsgesetz einen empirischen und doch exakten Sinn zu retten, ist im Grunde nur Rückfall in eben jenen Absolutismus, der — seit Galilei in der Naturwissenschaft überwunden sein sollte.

§ 6. (*Lösung der Schwierigkeit im Beharrungssatz.*) Schärfer geht dem Problem die interessante Untersuchung von Johannesson [*86*] zuleibe. „Jede gradlinige Bewegung, sofern sie in unser Wahrnehmungsgebiet fallen soll, ist eine Beziehung des Bewegten zu anderen Massen; die Beharrungsbewegung aber schließt solche Beziehung aus; also wird durch die Bedingung des Beharrungssatzes das verneint, was seiner Aussage erst einen Sinn verschaffen könnte“ — verstehe: einen empirischen Sinn. „Der Beharrungssatz, sofern er wahrnehmbare Bewegungen beschreiben soll, birgt in sich einen Widerspruch und ist darum als undenkbar abzulehnen“ (16). War dies aber erst erkannt, so mußte wohl die Auffassung sich nahelegen, daß der Satz — am Ende gar nicht den Sinn einer Aussage über „wahrnehmbare Bewegungen“ habe, daß er vielmehr bloß eine „Vorschrift“, eine „Regel“ bedeute, wonach zum Zwecke des Erkennens zu verfahren sei. Dies spricht denn auch Johannesson geradezu aus. Allerdings sehr pragmatistisch deutet er[1]) sich dann diese Regel lediglich als „Spielregel“, die vielmehr die „Schönheit“ als die — Richtigkeit des Verfahrens im Auge habe; überhaupt als Sache der Willkür, der „freien Entschließung“, welche die vermeintlich in dem Satze ausgedrückten Erfahrungen vielmehr „erst zur Folge habe“. Er glaubt merkwürdigerweise gerade mit dieser Auffassung dem Sinne Kants zu entsprechen; wirklich entspricht ihm nur der Grundgedanke: daß dieser wie jeder Satz *a priori* nicht von Erfahrung abgeleitet ist oder selbst eine Erfahrungstatsache aussprechen will, sondern Erfahrung „allererst möglich macht“.

Daß aber mindestens die „ersten“ Voraussetzungen, welche Galileis „neue Wissenschaften“ überhaupt erst ermöglichten, nicht Sache irgendeiner Willkür sein können, dieser Einsicht nähert sich besonders Streintz [*169*]; zwar nicht hinsichtlich des Beharrungssatzes selbst, aber doch in Hinsicht des mit diesem eng verknüpften Problems der Zeitbestimmung. Er macht darauf aufmerksam, daß Poisson [*149*], dem die Schwierigkeit einer empirischen Bestimmung gleicher Zeiten ganz klar war, die Möglichkeit der Zeitbestimmung gewann auf Grund der Voraussetzung, daß identische

1) Ähnlich Poincaré, [*147*] S. 93 ff.

Körper zu verschiedenen Zeiten unter übrigens identischen Umständen identische Bewegungen beschreiben müssen. Dazu bemerkt Streintz (S. 84): das sei allerdings nur eine Voraussetzung, aber eine oberste Voraussetzung, vollständig analog derjenigen der Geometrie, daß Strecken unverändert übertragen werden können. Seine weiteren Erwägungen (bes. S. 90 f.) führen noch näher darauf hin, daß solche „oberste Voraussetzungen" (ὑποθέcειϲ αἱ πρῶται oder ἀρχαί, nach Plato!) nicht beliebig wählbar sind, sondern, obgleich in Kants Sinne „synthetische" Sätze, dennoch notwendig sind, indem ihre Verneinung auf Widersprüche führt nicht gegen die abstrakten Denkgesetze der formalen Logik, wohl aber gegen den „Denkprozeß", der darauf gerichtet ist, die eindeutige Gesetzmäßigkeit des Naturgeschehens darzustellen.

Wiederum bestimmter wird dasselbe von einem so empiristisch gesonnenen Forscher wie Stallo [*166*] anerkannt, der bis zu der klaren Formulierung durchdringt, daß die Realität der Ruhe und Bewegung, weit entfernt in ihrer Absolutheit zu bestehen, vielmehr durch ihre Relativität bestimmt sei (206). „Die Konstanz des Flusses der Zeit ist wie die der räumlichen Lagen .... rein begrifflicher Natur", heißt es bei demselben (210 u.); und in anderem Zusammenhang (253, Anm. 23): Jede Art Deduktion verlangt eine schließliche Beziehung auf primitive Konstanten, die „nicht durch Erfahrung gegeben, sondern durch den Verstand bestimmt" sind; eine solche ist in der Geometrie die gerade Linie „oder einfach die Richtung". Man vermißt nur, bei ihm wie bei Streintz, die Einsicht, daß ganz auf der gleichen Grundlage die geradlinig-gleichförmige Bewegung, als durch den „Verstand" bestimmte „primitive Konstante" einer möglichen Mechanik, begriffliche Notwendigkeit hat. Zu fast völliger Klarheit kommt dies dagegen bei Petzoldt und Heymans (vgl. oben S. 337 f.). Die vom ersteren besonders betonte Grundforderung der „Eindeutigkeit" wird übrigens auch von Mach, wenigstens nachträglich, in vollem Umfang anerkannt[1]), der u. a. auch gesehen hat, daß die in den Erörterungen der großen Physiker über die Prinzipien der Mechanik von Archimedes an regelmäßig auftretende Berufung auf den Satz des „zureichenden Grundes" eigentlich dies meint: daß ohne gewisse Voraussetzungen die Vorgänge aufhören würden, eindeutig bestimmbar zu sein.

Würde man nun etwa eben in dieser Zurückführung auf den Satz der Eindeutigkeit eine Korrektur des Galileischen Prinzips sehen, so wäre historisch zu erinnern, daß gerade Galilei es ist, der das Prinzip der Eindeutigkeit klar ausgesprochen und offenbar bei allen seinen grundlegenden Aufstellungen, von der Geraden und Senkrechten der Geometrie bis tief in die mechanischen Prinzipien hinein, vor allem eben bei der Aufstellung des Beharrungssatzes, als leitend vor Augen gehabt hat. Das Verfahren seiner Mechanik — die er, wie man sich erinnert, noch ganz zur Mathematik rechnet —, welches Verfahren er als „resolutive Methode" bezeichnet, besteht genau darin: die „Rechnung", welche die Naturvorgänge darstellen, „repräsentieren" soll, zu konstruieren aus den begrifflich einfachsten mathematischen Grundgestalten der Bewegung, die er den „Buchstaben" vergleicht, nach welchen das Buch der Natur zu buchstabieren sei; nicht weil sie, eben als die „einfachsten", am leichtesten und sichersten, nämlich mit den Mitteln der Mathematik, zu handhaben und weiter zu kombinieren sind, sondern weil sie allein die Vorgänge in der Natur überhaupt für uns „wißbar" machen; denn nur dann

1) [*110*] S. 196 f. in Hinsicht des Gegenwirkungsprinzips, 372 in Hinsicht der Minimum-Prinzipien, wo ausdrücklich die „Einzigartigkeit" des Minimum als (unabhängig von aller Teleologie) „entscheidend" anerkannt wird. Vgl. ferner 452. 474. 493, endlich 495, wo mit Recht darauf aufmerksam gemacht wird, daß auch Planck das Energieprinzip wesentlich auf den Satz der Eindeutigkeit stützt (am deutlichsten [*143*], S. 158).

können wir genau wissen, was wir in dem Vorgange der Natur gedacht haben, wenn wir ihn von der Wurzel — nämlich von den wirklich radikalen begrifflichen Elementen an uns in Gedanken selber aufgebaut haben. So wie die Eins, oder richtiger die Grundrelation Eins gegen Null, ein letzter Baustein für den ganzen Gedankenbau der Arithmethik wirklich ist; so wie alle geometrischen Beziehungen auf der, genau jener arithmetischen analogen Grundbeziehung zweier Punkte nach Richtung und Abstand (der geraden Linie) sich wirklich der Sache nach aufbauen, so die mechanischen Beziehungen auf der wiederum dieser geometrischen sich eng anschließenden und durch sie (da die Bewegungen eben geometrisch zu konstruieren sind) unerläßlich geforderten Grundbeziehung, welche der Beharrungssatz ausspricht. Jede weniger radikale Konstruktion würde ungewußte, ja ungedachte Voraussetzungen einführen und also uns mit dem Scheine eines Verstehens betrügen, wo wirklich nichts verstanden wäre. Eine wiederum bloß sinnliche Nachbildung der sinnlichen Vorgänge würde genau so unverständlich sein wie die letzteren selbst, also zu deren Verständnis gar nichts beitragen. Wie aber durch Zugrundelegung der Geraden als letzten Maßes der Richtung wie des Abstandes alle Richtungen und Abstände im Raume konstruierbar und damit „wißbar" werden, so durch Zugrundelegung der geradlinig-gleichförmigen Bewegung, und demnächst der gleichförmig beschleunigten, die Bewegungen im Raume. Hier wie dort stützt Galilei seine Aufstellung zuletzt darauf, daß die Grundbestimmungen, die überhaupt nur eine eindeutige Bestimmung möglich machen, damit eben die „wahren", „realen", „gewissen" und „notwendigen", nämlich notwendig in der Sache zugrunde liegenden, also auch von uns zugrunde zu legenden sind.

Das Argument der „Einfachheit", vollends das Prinzip der „Ökonomie" sind nur tastende, in ihrer Unbestimmtheit viel weniger bezeichnende und sicher anwendbare Ausdrücke derselben Sache. Auch Kirchhoffs Wendung: daß es nur die Aufgabe sei, die Vorgänge auf die einfachste Weise zu „beschreiben", wird man am besten sich so deuten, wie man auch sagt: einen Kreis „beschreiben". Man meint wirklich: konstruieren, d. h. nach reinem, eindeutigem Verfahren vom wahren Anfang aus für die Erkenntnis erst erzeugen. Das ist aber im Grunde eben, was man mit dem „Erklären" gewollt hat. Wenn man also mit jenem Beschreiben das Erklären abgedankt zu haben glaubte, so hatte man vom Erklären selbst keinen klaren Begriff. Was man Richtiges im Sinne hat, ist, daß die „erklärenden" Gründe nicht hinter den Erscheinungen zu suchen sind, sondern in den Rechnungen selbst, welche die Gesetzlichkeit der Erscheinungen darstellen, und nur in diesen, zu suchen sind; daß, um es in der Sprache Platos auszudrücken, die „Hypothesen" (Galileis „Suppositionen": Grundlegungen), d. h. die Konstruktionen oder Substruktionen der Natur, streng an die Bedingung gebunden sind, *apparentias salvare* (τὰ φαινόμενα διασῴζειν), „die Erscheinungen zu wahren", nämlich sie dem Bewußtsein der Erkenntnis zu erhalten. Das aber ist, von Plato an, allen philosophisch gesonnenen Forschern (und alle großen Forscher waren so gesonnen) auch stets bewußt gewesen; es war ganz besonders Galilei bekannt und geläufig[1]); auch mit der wesentlichen Determination, daß dies *apparentias salvare* eine unendliche Aufgabe ist; daß in keinen Rechnungen der Mechanik die Erscheinungen je erschöpfend „repräsentiert" sein können. Das gilt schon deshalb, weil — wie wiederum Mach erinnert — es „rein mechanische Vorgänge nicht gibt", vielmehr jeder Vorgang in der Natur genau genommen allen Gebieten der Physik zugleich angehört; ein Umstand übrigens, der schon für sich allein hinreicht, die Redeweise vom „Beschreiben" als wesentlich ungenau zu kennzeichnen.

1) Natorp [*123*]; De Portu [*150*] S. 32—36; Cassirer [*18*] I, 305. 314f.

§ 7. (*Die drei Gesetze Newtons.*) Nach diesen Erwägungen ergibt sich für den Beharrungssatz und so überhaupt für die „Grundsätze“, besser „Prinzipien“ der reinen Mechanik die folgende Auffassung: Diese Sätze haben überhaupt nicht die Aufgabe, direkt und als solche den Verlauf von Bewegungen in der Natur zu beschreiben; sondern die obersten Voraussetzungen zu formulieren, gemäß welchen eine theoretische Darstellung der Bewegungen nach ihrem gesetzlichen Zusammenhange überhaupt nur möglich ist.

Die erste Frage ist, wie überhaupt der Zustand eines Beweglichen zu gegebener Zeit auszudrücken sei. Darauf ist jetzt geantwortet. Nämlich er ist grundsätzlich darzustellen und zum Verständnis zu bringen als Summe gegebener Bewegungstendenzen, deren jede für sich, ohne Rücksicht auf solche Umstände, die anderswoher modifizierend hinzutreten, eine geradlinige und gleichförmige Bewegung bestimmen würde. Als auf den gegebenen Punkt der Zeit und des Raumes bezogen, ist eine solche Bewegungstendenz infinitesimal zu denken.

Die Begründung dieser Aufstellung sehen wir darin: Es ist keineswegs selbstverständlich, was unter Bewegung eines Punktes zu verstehen sei. Sinnlich, das heißt aber: vorgreifend und unbestimmt, mag man wohl es sich vorstellen können; aber diese Vorstellung zu sichern und bestimmt zu machen ist nun erst die Aufgabe. Geometrie bietet dafür die ersten, notwendigen Vorbedingungen: Punkt, Richtung und Distanz, also Weglänge; aber sie liefert noch nicht die Bewegung selbst; bloß geometrisch wäre überhaupt nicht zu verstehen, was es heißt, daß ein Punkt sich bewegt, eine Stelle ihre Stelle wechselt. Ist es doch vielmehr ihr ganzer Sinn und gleichsam ihre Pflicht, zu stehen, wo sie steht, und um keinen Preis sich zu verrücken. Doch läßt man schon in bloß geometrischer Konstruktion den Punkt einen Weg „beschreiben“; nicht eigentlich, indem man ihn selbst aus seiner Stelle rückt; vielmehr der Gedanke durchläuft eine stetige Reihe von Stellen, indem er an ihnen gewisse gesetzmäßige Beziehungen, vom gegebenen Anfang an in kontinuierlichem Fortgang, zur Erkenntnis bringt. So durchläuft das Denken in der Entwicklung einer Funktion die stetige Zahlreihe, deren Stellen dabei doch zweifellos fest bleiben und nicht sich verrücken sollen. In der mechanischen Konstruktion tritt noch die Zeit hinzu; die mechanische Konstruktion der Bewegung besteht in der eindeutigen Zuordnung einer Folge von Raumpunkten zueinander, mit der Maßgabe, daß je ein Punkt des Raumes zu einer Zeit zugeordnet werde einem bestimmten andern zu einer anderen Zeit, in beiderseits stetigem Übergang. Aber auch das genügt noch nicht, denn es muß nun noch das, was im Wechsel der Zeiten als Merkmal von Ort zu Ort sich übertragen, abgesehen von dieser Übertragung aber in seinem Grundbestand identisch bleiben soll, definiert werden. Für diese noch fehlende Bestimmung nun trägt der Beharrungssatz soviel bei: daß das Bewegliche zu gegebener Zeit allem voraus, d. h. mit Absehung von hinzutretenden ändernden Bestimmungen, zu definieren sei durch die in diesem Zeitpunkt gegebene Bewegungstendenz, d. h. einen die wirklich eintretende Bewegung mitbestimmenden Faktor, zu messen durch einen bestimmten, in gleichen Zeiten immer gleichen Weg, der also in den weiteren Stadien der Bewegung dieses selben Beweglichen sich erhalten, d. h. in die, seine Bewegung durch alle einzelnen Stadien hindurch ausdrückende Rechnung als konstanter Faktor miteingehen muß.

Der letzte erkenntnisgesetzliche Grund dieses Ansatzes ist die allgemeine Denkforderung der Erhaltung des Seins in seinem Grundbestand. „Sein“ besagt zuletzt nichts anderes als Bestimmtheit, Identität; also ist der gesuchte Grundbestand notwendig zu denken als eine gewisse Bestimmtheit oder Identität, die hier nur sein kann: die Identität eines die Bewegungen ursprünglich mitbestimmenden Faktors, nämlich einer Bewegungstendenz von eindeutiger Richtung und Geschwindigkeit. Der Satz der Beharrung dient also an seinem Teile die Forderung der Substantialität zu erfüllen; nicht im Sinne des Ausschlusses von Veränderung überhaupt (denn das Natur-Sein ist überhaupt nur Sein des Veränderlichen), sondern vielmehr der Erhaltung der Änderungstendenz und damit der Veränderung selbst in ihrer Substanz (d. i. letzten Identität). Das ist das große Paradoxon, mit dessen Erkenntnis der allererste Zugang zu einer Wissenschaft von den Veränderungen der Natur gewonnen, das „Tor der gesamten Physik" (wie Hobbes im Hinblick auf Galilei sagt) erschlossen war: daß der positivste Bestand des Seins in der Veränderung nichts anderes ist als die Substanz der Veränderung selbst. Wenn nichts vorginge, d. h. sich änderte, so wäre es so gut, als ob überhaupt nichts wäre; allgemeiner Stillstand wäre allgemeiner Tod, Zunichtewerden des „physischen" Seins, das eben Sein des Werdens (φύεσθαι), nicht Sein als Gegensatz des Werdens ist. Die Veränderung selbst in ihrem Grundbestand sich erhaltend denken, heißt „Natur" denken. Das liegt als tiefster Sinn in der Forderung der Erhaltung des Bewegungszustands und nicht des Orts, d. h. der Nicht-Bewegung.

Die Beharrung für sich allein definiert indessen noch nicht selbst ein Geschehen; sondern schafft nur die allererste Vorbedingung, um ein Geschehen definierbar zu machen; nämlich als Änderung des durch die Beharrung definierten Zustandes, mithin, sofern die reale Änderung als solche positiv zu denken ist, als Beschleunigung.

Daß der Satz der Beharrung und der der Beschleunigung eigentlich nur einer ist, ist wieder eine zutreffende Bemerkung Machs, die übrigens auch sonst in der Literatur über das Beharrungsaxiom öfters begegnet.[1]) Wenn übrigens hierbei

1) Neben Mach (134. 241) s. bes. Stadler (*164*, 185f.): „In der Tat, wenn eine Kraft keine Lage und keine Geschwindigkeit, sondern eine Beschleunigung, eine Geschwindigkeitsänderung bestimmt, so

anerkannt wird, daß der Satz der Beschleunigung die entscheidende Entdeckung Galileis ist, so sollte um so weniger Zweifel darüber bleiben können, daß Galilei das Beharrungsgesetz in seiner ganzen radikalen Bedeutung wohl müsse begriffen haben; was mir in der Tat durch Wohlwill keineswegs widerlegt zu sein scheint.[1])

Übrigens ist es darum nicht etwa zu beanstanden, daß Newton die in sich eine Erkenntnis nach ihren zwei Seiten in seiner *Lex* I und II deutlich auseinanderlegt. Die im gegebenen Zeitpunkt vorhandene Bewegungstendenz ist unerläßlich zu „beschreiben" durch diese zwei Bestandstücke: die Fortdauer der durch den bisherigen Verlauf dem Beweglichen innewohnenden Bewegungstendenz, und die diese ändernden Umstände, die im gedachten Zeitpunkt hinzutreten. Aus dem Satze der Beschleunigung entwickelt dann Newton als bloße Folgerung den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Es ist eine Folgerung in demselben Sinne, wie der zweite Satz eine Folge des ersten ist; die gleiche Konsequenz der Methode, welche die beiden ersten Gesetze notwendig aneinander bindet, bindet an beide auch diese weitere Folge. Als das gemeinsame letzte Prinzip kennen wir schon den Satz der Eindeutigkeit, der gewöhnlich nur in laxerer Fassung als Satz des zureichenden Grundes ausgesprochen wird. Demnach wäre sachlich nichts dagegen einzuwenden, daß als drittes, selbständiges „Gesetz" der Bewegung der „Satz der Unabhängigkeit" (nämlich der Beschleunigungen, die durch verschiedene bewegungbestimmende Faktoren einem und demselben Beweglichen erteilt werden) aufgestellt würde. Daß damit eine logische Selbstverständlichkeit nicht ausgesprochen wird, hat

versteht es sich, daß, wo keine Kraft ist, auch keine Änderung der Geschwindigkeit stattfindet. Man hat nicht nötig, das besonders auszusprechen."

1) S. auch darüber De Portu [*150*].

Mach[1]) überzeugend dargetan. Übrigens ist es, nach dem Vorgang von Wüllner u. a., als eigenes Prinzip auch schon von Streintz (120ff.) betont worden.

Die „Gesetze" Newtons streben ersichtlich einen stetigen Fortgang der Determination des mechanischen Geschehens an. Die weitestgehende Abstraktion enthält der Beharrungssatz; eben damit weist er (wie z. B. Thomson und Tait [*172*] § 216 bemerkt haben) auf den Satz der Beschleunigung als seine notwendige Ergänzung schon hin; sah der Beharrungssatz von äußeren Kräften (bewegungbestimmenden Faktoren) ab, so gibt der Satz der Beschleunigung an, nach welcher Maßgabe solche anzusetzen sind, nämlich nach den hinzutretenden Beschleunigungen, deren Zusammensetzung sich nach dem Unabhängigkeitsprinzip regelt. Das erste Gesetz formuliert (so dürfen wir mit Cohen [*26*], S. 287 sagen) „die allgemeine Substanzvoraussetzung der Bewegung"; das zweite entspricht dagegen, auch in seiner Einseitigkeit (vgl. oben S. 79ff.), dem Gesetze der Kausalität, welches die bloße Forderung der Substantialität überhaupt erst erfüllbar macht. Ganz offensichtlich aber bedeutet das dritte Gesetz Newtons die Vertiefung der Kausalität zur Wechselwirkung. Ohne Zweifel hat auch Kant bei der Aufstellung dieser seiner dritten Relationsart, neben und vielleicht vor Leibnizens *Commercium*, Newtons *Lex tertia* vor Augen gestanden (s. Metaph. Anfangsgr. 3. Hauptst. Lehrs. 4).

Das entscheidende Motiv für die Aufstellung auch dieses Gesetzes liegt aber, wie ebenfalls Kant gesehen hat, in der Erkenntnis der Relativität der Bewegung. Die Lageänderung zweier Körper gegeneinander kann, wenn man die Relativität beachtet, überhaupt nur als wechselseitige gedacht werden; soviel der eine Körper sich dem andern nähert, nähert auch dieser sich ihm; ihre beiderseitige Orts-

1) [*110*] S. 241. 242 (d). 192 f.

veränderung wird notwendig in der sie verbindenden Geraden bestimmt gedacht; also ergibt sich mit Notwendigkeit, daß jedem der beiden Körper der gleiche Anteil an der Verursachung der gegenseitigen Lageänderung, dem Betrage nach, aber in wie Plus und Minus entgegengesetzter Richtung, zuzuschreiben ist.

Kant bemerkt zu diesem Satze, daß Newton sich nicht getraut habe, ihn *a priori* zu beweisen. Nach der landläufigen Vorstellung des Apriori als unbegriffener, instinktiver Voraussetzung, die man kühnlich der Natur zum Gesetz mache, ist es natürlich auch voll berechtigt, die Apriorität dieses wie jedes Satzes, sei es der Naturwissenschaft oder der Mathematik oder selbst der reinen Logik, zu bestreiten. Nur ist dies, mindestens seit Kant, nicht der Sinn, in dem irgendeiner, der als Philosoph mitzählt, vom Apriori geredet hat; das Streiten dawider ist schlechthin nur *ignoratio elenchi*, zu deutsch: Einrennen offener Türen. Übrigens hat gerade Newton bemerkt, daß die Verneinung des dritten Gesetzes auch mit dem ersten in Widerspruch käme; worin liegt, daß die Konsequenz desselben Grundprinzips der Methode reiner Mechanik, das für die Aufstellung des Beharrungssatzes maßgebend war, auch dem Satze der Gegenwirkung die „Notwendigkeit" gibt. Daß dieser Satz in der Tat durch das Prinzip der Eindeutigkeit unerläßlich gefordert ist, hat gerade Mach (197) hervorgehoben. Nun, so durfte er auch gegen seinen Apriori-Charakter nicht streiten, der nichts anderes besagen will als den Charakter einer unerläßlichen Bedingung zur „Möglichkeit der Erfahrung", d. h. der eindeutigen Bestimmbarkeit der Naturvorgänge.

§ 8. (*Das Problem der Masse.*) Bei weitem die ernsteste der Fragen aber, die das dritte Gesetz heraufführt, betrifft den Begriff der Masse. Nach der Darstellung von E. Mach stände die Masse in der engsten Beziehung zum Gegenwirkungsprinzip. Beide hängen im System Newtons nicht bloß so zusammen, wie überhaupt alle seine Prinzipien in innerer Verknüpfung stehen und aus einer gemeinsamen methodischen Grundüberzeugung fließen, jener, die wir im Satze der Eindeutigkeit, d. h. im Grunde: der logischen Bestimmtheit des Naturdenkens überhaupt, zu deutlichem Ausdruck zu bringen suchten; sondern es sind, nach Machs Behauptung, der Massebegriff und der Gegenwirkungssatz wieder nur zwei Ausdrücke einer und derselben Sache, so daß der Satz der Gegenwirkung überhaupt entbehrlich wird, wenn der Begriff der Masse im Sinne Newtons vorausgesetzt wird (*110*, S. 210ff.). Nämlich wir erwarten — „nach dem uns geläufigen Symmetrieprinzip", sagt Mach; statt dessen wäre zu sagen: wir setzen mit Notwendigkeit, weil anders zu keiner eindeutigen Bestimmung zu gelangen ist — daß zwei gleiche Körper sich gleiche entgegengesetzte Beschleunigungen in der Richtung der Verbindungslinie erteilen; vielmehr solche Körper, die sich gleiche entgegengesetzte Beschleunigungen erteilen, setzen wir als gleiche nämlich an mechanischem (d. i. beschleunigungbestimmendem) Wert, dessen technischer Ausdruck die Masse ist. Wir schreiben die *m*fache Masse dem Körper zu, der einem gegebenen, als Einheit gewählten das *m*fache der Beschleunigung erteilt, die er in Gegenwirkung von diesem erhält; so daß das Verhältnis der Massen definiert wird durch das negative umgekehrte Verhältnis der Gegenbeschleunigungen (Mach S. *212*). Daß unter dieser Voraussetzung zwei Massen, die einer dritten gleich, es auch unter sich sind, ist keineswegs logisch notwendig, aber es ist wirklich so (d. h. diese Hypothese erweist sich durchführbar); und diese Tatsache rechtfertigt um so mehr jenen Ansatz, der sonst für die weiteren Rechnungen eben nicht brauchbar wäre. Weshalb die Masse durch das Gewicht zu messen ist, läßt sich nun leicht verständlich machen (ebenda, S. 215f.). So liegt, schließt Mach, im Massebegriff keinerlei Theorie, sondern nur eine Erfahrung. „Der Begriff hat sich bisher bewährt. Es ist sehr unwahrscheinlich, aber nicht unmöglich, daß er in Zukunft erschüttert wird, so wie die Vorstellung der unveränderlichen Wärmemenge, die ja auch auf Erfahrungen beruhte, durch neue Erfahrungen sich modifiziert hat" (216).

Es ist nun schon oben bemerkt worden, daß durch die jüngste Wendung der physikalischen Forschung die alten Vorstellungen von der unveränderlichen Masse in der Tat gründlich erschüttert sind. Nach den Ausführungen Machs sollte man erwarten, daß damit zugleich der Satz der Gegenwirkung hinfällig werden müßte, da er ja nur ein anderer Ausdruck derselben Tatsache der Erfahrung sein soll. Indessen ist es eben der auf die gesamte Physik, besonders die Wärmelehre erweiterte Begriff der Energie, wodurch die Erschütterung des Massebegriffs erfolgt ist; der Energiebegriff aber steht seinerseits mit dem Gegenwirkungsprinzip in nicht minder enger logischer Verbindung. Bildet also der Massebegriff mit dem Gegenwirkungssatz vielleicht doch nicht eine so enge Einheit, wie es von Mach angenommen wird? Dies bedarf der Aufklärung.

Daß die Masse nicht vor den dynamischen Beziehungen, sondern nur durch diese gegeben werden kann (Mach S. 239f.), gilt auch uns als feststehende Voraussetzung und ist übrigens wohl längst (etwa seit W. Weber) in das Bewußtsein der Physiker übergegangen. Man versteht allgemein unter Masse nur das Verhältnis der Kraft zur Beschleunigung (so Maxwell, Wüllner u. v. a.) oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Bewegungsgröße zur Geschwindigkeit. Aber man hat einseitig nach den unmittelbar empirisch aufweislichen mechanischen Beziehungen unter den wägbaren Körpern die „Materie" bestimmt, und dann erwartet und gleichsam verlangt, daß die so gefundene „Quantität der Materie", d. h. Masse der wägbaren Körper, als absolut unveränderlicher Faktor in allen Rechnungen der Natur stehen bleiben, also auch in allen physikalischen

Beziehungen sich festhalten lassen solle. Diese *a priori* grundlose Erwartung oder Forderung ist es, von der die neuere Forschung sich in kecker Revolution befreit hat. Die an wägbare Körper gebundene „träge“ Masse bleibt nicht unter allen Umständen ungeändert, sondern unterliegt, nach sicheren Ergebnissen der jüngsten theoretischen Physik, gewissen Änderungen insbesondere durch die Temperatur; Änderungen allerdings so geringen Betrages, daß sie sich dem experimentellen Nachweis bis jetzt entziehen. Keinesfalls ist die träge Masse mehr als letzter, unauflöslicher Faktor in den Rechnungen der Natur anzusehen, sondern nur als Folgeerscheinung innerer Energien des chemischen Atoms (s. bes. Planck in der oben schon zitierten Abhandlung *144*). Dieses aber hat bereits aufgehört, ein absolut letztes Element der Natur zu bedeuten, seitdem der Zerfall der chemischen Atome aus dem Bereiche bloßer logischer Denkbarkeit in den der streng begründeten Theorie und des experimentellen Nachweises gerückt ist. Übrigens erweist sich die träge Masse auch nicht schlechthin identisch mit der wägbaren; Trägheit und Gewicht gehen im allgemeinen zwar zusammen, aber nur, indem beide in einem und demselben Dritten ihren Grund haben, nämlich jener Energie intraatomistischer Vorgänge noch näher zu bestimmender Art, die zwar, solange das chemische „Atom“ Bestand hat, in ihm sehr angenähert (schwerlich absolut) konstant bleibt, beim Zerfall des Atoms aber in bestimmten (thermodynamischen) Wirkungen nach außen zutage tritt.

Darum verliert der Begriff der Masse doch nicht seine Bedeutung. Sie ist als Rechnungsfaktor unentbehrlich, überall wo es sich darum handelt, den Sätzen der reinen Mechanik bestimmte Anwendung auf das vorliegende physikalische Problem zu geben. Massen treten daher in der Physik auf, überall wo Kräfte auftreten; sie vertreten selbst Kräfte: die Masse bedeutet das Moment des Widerstands; dieser Widerstand aber ist eben durch Kräfte zu repräsentieren,

d. h. aber zuletzt: durch eine bestimmte Verteilung von Energie. Gerade das dritte Gesetz Newtons ermöglicht und fordert, die Massen als Kräfte anzusehen; als solche unterliegen sie zugleich dem zweiten Gesetz. So müssen aber die Massen so wenig absolut unveränderlich verbleiben wie die Kräfte. Denn jede einmal gegebene Verteilung der Energie kann sich schließlich ändern. Es können bestimmte Systeme (d. h. eine bestimmte Gesamtverteilung der Energie) geraume Zeit in einem für unsere Beobachtungsmittel unveränderten Zustand verharren, aber schließlich sich auflösen, um anderen Systemanordnungen Platz zu machen. Eine solche relative Konstanz — vergleichbar der relativen Selbsterhaltung eines Planetensystems — ermöglicht es, aus der unendlichen Komplikation der Vorgänge einzelne Veränderungsreihen sicher herauszuheben und zur Definition zu bringen, Bewegungsgleichungen, Energiegleichungen nicht mehr in der bloßen Abstraktion der reinen Mechanik, sondern in Bezug auf das bestimmte Problem der Physik ansetzen zu können. Doch ist dazu zuletzt nichts mehr erforderlich, als daß die Anfangslage, deren Ausdruck den rechnerischen Ansatz des bestimmten, durch die Erscheinungen aufgegebenen Problems darstellt, sich für die jedesmalige Rechnung identisch festhalten läßt; nicht aber müssen auch in der weiteren, den Vorgang selbst darstellenden Rechnung die angesetzten Rechnungsgrößen oder irgendwelche in diese eingehende Faktoren durchaus unverändert bleiben. Es sind also im besonderen der physikalischen Vorgänge die Massen, ebenso wie die gegebene Energieverteilung, zu deren Ausdruck sie nur dienen, an sich veränderlich zu setzen. Eine absolute Erhaltung hat man sich im Hinblick auf das ideale Ganze der Naturvorgänge zu denken; da aber geht die Erhaltung der Masse vollständig auf in die der Energie und ist nicht noch neben dieser als etwas Besonderes festzuhalten.

Für das besondere Problem wird demnach von gleicher

Masse, d. i. Quantität des Veränderlichen, zu reden sein, wo gleiche, von ungleicher, wo ungleiche Änderungen unter übrigens gleichen Bedingungen auftreten. Die gleichen oder ungleichen Quanta, auf die man die gleiche äußere Einwirkung sich verteilt denkt, lassen sich dann auch als gleiche oder ungleiche Punktzahlen des Systems vorstellen, so daß die Wirkung für jeden materiellen Punkt gleich wird, bei absolut gleicher Verteilung also keine Verschiedenheit der Wirkung zutage treten könnte; die ungleiche Verteilung der substantiellen Punkte vertritt dann die ungleichen Massen. Eine solche Vorstellung liegt offenbar zugrunde, wenn Newton (was man sehr getadelt hat) die Masse als „Quantität" (d. i. Menge) „der Materie", und damit scheinbar statt der Masse die Dichtigkeit definiert; oder aber in einem Zirkel sich bewegt, da die Dichtigkeit selbst nur definiert werden kann als Masse der Volumeinheit (so Mach S. 188, vgl. 210, 239). Die eben angedeutete Vorstellung wird durch diesen logischen Anstoß nicht getroffen. Es muß doch der materielle (d. h. der physische im Unterschied vom geometrischen) Punkt, oder es muß das Reale im Raum, als das, was physisch wirkt und auf das physische Wirkung sich erstreckt, zugrunde gelegt und durch irgendeinen Rechnungsfaktor bezeichnet werden können. Also nicht der Ansatz eines solchen Faktors überhaupt ist anzufechten, sondern nur, daß man zu schnell am Ziel zu sein glaubte, daß man ein bloßes Restproblem für ein Letztes, Absolutes nahm. Warum die gleichen ändernden Faktoren an verschiedenen Stellen des Raumes verschiedene Änderungen bedingen, dafür kann nicht die Raumstelle als solche einstehen, sondern es ist notwendig ein eigentümlicher, physisch-realer Faktor dafür anzusetzen, der nur der Ausdruck dafür ist, daß das, worauf gewirkt wird, verschieden sein muß, da die Wirkung verschieden ist. Damit gewinnt man die Möglichkeit einer theoretischen Darstellung der Vorgänge je für einen gegebenen Umkreis von Problemen. Doch muß man sich darüber klar sein, daß damit die Frage stets nur um eine Stufe zurückgeschoben wird. Was ist es denn, was diese Verschiedenheit der Wirkung selbst bedingt? Diese Frage ist nur zu beantworten durch die Energie, die aber doch eine bestimmte räumliche Verteilung, also Punkte, die als real verschiedene eben durch ein verschiedenes Verhalten gegen gleiche äußere Einwirkung charakterisiert sind, erfordert: also wiederum eine (freilich nicht mehr wägbare) „Masse", die nun aber ebenso wie die vorige nur ein Problemausdruck ist, nur das Restproblem auf neuer Stufe darstellt. Eine Individualisierung der Energievorgänge überhaupt aber wird auf keiner Stufe der Betrachtung anders möglich sein als durch Annahme solcher Verschiedenheiten des Verhaltens gegen gleiche Wirkungen, wie sie in diesem Problemwort „Masse" vielmehr nur bezeichnet als erklärt werden: es wäre denn, daß man wirklich glauben dürfte, zu einem Letzten, Absoluten vorgedrungen zu sein.

Es ist im Grunde die alte „Antinomie" des Einfachen, auf die man hier aufstößt; und es wird auf die alte Frage auch nur die alte Antwort erfolgen können: das Einfache, als die letzte Ziffer, mit der die Natur rechnet, ist eine bloße „Idee", d. h. nach dem strengen Kantischen Sinn dieses Wortes: eine ewige Aufgabe; es darf auf keiner Stufe als erreicht, oder auf dem Wege möglicher Erfahrung überhaupt erreichbar gedacht werden. Der natürliche Absolutismus freilich sucht, von einer Stelle vertrieben, immer wieder an einer anderen Unterschlupf. Und es gewährt dem philosophischen Beobachter etwas wie ein bitteres Ergötzen, wahrzunehmen, wie in einem wissenschaftlich so revolutionären Zeitalter wie dem unseren doch auch die Reaktion des Absolutismus sich immer noch und immer wieder rührt und nicht selten auch tüchtiger Forscher sich bemächtigt, die entweder nicht sehen oder sich durchaus nicht darin schicken können, daß Naturwissenschaft mit allem siegreichen Vordringen gegen überlieferte Anschauungen doch am Ende nicht mehr erreicht, als das Nichtwissen an eine andere Stelle zu verlegen. *Le roi est mort — vive le roi!* Das Atom (als absolut unzerstörliches letztes Element der Natur) ist tot — es lebe das unzerstörliche Elektron! Und wenn einer gar die Materie erschlägt — so materialisiert er dafür die Energie.[1]) Fast allgemein aber mangelt die Besinnung, daß es sich in jeder einzelnen der Grundfragen der exakten Wissenschaften und in der Verbindung ihrer aller um Methodenfragen der Erkenntnis überhaupt nur handeln kann. Die Energie selbst denkt man sich vielfach gleichsam zerstückt an ausdehnungslose, diskrete Punkte geheftet; d. h. man weiß nicht, daß irgendwelche kausale Beziehung überhaupt nur in Wechselrelation gedacht werden darf, die zwar Bezugspunkte erfordert, aber nur „zwischen" den Punkten, gleichsam als ihr Gemeineigentum, oder in besserer Vergleichung, nach Art eines Rechtsverhältnisses besteht. Die Verteilung auf Punkte mag als Rechnungshilfe für das einzelne Problem nützliche Dienste tun, aber sie gibt keinen endgültigen Begriff der kausalen Beziehung als solcher. Diese kann ihrem wesentlichen Sinne nach überhaupt keine diskrete Verteilung, also keine endlichen Punktzahlen brauchen, sondern fordert eine stetige, also infinitesimale Konstruktion. Punkte, wenn sie nicht selbst infinitesimal verstanden werden, sind nichts als Grenzen, Nullen, die durch keine Kunst zu etwas Realem gemacht werden könnten.

Diesen rein methodischen Sinn der Punktsysteme findet man klar ausgesprochen in Schmitz-Dumonts „Naturphilosophie", einem Buche, aus dem, wer die Spreu vom Weizen zu scheiden weiß, wohl manches gewinnen kann. Die Punktsysteme dienen ihm bloß als Ausdruck dafür, daß „das Veränderliche des Systems eine unveränderliche Summe

1) So erklärte Ostwalds Naturphilosophie (2. Aufl. 1902) der Materie den Krieg, aber behielt die Unzerstörlichkeit der (wägbaren) Masse und der chemischen Atome bei. (Später ist das natürlich geändert.)

bilden" muß. Die Aufstellung dieser Summe erfordert allerdings den Ansatz einer Einheit, die aber darum nichts Absolutes ist. Ein „Massepunkt" hat überhaupt für sich keine physische Existenz, darf als einzeln überhaupt nicht gedacht (d. h. real gesetzt) werden; eine begriffliche Existenz erlangt er nur dadurch, daß ihrer mehrere, zum wenigsten zwei gesetzt werden; diese existieren nur als System, sie haben keine selbständigen „Kräfte", sondern nur eine Bedeutung als Wechselwirkung, die man bloß zur bequemeren Berechnung auf die Punkte verteilt denkt. Es wäre unstatthaft, zu sagen: die Körper bestehen aus einer Anzahl solcher Kraftpunkte; sie sind nur den Körpern substituiert als ihre begriffliche Zusammenfassung und Analyse. Es würde dem Sinn des Autors selbst wohl nicht entgegen sein, dafür zu setzen: als begriffliche Zusammenfassung und Analyse der Energiebeziehungen.

Auch für Hertz [79] vertritt die „Masse" nur die eindeutige Zuordnung eines Punktes des Raumes in einer Zeit zu bestimmten Punkten in aller Zeit (§§ 3. 300). Sie ist, lediglich als ein die Bewegungen mitbestimmender Faktor, mit diesen selbst in engster Einheit gedacht, namentlich, gleich ihnen und nur zusammen mit ihnen, infinitesimal konstruiert. Er definiert (§ 115) den Zusammenhang eines Systems als stetig, wenn er die Voraussetzungen erfüllt: 1. daß die Angabe aller möglichen endlichen Verrückungen enthalten sei in der Angabe aller möglichen unendlichkleinen Verrückungen; 2. daß jede mögliche unendlichkleine Verrückung in gerader, stetiger Bahn durchlaufen werden könne; 3. daß jede unendlichkleine Verrückung, welche aus einer bestimmten Lage möglich ist, auch möglich ist aus jeder unendlich benachbarten Lage, abgesehen von Abweichungen von der Ordnung der Entfernung der Lagen oder von höherer Ordnung. Auf Grund dieser Definition aber wird dann das „materielle System" definiert (121. 305), von welchem das Hertzsche Grundgesetz (308) gelten will.

Insoweit scheint die Grundauffassung von Hertz den Einwendungen Cohens (*25*, S. 487—505) kaum ausgesetzt. In den eben mitgeteilten Sätzen ist das „Infinitesimalprinzip", eben als Prinzip, nicht weniger sicher und scharf ausgesprochen als in den ganz ähnlich formulierten Sätzen Plancks, die Cohen Hertz entgegenstellt. Die Unterscheidung grobsinnlicher und „verborgener" Massen betrifft nur die Frage, wo und wie Massen anzusetzen sind, nicht die Definition der Masse, aus der auch Hertz bestimmt jede sinnliche Anlehnung ferngehalten hat. Bei dem allen aber kommt Hertz über die Voraussetzung absolut unveränderlicher Massen nicht hinaus. Zwar um für das bestimmte physikalische Problem eine sichere Begrenzung der Betrachtung zu gewinnen, hat man (wie oben schon von uns anerkannt wurde) eine endliche Anzahl von Massenpunkten zu setzen; ohne einen solchen Ansatz würde auch die Energie und ihre Erhaltung keinen empirisch bestimmten Sinn erhalten. Aber bei Hertz erscheinen die sich erhaltenden Massen nicht bloß als für das bestimmte Problem notwendige Abstraktion, sondern als Grundvoraussetzung schon der theoretischen Mechanik. Vollends in den „starren Verbindungen" wird die Masse, wenn noch so sehr unter der Reserve der Hypothese, doch der Sache nach absolut gesetzt. Damit aber drohen die Vorteile der infinitesimalen Konstruktion und des Ausschlusses unvermittelter Fernkräfte wieder verloren zu gehen.

§ 9. (*Das Energieprinzip und der Übergang von der Mechanik zur Physik.*) Wir haben von den Newtonschen „Gesetzen" gesprochen. Die neuere Mechanik macht aber weit weniger von diesen, die nur für die Abstraktion „freier" Bewegungen ausreichen, Gebrauch, als von den sogenannten Integralprinzipien der Mechanik, aus denen erst eine Gesetzlichkeit der „gebundenen" Bewegungen sich ergibt, und von denen das wichtigste und weitesttragende das Hamiltonsche (dem d'Alembertschen wesentlich äquivalente) Prinzip ist (vgl. Mach [*110*] S. 325 ff. 375 ff.); besonders aber vom Energieprinzip. Bezüglich der ersteren genügt es, an das gelegentlich schon Gesagte zu erinnern: daß auch für ihre Aufstellung die Forderung der eindeutigen Bestimmbarkeit der Vorgänge den entscheidenden logischen Grund abgibt. Aber auch vom letzteren ist bereits soviel gesagt, daß an dieser Stelle nur noch wenige Bemerkungen darüber für unseren Zweck erforderlich sind.

Das Verhältnis des Energieprinzips zu den Gesetzen Newtons ist zu erwünschter Klarheit gebracht worden durch eine Arbeit von Schütz [*158*], worin gezeigt wird, daß aus dem Energieprinzip für ein gegebenes System die Gesetze Newtons, insbesondere das Gegenwirkungsprinzip, sich einfach ableiten lassen, wenn man nur die Bedingung hinzunimmt, daß das Prinzip geltend bleiben soll, wenn dem System eine konstant fortschreitende Bewegung im geometrischen Raum erteilt wird; eine Bedingung, die offenbar erfüllt sein muß, wenn das Prinzip empirisch verwendbar sein soll, da wir Messungen unmittelbar nicht im ruhenden, absoluten, sondern nur im bewegten Raum anstellen können. Unter diesen Voraussetzungen aber ergeben sich sehr einfach aus der Gleichung des Energieprinzips Newtons Bewegungsgleichungen und Schwerpunkts-Integrale, in welchen die drei „Gesetze" enthalten sind. Der Begriff der Masse wird dabei durch das Gegenwirkungsprinzip unabhängig vom Kraftbegriff festgelegt. Umgekehrt folgt das Energieprinzip, soweit es auf die reine Mechanik Bezug hat, aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Also würde es sich überhaupt nur um eine mathematische Umformung schon bekannter Sätze handeln, wenn der Satz der Energie auf die Mechanik beschränkt bliebe. Seine eigentümliche Bedeutung liegt aber vielmehr gerade darin, daß er das Verfahren der Mechanik auf die gesamte Physik übertragbar macht. In einem rein methodischen Sinne wird durch ihn die gesamte Physik in Bewegungslehre verwandelt. Sie muß nur darum nicht Mechanik ponderabeler Massen werden, sondern es ist *a priori* eben so denkbar und wäre an sich befriedigender, wenn die Mechanik wägbarer Massen sich auf eine Mechanik des Unwägbaren zurückführte, die somit die ganze Physik umfassen würde. Diese großartige Vereinheitlichung der Physik ist es, auf welche die Aufstellung und Durchführung des Satzes von der Erhaltung der Energie die erste nicht ganz chimärische Aussicht eröffnet hat.

In dem Gedanken der Energie liegt zunächst das Postulat, daß alle Rechnungen der Natur aus einem einzigen letzten Fond bestritten werden, indem bei jedem Übergang aus einer Form des Wirkens in eine andere (z. B. von Wärme in Bewegung, Bewegung in Wärme) ein letztes, keiner von beiden ausschließlich angehörendes, über beiden liegendes Identisches sich erhalte, das man mit dem Wort „Energie" bezeichnet und das durch den mechanischen Arbeitswert gemessen wird, ohne darum in sich selbst mechanischer Arbeitswert sein zu sollen.

Mit Unrecht hat man dem genialen Urheber dieses Gedankens, Robert Mayer, einen Vorwurf daraus machen wollen (der übrigens ebensowohl Joule träfe), daß er die Energie zur Substanz gemacht habe. Es wäre richtiger zu sagen: er zuerst habe begriffen, daß der echte Sinn der Erhaltung der Substanz die Erhaltung der Energie ist, nämlich daß es um gar keine andere Substanz sich handeln kann, als die des Geschehens, der Veränderung selbst. Das Prinzip der Substantialität stellt nur eine Forderung, die erst erfüllbar wird durch das Prinzip der Energie. Mit vollem Recht also suchte R. Mayer das Identische, das in allen Veränderungen der Natur sich erhalte, einzig in der Identität des Veränderlichen selbst, die sich allein darstellen konnte in der Gleichung, welche die Veränderung in ihrer Gesetzmäßigkeit darstellt. Auf diese

Gleichung fand Mayer den Hinweis in dem alten: *Causa aequat effectum*, das er nur von der bloß mechanischen Bedeutung (etwa des Gegenwirkungsprinzips) ausdehnte auf physikalische Äquivalenzbeziehungen wie zwischen Wärme und Bewegung, und dadurch nach und nach auf alle die mannigfachen Formen der Naturwirkungen, je in ihren wechselseitigen Beziehungen.

Diese logische Wurzel des Energieprinzips, seine Identitätsbedeutung hat Mach in der Wärmelehre (2. Aufl. S. 314—327), diesmal auch ausdrücklich als logische, erkannt und kräftig hervorgehoben. Allenfalls noch bestimmter und radikaler durfte die Auffassung zurückgewiesen werden, die, mit vielen anderen, Wundt vertritt (s. Mach S. 317): daß die Mechanisierung der Wärmelehre und der gesamten Physik darum notwendig sei, weil Bewegung die einzige Veränderung eines Körpers sei, bei welcher dieser mit sich selbst identisch bleibe. Genau das ist die sinnliche Schwäche, die es zu überwinden galt, und die durch das Energieprinzip gerade im Sinne Mayers überwunden ist: die Meinung, als ob es auf die Erhaltung des Körpers wesentlich ankomme und nur abgeleiteter Weise, um des Körpers willen, auf die Erhaltung eines solchen Faktors, der geeignet sei, dem Körper in allen seinen Veränderungen die Identität zu sichern; welcher Faktor nur in der Bewegung, nicht in irgendwelchen qualitativen Merkmalen gesucht werden könne. Die Übertragung eines Körpers von einer Stelle zur andern ist in sich nicht nur nicht logisch verständlicher als eine Änderung innerer Eigenschaften, sondern sie selbst wird logischem Verständnis damit erst erschlossen, daß sie begriffen wird als Übertragung von Energie. Es ist überhaupt nur sinnliches Vorurteil, daß das Dasein eines Körpers jetzt an der, jetzt an einer anderen Stelle des Raumes etwas sei, wobei das Verständnis sich beruhigen könne. Allerdings kommt es diesem sinnlichen Vorurteil zustatten, daß der Körper und dessen Bewegung im Raume mathematischer

Bestimmung unterliegt; aber, wenn die Betrachtung nicht im bloß Mathematischen stecken bleiben soll, so wird die Frage unabweislich, was denn das sei, das da im Raume vorhanden ist und sich von Stelle zu Stelle überträgt. Darauf gibt Mathematik keine Antwort mehr. Im Raum vorhanden und zwar in wechselnder Verteilung vorhanden, d. h. beweglich ist aber nicht bloß Masse und Geschwindigkeit wägbarer Körper, sondern ebensowohl Licht, Wärme, Elektrizität. Sie repräsentieren also ebensogut Bewegung im Raume wie die wiegende und widerstehende Masse der gewöhnlichen Mechanik; und sie entziehen sich so wenig wie diese mathematischer Behandlung. Sollte sich also nicht durch sie auch ebensogut die Identität eines physisch Realen repräsentieren lassen wie durch die wägbare Masse? Wird das Herabgehen der Wagschale oder der Widerstand gegen den Anprall verständlich durch die Hypothese, daß da „Körper" ist? Das ist entweder bare Tautologie, wenn doch der (mechanische) Körper eben durch Wägbarkeit und Widerstand definiert wird; oder es ist nur die Gewöhnung unseres sinnlichen Vorstellens, die uns ein Verstehen vortäuscht, wo wirklich nichts verstanden ist. Auch die Erinnerung Machs, daß historisch von den Eleaten an im Begriff der Ortsveränderung keineswegs geringere begriffliche Schwierigkeiten gefunden worden sind als in dem der qualitativen Veränderung, enthält etwas Richtiges. Man versucht entweder die Ortsveränderung rein geometrisch zu denken; geometrisch aber gibt es keine Veränderung des Orts; oder, wenn sie physikalisch verstanden werden soll, so muß sie begriffen werden können als „Reales" im Sinne Kants; ein anderes Reales aber, das sich im Raume überträgt, ist nicht gegeben als das Reale der Bewegung selbst. Vom sinnlichen Standpunkt muß dies freilich als der Tautologien leerste erscheinen: daß zuletzt nur Bewegung sich bewege. Aber in der Tat nichts anderes besagen die Gleichungen der Physik. Sie wissen durchaus nichts anderes den Punkten des Raumes von Punkt zu Punkt der Zeit zuzuordnen als bewegungbestimmende Faktoren. Wir haben uns indessen längst überzeugt, daß gerade logisch in der Tat nichts anderes zu erwarten ist. Logisch angesehen „ist" im physischen Sinne, oder ist real, allein das φύεσθαι selbst, also die Veränderung, und zwar zeit-räumliche Veränderung, also, im weitesten Sinne, Bewegung. Wo nichts geschieht, da ist nichts, im physischen Sinn des Seins, das nur Sein des Werdens bedeutet; und dies Werden ist, als räumliches, allgemein Bewegung. Auch muß man darum nicht etwa die Wärme, das Licht, die Elektrizität in Bewegung „verborgener" Massen erst umdeuten, um sie als „Arten der Bewegung" verstehen zu dürfen; sondern Arten der Bewegung sind sie schon damit, daß ihr wechselndes Dasein im Raume sich in Gleichungen ausdrückt. Nur als überhaupt verschieden sind sie „gegeben", d. h. als Problem aufgegeben, durch die Verschiedenheit sinnlich sich darstellender Wirkungen; worin aber diese Verschiedenheit besteht, das lehrt nicht die sinnliche Wahrnehmung, sondern das ergeben erst die gesetzmäßigen Beziehungen, die als Energiebeziehungen in jenen mannigfach unter sich verknüpften Gleichungen sich ausdrücken.

§ 10. (*Das Energieprinzip und die Materie. Der „zweite Hauptsatz" und der Wärmetod.*) Diese Beziehungen sind nun von Robert Mayer an in weitem Umfang erforscht worden. Es hat sich die verwirrende Vielheit der Energie-Arten mit hoher Sicherheit bereits auf zunächst zwei Grundarten: die mechanische und die elektrische, reduziert, und es sind dadurch (wie kürzlich Planck [*145*], 1909, ausgeführt hat) die spezifischen Sinnesempfindungen „geradezu ausgeschaltet", so sehr, daß z. B. die Wärmeerscheinungen nicht mehr einen eigenen, eben durch die Wärme empfindung abgegrenzten Bezirk bilden, sondern ganz getrennt, teils beider Mechanik, teils (als Strahlungswärme) bei der Optik oder Elektrodynamik behandelt werden. Wenn es aber eine kurze Zeit lang scheinen konnte, als ob wenigstens über diese letzte Dualität von Mechanik und Elektrik nicht hinauszukommen sei, so scheint durch die jüngsten Forschungen eine vollständige Vereinigung beider schon angebahnt zu sein; die Widersprüche stellen sich mehr und mehr als nur scheinbar heraus. Die Zurückführung der gesamten Physik auf bloße Massenmechanik, die noch Helmholtz und Hertz anstrebten, wird als apriorisches Postulat wohl nur noch von wenigen festgehalten. Immerhin mag noch mancher die Hoffnung nähren, daß auch die neuen Errungenschaften der Physik schließlich eine Aufhellung im Sinne dieser Voraussetzung erfahren werden. In sich natürlicher, zugleich dem heutigen Stande der Forschung näherliegend scheint, wie schon bemerkt, die umgekehrte Erwartung: daß die Mechanik wägbarer Massen sich schließlich auf die Elektrik zurückführen, die ponderabele Masse sich als eine Form der Energie herausstellen, und so eine „Entmaterialisirung der Materie“ sich werde erreichen lassen (so Bucherer, Ann. d. Phys. 28, 536). Eine atomistische Konstruktion (Elektronen) ist damit keineswegs unvereinbar; nur muß man sich darüber klar sein, in welchem Sinne allein sie möglich bleibt: schwerlich im Sinne einer endgültigen Theorie. Denn die Voraussetzung absolut starrer Körper ist im Unwägbaren nicht annehmbarer als im Wägbaren; sie scheint durch das (hernach noch zu berührende) wichtigste Prinzip der neueren Forschung auf diesem Gebiet, das „Relativitätsprinzip“, geradezu ausgeschlossen (s. Born, in demselben Bande der Annalen S. 571 ff.). Aber nicht annehmbarer ist nach demselben Prinzip die Hypothese eines Äthers, sofern man darunter ein strukturloses homogenes unendlich ausgebreitetes Medium versteht, wie noch H. A. Lorentz es ansah und wie man, um den Schwierigkeiten wegen des absoluten Raumes zu entgehen, es sich oft gleichsam als Ersatz für diesen (geradezu als jenen von Neumann geforderten Körper *A*) gedacht hat; denn ein homogenes unendliches Medium ist offenbar ganz außer Stande, als Bezugssystem zu dienen (wie Bucherer a. a. O. mit Recht bemerkt). Dagegen scheint, während die gewöhnliche Masse zu einer Funktion der Geschwindigkeit wird, ein anderer für jeden substantiellen Punkt konstanter Faktor (von Minkowski „Ruhmasse" genannt) deren Rolle zu übernehmen, so daß der Begriff Masse nicht etwa ersatzlos wegfällt, nur, wie es nach unseren obigen Betrachtungen zu erwarten war, um eine Stufe weiter vom sinnlich Gegebenen sich entfernt und sichtlicher noch als die Masse der alten Mechanik zu einer bloßen Rechnungsgröße wird, welche, zusammen mit der Geschwindigkeit, zum Ausdruck der Energiebeziehungen unentbehrlich ist.

Schon der äußerst bewegliche Stand der gegenwärtigen Forschung auf diesem Gebiet, der fast jeden Tag neue, vielleicht umwälzende Entdeckungen erwarten läßt, rät an, es bei diesen notwendig sehr unvollständigen und provisorischen Bemerkungen bewenden zu lassen. Auch der sogenannte „zweite Hauptsatz" von der Energie fordert kein langes Verweilen, da darüber schon H. Driesch das für unseren Zweck Notwendige und Hinreichende gesagt hat. Dieser Forscher (dem ich übrigens in seinen vitalistischen Aufstellungen nicht folgen kann) hält mit uns den Satz von der Erhaltung der Energie für *a priori* in seinem logischen Kern, d. h. sofern er die Forderung der Erhaltung eines identischen Grundbestandes der Veränderungen realisieren will. Den sogenannten zweiten Hauptsatz aber zerlegt er in zwei voneinander unabhängige Sätze, von denen der erste seinem logischen Kerne nach ebenfalls *a priori*, der zweite dagegen rein empirisch ist. Der „wahre" zweite Hauptsatz besagt in seinem apriorischen Kern, daß „ohne Differenzen kein Geschehen (keine Veränderung) möglich ist", und daß „jedes Geschehen vom Höchstvermöglichen an verläuft, daß das Veränderlichste am meisten sich zu verändern strebt"

(S. 81). Während also der Satz von der Erhaltung der Energie nur verlangt, daß Etwas in den ursachlichen Faktoren identisch bleibe, spricht der zweite Energiesatz die hierzu komplementäre Forderung aus, daß etwas in den Ursachen different sein muß, wenn überhaupt eine Veränderung eintreten soll. Die Maßbestimmung dieser Ungleichheit ergibt sich dann gemäß eben jener Voraussetzung, so wie das Maß der Gleichheit gemäß dem Erhaltungssatz; nämlich die Verschiedenheit in den Ursachen ist genau so anzusetzen, daß dadurch die wirklich eintretende Veränderung gesetzmäßig dargestellt wird. Die fragliche Differenz ist es, die man die „Intensitätsdifferenz" der Energie nennt, und so gewinnt der Satz die (Ostwaldsche) Fassung: Ein Geschehen (Veränderung) tritt nur ein bei nicht kompensierter Intensitätsdifferenz, und zwar geht es von der höchsten nichtkompensierten Intensität aus (Driesch S. 82). Ganz davon zu trennen ist die reine Tatsache des Entropiesatzes: „daß in einem System alle mit dessen eigenen Mitteln geschehenden Vorgänge so verlaufen, daß die absolute Höhe des höchsten vorhandenen unkompensierten Intensitätswertes vor dem Geschehen nach stattgehabtem Geschehen nicht wieder irgendwo im System erreicht wird" (S. 83). Dieser Satz ist durch die bisherige Erfahrung durchgängig bewährt, aber ihm „könnte wohl widersprochen werden, doch wegen des zweiten Teiles des wahren zweiten Hauptsatzes nicht in der Form, daß eine Hebung, sondern nur in der, daß ein Gleichbleiben der absoluten Höhe des höchsten Intensitätswertes behauptet würde" (S. 94). Die Möglichkeit einer Abweichung vom Entropiesatz hat z. B. auch Boltzmann ausdrücklich offen gehalten. Und wenn Planck (*145*, S. 24) meint, eine Natur, die ihm widerspräche, wäre „eben nicht mehr unsere Natur", so ist damit im Grunde wenig gesagt. Es ist eben so, oder aber es ist nicht so. Die Folgerung auf einen absoluten Stillstand des Geschehens jedoch lehnt Planck ebenso entschieden ab wie

Driesch (S. 86), Mach (Wärmelehre S. 338, Anm. 1), überhaupt alle besonnenen Forscher. In der Tat kann nur die äußerste metaphysische Voreingenommenheit übersehen lassen, daß nicht etwa aus dem zweiten Hauptsatz von der Energie die Endlichkeit der Welt gefolgert werden kann, sondern nur unter Voraussetzung ihrer Endlichkeit der zweite Hauptsatz zum absoluten Stillstand des Geschehens führen würde. Selbst Eduard von Hartmann[1]), dem an der Konsequenz des absoluten Wärmetodes im Interesse seiner Metaphysik so viel gelegen sein muß, vermag bei seiner soliden Kenntnis der Naturwissenschaft doch nur zu sagen: Für den Fall, daß das materielle Weltall endlich ist, haben beide Energiesätze für es exakte Geltung; ist es dagegen unendlich, so haben beide für Teile der Welt nur annähernde Richtigkeit, während sie für die Welt als Ganzes jeden Sinn verlieren. Aber hieraus zieht er nun den merkwürdigen Schluß: die Endlichkeit der Welt sei also eine unausweichliche Konsequenz der Annahme, daß die beiden Hauptsätze der Energielehre nicht bloß annähernd, sondern genau richtig sind, daß sie theoretische Wahrheiten im Sinne der exakten Naturwissenschaft sind. Und nochmals (S. 33): „Sollen die Hauptsätze der Energielehre in irgendwelchem Sinne exakte Wahrheiten für etwas Wirkliches sein, so muß ... die Welt endlich sein, für die allein sie genau gelten"; dann folge aber aus dem zweiten Hauptsatz auch die Endlichkeit des Weltprozesses vor- wie rückwärts. Also — schließt er —: wenn die Hauptsätze der Energielehre richtige Induktionen sind, so muß nicht nur die Welt räumlich endlich, sondern auch der Weltprozeß zeitlich endlich sein, und zwar sowohl nach vorwärts als auch nach rückwärts. — Demnach versteht v. Hartmann unter „richtigen Induktionen" oder „theoretischen Wahrheiten" im Sinne der exakten Naturwissenschaft absolutgültige Aussagen über „etwas

[1]) [*68*], S. 30.

Wirkliches" auf Grund der Erfahrung: genau was es nicht gibt, nie gegeben hat und nie geben kann, wenn doch Erfahrung ein unvollendbarer Prozeß und empirische Gültigkeit identisch ist mit nichtabsoluter. „Exakte" Gültigkeit gibt es nur für Bedingungssätze; nicht für Aussagen über absolute Wirklichkeiten. Stets sind auch die Energiesätze, wie alle anderen „Naturgesetze", von der exakten Forschung nur konditional ausgesprochen worden. Es handelte sich dabei stets um die Abstraktion des „freien Systems"; die Anwendung auf ein empirisch gegebenes System kann nie „exakt" sein, weil es empirisch ein absolut freies System gar nicht gibt noch geben kann. Die Anwendung auf die „Welt" verbietet sich *a potiori*, da uns die Welt als geschlossenes Energiesystem in keinem noch so eingeschränkten Sinne „gegeben" ist. Und so müßte jene Schlußfolgerung höchst verwunderlich erscheinen, wüßte man nicht zur Genüge, wie auch sonst in der Philosophie dieses sehr begabten und sehr unterrichteten Denkers die Naivität des Absolutismus wahre Orgien feiert[1]).

Übrigens ist diese absolutistische Neigung nicht etwa bloß bei Philosophen zu finden; überraschende Ausbrüche derselben begegnen gerade gegenwärtig wieder nicht selten in freieren Äußerungen auch solcher Forscher, die in der Forschung selbst kritische Besonnenheit wohl zu wahren wissen. Um so wichtiger ist est zu bemerken, daß die strenge Forschung selbst gerade in ihrer jüngsten Phase im Begriff ist, sich zu einem ganz reinen und klaren Relativismus durchzukämpfen. Gerade die so lange vergebens angestrebte Vereinigung von Mechanik und Elektrik scheint endgültig gewonnen werden zu sollen auf Grund eines Prinzips, das schon in seinem Namen diese tiefe Bedeutung ankündigt; es nennt sich das Prinzip der „Relativität". Ein

---

1) Vgl. m. Kritik seines jedenfalls bedeutendsten Werkes, der „Kategorienlehre", Arch. f. syst. Philos. VI (1900).

Blick auf diese jüngste Wendung soll unsere Betrachtungen beschließen.

§ 11. (*Das Relativitätsprinzip von Lorentz, Einstein, Minkowski.*) H. A. Lorentz [*108*] war es gelungen, aus den bereits bekannten Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper solche für bewegte Körper abzuleiten, indem er statt der auf den ruhenden Äther bezogenen Koordinaten „relative", nämlich auf ein in gleichförmiger Fortbewegung begriffenes System (z. B. die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne) bezügliche einführte. Unter Ruhe des Äthers war hierbei verstanden, daß seine Teile sich nicht gegeneinander verschieben, und daß die Bewegung der ponderabelen Massen relative Bewegung in Bezug auf den Äther ist. Während aber die so gewonnene Theorie sich übrigens den Erscheinungen gut anpaßte, blieb eine fundamentale Schwierigkeit zurück, nämlich, daß eine relative Bewegung der Erde gegen den Lichtäther, wie die Theorie sie einschloß, durch gewisse Experimente (Interferenzversuche von Michelson und Morley) als mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht existierend erwiesen war. Lorentz wußte für diesen seine Theorie empfindlich störenden Umstand keine andere Abhilfe zu finden als in der gewagten Hypothese, daß alle bewegten Körper, wägbare wie Elektronen, eine konstante Verkürzung in der Richtung ihrer Bewegung im Verhältnis von $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ erfahren, wo v die Geschwindigkeit des bewegten Körpers (im gedachten Fall die Erdgeschwindigkeit), c die Lichtgeschwindigkeit ist. Diese Verkürzung versuchte er zu erklären durch die Annahme, daß auch die Molekularkräfte der Körper, welche deren Gestalt und Dimensionen bestimmen, ebenso wie die elektrischen und magnetischen durch den Äther vermittelt würden (a. a. O. 120—125).

A. Einstein (Ann. d. Phys. 17, 1905, 891 ff.) fand nun aber, daß diese Schwierigkeit, zugleich mit anderen, sich in überraschend einfacher Weise auflöst durch genaue Berücksichtigung der Relativität aller empirischen Zeit- und Ortsbestimmung. Die Zeitbestimmung von Vorgängen, die an getrennten Orten sich ereignen, erfordert nämlich ganz bestimmte Voraussetzungen, die in der Anwendung meist nicht berücksichtigt werden, unter gewöhnlichen Umständen auch nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Es sei die Zeit eines Vorgangs in einem Punkte A des Raumes nach der Zeigerstellung einer in A befindlichen Uhr, die eines Vorgangs in einem anderen Punkte B nach der Zeigerstellung einer in B befindlichen Uhr bestimmt; so können nicht ohne weiteres beide Vorgänge als gleichzeitig erkannt werden, sondern es müssen die Zeitangaben beider Uhren erst auf irgendeine Weise miteinander vermittelt werden; dies geschieht am einfachsten durch die Voraussetzung, daß die Zeiten, die das Licht braucht, um von A nach B, und, um von B wieder nach A zu gelangen, einander gleich sind. Aber diese Voraussetzung gilt ohne weiteres nur im ruhenden Raum. Die Vergleichung der Zeiten in bewegten Räumen unterliegt besonderen Bedingungen, die zugleich auch auf die Raummessungen Einfluß haben. Die Länge eines Stabes, im ruhenden Raum mit gleichfalls ruhendem Maße gemessen, und die des bewegten Stabes, mit gleichzeitig in derselben Bewegung befindlichem Maße gemessen, lassen sich ohne Bedenken gleichsetzen auf Grund der allgemeinen Voraussetzung, daß die Gesetze, wonach die Zustände physischer Körper sich bestimmen, davon unabhängig sind, ob sie auf ein ruhendes oder auf ein in gleichförmiger Fortbewegung (Translation) begriffenes Kräftesystem bezogen werden. Aber die Länge desselben, in Bewegung begriffenen Körpers, gemessen im ruhenden System, indem man durch im ruhenden System aufgestellte, nach der vorigen Voraussetzung gleichgehende Uhren ermittelt, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfangs- und Endpunkt des zu messenden Stabes allemal zu derselben Zeit befinden, ergibt sich nicht mehr gleich der auf die vorher angegebene Art gemessenen Länge, weil die Wege, die das Licht braucht, um vom Anfangs- zum Endpunkt des Stabes und zurück zu gelangen, mithin auch die Zeiten, jetzt nicht mehr gleich sind, nämlich der Hinweg durch das gleichzeitige Fortrücken des Stabes sich verlängert, der Rückweg dagegen sich verkürzt, während die Geschwindigkeit des Lichts immer gleich bleibt; was zur Folge hat, daß die Gleichzeitigkeit bei der Ortsbestimmung sich nicht mehr ebenso wie im vorigen Fall bestimmt. Allgemein ergibt diese Betrachtung, daß der Bestimmung der Gleichzeitigkeit auf Grund empirischer Messungen überhaupt keine absolute Bedeutung innewohnt, indem zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu ihm bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, sich nicht mehr als gleichzeitig darstellen. Es ändert sich also, indem man vom ruhenden zum gleichförmig bewegten Koordinatensystem übergeht, mit den Raumkoordinaten zugleich der Zeitparameter, und zwar in bestimmter Abhängigkeit von dem Verhältnisse der Geschwindigkeit der vorausgesetzten Translationsbewegung zur Lichtgeschwindigkeit. Hierbei ergibt aber die Rechnung, daß ein mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung bewegter Körper, im bewegten Zustand vom ruhenden System aus gemessen, eine Verkürzung genau in dem von Lorentz berechneten Verhältnis $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zeigen muß. Diese seltsame, von Lorentz rein rechnerisch gefundene, durchgehende Verkürzung jedes bewegten Körpers in der Richtung seiner Bewegung fordert also nicht noch eine besondere physikalische Erklärung, sondern folgt *mit Notwendigkeit aus den Bedingungen der empirischen Zeit- und Ortsbestimmung* bei bewegtem Standort, unter gleichzeitigem Fehlen eines absoluten Bezugssystems.

Es ergeben sich aus diesem an sich schon merkwürdigen Gesetz noch weitere unerwartete Konsequenzen; z. B. daß nicht bloß alle in der Natur möglichen Geschwindigkeiten, zufolge der Bedingtheit unserer Zeit- und Ortsbestimmungen, notwendig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit gesetzt werden müssen, sondern auch aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, deren jede kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, stets eine Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit resultiert, was bedeutet, daß die Lichtgeschwindigkeit selbst durch Zusammensetzung mit einer Unterlichtgeschwindigkeit nicht geändert wird, oder daß die Lichtgeschwindigkeit in der Physik die Rolle der unendlichgroßen Geschwindigkeit spielt (a. a. O., S. 903, 906). Es könnte für einen Augenblick eine Unstimmigkeit darin zu liegen scheinen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleichermaßen fürs bewegte wie fürs ruhende System konstant angenommen wird. Einstein hat indessen bewiesen, daß die Lichtgeschwindigkeit für das bewegte System in der Tat notwendig konstant bleibt, wenn sie es im ruhenden System ist. Die Lichtgeschwindigkeit beweist sich eben durchweg als ein letzter Faktor, der in alle unsere empirischen Zeit- und Raummessungen gleichermaßen als Bedingung eingeht. Es gibt gar keine Möglichkeit, sie selbst als nicht konstant zu erweisen, solange es über sie hinaus kein Maß der zeitlichen und räumlichen Bestimmung mehr für uns gibt.

Die radikalsten, gerade die philosophische Seite der Frage tief berührenden Folgerungen aus den Entdeckungen von Lorentz und Einstein hat dann H. Minkowski[1]) ge-

1) In schwierigen mathematischen Deduktionen, Gött. Nachr. 1908, H. 1; in freierer Fassung in einem auf der Kölner Naturforscher-Versammlung 1908 gehaltenen Vortrag über „Raum und Zeit" (Jahresber. d. Math.-Ver. Bd. 18, sep. bei Teubner 1909). Vgl. auch Hilberts Nachruf auf den mitten in der Ausführung seiner weittragenden Idee Verstorbenen, Gött. Nachr. 1909, H. 1.

zogen. Es ist seine These, daß jene von Lorentz zuerst in ihrer Bedeutsamkeit für die elektrodynamischen Gleichungen erkannte gleichzeitige Änderung der Raumkoordinaten und des Zeitparameters notwendig auf die ganze Physik, die Mechanik eingeschlossen, sich übertragen müsse, indem sie — nach der Formulierung Hilberts — eine „schon in den Begriffen des Raumes und der Zeit selbst enthaltene, diese beiden Begriffe gegenseitig verkettende und miteinander verschmelzende Eigenschaft" darstelle. „Von Stund an" — so drückt Minkowski selbst im Eingang seines oben genannten Vortrags sich aus — „sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewahren". „Gegenstand unserer Wahrnehmung", heißt es weiterhin, „sind immer nur Orte und Zeiten verbunden. Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Orte."

Hierzu ist sogleich eine Anmerkung zu machen. Die Zeit und der Raum „selbst" sind, wie wir oben schon mit Kant zu betonen hatten, überhaupt nicht „Gegenstände der Wahrnehmung". Von Wahrnehmung abhängig ist dagegen jede empirische Zeit- und Raummessung. Also kann es sich um die letztere hier überhaupt nur handeln; also nicht um die „Begriffe" des Raumes und der Zeit selbst, wie es erst lautete. Die reinen, „absoluten" Begriffe der Zeit und des Raumes sind überhaupt die Voraussetzungen jeder empirischen Zeit- und Raumbestimmung, also durch diese selbst auf keine Weise abänderlich. Sie stellen eben deshalb, mit allen auf sie bloß als solche bezüglichen Gesetzen auch der reinen Mechanik, nicht empirische Wirklichkeiten (weder Dinge noch Vorgänge) dar, sondern reine Abstraktionen von bloß mathematischer, nicht physikalischer Geltung. Der Sache nach wird dies ohne Zweifel auch von Einstein und Minkowski vorausgesetzt; aber da dieser Verhalt, bei

Minkowski namentlich, nicht ausgesprochen, sondern von Zeit und Raum von vornherein nur im empirischen Sinne geredet wird, so kann der irreleitende Schein entstehen, als sollten die rein mathematischen Begriffe der Zeit und des Raumes und mit ihnen die Abstraktionen der reinen Mechanik überhaupt um ihr Recht gebracht und nur ein empirischer Begriff der Zeit und des Raumes anerkannt werden, der dann aber (wie Minkowski eben zeigt) überhaupt nicht mehr einer, sondern unendlicher Variation unterworfen wäre. Dem mathematischen Physiker bedeuten eben Zeit und Raum nur das Bezugssystem für seine Gleichungen. Dieses ist allerdings, als auf bestimmte empirische Aufgaben bezogen, auch an sich wandelbar, durch die „Erscheinungen" (welcher Begriff hier geradezu im Kantischen Sinne verstanden werden dürfte) niemals „eindeutig festgelegt" oder „gegeben" (Minkowski S. 7). Es ist daher für den erkenntniskritisch geschulten Leser ein durchaus nicht unerwartetes Ergebnis, daß wir (wie Minkowski S. 9 sagt) in der Welt (nämlich der Physik) überhaupt nicht mehr „den" Raum, sondern unendlich viele Räume haben (und entsprechend nicht „die" Zeit, sondern unendlich viele); „analog" (setzt Minkowski hinzu) „wie es im dreidimensionalen Raum unendlich viele Ebenen gibt". Aber wenn es dann weiter heißt: „Die dreidimensionale Geometrie wird ein Kapitel der vierdimensionalen Physik", so wird damit der Unterschied von Mathematik und Physik verwischt, der geometrische Raum selbst in einer nicht zulässigen Weise zu einem Objekt der Physik gemacht. Es ist das übrigens wohl nur als eine bequeme Kürze des Ausdrucks zu deuten; gemeint ist ohne Zweifel nicht die dreidimensionale Geometrie (die allenfalls ein Kapitel einer vierdimensionalen Geometrie, aber nicht einer vierdimensionalen Physik genannt werden könnte), sondern die Gesetze physikalischer Bestimmung im dreidimensionalen Raum. Die Zeit als vierte Dimension zu den dreien des (physikalischen) Raumes zu bezeichnen ist übrigens nicht anstößig, sondern entspricht ganz dem erweiterten Dimensionsbegriff, wie er seit Descartes bekannt und geläufig ist, wonach eine Dimension mehr einfach einen Parameter mehr bedeutet. Gleichartig wird damit aber der Zeitparameter den Raumkoordinaten nicht; seine Beziehung zu jeder der letzteren bleibt grundverschieden von der Beziehung dieser unter sich; die „Union", von der Minkowski spricht, liegt nur darin, daß alle vier Parameter miteinander und in bestimmter Abhängigkeit voneinander der gleichen Relativierung verfallen.

Richtig dagegen und sehr wichtig ist, daß die Gesetze der abstrakten, auf die absolute mathematische Zeit und den absoluten mathematischen Raum bezogenen Mechanik nicht schon physikalische Gesetze sind. Je strenger sich die Mechanik als „reine" Wissenschaft gleich der Mathematik und in sozusagen stetigem Zusammenhang mit dieser konstituiert, um so weniger darf sie eine andere Geltung als die einer Abstraktion völlig auf gleicher Linie mit denen der reinen Mathematik beanspruchen. Physik, also auch Mechanik, sofern sie physikalische Geltung haben soll, ist als solche eine empirische Wissenschaft; sie kann nur mit einem Bezugssystem arbeiten, welches statt der idealen absoluten Eindeutigkeit der Zeit- und Ortsbestimmungen die höchste unter den gegebenen Bedingungen erreichbare empirische Eindeutigkeit zuwege bringt. Empirische Wissenschaft kann nur mit empirischem Maße messen; sie wird aber als Grundlage ihrer Messungen das größte erreichbare empirische Maß benutzen. Dieses ist für den gegebenen Stand der physikalischen Empirie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Raum. Indem also diese als letzte Konstante allen physikalischen Zeit- und Raummessungen zugrunde gelegt, und zugleich beachtet wird, daß (wie aus der vorgeführten Betrachtung von Einstein sehr klar wird) empirische Zeit- und Raummessung gänzlich aneinander und an diese gleiche letzte Voraussetzung der Lichtgeschwindigkeit gebunden sind, erhält das Zeit-Raum-System der Physik mit Notwendigkeit jene vierdimensionale und freibewegliche („nichteuklidische") Gestalt, die bei Minkowski sich ergibt; und die Zeit drückt sich hierbei in der Tat mathematisch ganz analog einer vierten Dimension zu den drei Dimensionen des Raumes aus.

§ 12. (*Kritische Beleuchtung des Relativitätsprinzips und Bestätigung des Idealismus.*) Blicken wir von diesem Ergebnis nun noch einmal zurück auf unsere früheren, von Newton und Kant ausgehenden, rein logischen Aufstellungen über Zeit und Raum, so erkennen wir in dem Minkowskischen Relativitätsprinzip nur die konsequente Durchführung des bereits von Newton aufgestellten, von Kant festgehaltenen und schärfer gefaßten Unterschieds der reinen, absoluten, mathematischen von der empirischen, physikalischen Zeit- und Raumbestimmung, welche letztere durchaus nur relativ sein kann. Ohne Grund hat man jene Unterscheidung selbst von den neuen Anschauungen aus anfechten zu müssen geglaubt; sie wird im Gegenteil gerade durch sie dem Prinzip nach unwidersprechlich bestätigt, allerdings zugleich in der Durchführung noch weiter verschärft und strenger ausgestaltet.

Die Mechanik Newtons, wie sie überwiegend von den Nachfolgenden verstanden worden ist, (vielleicht nicht seiner eigenen Auffassung nach) stellt, von dem neuen Standpunkt aus betrachtet, eigentlich einen Versuch dar, den ideellen absoluten Bestimmungen doch noch eine unmittelbar physikalische Bedeutung zu retten, während sie ihrer Natur nach nur eine abstrakte Bedeutung beanspruchen können und in jeder empirischen Anwendung bestimmte Modifikationen erfahren müssen. Diese erforderliche Modifikation drückt sich bei Minkowski aus als Ersatz der „Gruppe G_∞" durch die „Gruppe G_c", was der Sache nach besagt, daß an Stelle der abstrakten, auf die absolute mathematische Zeit und den absoluten mathematischen Raum bezüglichen Bestimmungen solche treten müssen, die auf die Größe c (die Lichtgeschwindigkeit im freien Raum) als empirisch letzterreichbares eindeutiges Maß sich zurückbeziehen. Es erhalten dann die Newtonschen Bewegungsgleichungen und das Energieprinzip eine abgeänderte Fassung, die auf die Newtonsche Form sich aber sofort wieder zurückführt, wenn man statt c ∞ setzt.

Es ist eine fernere schöne Bestätigung, daß bei derselben Umformung eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, gleich der Lichtgeschwindigkeit, sich ergibt. Auch hier erhält man, sobald man statt c ∞ setzt, die Newtonsche Voraussetzung wieder, wonach die Gravitation (wie es noch Descartes auch für das Licht annahm) sich mit „unendlicher Geschwindigkeit" fortpflanzt, d. h. sich überhaupt zeitlos überträgt; eine Voraussetzung, in der längst das Anstößige, das jedem noch so versteckten Absolutismus in der Physik anhaftet, empfunden werden mußte und auch mehr oder weniger immer empfunden worden ist. Denn nicht eigentlich in der räumlichen Ferne zwischen dem wirkenden Körper und dem, an welchem die Wirkung erscheint, sondern in der Zeitlosigkeit der Wirkung liegt das Anstößige der sogenannten Fernwirkung. Die größere Nähe bleibt doch immer noch Entfernung; es wirkt also nach wie vor der Körper, „wo er nicht ist"; wo anders sollte er auch wirken, wenn doch die Wirkung sich über ihn hinaus erstrecken soll? Dagegen ist die absolute, zeitlose Allgegenwart der Wirkung im unendlichen Raum freilich eine Annahme, welche die Bedingungen der Empirie schlechthin überspringt. Das ist der geheime Absolutismus der Newtonschen Physik, welcher ihr Ausklingen in eine hoch naive, ganz vorsokratisch anmutende, etwa Xenophanëische Theologie immerhin begreiflicher erscheinen läßt.

Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß das über das Relativitätsprinzip hier Gesagte für nicht mehr als einen noch ungewissen letzten Ausblick angesehen sein will. Handelt es sich doch um eine noch neue, zugleich mathematisch schwierige und in alle Gebiete der Physik eingreifende, geradezu alle ihre bisherigen fundamentalsten Voraussetzungen mehr oder minder tief berührende Theorie. Verhält es sich aber in der Hauptsache so, wie hier dargelegt worden ist, so ist zu sagen, daß der logische Ertrag dieser Theorie an sich zwar nicht gering, für unsere früheren Aufstellungen aber keineswegs störend oder auch nur unerwartet, sondern nur in hohem Grade bestätigend ist. Allerdings nicht eine „prästabilierte Harmonie zwischen der reinen Mathematik und der Physik" (nach dem letzten Satze des Minkowskischen Vortrags) wird dadurch erwiesen. Die reine Mathematik steht mit der physikalischen Empirie nicht in einer solchen Beziehung, die einen direkten Einklang zwischen beiden auch nur möglich machen würde. Einen solchen erzwingen zu wollen, war vielmehr gerade der Fehler Newtons oder der auf ihm fußenden Physik, der durch das Relativitätsprinzip endgültig berichtigt ist. Die Mathematik der Naturwissenschaft freilich, d. h. die Voraussetzungen, welche die reine Mathematik auf die Physik in einem gegebenen Stadium ihrer Entwicklung anwendbar machen, muß in genauem Einklang stehen mit den Grundvoraussetzungen dieser Physik; welche Harmonie indessen durch keine andere Instanz stabiliert ist oder je stabiliert werden könnte als — die mathematische Naturwissenschaft selbst.

Vor allem muß man sich hüten, je empirische Bestimmungen für absolut unabänderlich anzusehen. Minkowski unterläßt nicht zu bemerken, die Voraussetzung, daß für alle Geschwindigkeiten in der Natur die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze bilde, habe „beim ersten Eindruck etwas Mißfälliges". Es wird sich in der Tat mit dieser oberen Grenze nicht anders verhalten als mit allen anderen oberen und unteren Grenzen, auf welche die empirische Natur-forschung jemals geführt hat oder noch führen wird. Unentrinnbar stößt man hier wie in der Frage der zeitlichen und räumlichen Ausdehnung des Universums und in der Frage des letzten Einfachen auf die alten „Antinomien"; oder in anderer Wendung: auf die „transzendentale Idealität der Zeit und des Raumes". Eine absolute Bestimmung des Gegenstandes würde ein absolut letztes Bezugsglied fordern; empirisch aber kann nichts anderes verlangt werden als: an solche Bestimmungen als letzte sich zu halten, über die hinaus die Voraussetzungen weiterer Bestimmung eben empirisch nicht gegeben sind; stets mit dem Vorbehalt, diese Bestimmungen zu korrigieren, sobald die Voraussetzungen dazu vorliegen. Niemals aber darf ein solches empirisch Letztes für ein absolut Letztes ausgegeben werden. Daß jede empirische Zeit- und Ortsbestimmung an bestimmte Bedingungen geknüpft und auf solche eingeschränkt sein muß, ist aus allgemeinen Gründen leicht einzusehen. Daß bei dem heute gegebenen Stande der Empirie alle empirische Zeit- und Ortsbestimmung an eine bestimmte empirische Voraussetzung, nämlich die der Gleichförmigkeit der Lichtgeschwindigkeit, als vorläufig unüberschreitbar letzte gebunden ist, ergibt eine erwünschte Präzisierung dieser allgemeinen Ansicht auf den gegenwärtigen Stand der Forschung. Aber es kostet uns theoretisch gar nichts, diese Schranke in Gedanken aufgehoben zu setzen; uns zu denken, daß eine Überlichtgeschwindigkeit sich auf irgendeinem vielleicht sehr indirekten Wege unserer Kenntnis erschließen werde[1]); so wäre damit diese einstweilige Schranke dann niedergelegt, aber freilich die Beschränkung überhaupt, die eben aller empirischen Forschung notwendig anhaftet, nicht aufgehoben. Die Schranke wäre nur um eine Stufe weiter zurückgeschoben; die Unmöglichkeit absoluter Bestimmungen bliebe nach wie vor bestehen, nur das empirisch letzte Bezugsglied wäre ein anderes geworden.

1) Vgl. Poincaré [*148*], S. 140ff. bes. 143.

Gerade Kants Grundauffassung (wie sie oben, § 1, dargelegt worden ist) wird durch die neue Theorie auffallend bestätigt. Kant hatte (s. o. S. 332) betont, daß die Zeit keines einzigen Naturereignisses je anders als nach empirischen Gesetzen der Natur, also auch nur in den Grenzen der stets bloß empirischen Gültigkeit dieser Gesetze, bestimmbar sei: weil die Zeit selbst — und vom Raum gilt dasselbe — kein Gegenstand der Wahrnehmung ist, also die Zeitstellen der Ereignisse nicht durch ihr Verhältnis zu einer etwa gegebenen absoluten Zeit bestimmt sein, sondern nur die Erscheinungen selbst sich ihre Stellen in der Zeit gegenseitig bestimmen können, indem ihre gesetzliche Ordnung sie erst bestimmbar macht. Gerade das, was, wie es scheint, für die Entdecker des Relativitätsprinzips selbst das am meisten Überraschende war: diese gänzliche Relativierung der Zeitbestimmung, ist somit nur die Bestätigung eines der fundamentalsten Sätze Kants, und für den, der dessen Thesen durchdacht hat, genau nur das, was man erwarten mußte.

Übrigens verliert das Grundgesetz der eindeutigen Bestimmung damit nichts von seiner logischen Geltung; nur die Möglichkeit seiner empirischen Erfüllung wird in bestimmter Weise eingeschränkt. Die Freiheit der Wahl des Zeitparameters wie der Raumkoordinaten ist für die Einheit des Naturerkennens schon darum nicht bedrohlich, weil sie die Eindeutigkeit der Naturgesetze überhaupt nicht berührt. Gerade dies ist vielleicht das wichtigste Ergebnis der Minkowskischen Untersuchung: die „Invarianz" der Naturgesetze gegenüber allen „Lorentz-Transformationen"; welche, als sehr bedeutsame Erweiterung, an die Stelle der alten Annahme der Invarianz der Newtonschen Mechanik für eine translatorische oder zirkuläre Bewegung der Weltkoordinaten tritt. Eine weitergehende Eindeutigkeit der empirischen Zeit- und Raumbestimmung, als die für die Aufstellung von Naturgesetzen zureicht, ist ja nicht erforderlich. Die Freiheit in der Wahl des Bezugssystems ist, wie auch die Vertreter des Relativitätsprinzips zu bemerken nicht unterlassen haben, ganz analog der Abwandlung der Euklidischen Bestimmungen des Raumes oder der Benutzung mehr-als-dreidimensionaler Beziehungen in der Behandlung spezieller Probleme nicht bloß der reinen Mathematik, sondern auch der mathematischen Physik. Es wird dadurch — um auch das nicht unausgesprochen zu lassen — die nichteuklidische und die mehr-als-dreidimensionale Geometrie, wie auch eine analoge Behandlung des Zeitbegriffs, nur genau in dem Sinne bestätigt, in dem auch wir sie anerkannt haben, nämlich als wertvolle Hilfe bei der Bearbeitung besonderer Probleme; nicht aber als neue Einsicht in die logische Bedeutung und den logischen Grund der rein mathematischen Bestimmungen des Zeit- und Raumbegriffs; geschweige als deren Abdankung.

Register.

Das Buch verdient als Quelle der vielen landläufigen Argumente für das kopernikanische System, als farbenprächtiges Gemälde des Ringens mittelalterlicher mit neuzeitlicher Weltanschauung, als Ausgangspunkt für eine Menge physikalischer Untersuchungen der Folgezeit die höchste Beachtung. Die Darstellung ist so klar, daß die meisten Partien einem Primaner völlig verständlich sind und für ihn eine belehrende und anregende Lektüre bilden würden, wie andererseits der Kulturhistoriker in keiner Geschichte der Philosophie eine anschaulichere Schilderung vom Stande der damaligen Naturphilosophie finden kann. — Eine Einleitung, die unter anderem eine biographische Skizze Galileis enthält, und eingehende historische und sachliche Anmerkungen werden das Verständnis und die Würdigung des Werkes erleichtern und mancherlei irrige Ansichten des Verfassers berichtigen; auch Irrtümer, wenn als solche erkannt, und namentlich Irrtümer eines Mannes wie Galilei sind belehrend und verschaffen Einblick in die Geschichte der Wissenschaft.

Nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Von G. W. Leibniz. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal. Mit 200 Figuren im Text. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. Geh. ℳ 10.—

Das Buch bringt zum ersten Male die nachgelassenen Schriften von Leibniz physikalischen, mechanischen, technischen Inhalts. Es sind teils Notizen, die Leibniz zur Unterstützung seines Gedächtnisses auf einzelne Blättchen machte, teils mehr oder weniger ausgeführte Abhandlungen. Briefe des nämlichen Inhalts, die noch in reicher Zahl vorhanden, sind nicht aufgenommen. Der Herausgeber hat Anmerkungen hinzugefügt, die die Zeit der Abfassung der verschiedenen Notizen zu bestimmen suchen und im übrigen die zum Verständnis der Schriften nötigen Erklärungen beibringen und auf ihre Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft aufmerksam machen.

Raum und Zeit. Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforscher-Versammlung zu Köln am 21. September 1908 von H. Minkowski, weil. Professor an der Universität Göttingen. Mit dem Bildnis Hermann Minkowskis sowie einem Vorwort von A. Gutzmer. [14 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ —.80.

Grenzen in der Natur und in der Wahrnehmung vom Standpunkte der Elektronentheorie und des elektromagnetischen Weltbildes. Von Dr. Erich Marx, Professor an der Universität Leipzig. [31 S.] 8. 1907. Steif geh. ℳ 1.—

Während man noch vor etwa einem Dezennium in der Physik die Einheitlichkeit der Beschreibung der Naturvorgänge dadurch erstrebte, daß man die elektrischen und magnetischen Kräfte mit Hilfe „verborgener Bewegungen" auf die Mechanik zurückzuführen versuchte, zieht man jetzt in der Physik den umgekehrten Weg vor und deutet die mechanischen Gleichungen elektromagnetisch. Die Möglichkeit dieser Deutung ist durch die Elektronentheorie entstanden; nach ihr gibt es in der Natur nur elektrische und magnetische Kräfte und elektrische Ladungen.

Über das Wesen der Mathematik. Von Dr. A. Voß, Professor an der Universität München. [98 S.] gr. 8. 1908. Geh. ℳ 3.60.

„Die Schrift bietet nicht nur dem Mathematiker eine Fülle des Interessanten und Anregenden, sondern kommt auch einem wirklichen Bedürfnis entgegen, insofern, als in der Tat wenig Gebildete einen Begriff von dem eigentlichen Wesen der Mathematik haben." (Königsberger Hartungsche Zeitung.)

P. NATORP

DIE LOGISCHEN GRUNDLAGEN DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

WISSEN-
SCHAFT
UND